Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen 5. O.

Von

A. Clebsch.

Der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften überreicht am 8. Januar 1870.

Die Abbildung algebraischer Flächen auf einer *einfachen* Ebene ist selbst dann wenn sie möglich ist oft schwer auszuführen, indem es sich dabei gewöhnlich um den Nachweis gewisser auf der Fläche liegender Gebilde handelt, welche von verwickelten algebraischen Gleichungen abhängen. Dagegen ist es immer sofort möglich, diese Fläche auf einer *mehrblättrigen* Ebene abzubilden, z. B. durch einfache Projection von einem Punkte aus; und dieses Hülfsmittel, so einfach es ist, erleichtert unter Umständen auch die Vorbetrachtung für die eindeutige Abbildung auf einer einfachen Ebene sehr wesentlich. Ich werde im Folgenden einen Fall dieser Art behandeln. Bei den Abbildungen der Flächen 5. O. mit zwei sich nicht schneidenden Doppelgraden oder mit einer Doppelcurve 3. Grades, welche ich im 1. Bd. der Math. Annalen behandelt habe, stellten sich der Abbildung keine besondern Schwierigkeiten entgegen. Aber bei den Flächen 5. O. mit einer Doppelcurve 4. Grades, ist zur Herstellung der einfachsten Abbildung auf der Ebene der Nachweis der Existenz gewisser Kegelschnitte nöthig, welcher mir lange Zeit nicht gelingen wollte. Es wird sich unten zeigen, dass dieser Nachweis leicht geführt werden kann, wenn man die Fläche zunächst auf einer zweiblättrigen Fläche abbildet, und dass sich hierbei zugleich der Character des entsprechenden algebraischen Problems—Zweitheilung der hyperelliptischen Functionen für $p = 3$ — aufs Einfachste ergiebt.

§. 1. Bemerkungen über Abbildung von Flächen auf einer mehrblättrigen Ebene.

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten eines Puncts im Raum, λ, μ, ν die eines Punkts einer Ebene, so erhält man die Abbildung einer algebraischen Fläche auf einer mehrblättrigen Ebene, indem man die x proportional mit ganzen rationalen Functionen von $\lambda, \mu, \nu, \omega$ setzt, während ω als Function von λ, μ, ν durch eine Gleichung mit rationalen Coefficienten bestimmt ist. Ist diese Gleichung vom Grade r für ω, so entsprechen einem Werthsystem λ, μ, ν im Allgemeinen r verschiedene Puncte der Fläche, und um dieselbe zu trennen, kann man sich die Ebene aus r Blättern bestehend denken, in deren jedem dann das Bild *einer* der r Puncte sich befindet.

Um eine einfache Vorstellung dieser Verhältnisse zu gewinnen denke man sich die Abbildung einer Fläche r^{ter} O. etwa dadurch erzeugt, dass man von einem beliebigen Puncte des Raums Strahlen zieht. Jeder Strahl trifft die Fläche in r Puncten; sie werden durch r unendlich nahe übereinanderliegende Puncte abgebildet, deren Ort der Durchschnitt des Strahls mit der Bildebene ist. Auf diese Weise ist die gegebene Fläche eindeutig abgebildet auf einer r-blättrigen Ebene.

Die r Blätter können in diesem Falle auf doppelte Weise mit einander verbunden sein. Erstens hängen sie längs derjenigen Curven zusammen, in welcher die Bildebene durch den von dem gegeben Puncte ausgehenden Tangentenkegel der Fläche getroffen wird. Jeder Strahl desselben enthält zwei unendlich nahe Puncte; in jedem Puncte dieser Curve hängen also zwei Blätter der Ebene mit einander zusammen, und man kann in Puncten dieser Curve von einem Blatt der Ebene in das andere gelangen; die Curve mag daher die *Uebergangscurve* heissen. Anders ist es mit der zweiten Verbindung der Blätter. Wenn die gegebene Fläche eine Doppelcurve besitzt, so schneidet auch jeder nach dieser hin gezogene Projectionsstrahl in zwei zusammenfallenden Puncten, und wenn man also die Doppelcurve projicirt, so erhält man eine ebene

Curve längs deren immer zwei Blätter der Ebene sich durchdringen. Aber an diesen Stellen kann man im Allgemeinen nicht continuirlich aus dem einen Blatt in das andere gelangen.

Wie aber eine Abbildung auf der mehrblättrigen Ebene entstanden sein mag, immer vermittelt sie die Vergleichung der auf der Fläche gelegenen Raumcurven mit ebenen Curven. Denken wir uns in der Ebene eine Curve

$$1 \ldots \qquad \varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

gezogen, so liegt diese zunächst in allen r Blättern, und entspricht im Allgemeinen *einer* zusammenhängenden Raumcurve. Aber es kann geschehen, dass durch Hinzunahme der Gleichung 1. die Gleichung für ω reductibel werde; und in diesem Falle zerfällt das der Gleichung 1. entsprechende Raumgebilde. Dies tritt insbesondere im Allgemeinen dann ein, wenn die Gleichung $\varphi = 0$ aus der Darstellung des vollständigen Durchschnitts der gegebenen Fläche $f = 0$ mit einer andern Fläche $F = 0$ hervorgegangen ist. Setzt man die Ausdrücke der x durch $\lambda, \mu, \nu, \omega$ in $F = 0$ ein, so erhält man eine Gleichung

$$2 \ldots \qquad \Phi(\lambda, \mu, \nu, \omega) = 0.$$

Die Definitionsgleichung von ω sei

$$3 \ldots \qquad \Omega(\lambda, \mu, \nu, \omega) = 0.$$

Dann entsteht die der Gleichung $\varphi = 0$ entsprechende Gleichung der Abbildungscurve, indem man ω aus 2. 3. eliminirt. Aber dabei führt der Eliminationsprozess auf eine Gleichung niederen Grades für ω, im Allgemeinen auf eine Gleichung 1. Grades; und diese Gleichung

$$\Phi'(\lambda, \mu, \nu, \omega) = 0$$

ist mit Hinzunahme der Eliminationsgleichung

$$4 \ldots \qquad R(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

ein Factor von 3., sodass diese Gleichnng in Bezug auf ω in zwei Factoren zerlegt ist. Jeder dieser Factoren liefert mit 4. ein auf der Fläche liegendes Gebilde; aber nur eines dieser Gebilde entspricht der vollständigen Durchschnittscurve, von welcher wir ausgingen.

Der einfachste Fall, und derjenige, welchen wir im Folgenden allein brauchen werden, ist der einer zweiblättrigen Fläche. In diesem Falle hat die Gleichung 3. die Form

$$5 \ldots \qquad U + 2V\omega + W\omega^2 = 0,$$

wo U, V, W ganze Factoren von λ, μ, ν sind; die Uebergangscurve hat die Gleichung

$$R = V^2 - UW = 0.$$

Die Gleichung 5. kann in diesem Falle nur reduntibel werden, wenn $\sqrt{R}$ einem rationalen Ausdruck gleichgesetzt wird, oder wenn ein rationaler Quotient $\frac{\psi}{\varphi}$ der Gleichung 5. genügt. Ist aber die Gleichung einer ebenen Curve von der Form

$$6 \ldots \qquad U\psi^2 + 2V\varphi\psi + 2V\varphi^2 = 0,$$

so dass

$$7 \ldots \qquad \sqrt{R} = \frac{U\psi + V\varphi}{\varphi} = \frac{M}{N}$$

wird, so stellt die Gleichung 6. zwei verschiedene und völlig getrennte Raumcurven dar, jenachdem in der Gleichung 7. das Vorzeichen von $\sqrt{R}$ gewählt wird. Ein weiteres Zerfallen der Raumgebilde kann dadurch herbeigeführt werden, dass der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung 6. identisch in zwei Factoren zerfällt. Im Folgenden ist, wie man sehen wird, insbesondere der Fall von Wichtigkeit, wo R identisch in der Form $Q^2 - PS$ dargestellt werden kann. In diesem Falle sind $P = 0$, $S = 0$ die Gleichungen von Curven, welche $K = 0$ berühren; in jedem Puncte ihres Verlaufes wird $\sqrt{R}$ rational, $= \pm Q$, und es tritt daher durchaus der oben erwähnte Fall ein.

§. 2. Gleichung der zu behandelnden Flächen 5. O.

Die Flächen, welche im Folgenden behandelt werden sollen, sind von der 5. Ordnung, enthalten eine Doppelcurve 4. Grades und eine endliche Anzahl von Geraden.

Die Doppelcurve 4. Ordnung kann nur erster Species sein. Denn

die Raumcurve 4. O. und 2. Sp. besitzt Sehnen, welche die Curve in drei Puncten treffen; es sind die Erzeugenden der einen Schaar eines Hyperboloids. Diese würden eine Fläche 5. O., welche die Raumcurve zur Doppelcurve hätte, in 6 Puncten schneiden, würden also derselben ganz angehören, und die Fläche löste sich also in ein Hyperboloid und eine Fläche dritter Ordnung auf. Ganz ebenso zeigt man die Unmöglichkeit solcher uneigentlichen Doppelcurven 4. O., welche nicht besondere Fälle der Curve 1. Species sind.

Sei also $F = 0$ die Gleichung einer Fläche 5. Ordnung mit einer Doppelcurve 4. Ordnung und erster Species. Die Gleichungen zweier Flächen zweiter O., welche sich in der Doppelcurve schneiden, seien $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Jede Fläche des Systems $\varphi + \lambda\psi = 0$ schneidet dann die Fläche $F = 0$ in einer Curve zweiter Ordnung; soll die Fläche nicht windschief sein, so muss diese Curve zweiter Ordnung ein Kegelschnitt werden. Die Ebene desselben ist der entsprechenden Fläche zweiter Ordnung zugeordnet; für $\varphi = 0$ sei sie $A = 0$, für $\psi = 0$ $C = 0$. Die Fläche

$$F - C\varphi^2 = 0$$

hat dann mit $\psi = 0$ die doppelt gerechnete Curve vierter Ordnung und den Kegelschnitt $\psi = 0$, $\varphi = 0$ gemein, was zusammen den vollständigen Durchschnitt ausmacht. Bestimmt man also die absoluten Werthe der Constanten in C so, dass jene Fläche mit $\psi = 0$ noch einen weiteren Punct gemein hat, so muss dieselbe ψ als Factor enthalten, also identisch

$$F = C\varphi^2 + N\psi$$

sein. Ganz ebenso erhält man durch geeignete Bestimmung der absoluten Werthe der Constanten von A:

$$F = A\psi^2 + N\varphi.$$

Hier sind M und N Functionen dritter Ordnung; vergleicht man beide Darstellungen von F, so hat man

$$C\varphi^2 + M\psi = A\psi^2 + N\varphi,$$

oder

$$\varphi(N - C\varphi) = \psi(M - A\psi).$$

Man kann also setzen

$$M = A\psi - 2B\varphi$$
$$N = C\varphi - 2B\psi,$$

wo M ein linearer Ausdruck ist, und erhält also endlich für F die Gleichungsform:

$$1 \ldots \qquad F = C\varphi^2 - 2B\varphi\psi + A\psi^2 = 0.$$

Die Fläche $F = 0$ ist also der Ort der Kegelschnitte, welche durch den Schnitt entsprechender Elemente in dem Kegelschnittbüschel

$$\varphi + \lambda\psi = 0,$$

und der Ebenenschaar

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0$$

entstehn. Die Ebenen der Schaar sind die Tangentenebenen des Kegels

$$AC - B^2 = 0,$$

dessen Spitze in dem Puncte der Oberfläche 5. *O. sich befindet, der durch die Gleichungen*

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0$$

gegeben ist.

§. 3. Die Kegelspitze.

Die Kegelspitze ($A = 0,\ B = 0,\ C = 0$) besitzt eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft. Jede von ihr ausgehende Gerade trifft die Fläche noch in 4 Puncten, und die Aufsuchung der letztern hängt von einer Gleichung 4. Grades ab. Aber diese Gleichung 4. Grades ist immer durch quadratische Gleichungen auflösbar. Um dies einzusehen bemerke man nur, dass jeder von der Kegelspitze ausgehende Strahl zwei Tangentenebenen des Kegels angehört, also zwei Kegelschnitte der Schaar in je zwei Puncten trifft, wodurch die verlangte Zerlegung der

biquadratischen Gleichung gegeben ist. Für die Seiten des Kegels fallen jene Tangentenebenen, aber auch die Kegelschnitte zusammen; *der Kegel* $AC - B^2 = 0$ *berührt also die Oberfläche doppelt.* Die Berührungscurve findet man aus den Gleichungen

$$\varphi + \lambda\psi = 0,\ A + \lambda B = 0,\ B + \lambda C = 0.$$

Verbindet man diese mit der Gleichung einer Ebene, und eliminirt die x, so erhält man für λ eine Gleichung 5. Grades. *Die Berührungscurve ist also von der* 5. *Ordnung.*

Die von dem Puncte $A = 0,\ B = 0,\ C = 0$ an die Fläche gelegte Tangentenkegel besteht aus zwei gesonderten Theilen, von denen der obige doppeltberührende Kegel einer ist. Der andere kommt dadurch zu Stande, dass nicht die zu einem Strahl gehörigen beiden Kegelschnitte zusammenfallen, sondern die Puncte, welche der Strahl mit einem derselben gemein hat; er umfasst also die von der Kegelspitze ausgehenden Strahlen, welche Kegelschnitte der Schaar berühren.

Irgendeinen von $A = 0,\ B = 0,\ C = 0$ ausgehenden Strahl können wir als Durchschnitt zweier Tangentenebenen

$$1 \ldots \quad \begin{aligned} A + 2\lambda B + \lambda^2 C &= 0 \\ A + 2\mu B + \mu^2 C &= 0 \end{aligned}$$

des doppelt berührenden Kegels auffassen; die beiden Ebenen sind durch den Strahl, wie dieser durch jene, völlig bestimmt. Da aus 1.

$$2 \ldots \quad A : B : C = \lambda\mu : -\frac{\lambda + \mu}{2} : 1,$$

so verwandelt sich die Gleichung der Oberfläche, welche in Verbindung mit 1. die Schnittpuncte der Strahlen bestimmt, sofort in

$$(\varphi + \lambda\psi)\ (\varphi + \mu\psi) = 0,$$

der oben erwähnten Zerfällung entsprechend. Für die Strahlen des doppeltberührenden Kegels ist

$$3 \ldots \quad \lambda = \mu.$$

Den andern Berührungskegel erhält man aus der Bedingung, dass der durch 1. dargestellte Strahl die Fläche

$$\varphi + \lambda\psi = 0$$

berühre. Man erhält diese Bedingung, indem man die Determinante des Ausdrucks $\varphi + \lambda\psi$ mit den Coefficienten der beiden linearen Functionen 1. rändert; die so entstehende Determinante ist durch $4(\lambda - \mu)^2$ theilbar, und die nach der Division übrigbleibende Gleichung

$$4 \ldots \qquad \Omega = 0$$

enthält dann λ noch bis zur vierten, μ bis zur zweiten Potenz.

Um die Gleichung dieses Kegels zu bestimmen, fügt man die Gleichung einer durch die Spitze gehenden Ebene

$$5 \ldots \qquad \alpha A + 2\beta B + \gamma C = 0$$

hinzu, und zählt die dadurch bestimmten Werthe λ. Mit Hülfe von 2. geht 5. in

$$\alpha\lambda\mu - \beta(\lambda + \mu) + \gamma = 0$$

über, und wenn man hiedurch μ als Function von λ ausdrückt und in 4. einsetzt, so erhält man eine Gleichung 6. Grades. *Der Kegel ist also von der* 6. *Ordnung.*

Es folgt zugleich, *dass die Berührungscurve von der* 7. *ist.* Denn da durch die Kegelspitze ein Kegelschnitt der Schaar geht, so giebt es einen von der Spitze ausgehenden Strahl, welcher in dieser selbst berührt; die Kegelspitze gehört also der Berührungscurve an, und muss, wenn man die Durchschnitte der Ebene 5. mit dieser Curve zählt, hinzugerechnet werden. Dasselbe Resultat wird sich weiter unten auf anderm Wege ergeben.

§. 4. Die Fläche der vierten harmonischen Puncte.

Die Gleichungen:

$$6 \ldots \quad \left\{ \begin{array}{c} A : B : C = \lambda\mu : -\frac{\lambda+\mu}{2} : 1 \\ \varphi + \lambda\psi = 0 \end{array} \right.$$

bestimmen die Durchschnitte eines von der Kegelspitze ausgehenden Strahls λ, μ mit einem Kegelschnitte λ der Schaar. Legt man zunächst der Zahl μ alle möglichen Werthe bei, so erhält man, paarweise, nach einander alle Puncte des Kegelschnitts λ, und wenn man nun auch λ variirt, alle Puncte der Fläche, und zwar, da zwei Kegelschnitte der Schaar einander im Allgemeinen nicht schneiden, im Allgemeinen jeden nur einmal. Die Fläche ist also durch die Gleichungen 6. in eine Reihe von Punctepaaren aufgelöst.

Suchen wir zu jedem dieser Punctepaare und zu der Kegelspitze den vierten harmonischen Punct. Dieser ist dadurch gegeben, dass man den Strahl λ, μ nicht mit der Fläche $\varphi + \lambda\psi = 0$, sondern mit ihrer in Bezug auf die Kegelspitze genommene Polare durchschneidet. Die Gleichung der letztern ist

$$6^a \ldots \quad 0 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_1} & A_1 & B_1 & C_1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_2} & A_2 & B_2 & C_2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_3} & A_3 & B_3 & C_3 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_4} & A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} = \Phi + \lambda\Psi$$

Alle diese vierten harmonischen Puncte werden daher durch die Gleichungen gegeben:

$$7 \ldots \quad \left\{ \begin{array}{c} A : B : C = \lambda\mu : -\frac{\lambda+\mu}{2} : 1 \\ \Phi + \lambda\Psi = 0. \end{array} \right.$$

Sie bilden eine Fläche, von welcher im Allgemeinen jedem Werthsystem λ, μ nur ein Punct entspricht, welche also auf einer Ebene eindeutig abgebildet ist, wenn man λ, μ als Coordinaten eines Punctes in der Bildebene auffasst.

Eliminiren wir aus 7. λ und μ, so erhalten wir die Gleichung

$$8 \ldots \quad C\Phi^2 - 2B\Phi\Psi + A\Psi^2 = 0$$

Sie stellt eine windschiefe Fläche 3. *O. dar, welche zur Doppellinie diejenige Gerade hat, in welcher die Polaren der Kegelspitze in Bezug auf das Flächenbüschel* $\varphi + \lambda\psi = 0$ *sich schneiden, und welche ausserdem durch die Kegelspitze geht.*

Die in 7. enthaltene Abbildung dieser Fläche auf der Ebene ist nicht die einfachste, soll aber doch hier beibehalten werden. Setzt man statt der Gleichungen 7. die folgenden:

$$9 \ldots \quad \begin{array}{l} \varrho A = \lambda\mu, \ \varrho B = -\frac{\lambda+\mu}{2}, \ \varrho C = 1 \\ \varrho\Psi = \lambda, \quad \varrho\Phi = -\lambda x, \end{array}$$

und ist

$$10 \ldots \quad \alpha A + \beta B + \gamma C + q\Phi - p\Psi = 0$$

die zwischen den linearen Ausdrücken A, B, C, Φ, Ψ bestehende lineare Identität, so hat man

$$\alpha\lambda\mu - \beta\frac{\lambda+\mu}{2} + \gamma - x(p+\lambda q) = 0,$$

und indem man den Werth von x hieraus entnimmt, kann man den Gleichungen 9. die Form geben:

$$10\ldots\quad \begin{aligned} \varrho A &= \quad \lambda\mu(p+\lambda q) \\ \varrho B &= -\frac{\lambda+\mu}{2}(p+\lambda q) \quad \varrho\Phi = -\lambda\left\{\alpha\lambda\mu - \beta\frac{\lambda+\mu}{2}+\gamma\right\} \\ \varrho C &= \quad (p+q\lambda) \quad \varrho\Psi = \quad \left\{\alpha\lambda\mu - \beta\frac{\lambda+\mu}{2}+\gamma\right\}, \end{aligned}$$

welche die Abbildung liefert. Die ebenen Schnitte werden, wie man sieht durch Curven abgebildet, welche λ, μ zusammen in der dritten Diemension, aber λ nur quadratisch, μ nur linear enthielten. Macht man die Ausdrüche rechts durch Einführung einer dritten Grösse ν homogen, so haben alle diese Curven 3. O. einen festen einfachen Punct bei $\mu = 0$, $\nu = 0$, einen festen Doppelpunct bei $\lambda = 0$, $\nu = 0$.

Die in 10. 11 auftretenden Coefficienten p, q haben eine sehr einfache Bedeutung. Bezeichnet man durch x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten der Kegelspitze, so dass, identisch für die u,

$$11\ldots\quad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = \begin{vmatrix} u_1 & A_1 & B_1 & C_1 \\ u_2 & A_2 & B_2 & C_2 \\ u_3 & A_3 & B_3 & C_3 \\ u_4 & A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix},$$

so ist aus 10., wenn man darin die x durch die $\varkappa$ ersetzt:

$$p : q = \Phi_1x_1 + \Phi_2x_2 + \Phi_3x_3 + \Phi_4x_4 : \Psi_1x_1 + \Psi_2x_2 + \Psi_3x_3 + \Psi_4x_4.$$

Mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung 6ª von Φ, Ψ verhalten sich also p und q zu einander, wie die Werthe der Functionen φ, ψ, wenn man darin die x durch die $\varkappa$ ersetzt, und können mit diesen Functionswerthen identificirt werden. Alsdann sind α, β, γ durch die Determinanten ausgedrückt:

$$\alpha = (B\,C\,\Phi\,\Psi),\ \beta = (C\,A\,\Phi\,\Psi),\ \gamma = (A\,B\,\Phi\,\Psi)$$

§. 5. Darstellung der Fläche 5. O. durch zwei Parameter.

Um nun die Puncte der Fläche 5. O. zu finden, braucht man zu den Gleichungen

$$A : B : C = \lambda\mu : -\frac{\lambda+\mu}{2} : 1$$

nur eine einzige lineare Gleichung hinzuzufügen, welche die Stelle der quadratischen Gleichung

$$\varphi + \lambda\psi = 0$$

vertritt. Eine solche findet man indem man das Quadrat von $\Phi + \lambda\Psi$ in die Form bringt:

$$13 \ldots \qquad (\Phi+\lambda\Psi)^2 = -[(\varphi+\lambda\psi)(p+\lambda q) - (\Phi+\lambda\Psi)^2]$$

Die rechte Seite, für sich gleich Null gesetzt, stellt den von der Kegelspitze an die Fläche $\varphi+\lambda\psi=0$ gelegten Tangentenkegel dar, und muss sich daher, soweit sie von den x abhängt, als quadratische Function von ABC darstellen; die Coefficienten derselben werden quadratische Functionen von λ. Setzt man darin für A, B, C die ihnen proportionalen Werthe $\lambda\mu, -\frac{\lambda+\mu}{2}, 1$, so muss sich der Ausdruck bis auf einen constanten Factor in Ω verwandeln, dessen Verschwinden, wie oben gezeigt, das Zusammenfallen eines Punctepaars anzeigt, und mit welchem auch die Dimensionen des Ausdrucks in λ, μ und in den Coefficienten von φ, ψ übereinstimmen; man hat daher:

$$14 \ldots \qquad A : B : C : \Phi+\lambda\Psi = \lambda\mu : -\frac{\lambda+\mu}{2} : 1 : \sqrt{c.\Omega}$$

Diese Proportion zeigt, wenn man sich die A, B, C um einen gemeinschaftlichen Factor verändert denkt, dass c auch von A, B, C nicht mehr abhängt, also eine Zahl ist.

Die wirkliche Ueberführung der φ rechten Seite von 13. und damit die Bestimmung von c kann man folgendermassen vornehmen. Sei symbolisch

$$\varphi + \lambda\psi = \chi_x^2 = \chi_x{}^2 \text{ etc.};$$

dann kann man der Gleichung 13. die Form geben:

$$(\Phi + \lambda\Psi)^2 = -\tfrac{1}{2}(\chi_x\chi'_z - \chi'_x\chi_z)^2 = -\tfrac{1}{2}[\chi_x(\chi' ABC) - \chi_x(\chi ABC)]^2$$

$$= -\tfrac{1}{2}[(\chi\chi' BC)A_x + (\chi\chi' CA)B_x + (\chi\chi' AB)C_x]^2.$$

Die Darstellung durch A, B, C ist hiermit schon gegeben. Es ist aber die rechte Seite, wenn man die A, B, C durch die ihnen proportionalen Ausdrücke ersetzt,

$$= -\tfrac{1}{2}[(\chi\chi' BC)\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\chi\chi' CA)(\lambda+\mu) + (\chi\chi' AB)]^2$$

$$\frac{1}{8(\lambda-\mu)^2}(\chi, \chi', A + 2\lambda B + \lambda^2 C, A + 2\mu B + \mu^2 C)^2 = -\Omega.$$

Man hat also in 14. $c = -1$.

Die Gleichungen

$$15\ldots \quad \begin{cases} \varrho A = \lambda\mu \\ \varrho B = -\dfrac{\lambda+\mu}{2} \\ \varrho C = 1 \\ \varrho(\Phi + \lambda\Psi) = \sqrt{-\Omega} \end{cases}$$

lassen die Variabeln x mit Hülfe linearer Gleichungen durch λ und μ ausdrücken. Mit Hülfe dieser Gleichungen entsprechen jedem Puncte einer Ebene, in welcher λ, μ die Coordinaten bedeuten, zwei Puncte der Oberfläche 5. O., welche in dem oben gebrauchten Sinne ein Paar bilden. Die Fläche ist also auf einer zweiblättrigen Ebene so abgebildet, dass diese Ebene, einfach gerechnet, zugleich das Bild der Fläche der vierten harmonischen Puncte ist, und dass der Ort des Bildes eines Punctepaars mit dem Ort des Bildes der entsprechenden vierten harmonischen Puncte vereinigt ist.

Nimmt man wieder die Identität 11. zu Hülfe, so kann man die 4 Gleichungen 15. durch die folgenden 5 ersetzen, in denen nun links λ nicht mehr vorkommt:

$$1 \ldots \quad \begin{cases} \varrho A = \lambda\mu(p+\lambda q) \\ \varrho B = -\frac{\lambda+\mu}{2}(p+\lambda q) \\ \varrho C = (p+\lambda q) \\ \varrho \Phi = -\lambda(\alpha\lambda\mu - \beta\frac{\lambda+\mu}{2} + \gamma) + p\sqrt{-\Omega} \\ \varrho \Psi = (\alpha\lambda\mu - \beta\frac{\lambda+\mu}{2} + \gamma) + q\sqrt{-\Omega}. \end{cases}$$

§. 6. Abbildung auf der zweiblättrigen Ebene. Ebene Schnitte.

Ich habe die Abbildung der Gleichungen 16. in dieser allgemeinen Form gegeben, werde aber der Einfachheit wegen im Folgenden voraussetzen, dass $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ drei Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ eines Coordinatentetraeders seien, während die vierte Ebene $t = 0$ eine beliebige Lage. Die Tangentenebenen des Kegels werden dann durch

$$17 \ldots \quad \begin{aligned} x + 2\lambda y + \lambda^2 z &= 0 \\ x + 2\mu y + \mu^2 z &= 0 \end{aligned}$$

dargestellt, und man hat

$$18 \ldots \quad x : y\,z = \lambda\mu : -\frac{\lambda+\mu}{2} : 1.$$

Setzt man dies in die Gleichung $\varphi + \lambda\psi = 0$ ein, so findet man

$$19 \ldots \quad Uz^2 + 2Vzt + Wt^2 = 0,$$

wo U, V, W Functionen von λ, μ sind; und zwar enthält U die Grössen λ, μ zu den Ordnungen 3, 2, V zu den Ordnungen 2, 1, W zu den Ordnungen 1, 0. Setzt man, wie geschehn soll, φ und ψ als allgemein voraus, so sind auch U, V, W ganz beliebige Functionen solcher Art; denn es ist:

$$20\ldots\begin{cases} U=[\varphi_{11}\lambda^2\mu^2-\varphi_{12}\lambda\mu(\lambda+\mu)+\varphi_{22}\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^2+2\varphi_{13}\lambda\mu-\varphi_{23}(\lambda+\mu)+\varphi_{33}] \\ +\lambda[\psi_{11}\lambda^2\mu^2-\psi_{12}\lambda\mu(\lambda+\mu)+\psi_{22}\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^2+2\psi_{13}\lambda\mu-\psi_{23}(\lambda+\mu)+\psi_{33}] \\ V=(\varphi_{14}\lambda\mu-\varphi_{24}\frac{\lambda+\mu}{2}+\varphi_{34})+\lambda(\psi_{34}\lambda\mu-\psi_{24}\frac{\lambda+\mu}{2}+\psi_{34}) \\ W=\varphi_{44}+\lambda\,\psi_{44}. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass wenn etwa U, V, W als gegeben gedacht werden, die Coefficienten φ, ψ völlig und eindeutig bestimmt sind. Aus W sind sofort φ_{44}, ψ_{44} gegeben; aus V zunächst φ_{24}, φ_{34}, ψ_{14}, ψ_{24}, in zweiter Linie φ_{04}, ψ_{34}; endlich aus U zunächst φ_{22}, φ_{23}, φ_{33}, ψ_{11}, ψ_{12}, ψ_{22}, sodann aus den Coefficienten von $\mu^2\lambda^2$, $\mu^2\lambda$, λ^2, λ mit Hülfe der oben gefundenen auch φ_{11}, φ_{12}, ψ_{23}, ψ_{33}; zuletzt bestimmt man noch φ_{13}, ψ_{13} aus den Coefficienten von $\mu\lambda^2$ und $\mu\lambda$. Die Functionen U, V, W sind also übrigens allgemeiner Natur, und können an Stelle der Functionen φ, ψ als ursprünglich gegeben angesehen werden.

Entnimmt man aus 19.:

$$\frac{t}{z}=-\frac{V-\sqrt{V^2-UW}}{W}$$

so giebt dies im Verein mit 18. für x, y, z, t die folgenden Ausdrücke durch λ, μ:

$$21\ldots\begin{cases} \varrho\, x=\lambda\mu W \\ \varrho\, x=-\frac{\lambda+\mu}{2}W \\ \varrho\, z=W \\ \varrho\, t=-V+\sqrt{V^2-UW}, \end{cases}$$

eine Darstellung der Fläche, welche der Darstellung 16. äquivalent ist.

Es ist hierbei nichts willkürlich, als die Lage der vierten Ebene, $t = 0$. Ersetzt man diese durch eine andre, $t' = 0$, welche nur nicht durch die Kegelspitze gehen darf, so hat man

$$22 \ldots \quad \varrho\, t' = \varrho\,(t + \alpha x + \beta y + \gamma z) = -\, V + W\Gamma + \sqrt{R},$$

wo

$$23 \ldots \quad \Gamma = \alpha\lambda\mu - \beta\frac{\lambda+\mu}{2} + \gamma$$

gesetzt ist und wo R die Formen annimmt:

$$24 \ldots \quad R = V^2 - UW = (V - W\Gamma)^2 - W(U - 2V\Gamma + W\Gamma^2).$$

Die Gleichung 22. reicht aus, um die ganze Abbildung darzustellen, wenn man α, β, γ als allgemeine Coefficienten betrachtet. Denn in diesem Falle repräsentirt $t' = 0$ eine beliebige Ebene, also

$$25 \ldots \quad -V + WT + \sqrt{R} = 0$$

das Bild eines beliebigen der Ebene $t' = 0$ entsprechenden ebenen Schnittes.

Befreit man die Gleichung 25. von der Irrationalität, und benutzt R in der Form 24., so erhält man, mit Absonderung des von α, β, γ unabhängigen Factors W:

$$26 \ldots \quad U - 2\,\Gamma V + \Gamma^2 W = 0.$$

Dieses ist die Gleichung der ebenen Curve, welche als Bild eines ebenen Schnittes zu betrachten ist; aber von den beiden Blättern der Ebene repräsentirt in jedem Puncte nur eines einen Punkt des ebenen Schnittes, insofern das Vorzeichen von $\sqrt{R}$ aus der Gleichung 25. bestimmt ist.

Um auch das Bild eines solchen ebenen Schnitts zu erhalten, welcher durch die Kegelspitze geht, muss man sich die absoluten Werthe der Constanten α, β, γ unendlich gross denken; $t' = 0$ geht dann in $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ über, aus 26. sondert sich W ab, und es bleibt übrig

$$27 \ldots \qquad \Gamma = 0,$$

während 25. keine Vorzeichenbestimmung von $\sqrt{R}$ mehr giebt; es gehören also zwei übereinanderliegende Puncte der Doppelebene immer gleichzeitig dem Bilde an.

§. 7. Die Uebergangscurve.

Schon in §. 1 ist darauf aufmerksam gemacht, dass die Uebergangscurve $R = 0$ für die Abbildung von besonderer Bedeutung ist. Diese Curve ist hier von der Ordnung 6; aber da in ihrer Gleichung

$$27^a \ldots \qquad R = V^2 - UW = 0$$

λ nur bis zur vierten, μ nur bis zur zweiten Potenz vorkommt, so hat sie besondere Eigenschaften. Setzt man $\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}$ für λ, μ und multiplicirt mit der betreffenden Potenz von ν, so erhält man eine Gleichung, in welcher jedes Glied für λ, ν zusammen wenigstens von der vierten, für μ, ν zusammen wenigstens von der zweiten Dimension ist. Die Uebergangscurve hat also einen vierfachen Punct P bei $\lambda = 0$, $\nu = 0$, einen Doppelpunct Q bei $\mu = 0$, $\nu = 0$.

Es ist leicht zu sehen, dass sie eine allgemeine Curve dieser Art ist. Dass die Functionen U, V, W in ihr Art allgemein sind, ist schon oben erwähnt. Aber man kann auch jede Curve, welche in P einen vierfachen, bei Q einen Doppelpunct hat, in die Form 27^a. bringen. Um dies zu zeigen, stelle ich folgende Betrachtung an. Es sei eine Curve der gedachten Art gegeben; ihre Gleichung muss die Form haben

$$28 \ldots \quad L\mu^2 + 2\,L'\mu\nu + L''\nu^2 = 0$$

wo L, L', L'' homogene Functionen 4. O. von λ, ν sind. Schneidet man die Curve durch eine von P ausgehende Gerade (für welche $\frac{\lambda}{\nu}$ constant ist) so findet man die beiden Schnittpuncte, welche die Gerade ausserhalb P mit $R = 0$ gemein hat, durch die Gleichung:

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{L' + \sqrt{L'^2 - LL''}}{L}.$$

Der Ausdruck $LL'' - L'^2$ kann kein volles Quadrat sein, denn jedem quadratischen Factor entspricht ein Doppelpunct der Curve, es gäbe dann also ausser P und Q noch 4 Doppelpuncte, und die Zahl p würde, da P als sechsfacher Doppelpunct gilt, negativ, die Curve müsste zerfallen. Man muss also wenigstens zwei Factoren in $LL'' - L'^2$ haben, welche nur je einmal vorkommen. Jeder derselben entspricht einer von P an der Curve gezogenen Tangente.

Sei nun λ so gewählt, dass $\lambda = 0$ eine solche Tangente wird. Der Ausdruck

$$\nu^4 (L_0\mu^2 + 2\,L_0'\mu\nu + L_0''\nu^2),$$

in welchen die linke Seite der Curvengleichung für $\lambda = 0$ übergeht, muss ein Quadrat

$$\nu^4 (l\mu + l'\nu)^2$$

sein, die Curvengleichung also die Form haben:

$$29 \ldots \quad \nu^4 (l\mu + l'\nu)^2 - \lambda . M = 0,$$

eine Form, welche unter 27ª. als besonderer Fall enthalten ist.

Man kann also in der That jede Curve, welche P zum vierfachen, Q zum Doppelpunct hat, in der Form 27ª. darstellen, und 27ª. giebt also eine ganz allgemeine Curve solcher Art.

Die Uebergangscurve ist das Bild derjenigen Curve, in welcher der *einfach* berührende von der Kegelspitze ausgehende Tangentenkegel die Oberfläche berührt. Um die Ordnung der entsprechenden Raumcurve festzustellen, hat man nun die Gleichung $R = 0$ mit den Gleichungen 21.

$$\varrho x = \lambda\mu W$$
$$\varrho y = -\frac{\lambda+\mu}{2} W$$
$$\varrho z = W$$
$$\varrho t = -V$$

und mit der Gleichung der Abbildung eines ebenen Schnitts (26)

$$U - 2\Gamma V + \Gamma^2 W = 0$$

zu verbinden. Die beiden Gleichungen

$$U - 2\Gamma V + \Gamma^2 W = 0,\ V^2 - UW = 0.$$

führen aber auf

$$U - \Gamma V = 0$$
$$V - \Gamma W = 0,$$

aus denen wiederum die erstern hervorgehen. Von diesen stellt die erste eine Curve 5. O. dar, welche in P einen dreifachen, in Q einen Doppelpunct hat, die andere eine Curve 3. O., welche in P einen Doppelpunct hat und durch Q einfach hindurchgeht. Diese Curven haben also ausserhalb P und Q (welche nicht mitzuzählen sind, da ein Schnitt in ihnen nicht einen Schnitt im Raum bedeutet) noch

$$3.\ 5 - 2.\ 3 - 1.\ 2 = 7$$

Schnittpuncte. Eine Ebene trifft also jene Raumcurve in 7 Puncten, und diese ist von der 7. Ordnung, was mit §. 3 übereinstimmt.

Diese Raumcurve bildet sich durch die Uebergangscurve *eindeutig* ab. Beide haben also das Geschlecht gemein ($p = 3$) und den Umstand,

dass sie *hyperelliptisch* sind, d. h. dass ihre Coordinaten sich mit Hülfe einer Quadratwurzel (hier aus einem Ausdruck vom 8. Grade) darstellen lassen.

§. 8. Die Gerade $W = 0$.

Wenn man die Gleichung 27ª. in der Form 28. anordnet, so giebt

$$29^{a} \ldots \qquad LL'' - L'^{2} = 0$$

eine Gleichung 8. Grades, welche die 8 von P an die Uebergangscurve gezogenen Tangenten liefert. Diese Gleichung aber zerfällt hier immer in den Factor W, und eine Gleichung 7. Grades $S = 0$. Die Gerade $W = 0$ ist in der That eine der von P an die Curve ziehbaren Tangenten, denn W versieht in 27ª. genau dieselbe Stelle, wie λ in 29.

Bei der Uebergangscurve ist also insbesondre eine der von P zu ziehenden Tangenten ausgezeichnet und von vorn herein gegeben. Diese hat für die Abbildung die grösste Wichtigkeit; sie dient zur Unterscheidung der in den verschiedenen Blättern über einander liegenden Gebilde.

Jede von P ausgehende Gerade stellt einen Kegelschnitt der Schaar dar, indem $\frac{\lambda}{\nu}$ für dieselbe constant ist. Auch die Gerade $W = 0$ also stellt einen solchen dar. Um diesen zu bestimmen, bemerke ich zunächst, dass durch Einführung der Grösse ν die Gleichungen 21. in die folgenden übergehen:

$$\begin{aligned} \varrho x &= \lambda\mu W \\ \varrho y &= -\frac{\lambda+\mu}{2}\nu W \\ \varrho z &= \nu^{2} W \\ \varrho t &= -V + \sqrt{V^{2} - WU}, \end{aligned} \qquad 30$$

wo U, V, W aus 20., nur immer mit Ergänzung entsprechendes Potenzen von ν zu entnehmen sind. Für $W = 0$ ist nun hienach, wenn

$\sqrt{V^2} = -V$, offenbar $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, t von Null verschieden. Bei dieser Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{V^2}$ stellt also die Gerade W nur die Kegelspitze dar. Ist dagegen $\sqrt{V^2} = V$, so nehmen alle Ausdrücke 30. rechts die Form Null an, statt dessen kann man den Gleichungen die Form geben:

$$\varrho x = \lambda\mu \qquad \varrho y = -\frac{\lambda+\mu}{2}\nu \qquad \varrho z = \nu^2$$

$$\varrho t = \frac{-V+\sqrt{V^2-UW}}{W} = \frac{\cdots U}{V+\sqrt{V^2-UW}} = -\frac{U}{2V}.$$

Diese Gleichungen, in welchen $\frac{\lambda}{\nu}$ *aus* $W = 0$ *zu entnehmen ist, stellen denjenigen Kegelschnitt der Schaar dar, welcher durch die Kegelspitze hindurch geht.* Denn die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho x &= 2\lambda\mu V \\ \varrho y &= -(\lambda+\mu)\nu V \\ \varrho z &= 2\nu^2 V \\ \varrho t &= -U \end{aligned}$$

enthalten den Parameter μ zur zweiten Potenz, stellen also eine Curve 2. O. dar; dieselbe liegt in der Ebene

$$\nu^2 x + 2\lambda\nu y + \lambda^2 z = 0,$$

ist also der Schaar angehörig; endlich ist mit $V = 0$, was *einen* Werth von $\frac{\mu}{\nu}$ giebt, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, d. h. der Kegelschnitt geht durch die Kegelspitze.

Die Gerade $W = 0$ *in der Doppelebene besteht also aus zwei Geraden* $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, *von welchen immer zwei Puncte in den verschiedenen Blättern über einander liegen, und welche zwei verschiedene Gebilde darstellen. Die Gerade* $W_1 = 0$ *ist das Bild der Kegelspitze, die Gerade* $W_2 = 0$ *das Bild des durch die Kegelspitze gehenden Kegelschnitts der Schaar.*

Erscheint die Kegelspitze so im Bilde in eine Gerade ausgebreitet, so entspricht jedem Puncte der Geraden eine auf der Fläche durch die Kegelspitze gehende Richtung. Der Berührungspunct mit $R = 0$ insbesondere, welchen $W_1 = 0$ und $W_2 = 0$ gemein haben, entspricht der durch die Kegelspitze gehenden Richtung, welche den Kegelschnitt berührt.

Indem man ein für alle Mal die Geraden $W_1 = 0$ und $W_2 = 0$ unterscheidet, kann man nun zugleich in allen andern Fällen, in welchen eine Curve der Bildebene in ihrem doppelten Verlaufe zwei verschiedene Raumgebilde darstellt, diese von einander unterscheiden, indem man das verschiedene Verhalten beider Theile der Abbildung gegen diese beiden Geraden angiebt.

§. 9. Curven der Ebene und ihre Bedeutung im Raum.

Die Curve

$$31 \ldots \qquad f(\lambda, \mu, \nu) = 0.$$

der Bildebene stellt ein einziges Raumgebilde dar, sobald mit Hülfe ihrer Gleichung nicht R in das Quadrat eines rationalen Ausdrucks übergeführt werden kann. In diesem Falle ermittelt man die Ordnung der entsprechenden Raumcurve einfach, indem man die Gleichung 31. mit der Gleichung

$$32 \ldots \qquad U - 2\Gamma V + \Gamma^2 W = 0$$

combinirt. Jedem Schnittpuncte der Curven 31. 32. welcher nicht in P oder Q fällt, entspricht ein Schnittpunkt einer Ebene mit der zu 31. gehörigen Raumcurve; nur einer, weil aus 25. zugleich $\sqrt{R}$ gegeben ist; die Anzahl der beweglichen Schnittpuncte von 31. 32. giebt also die Ordnung der Raumcurve an.

Nun hat die Curve 32., welche von der 5. Ordnung ist, P zum dreifachen, Q zum Doppelpunct; hat also die gegebene Curve $f = 0$ P zum αfachen, Q zum βfachen Punct, und ist f von der m. O., so ist die Ordnung m' der zugehörigen Raumcurve:

$$m' = 5m - 3\alpha - 2\beta.$$

Ganz anders verhält es sich, wenn die Gleichung $f = 0$ die Eigenschaft hat, dass mit ihrer Hülfe $\sqrt{R}$ in einen rationalen Ausdruck $\pm \frac{M}{N}$ verwandelt werden kann. In diesem Falle erhält man aus 30., je nachdem für $\frac{M}{N}$ das eine oder das andere Vorzeichen gewählt wird, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho x &= \lambda\mu WN & \qquad \varrho x &= \lambda\mu WN \\ \varrho y &= -\frac{\lambda+\mu}{2}\nu WN & \qquad \varrho y &= -\frac{\lambda+\mu}{2}\nu WN \\ \varrho z &= \nu^2 WN & \qquad \varrho z &= \nu^2 WN \\ \varrho t &= -VN+M & \qquad \varrho t &= -VN-M. \end{aligned}$$

Dies sind die Gleichungen zweier völlig verschiedener Raumcurven, welche zusammen durch die Curve $f = 0$ abgebildet werden, doch sodass zwei in den beiden Blättern übereinanderliegende Puncte niemals dem Bilde derselben Raumcurve angehören. Daher folgt ferner, dass in solchem Falle immer $f = 0$ die *eindeutige* Abbildung der entsprechenden Raumcurve ist, dass also die Zahl p für $f = 0$ und für die beiden dadurch repräsentirten Raumcurven denselben Werth haben muss. Ich werde jetzt die einfachsten dieser Fälle untersuchen. In denselben ist immer $N = 1$, also identisch

$$R = M^2 - f.F;$$

und zwar hat die Curve 3. O. $M = 0$ in den zu betrachtenden Fällen immer in P einen Doppelpunct, in Q einen einfachen Punct, sodass

von $f.F = 0$ dasselbe gelten muss. Wenn nicht etwa F eine Constante ist, so stehen die beiden Curven $f = 0$ und $F = 0$ in einer gewissen Wechselbeziehung zu einander, beide berühren die Curve $R = 0$, wo sie derselben ausserhalb der vielfachen Puncte begegnen oder schneiden sich auf derselben. Einige hieher gehörige Fälle will ich im Folgenden behandeln.

Unter den angegebenen Verhältnissen ist es leicht, die Ordnungen des zu den beiden Curven $f = 0$ gehörigen Raumcurven zu bestimmen. Sie sind durch durch die Schnittpuncte bestimmt, welche die Curve $f = 0$ in den beiden Blättern mit dem Bilde eines ebenen Schnittes hat, und welche nicht in P oder Q fallen. Die Gleichung des Bildes eines ebenen Schnittes ist nach 25.

$$V - W\Gamma - \sqrt{R} = 0,$$

man hat also hier, jenachdem $\sqrt{R} = M$ oder $\sqrt{R} = -M$ in den Schnittpuncten mit $f = 0$ ist, entweder

$$33\ldots\quad V - W\Gamma - M = 0 \quad \text{oder} \quad V - W\Gamma + M = 0.$$

Beide Gleichungen stellen Curven dritter Ordnung dar, welche P zum Doppelpunct, Q zum einfachen Puncte haben. Jede dieser Curven schneidet also $f = 0$, wenn diese Curve wieder von der Ordnung m ist, und P zum αfachen, Q zum βfachen Punct hat, ausserhalb P, Q noch in $3m - 2\alpha - \beta$ Puncten. Aber hiezu kommt noch, dass in den Schnittpuncten von $f = 0$ mit $W = 0$, wo $R = M^2 = V^2$ ist, auch entweder $V - M$ oder $V + M$ verschwindet, also jedenfalls *eine* der Gleichungen 33. erfüllt ist. Mit andern Worten, unter den Schnittpuncten von $f = 0$ mit 33. sind noch diejenigen fest und daher hier auszuschliessen, welche $f = 0$ mit $W = 0$ gemein hat, $m - \alpha$ an Zahl, aber nur immer in einem Blatte, nämlich da, wo nach §. 8 $W_2 = 0$ ist ($\sqrt{R} = V$), während sie in dem andern Blatte jedesmal überhaupt nicht der Gleichung 25. genügen. Ist nun ϱ die Zahl derjenigen

unter den Schnittpuncten von $f = 0$ mit $W = 0$, für welche $M = V$, σ die Zahl derjenigen für welche $M = -V$, so ist

$$\varrho + \sigma = m - \alpha,$$

und die Ordnungen der zugehörigen Raumcurven sind:

$$34 \ldots \begin{cases} m' = 3m-2\alpha-\beta-\varrho = 2m-\alpha-\beta+\sigma \\ m'' = 3m-2\alpha-\beta-\sigma = 2m-\alpha-\beta+\varrho, \end{cases}$$

Die Zahlen ϱ und σ haben für die Raumcurve eine sehr einfache Bedeutung. Da $W_2 = 0$ das Bild des durch die Kegelspitze gehenden Kegelschnitts der Schaar ist, so geben die Zahlen ϱ, σ an, wie oft jede der betrachteten Raumcurven diesen Kegelschnitt schneidet. Ferner aber trifft das Bild jeder der Raumcurven offenbar $W_1 = 0$ überall da wo $W = 0$ ohne dass $W_2 = 0$; bei der erstern tritt dies σmal, bei der zweiten ϱmal ein. Und da $W_1 = 0$ das Bild der Kegelspitze ist, so sieht man, *dass σ bei der ersten, ϱ bei der zweiten Raumcurve die Anzahl von Zweigen bedeutet, welche durch die Kegelspitze gehen.*

§. 10. Die Linienpaare der Kegelschnittschaar.

Von dem vierfachen Puncte der Curve $R = 0$ lassen sich nach §. 8 acht Tangenten an diese Curve ziehen. Von diesen ist eine, nämlich $W = 0$, gegeben; die 7 andern findet man durch die Gleichung 29ª., wenn man aus derselben den Factor W entfernt. Ist $W' = 0$ die Gleichung einer solchen Tangente, so nimmt nach §. 7 die Gleichung $R = 0$ die Form

$$V'^2 - W'U' = 0$$

an, und $\sqrt{R}$ wird für $W' = 0$ gleich $\pm V'$. Es tritt also der zweite in §. 9 erwähnte Fall ein; die Zahlen m, α, β haben die Werthe 1, 1, 0, also $m - \alpha = 0$, daher auch $\varrho = 0$, $\sigma = 0$, und mithin

$$m' = 1,\ m'' = 1.$$

Die von dem vierfachen Puncte an $R = 0$ *gezogenen 7 Tangenten (ausser* $W = 0$*) stellen also 7 Linienpaare dar, welche auf der Fläche liegen.*

Diese Linienpaare sind besondere Fälle der Kegelschnittschaar, welche durch die von dem vierfachen Punct ausgehenden Geraden abgebildet wird. Für jede solche Linie ist in §. 9 $m = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, also $m' = 2$; da für jede solche Curve $\frac{\lambda}{\nu}$ constant ist, so stellen dieselben die *Kegelschnitte der erzeugenden Schaar* vor (§. 8). Dass unter diesen 7 Linienpaare sind, sieht man direct. Man braucht nur die Bedingung aufzustellen, unter welcher die Fläche $\varphi + \lambda\,\psi = 0$ von der Ebene $A + 2\lambda\ B + \lambda^2\ C = 0$ berührt wird. Dies giebt eine Gleichung 7. Grades, und offenbar ist dieselbe mit der oben erwähnten identisch. Man erhält diese Gleichung direct in der Form, welche entsteht, wenn man die Gleichung der Oberfläche $\varphi + \lambda\,\psi = 0$ in Ebenencoordinaten schreibt, und für die Coordinaten der Ebene dann die der Gleichung $A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0$ einsetzt, nämlich

$$0 =$$

$$\begin{vmatrix}
\varphi_{11}+\lambda\psi_{11} & \varphi_{12}+\lambda\psi_{12} & \varphi_{13}+\lambda\psi_{13} & \varphi_{14}+\lambda\psi_{14} & A_1+2\lambda B_1+\lambda^2 C_1 \\
\varphi_{12}+\lambda\psi_{12} & \varphi_{22}+\lambda\psi_{22} & \varphi_{23}+\lambda\psi_{23} & \varphi_{24}+\lambda\psi_{24} & A_2+2\lambda B_2+\lambda^2 C_2 \\
\varphi_{13}+\lambda\psi_{13} & \varphi_{23}+\lambda\psi_{23} & \varphi_{33}+\lambda\psi_{33} & \varphi_{34}+\lambda\psi_{34} & A_3+2\lambda B_3+\lambda^2 C_3 \\
\varphi_{14}+\lambda\psi_{14} & \varphi_{24}+\lambda\psi_{24} & \varphi_{34}+\lambda\psi_{34} & \varphi_{44}+\lambda\psi_{44} & A_4+2\lambda B_4+\lambda^2 C_4 \\
A_1+2\lambda B_1+\lambda^2 C_1 & A_2+2\lambda B_2+\lambda^2 C_2 & A_3+2\lambda B_3+\lambda^2 C_3 & A_4+2\lambda B_4+\lambda_2 C_4 & 0
\end{vmatrix}$$

Da die zwei Linien eines Paars durch zwei in den beiden Blättern übereinanderliegende Geraden abgebildet werden, so muss der Durchschnittspunct beider durch denjenigen Punct dargestellt werden, in welchem die Gerade die Uebergangscurve berührt. *Die Berührungscurve des einfachen von der Kegelspitze ausgehenden Tangentenkegels geht also durch die Doppelpuncte der 7 Geradenpaare.*

§. 11. Die von $R = 0$ herrührenden hyperelliptischen Integrale.

Die Uebergangscurve $R = 0$ führt auf hyperelliptische Integrale, und auf ein denselben entsprechendes Umkehrproblem. Es seien u_1, u_2, u_3 die einem Puncte von $R = 0$ entprechenden Integrale erster Gattung; ihre untern Grenzen seien so bestimmt, dass, wenn sich die Summe auf die Durchschnittspuncte einer algebraischen Curve mit $R = 0$ erstreckt, immer

$$\Sigma u_1 = 0, \quad \Sigma u_2 = 0, \quad \Sigma u_3 = 0$$

(vgl. Crelles Journal Bd. 63, p.197).

Dem vierfachen Puncte der Curve entsprechen 4 Integralsysteme, die durch α_i, β_i, γ_i, δ_i bezeichnet sein mögen $(i = 1, 2, 3)$, dem Doppelpuncte zwei Systeme, welche durch a_i, b_i bezeichnet seien. Da die beide vielfache Puncte verbindende Gerade die Curve $R = 0$ nicht mehr schneidet, so hat man

$$1 \ldots \quad \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i + a_i + b_i = 0. \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Jede von dem vierfachen Puncte ausgehende Gerade schneidet die Cure in zwei Puncten deren Integralsysteme u_i, u_i' seien. Man hat dann

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i + u_i + u_i' = 0,$$

oder

$$2 \ldots \quad u_i + u_i' = a_i + b_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Insbesondere fallen für die 8 oben erwähnten Tangenten die Integrale u_i mit den Integralen u_i' zusammen. Man hat also für die jenen Berührungspuncten entsprechenden Integrale

$$2u_i = a_i + b_i$$

oder da rechts eine Periode hinzugefügt werden kann:

$$u_i = \frac{P_i + a_i + b_i}{2},$$

wo die P_i gewisse Periodensysteme bedeuten.

§. 12. Berührungskegelschnitte.

Legen wir einen Kegelschnitt durch die beiden vielfachen Puncte von $R = 0$, so trifft er die Curve noch in 6 Puncten, deren Integralsysteme $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$, . . . $v_i^{(6)}$ seien. Man hat dann nach dem Vorigen

$$\sum_{k=1}^{k=6} v_i^{(k)} + \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i + a_i + b_i = 0,$$

oder wegen 1.:

$$\sum_{k=1}^{k=6} v_i^{(k)} = 0.$$

Man kann nun diese Schnittpuncte paarweise zusammenfallen lassen, und erhält dann *Kegelschnitte, welche durch die beiden vielfachen Puncte gehen, und* $R = 0$ *in* 3 *Puncten berühren.* Die Berührungspuncte bestimmen sich durch die Gleichungen

$$2(v_i' + v_i'' + v_i''') = 0$$

oder

$$4 \ldots \qquad v_i' + v_i'' + v_i''' = \frac{Q_i}{2},$$

wo die Q_i beliebige Systeme von Periodicitätsmoduln sind.

Jedem System Q entspricht *ein* System v', v'', v''' und also ein Kegelschnitt; da die Q 6 ganze Zahlen enthalten, welche 0 oder 1 sein können, *so hat man im Ganzen* $2^6 = 64$ *solcher Kegelschnitte.*

Die Gleichung eines solchen Kegelschnitts sei $K = 0$. Durch die Berührungspuncte desselben lege ich eine Curve 3. Ordnung, $L = 0$, welche in dem vierfachen Puncte von $R = 0$ einen Doppelpunct hat, und durch den Doppelpunct von $R = 0$ einfach hindurchgeht. Für sie sind nur 7 lineare Bedingungen hiedurch gegeben; es giebt also ein System solcher Curven mit zwei willkürlichen Parometern; ist eine Curve des Systems $L = 0$, so sind die übrigen von der Form $L + AK = 0$, wo $A = 0$ die Gleichung irgend einer durch den vierfachen Punct gelegten Geraden ist.

Die Curve $R - c\,L^2 = 0$ hat mit $K = 0$ 12 Puncte gemein; den vierfach gerechneten vierfachen Punct und den zweimal gerechneten Doppelpunct von $R = 0$, ausserdem die 3 doppelt zu rechnenden Berührungspuncte von $R = 0$ mit $K = 0$. Bestimmt man also c so, dass der Ausdruck $R - c\,L^2$ noch für einen weitern Punct von $K = 0$ verschwindet, so muss er K als Factor enthalten. Indem man also die absoluten Werthe der Coefficienten von L richtig bestimmt, wird immer identisch

$$R = L^2 - MK.$$

Die Curven $K = 0$ gehören also unter die zweite in §. 9 erwähnte Kategorie; für sie wird $\sqrt{R}$ rational, und die Ordnung der entsprechenden Raumcurven bestimmt sich aus den Gleichungen 34. jenes §. Für $K = 0$ ist also $m = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $m - \alpha = 1$, daher eine der Zahlen ϱ, σ gleich 1, die andere gleich 0, eine der Zahlen m', m'' gleich 2, die andere gleich 3.

Jede Curve $K = 0$ repräsentirt somit einen Kegelschnitt und eine Curve 3. O. im Raum, jenachdem sie die Linie $W = 0$ in demjenigen Blatt wirklich schneidet, in welchem sie einen Kegelschnitt ($W_2 = 0$), oder in demjenigen, in welchem sie die Kegelspitze ($W_1 = 0$) bedeutet.

Es giebt also ausser der oben erwähnten Schaar noch 64 einzelne Kegelschnitte auf der *Oberfläche.* Sie werden durch die Zweitheilung der hyperelliptischen Functionen für $p = 3$ gefunden, welche bekanntlich ausser der Lösung der Gleichung 7. Grades (§. 10) nur Ausziehen von Quadratwurzeln erfordert.

Jede Curve $K = 0$ schneidet jede der von dem 4fachen Puncte ausgehenden Geraden in einem Puncte. Aber von den Puncten des Raumes, welche dieser Punct darstellt, liegt nur einer auf dem entsprechenden Kegelschnitte. Man hat also den Satz: *Jeder der* 64 *einzelnen Kegelschnitte trifft jeden Kegelschnitt der Schaar einmal.*

Zur Ergänzung des Beweises für diesen Satz ist noch folgender hinzuzufügen. Zwei Curven im Raum können sich schneiden, ohne dass dies bei ihren Bildern der Fall ist; wenn nämlich beide durch die Ke-

gelspitze gehen, oder einen Punct der Doppelcurve gemein haben. Ersterer ist hier ausser Frage, da die Kegelschnitte der Schaar nicht sämmtlich durch die Kegelspitze gehen. Aber auch was den Schnitt auf der Doppelcurve angeht, so kann jeder der 64 Kegelschnitte doch nur einzelne Puncte mit der Doppelcurve gemein haben, sich also auch nur mit einzelnen Kegelschnitten der Schaar ausnahmsweise auf der Doppelcurve treffen.

Ich bemerke noch, dass aus der Berührung des Kegelschnitts in der Ebene mit $R = 0$ keineswegs eine Berührung der entsprechenden Raumcurven zu folgern ist. Vielmehr folgt daraus nur, dass die Tangentenebene des Schnittpunkts durch die Kegelspitze geht, was an und für sich klar ist.

§. 13. Synthetische Configuration der Abbildung.

Obgleich durch das Vorliegende für die eindeutige Abbildung auf einer Ebene die wesentliche Grundlage gewonnen ist, so werde ich doch im Folgenden noch einige weitere Untersuchungen über die Abbildung auf der Doppelebene bringen. Es handelt sich zunächst darum, was man in der Doppelebene als gegeben ansehen kann und muss, um daraus die Abbildung einer Fläche 5. O. mit einer Doppelcurve 4. Grades in bestimmter Weise herstellen zu können.

Zunächst ist oben bereits gezeigt, dass $R = 0$ eine allgemeine Curve ihrer Art ist. Denken wir uns also eine solche in beliebiger Weise in der Bildebene gegeben.

Von dem Puncte P müssen wir ferner eine der 8 möglichen Tangenten an die Curve ziehen, und sie zur Linie $W = 0$ wählen, indem wir sie für die beiden Blätter als $W_1 = 0$ und $W_2 = 0$ unterscheiden.

Wollen wir nun aber diejenigen Kegelschnitte angeben, welche durch P und Q gehen und Bilder der durch die Kegelspitze gelegten ebenen Schnitte sind, so müssen wir noch beachten, dass die Gleichung $\Gamma = 0$ eines solchen Kegelschnitts immer für λ, μ symmetrisch ist. Dies Moment kann man in folgender Weise einführen.

Ziehen wir in der Abbildung irgend eine Linie, welche nicht durch P oder Q geht. Durch passende Wahl der Veränderlichen λ, μ können wir noch auf unendlich viele Arten es erreichen, dass

$$\lambda = \mu$$

die Gleichung dieser Linie ist. Denn hierzu ist nur nöthig, dass die dritte Ecke des Coordinatendreiecks auf dieser Linie angenommen wird, und dass man λ und μ mit passenden Zahlenfactoren versieht. Man kann mit Hülfe dieser Linie die Bedingung, dass ein Kegelschnitt die Gleichung

$$\alpha\lambda\mu - \beta\frac{\lambda+\mu}{2}\nu + \gamma\nu^2 = 0$$

habe, auf rein geometrische Elemente zurückführen. Ist nämlich irgend ein Punct A des Kegelschnitts mit den Coordinaten λ, μ, ν ausser P, Q noch gegeben, so muss auch ein zweiter Punct B mit den Coordinaten μ, λ, ν auf demselben liegen, wenn die obige Gleichungsform eintreten soll; es handelt sich nur darum, B zu finden. Zwei solche Puncte A, B stellen dann die beiden Punctepaare dar, in denen ein von der Kegelspitze ausgehender Strahl die Fläche schneidet. Aber die Linie PA, für welche $\frac{\lambda}{\nu}$ den gegebenen Werth hat, schneidet sich mit QB, für welches $\frac{\mu}{\nu}$ denselben Werth hat auf der Geraden $\lambda = \mu$; eben so PB mit QA. Man verbinde also, um Q zu finden, A mit P und Q, und die Schnittpuncte beider mit $\lambda = \mu$ verbinde man mit Q und P; die letztern Geraden schneiden sich dann in B. Diese Construction sagt nichts weiter aus, *als dass die Pole der Linie* $\nu = 0$ *in Bezug auf alle Kegelschnitte* $\Gamma = 0$ *der Linie* $\lambda = \mu$ *angehören.*

Die Linie $\lambda = \mu$ ist nach §. 3 das Bild der Berührungscurve des *doppelt* berührenden Kegels, welcher von der Kegelspitze ausgeht. Indem man diese annimmt, und die soeben gegebene Construction hinzufügt, wird aus der dreifach unendlichen Schaar der durch P und Q gehenden Kegelschnitte die doppelt unendliche Schaar $\Gamma = 0$ herausgehoben.

Durch die Wahl der Linie $\lambda = \mu$ ist die Bedeutung von λ, μ so weit festgelegt, dass höchstens noch λ', μ' mittelst der Gleichungen

$$\lambda = a\lambda' + b\nu, \quad \mu = a\mu' + b\nu$$

an ihrer Stelle eingeführt werden, wobei dann $\lambda = \mu$ in $\lambda' = \mu'$ übergeht.

Es kommt nun darauf an, der Function R die Form $V^2 - WU$ zu geben, wobei die Curve 3. Ordnung $V = 0$ Q zum einfachen, P zum Doppelpunct, die Curve 5. Ordnung $U = 0$ aber Q zum Doppelpuncte, P zum dreifachen Puncte haben soll. Eine solche Darstellung erhält man immer dadurch, dass man eine Curve $V = 0$ der oben beschriebenen Art durch den Berührungspunct von $W = 0$ legt. Eine solche Curve schneidet $R = 0$ noch in 7 weitern Puncten. Bestimmt man aber in dem Ausdrucke $R - cV^2$ die Constante c so, dass dieser Ausdruck noch für irgend einen andern Punct von W verschwindet, so hat die Curve $R - cV^2 = 0$ mit $W = 0$ 7 Puncte gemein, und $R - cV^2$ hat also W als Factor. Lässt man c in V^2 eingehn, so hat man also

$$R = V^2 - WU.$$

Die Curve $U = 0$ berührt R in den erwähnten 7 Puncten, und ist durch ihr Verhalten in P, Q, so wie durch diese 7 Puncte nebst ihren Tangenten (23 Bedingungen) mehr als hinreichend bestimmt.

Die Curve $V = 0$ kann noch in sehr verschiedener Weise gewählt werden. Ist $V_1 = 0$ eine solche Curve, so ist die allgemeinste

$$V = V_1 - WG = 0,$$

wo G ein Ausdruck der Form

$$G = \alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \gamma\mu + \delta\nu^2$$

ist, mit vier willkürlichen Coefficienten. Zugleich wird, wenn U_1 dem V_1 entspricht

$$U = U_1 - 2V_1 G + WG^2.$$

Die Curve V_1 muss noch angenommen werden, um die Abbildung völlig bestimmt zu machen. Hat man diese einmal gewählt, und demnach unter der vierfach unendlichen Schaar der Berührungscurven $U = 0$ eine gewählt, so müssen nach §. 6 die Gleichungen der übrigen Bilder

ebener Schnitte, deren Ebenen nicht durch die Kegelspitze gehen, die Form haben:

$$U = U_1 - 2V_1\Gamma + W\Gamma^2 = 0,$$

wobei Γ von G sich nur durch die Gleichheit der Coefficienten von λ und μ unterscheidet. Aus dem vierfach unendlichen System wird so ein dreifach unendliches zur Abbildung ebener Schnitte herausgenommen. Es frägt sich, wie dieses geometrisch geschieht.

Das System der Kegelschnitte $\Gamma = 0$ wurde schon oben construirt. Die Curven

$$V = V_1 - W\Gamma = 0$$

welche zur Construction der dreifach unendlichen Schaar von Curven $U = 0$ dienen, erhält man offenbar, indem man mit der angenommenen Curve $V_1 = 0$ die Curven jenes Systems schneidet, und die neuen Curven $V = 0$ immer durch ein System solcher Schnittpuncte legt, deren ausserhalb P, Q noch immer 3 existiren. Jede Curve des doppelt unendlichen Systems $\Gamma = 0$ bestimmt hierdurch ein Büschel von Curven $V = 0$. Das dreifach unendliche System der $V = 0$ ist also geometrisch völlig gegeben, und damit auch das dreifach unendliche System der $U = 0$, also das ganze System der Abbildungen ebener Schnitte. In welchem Blatte sie jedesmal als solche gelten, lehrt die Unterscheidung von $W_1 = 0$ und $W_2 = 0$; die Abbildungen ebener Schnitte, welche nicht durch die Kegelspitze gehen, schneiden niemals die Gerade $W_1 = 0$, sondern immer die Gerade $W_2 = 0$.

§. 14. Schnitt von $R = 0$ mit $\lambda = \mu$.

Die Berührungscurven der beiden Tangentenkegel, welche von der Kegelspitze an die Fläche gelegt werden können, werden durch $R = 0$ und $\lambda = \mu$ abgebildet. Die Abbildungscurven haben 6 Schnittpuncte, und diese stellen also diejenigen 6 Puncte dar, in welchen jene Berührungscurven sich schneiden. Es giebt somit 6 Puncte der Fläche, deren Tangentenebene sowohl dem einen wie dem andern jener beiden Kegel angehört. *Diese beiden Kegel berühren sich also in 6 Seiten.* Da

ihre Ordnungen 2 und 6 sind, so bilden diese 6 Berührungsseiten in der That ihren ganzen Durchschnitt.

Dass eine solche Berührung beider Kegel eintritt, folgt auch direct indem man ihre Gleichungen aufstellt. Die Gleichung des einen Kegels ist $xz - y^2 = 0$; die des andern erhält man auf folgende Weise. Nach der Veränderlichen t geordnet mögen die Function φ, ψ die Formen annehmen:

$$\varphi = \varphi_2 + 2t\varphi_1 + t^2\varphi_0$$
$$\psi = \psi_2 + 2t\psi_1 + t^2\psi_0.$$

Die Gleichung der Oberfläche ist also

$$x(\psi_2 + 2t\psi_1 + t^2\psi_0)^2 - 2y(\psi_2 + 2t\psi_1 + t^2\psi_0)(\varphi_2 + 2t\varphi_1 + t\varphi_0) + z(\varphi_2 + 2t\varphi_1 + t^2\varphi_0) = 0.$$

Wenn nun die vom Puncte x, y, z, t nach der Kegelspitze gezogene Gerade die Fläche in zwei zusammenfallenden Puncten schneiden soll, so muss diese Gleichung, noch t aufgelöst, gleiche Wurzeln haben, es muss also sein:

$$(x\psi - y\varphi)(\varphi_2 + t\psi_1) - (y\psi - z\varphi)(\varphi_2 + t\varphi_1) = 0$$
$$(x\psi - y\varphi)(\psi_1 + t\psi_0) - (y\psi - z\varphi)(\varphi_1 + t\varphi_0) = 0.$$

Diese Gleichungen sind auf dreifache Weise zu befriedigen.

1. Wenn $\varphi = 0$, $\psi = 0$, so sind beide identisch erfüllt; dieser Fall giebt den Kegel, welcher die Kegelspitze mit der Doppelcurve verbindet.

2. Wenn $x\psi - y\varphi = 0$, $y\psi - z\varphi = 0$, ohne dass φ und ψ verschwinden; man hat dann $xz - y^2 = 0$, also den doppelt berührenden Kegel.

3. Wird beides ausgeschlossen, so kann man setzen:

$$2\ldots \quad \begin{cases} \psi_2 + t\psi_1 = \varrho(\varphi_2 + t\varphi_1) \\ \psi_1 + t\psi_0 = \varrho(\varphi_1 + t\varphi_0) \\ (x - \varrho y)\psi - (y - \varrho z)\varphi = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man nun die zweite dieser Gleichungen mit t und addirt sie zur ersten, so erhält man

$$\psi = \varrho\varphi,$$

und an Stelle der dritten kann man also setzen:

$$3 \ldots \quad x - 2\varrho y + \varrho^2 z = 0.$$

Eliminirt man noch t aus den ersten beiden Gleichungen 2., so findet sich ferner

$$4 \ldots \quad 0 = \begin{vmatrix} \psi_2 - \varrho\varphi_2 & \psi_1 - \varrho\varphi_1 \\ \psi_1 - \varrho\varphi_1 & \psi_0 - \varrho\varphi_0 \end{vmatrix} = \vartheta - 2\varrho\vartheta' + \varrho^2\vartheta'',$$

wo der Kürze wegen:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \psi_2\psi_0 - \psi_1{}^2 \\ 2\vartheta' &= \psi_2\varphi_0 - 2\psi_1\varphi_1 + \psi_0\varphi_2 \\ \vartheta'' &= \varphi_2\varphi_0 - \varphi_1{}^2 \end{aligned}$$

gesetzt ist. Eliminirt man nun ϱ aus 3. 4., so erhält man die Gleichung des Tangentenkegels, dessen Berührungscurve durch $R = 0$ abgebildet wird:

$$(\vartheta z - \vartheta'' x)^2 - 4(\vartheta y - \vartheta' x)(\vartheta' z - \vartheta'' y) = 0$$

oder auch:

$$(\vartheta z - 2\vartheta' y + \vartheta'' x)^2 - 4(\vartheta\vartheta'' - \vartheta'^2)(xz - y^2) = 0$$

In dieser Form sieht man sofort, dass dieser Kegel 6. Ordnung von dem Kegel 2. Ordnung $xz - y^2 = 0$ überall berührt wird, wo dieselben sich treffen; und zwar sind die Berührungsseiten durch den Schnitt der Kegel 2. und 3. Ordnung

$$xz - y^2 = 0, \quad \vartheta z - 2\vartheta' y + \vartheta'' x = 0$$

gegeben.

§. 15. Abbildung der Doppelcurve.

Die Doppelcurve der Oberfläche ist der Durchschnitt der beiden Flächen 2. Ordnung $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Daher müssen für sie die Ausdrücke verschwinden, in welche φ und ψ sich durch Einführung der

Ausdrücke für x, y, z, t verwandeln. Gehen wir auf die Gleichungen des §. 6 zurück, und setzen der Kürze wegen

$$U = U_1 + \lambda U_2$$
$$V = V_1 + \lambda V_2$$
$$W = W_1 + \lambda W_2,$$

wo nun U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2 symmetrische Functionen von λ, μ sind, so geht durch Einführung der Werthe 18. (§. 6) $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ über in:

$$U_1 z^2 + 2 V_1 zt + W_1 t^2 = 0$$
$$U_2 z^2 + 2 V_2 zt + W_2 t^2 = 0.$$

Die Abbildung der Doppelcurve ergiebt sich aus diesen Gleichungen durch Elimination von $\frac{z}{t}$:

$$(U_1 W_2 - U_2 W_1)^2 = 4 (U_1 V_2 - V_1 U_2)(V_1 W_2 - V_2 W_1).$$

Diese Gleichung ist von der 8. Ordnung, enthält aber λ und μ jedes nur bis zur vierten Potenz. *Die Doppelcurve wird also durch eine Curve 8. Ordnung abgebildet, welche P und Q zu vierfachen Puncten hat.*

Eine weitere Eigenschaft ist die symmetrische Gestalt ihrer Gleichung in Bezug auf λ und μ. Die Curve enthält daher lauter solche Punctepaare wie sie in §. 13 beschrieben sind; und jedes solche Paar stellt einen Punct der Doppelcurve dar. Das letztere ergiebt sich auch auf einfache Weise aus einer andern Betrachtung. Sollen λ, μ, ν und λ', μ', ν' denselben Punct der Doppelcurve darstellen, so müssen die Werthe der x für beide Parametersysteme die gleichen Werthe besitzen, oder (indem wir für das zweite System alles durch Striche unterscheiden) es müssen aus 30. (p. 22) die Gleichungen stattfinden:

$$\lambda\mu W = \lambda'\mu' W'$$
$$(\lambda + \mu)\nu W = (\lambda' + \mu')\nu' W'$$
$$\nu^2 W = \nu'^2 W'$$
$$-V + \sqrt{R} = -V' + \sqrt{R'}.$$

Nun folgt aus den ersten drei Gleichungen

$$\frac{\lambda\mu}{\nu^2} = \frac{\lambda'\mu'}{\nu'^2}, \quad \frac{\lambda+\mu}{\nu} = \frac{\lambda'+\mu'}{\nu'},$$

also entweder

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{\lambda'}{\nu'}, \quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu'}{\nu'},$$

oder

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{\mu'}{\nu'}, \quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{\lambda'}{\nu'}.$$

Das erste ist auszuschliessen, da es die Identität der beiden Puncte des Bildes geben würde; im zweiten Falle, welcher hier allein zutrifft, sind $\frac{\lambda}{\mu}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ nur vertauscht, wie es sein sollte.

Die Puncte eines Paars können sich nur auf der Linie $\lambda = \mu$ vereinigen, wo denn $\lambda = \mu = \lambda' = \mu'$. Die 8 Durchschnittspuncte, welche die Abbildung der Doppelcurve mit der Geraden $\lambda = \mu$ gemein hat, stellen also zusammenfallende Punctepaare dar. Es sind (immer in dem entsprechenden Blatte) die Abbildungen derjenigen 8 Puncte der Doppelcurve, in welchen die beiden Tangentenebenen der Fläche zusammenfalle, welche also in den durch sie gelegten Schnitten Rückkehrpuncte geben. In der That, bemerke man, dass, wenn

$$A\psi^2 - 2B\varphi\psi + C\varphi^2 = 0$$

die Gleichung der Fläche ist, das Paar der Tangentenebenen in einem Puncte x der Doppelcurve durch

$$1 \ldots \quad A(D\psi)^2 - 2BD\varphi D\psi + C(D\varphi)^2 = 0$$

dargestellt wird, wo

$$D\psi = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial\psi}{\partial x_i} X_i$$

$$D\varphi = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} X_i.$$

Damit die Factoren der quadratischen Gleichung 1. zusammenfallen, muss

entweder $D\varphi$ mit $D\psi$ proportional, oder $AC - B^2 = 0$ sein. Ersteres tritt im Allgemeinen für einen Punct der Doppelcurve nie ein; das letztere führt auf die Schnittpuncte, welche die Doppelcurve mit dem Kegel $AC - B^2 = 0$ gemein hat, d. h., im Bilde, auf die Schnittpuncte der Abbildung der Doppelcurve mit der Geraden $\lambda = \mu$.

Um nun die Abbildung der Doppelcurve in der oben geschilderten Configuration der Abbildung (§. 13) rein geometrisch zu definiren, bemerkt man leicht, dass sich von den erwähnten Punctepaaren unendlich viele construiren lassen. Ist nämlich irgend eine Abbildung $U = 0$ eines nicht durch die Kegelspitze gehenden ebenen Schnitts gegeben, so findet man folgendermassen die 4 ihr angehörigen Punctepaare. Nach dem Obigen ist

$$U = U_1 + \lambda U_2,$$

wo U_1 und U_2 für λ, μ symmetrisch sind. Vertauscht man λ mit μ, und bildet also die Curve

$$U' = U_1 + \mu U_2 = 0,$$

so schneidet diese die Vorige erstlich in Puncten der Linie $\lambda = \mu$, ausserdem aber in den Schnittpuncten der Curven

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0.$$

Dieses (vergl. §. 6) sind quadratische Gleichungen für $\lambda + \mu$ und $\lambda\mu$, liefern also in der That 4 Punctepaare, welche sich nur durch Vertauschung von λ mit μ unterscheiden, und welche also die vier Schnittpuncte des ebenen Schnitts mit der Doppelcurve abbilden müssen.

Man braucht also nur neben der betrachteten Abbildung eine zweite zu construiren, welche sich nur durch Vertauschung von λ, μ von derselben unterscheidet; bringt man beide Abbildungen zur Deckung, so schneiden sich die Bilder desselben ebenen Schnitts ausser in der Linie $\lambda = \mu$ noch in solchen 4 Punctepaaren, welche der Abbildung der Doppelcurve zugehören.

Am evidentesten tritt dieses hervor, wenn man die Gerade $\lambda = \mu$ so wählt, dass sie durch die Mitte der Strecke PQ geht und auf dieser Linie senkrecht ist. In diesem Falle ist die eine Abbildung geradezu

das Spiegelbild der andern, und man findet die Schnittpuncte der Abbildung der Doppelcurve mit der Abbildung eines ebenen Schnitts, indem man letztere mit ihrem Spiegelbilde durchschneidet.

§. 16. Geometrische Herstellung einer eindeutigen Abbildung auf einer einfachen Ebene.

Da die Existenz der 64 einzelnen Kegelschnitte oben (§. 12) nachgewiesen ist, so kann man sich derselben bedienen um die Abbildung der Fläche auf einer einfachen Ebene auszuführen. Wählen wir zu diesem Zwecke irgend einen der 64 Kegelschnitte und bezeichnen ihn als den Kegelschnitt C. Derselbe schneidet jeden Kegelschnitt K der Schaar im Allgemeinen nur in *einem* Puncte ξ. Projiciren wir von dem auf K liegenden Puncte ξ die Puncte des Kegelschnitts K auf irgend eine feste Bildebene B, so erhält man das Bild von K durch eine Gerade eindeutig dargestellt. Die Gesammtheit aller K, d. h. die ganze Fläche, bildet sich also durch eine Schaar von Geraden ab, welche nichts sind als die Durchschnitte, welche die Ebenen der Schaar mit der festen Ebene B bilden. Diese Durchschnittslinien aber sind demnach, da die Ebenen der Schaar Tangentenebenen eines Kegels sind, nichts anderes, als die Tangenten des Kegelschnitts C', in welchem der Kegel die Bildebene schneidet. Die ganze Fläche ist also auf den Tangenten dieses Kegelschnitts abgebildet.

Aber wenn auch im Allgemeinen hierbei jedem Puncte der Fläche nur *ein* Punct der Ebene entspricht, so ist doch das Umgekehrte keineswegs der Fall. Denn durch jeden Punct der Ebene gehen zwei Tangenten von C', demnach entsprechen ihm zwei Ebenen der Schaar, demnach auch zwei Puncte ξ in C, und endlich indem man diese mit ihm verbindet, zwei Puncte der Fläche.

Dieses wird vermieden, und die Abbildung zu einer reciprok eindeutigen gemacht, wenn man zur Bildebene B eine Tangentenebene des Kegels wählt. In diesem Falle reducirt sich der Kegelschnitt C'. Durch jeden Punct der Bildebene gehen zwar noch zwei Ebenen der Schaar, aber von diesen ist B selbst die eine, und die andere bleibt also allein

übrig, giebt *einen* Kegelschnitt K, demnach *einen* Punct ξ auf C, und endlich indem man diesen mit dem ersten Puncte verbindet, *einen* Punct der Fläche, denjenigen, in welchem diese Gerade den Kegelschnitt K nochmals schneidet. Die verschiedenen Kegelschnitte der Schaar bilden sich als Gerade ab, welche durch *einen* Punct, die Kegelspitze, hindurch gehen.

§. 17. Das Vorige analytisch.

Legen wir die Ebene einer der 64 Kegelschnitte C als Ebene t in den Formeln des §. 6. zu Grunde. In diesem Falle muss die Gleichung $U = 0$ des entsprechenden ebenen Schnitts zerfallen,

$$U = ML,$$

wo $L = 0$ die Gleichung des durch P und Q gehenden Berührungkegelschnitts ist, und in einem Blatte der Doppelebene das Bild von C liefert, während $M = 0$ eine Curve 3. Ordnung ist, welche P zum Doppelpunct, Q zum einfachen Puncte hat.

Der Kegelschnitt $C\,(L = 0)$ schneidet sich mit einem beliebigen Kegelschnitt K der Schaar in einem Puncte, dessen Coordinaten durch ξ, η, ζ bezeichnet sein mögen. Die vierte Coordinate verschwindet der Annahme nach.

Ist die Gleichung $C = 0$ in der Form

$$\alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \gamma\mu + \delta = 0$$

gegeben, so hat man

$$\mu = -\frac{\beta\lambda + \delta}{\alpha\lambda + \gamma},$$

und indem man dies in 21. (p. 17) einführt, hat man

$$1\ldots\quad \xi : \eta : \zeta = -\lambda(\beta\lambda + \delta) : -\tfrac{1}{2}\left\{\lambda(\alpha\lambda + \gamma) - (\beta\lambda + \delta)\right\} : \alpha\lambda + \gamma,$$

mithin ξ, η, ζ als quadratische Functionen von λ dargestellt. Man kann diese Gleichungen auch als die Gleichungen des Kegelschnitts C betrachten.

Da der Punct ξ, η, ζ, 0 auf K liegt so befriedigt er die Gleichungen

$$2\ldots\quad \varphi + \lambda\psi = 0, \quad x + 2\lambda y + \lambda^2 z = 0.$$

Man soll nun einen Punct x, y, z von K aus dem Puncte ξ, η, ζ auf die Bildebene projiciren. Diese Bildebene kann eine beliebige Tangentebene

des Kegels sein; nehmen wir für dieselbe die Ebene $Z = 0$. Das Bild eines Punctes x, y, z, t habe also die Coordinaten x', y', 0, t', und man hat

$$3 \ldots \qquad \begin{aligned} \varrho x &= x' + \sigma\xi & \varrho z &= \sigma\zeta \\ \varrho y &= y' + \sigma\eta & \varrho t &= t'. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen sind x', y', t' die beizubehaltenden Parameter. Dieselben bedeuten zunächst die Coordinaten eines Punctes der Ebene $Z = 0$ in Bezug auf ein Tetraedersystem im Raum; können aber auch als Coordinaten des Punctes in Bezug auf ein in $Z = 0$ liegendes Coordinatendreieck angesehen werden. Die Grösse σ ist noch zu bestimmen. Setzt man aber die Werthe 3. in 2. ein, so verschwinden die Glieder mit σ^2, da ξ, η, ζ jenen Gleichungen bereits genügt, und es bleibt:

$$4 \ldots \qquad \begin{aligned} 0 &= (\varphi' + \lambda\psi') + 2\sigma(\varphi'' + \lambda\psi'') \\ 0 &= x' + 2\lambda y'. \end{aligned}$$

In der ersten dieser Gleichungen bedeuten φ', ψ' die Functionen φ, ψ, mit den Veränderlichen x', y', $z' = 0$, t' gebildet, φ'', ψ'' aber die Ausdrücke:

$$5 \ldots \qquad \begin{aligned} \varphi'' &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\xi + \frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\eta + \frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\zeta\right) \\ \psi'' &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\xi + \frac{\partial\psi'}{\partial y'}\eta + \frac{\partial\psi'}{\partial z'}\zeta\right). \end{aligned}$$

Entnimmt man den Werth von σ der ersten Gleichung 4., so kann man den Gleichungen 3. die Form geben:

$$6 \ldots \qquad \begin{aligned} \varrho x &= 2x'(\varphi'' + \lambda\psi'') - \xi(\varphi' + \lambda\psi') & \varrho z &= -\,2(\varphi' + \lambda\psi') \\ \varrho y &= 2y'(\varphi'' + \lambda\psi'') - \eta(\varphi' + \lambda\psi') & \varrho t &= -2t'(\varphi'' + \lambda\psi''). \end{aligned}$$

Die Ausdrücke rechts in diesen Gleichungen sind homogen vom zweiten Grade in x', y', t', linear in ξ, η, ζ und enthalten ausserdem λ in der ersten Potenz; setzt man für ξ, η, ζ die ihnen proportionalen Werthe 1., so erhält man Ausdrücke, welche für x', y', t' homogen von der zweiten Ordnung sind, und λ zur dritten Potenz enthalten. Wenn man endlich aus 4. $\lambda = -\frac{x'}{2y'}$ setzt, und mit y'^3 multiplicirt, so erhält man Ausdrücke, welche in x', y', t' homogen vom 5. Grade sind, welche aber

insbesondere x', y' in jedem Gliede mindestens zur dritten Dimension enthalten.

§. 18. Fundamentalpuncte der Abbildung.

Da nach den Gleichungen 6. die x sich durch Ausdrücke 5. Grades in x', y', t' darstellen, welche in x', y' überall von wenigstens der dritten Dimension sind, so bilden sich ebene Schnitte als Curven 5. Ordnung ab, welche bei $x' = 0$, $y' = 0$, dem Ort der Kegelspitze, einen dreifachen Punct haben, den dreifachen Fundamentalpunct der Bildebene.

Man kennt von der Abbildung ferner 7 einfache Fundamentalpuncte. Denn jeder in ein Linienpaar zerfallende Kegelschnitt K der Schaar wird von dem Kegelschnitt C mindestens einmal geschnitten, und es muss also auf einer Geraden eines solchen Paars ein zu dem Paar gehöriger Punct ξ liegen. Wie nun ein ebener Schnitt gelegt werde, immer muss er diese Gerade treffen und der Schnittpunct wird durch den festen Punct abgebildet, in welchem die Gerade die Bildebene trifft. Jedem Linienpaar entspricht also ein Fundamentalpunct in der Bildebene, welcher eine Gerade des Paares abbildet.

Es ist leicht zu sehen, dass jedes Linienpaar nur *einen* Fundamentalpunct liefert: den es sind ohne dies so viel Fundamentalpuncte nachweisbar, dass die Ordnung der Fläche sich ihretwegen auf die 5. reducirt, dass also weitere nicht vorhanden sein können. Das Bild besitzt nämlich offenbar noch einen doppelten Fundamentalpunct, dessen Existenz man durch folgende Betrachtung einsieht.

In der Bildebene selbst liegt ein Kegelschnitt K der Schaar und ihm gehört ein auf ihm liegender Punct ξ an. Dieser ist der eine Schnittpunct des Kegelschnitts C mit der Bildebene. Es existirt noch ein zweiter, ξ', und der ihm zugehörige Kegelschnitt K' liegt in einer von der Bildebene verschiedenen Ebene. Jede Ebene im Raum schneidet K' in zwei Puncten; und das Bild jedes dieser Puncte ist offenbar ξ'. Daher ist ξ' ein Doppelpunct für das Bild jedes ebenen Schnitts, also ein doppelter Fundamentalpunct der Abbildung.

Da nun die Abbildung somit schon einen dreifachen, einen dop-

pelten, und 7 einfache Fundamentalpuncte aufweist, so ist die Ordnung der dargestellten Fläche nach der allgemeinen Formel, welche ich in Bd. I. der mathematischen Annalen gegeben habe, gleich $25 - 9 - 4 - 7 = 5$, wie es sein soll; es können also weitere Fundamentalpuncte nicht vorhanden sein.

§. 19. Einfachste Abbildung.

Die soeben gegebene Abbildung ist nicht die einfachste, deren unsere Fläche fähig ist, vielmehr lässt sie sich durch eine Transformation zweiter Ordnung auf eine einfachste zurückführen, bei welcher die Abbildungsfunctionen nur vom 4. Grade sind.

Denken wir uns um dies einzusehen irgendwie die x als Functionen 5. Grades von drei Parametern p, q, r gegeben durch die Gleichungen

$$1 \ldots \qquad \varrho x_i = f_i(p, q, r);$$

und nehmen wir die Grössen p, q, r, durch lineare Transformation so gewählt an, dass bei $p = 0$, $q = 0$ ein dreifacher, bei $p = 0$, $r = 0$ ein doppelter, bei $q = 0$, $r = 0$ ein einfacher Fundamentalpunct bestehe. Führen wir nun durch eine Transformation zweiter Ordnung

$$2 \ldots \qquad \begin{cases} \sigma p = q'r' \\ \sigma q = r'p' \\ \sigma r = p'q' \end{cases}$$

die neuen Veränderlichen ein, und sehen wir, welches die Eigenschaften der neuen Abbildung

$$3 \ldots \qquad \varrho' x_i = F_i(p', q', r')$$

sein werden. Aus $f_i(p, q, r)$ wird zunächst eine Function 10. Ordnung $f_i(q'r', r'p', p'q')$; aber da $q = 0$, $r = 0$ ein dreifacher Fundamentalpunct ist, so ist jedes Glied von der dritten Dimension in p, q d. h. in $q'r'$, $r'p'$, und enthält also den Factor r'^3; da ferner $p = 0$, $r = 0$ ein doppelter Fundamentalpunct ist, so ist jedes Glied von der zweiten Dimension in p, r, d. h. in $q'r'$, $p'q'$, und enthält also q'^2; endlich tritt ebenso des einfachen Fundamentalpuncts wegen ein Factor p' vor. Es geht also $f_i(p, q, r)$ in $p'\,q'^2\,r'^3$. $F_i(p', q', r')$ über, und F_i ist also nur von der vierten Ordnung. Von einem Term $p^\alpha\,q^\beta\,r^\gamma$ in f_i rührt dabei ein

Term $p'^{\beta+\alpha-1} q'^{\gamma+\alpha-2} r'^{\alpha+\beta-3}$ in F_i her, oder, da $\alpha+\beta+\gamma=5$, ein Term

$$p'^{4-\alpha} q'^{3-\beta} r'^{2-\gamma};$$

die Dimension in Bezug auf p', q' zusammen ist also $7-\alpha-\beta$, also mindestens 2, die in Bezug auf p', r' ist $6-\alpha-\beta$ also wenigstens 1. In der neuen Abbildung ist daher $p'=0$, $q'=0$ in doppelter, $p'=0$, $r'=0$ ein einfacher Fundamentalpunct, $q'=0$, $r'=0$ hat keine besondere Bedeutung mehr. Da ferner

$$f_i = p' q'^2 r'^3 F_i.$$

so verschwinden alle F übrigens immer, und nur, wenn die f verschwinden, alle übrigen Fundamentalpuncte bleiben daher ungeändert.

Bei der oben gegebenen Abbildung waren noch 6 weitere einfache Fundamentalpuncte vorhanden. Durch den angegebenen Process wird also die Fläche auf eine Weise dargestellt, in welcher Abbildungsfunctionen 4. Ordnung mit einem doppelten und mit 7 einfachen Fundamentalpuncten auftreten.

§. 20. Beweis, dass die einfachste Abbildung allgemeinste Abbildungsfunctionen enthält.

Gehen wir jetzt von den Gleichungen

$$1 \ldots \qquad \varrho x_i = F_i(p, q, r)$$

aus, in denen die F_i Functionen 4. Ordnung mit einem doppelten und 7 einfachen Fundamentalpuncten sind, welche keine besondere Lagen gegen einander einnehmen sollen. Die Ordnung der hiedurch dargestellten Fläche ist dann (vgl. Math. Ann. Bd. I. p. 254) immer $16-4-7=5$; man hat also Flächen 5. Ordnung vor sich. Ein ebener Schnitt bildet sich durch eine Curve 4. Ordnung mit einem Doppelpunct ab, gehört also zum Geschlecht $p=2$. Die ebene Curve 5. Ordnung, deren Bilde sie ist, muss daher 4 Doppelpuncte besitzen. Die Fläche 5. Ordnung hat also eine Doppelcurve 4. Ordnung. Um nachzuweisen, dass diese Flächen ganz allgemein den oben betrachteten zugehören, und dass also die Gleichungen 1. so gut wie die Gleichung 1. des §. 2 als Ausgang benutzt werden können, ist nach §. 2 nur noch nöthig zu zeigen, dass die

Fläche nur eine *endliche* Anzahl von Geraden besitzt. Dies geschieht auf folgende Weise.

Denken wir uns in der Bildebene eine Curve m. Ordnung, welche in den einfachen Fundamentalpuncten A_1, A_2, ... A_7 bezüglich α_1, α_2, ... $\alpha_7$fache Puncte, in dem doppelten Fundamentalpuncte B einen βfachen Punct hat. Die jener Curve entsprechende Raumcurve ist dann von der Ordnung (vgl. Math. Ann. Bd I. p. 267)

$$4m - 2\beta - \Sigma\alpha.$$

Damit diese Curve überhaupt möglich sei, muss die Zahl der ihr auferlegten Bedingungen wenigstens um 1 kleiner sein, als die Zahl der Coefficienten einer ebene Curve m. Ordnung, also

$$1 \ldots \quad \frac{m+1 \,.\, m+2}{2} - \frac{\beta \,.\, \beta+1}{2} - \Sigma \frac{\alpha \,.\, \alpha+1}{2} \geqq 1.$$

Soll die Curve eine Gerade darstellen, so muss erstlich

$$2 \ldots \quad 4m - 2\beta - \Sigma\alpha = 1$$

sein; ferner aber das Geschlecht der Curve gleich Null, also

$$3 \ldots \quad \frac{m-1 \,.\, m-2}{2} - \frac{\beta \,.\, \beta-1}{2} - \Sigma \frac{\alpha \,.\, \alpha-1}{2} = 0.$$

Nun folgt aus 1. und 3.

$$3m - \beta - \Sigma\alpha \geqq 1;$$

hieraus aber mit Hülfe von 2.:

$$4 \ldots \quad \beta \geqq m.$$

Nun kann eine Curve m. Ordnng nie, ohne zu zerfallen (was hier ausgeschlossen ist) einen $m$fachen Punct haben, ausser einer Geraden, es muss also entweder $m = 1$, $\beta = 1$, oder $m = 0$, $\beta = 0$ sein. Das erstere führt auf Gerade die durch B gehen, und die dann um wieder Gerade zu repräsentiren noch durch einen der Puncte A gehen müssen; man findet also auf diese Art nur 7 Gerade. Ebenso führt $m = 0$ nur auf die 7 einfachen Fundamentalpuncte. Die Fläche besitzt also nur eine endliche Anzahl von Geraden, sie gehört sonach zu der oben betrachteten Gattung; die Anzahl ihrer Geraden ist 14, sie enthält also keine Geraden ausser den oben gefundenen 7 Paaren.

§. 21. Kegelschnitte auf der Fläche.

Wenden wir die im vorigen §. gegebene Schlussweise auf Curven m. Ordnung an, welche Kegelschnitte im Raum darzustellen geeignet sind, so haben wir nur an Stelle der Gleichung 2. die Gleichung

$$5 \ldots \quad 4m - 2\beta - \Sigma\alpha = 2$$

zu setzen, während 1. 3. ungeändert bleiben. An Stelle von 4. erhält man daher

$$6 \ldots \quad \beta \gtreqless m - 1.$$

Nur bei $m = 1$ kann β grösser als $m - 1$ sein; in der That kann man $m = 1$, $\beta = 1$ setzen. Man erhält dann den von B ausgehenden Strahlbüschel, der eine Kegelschnittschaar abbildet. Da, wie sich zeigen wird, keine andre Kegelschnittschaar existirt, so muss es die Schaar der Kegelschnitte K sein. Als besondere Lagen des Strahls finden sich die Verbindungslinien $A_1 B$, $A_2 B \ldots A_7 B$, bei denen immer der entsprechende Fundamentalpunct zu ergänzen ist; so dass man die 7 in Geradenpaare zerfallenden Kegelschnitte der Schaar erhält.

Man kann aber auch $m = 1$, $\beta = 0$ setzen. In diesem Falle müssen zwei der α gleich 1 sein; man erhält $\frac{7.6}{2} = 21$ einzelne Kegelschnitte, welche durch die Verbindungslinien je zweier Puncte A abgebildet werden.

Wenn $m > 1$, so ist nur $\beta = m - 1$ zulässig. Aus 3. findet man dann

$$\Sigma \frac{\alpha . \alpha - 1}{2} = 0,$$

also die α müssen sämmtlich Null oder 1 sein. Aus 5 aber ergiebt sich:

$$2m = \Sigma\alpha.$$

Daher sind entweder 4 oder 6 der α gleich 1 (der Fall wo zwei gleich 1 sind, giebt $m = 1$ und ist schon behandelt), und zugleich $m = 2$ oder $m = 3$. Hierdurch ergeben sich noch folgende Curven, welche Kegelschnitte abbilden:

1. Kegelschnitte durch B und A. Es giebt deren $\frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$; sie sindvöllig bestimmt.

2. Curven dritter Ordnung durch 6 A mit einem Doppelpunct in B. Sie sind ebenfalls völlig bestimmt, es giebt deren 7.

Rechnet man den Kegelschnitt hierzu, welcher durch den Fundamentalpunct B selbst dargestellt wird, so hat man im Ganzen

$$1 + 7 + 21 + 35 = 64$$

einzelne Kegelschnitte, was die oben erhaltene Zahl ist.

Die betrachtete Abbildung ist einem der Kegelschnitte zugeordnet, demselben welcher durch den Fundamentalpunct B abgebildet wird. Ihm gehören unter den 63 übrigen Kegelschnitten 7 zu, welche ihn zweimal, 35, welche ihn einmal, 21 welche ihn gar nicht schneiden. Da jede dieser Arten sich völlig symmetrisch abbildet, so unterscheiden sich die verschiedenen Abbildungsarten nur durch die Wahl desjenigen Kegelschnitts, welcher doppelter Fundamentalpunct werden soll. Es giebt also 64 verschiedene gleichberechtigte Arten der Abbildung.

Auch das Verhalten der Kegelschnitte gegen die Geraden ist hier leicht zu übersehen. Der durch B abgebildete Kegelschnitt theilt jedes Geradenpaar so, dass eine Gerade desselben, i, sich als Gerade, die andre, i', sich als Punct abbildet. Dieser Kegelschnitt trifft also je einmal die Geraden

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

die andern nicht. Die Gerade $A_1 A_2$ bildet dagegen einen Kegelschnitt ab, welcher die Geraden

$$1', 2', 3, 4, 5, 6, 7$$

trifft, die übrigen nicht; der Kegelschnitt B, A_1, A_2, A_3, A_4 entspricht einem Kegelschnitt, welcher die Geraden

$$1', 2', 3', 4', 5, 6, 7$$

trifft, die übrigen nicht; endlich bildet die durch B, $A_1 \ldots A_6$ gelegte Curve 3. Ordnung, welche oben beschrieben wurde, einen Kegelschnitt ab, der die Geraden

$$1', 2', 3', 4', 5', 6', 7$$

trifft. Man sieht, dass je zwei Systeme von einem Kegelschnitt getroffener Geraden nur um eine *gerade* Anzahl von Geraden verschieden

Mo. Bot. Garden,
1901.

sein können. Man erhält die den verschiedenen Kegelschnitten so zugeordneten Geradensysteme, indem man aus jedem Paar eine Gerade beliebig wählt, nur aus dem letzten ist die zugehörige Gerade von selbst gegeben. So erhält man für die Kegelschnitte wieder die Zahl $2^6 = 64$, wie früher.

Was das Verhalten der 64 Kegelschnitte gegen einander betrifft, so folgt aus der Abbildung sofort der Satz:

Jeder der 64 Kegelschnitte wird von jedem andern beziehungsweise in $2-\alpha$ *Puncten geschnitten, wenn* $2\alpha+1$ *die Zahl der Geraden ist, welche beide Kegelschnitte treffen; also von 21 Kegelschnitten gar nicht, von 35 je einmal, von 7 je zweimal.*

§. 22. Abbildung der Kegelspitze.

Die Tangentenebenen des doppeltberührenden Kegels schneiden die Fläche in einem Kegelschnitt der Schaar und einer zugehörigen Curve 3. Ordnung. Da ein Kegelschnitt der Schaar sich als Gerade durch B abbildet, so muss das Bild der zugehörigen Curve 3. Ordnung eine Curve 3. Ordnung sein, welche durch B und alle Puncte A, also im Ganzen durch 8 feste Puncte geht. Die 2 Durchschnitte, welche eine solche Curve noch mit den zugehörigen Geraden ausser B gemein hat sind die Bilder der Puncte, in welchen die Tangentenebene des Kegels die Oberfläche berührt (früher der Geraden $\lambda = \mu$ angehörig). Aber alle diese Curven dritter Ordnung im Raum schneiden sich in der Kegelspitze; ebenso schneiden sich alle durch die 8 festen Puncte des Bildes gelegten Curven 3. Ordnung in einem festen 9. Puncte C. *Dieser Punct* C *ist also die Abbildung der Kegelspitze*, und die Gerade BC bildet denjenigen Kegelschnitt der Schaar ab, welcher durch die Kegelspitze hindurchgeht.

Seien nun $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ zwei durch B gehende Gerade, $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ die zugehörigen Curven 3. Ordnung, so können wir $L_1 . K_1$ und $L_2 . K_2$ an Stelle zweier Functionen F zu Grunde legen. Alle durch die Puncte A gehenden Curven, welche in B einen Doppelpunct haben, müssen sich aus 5 solchen Curven linear zusammensetzen, da die allge-

meinste Curve dieser Art nur 5 willkürliche Coefficienten behält. Sind nun von solchen 5 Curven $L_1 . K_1$ und $L_2 . K_2$ schon als solche gegeben, welche Abbildungen ebener Schnitte werden sollen, so sind $L_1 . K_2$ und $L_2 . K_1$ zwei andere, und ist endlich Φ eine fünfte, so können die beiden fehlenden Functionen F aus diesen dreien zusammengesetzt werden, und für eine derselben kann man also eine lineare Verbindung von $L_1 . K_2$ und $L_2 . K_1$ wählen. Da die absoluten Werthe der Coefficienten in K_1, K_2 noch beliebig gewählt werden können (nur Null ausgeschlossen), so kann man als dritte Function jedenfalls $L_1 K_2 + K_1 L_2$ wählen.

Wie also auch die Functionen F gegeben seien, immer giebt es drei lineare Verbindungen derselben, welche die Form haben:

$$1 \ldots \quad \begin{cases} \Sigma\, \alpha_i F_i = L_1 K_1 \\ \Sigma\, \beta_i F_i = \frac{1}{2}(L_1 K_2 + L_2 K_1) \\ \Sigma\, \gamma_i F_i = L_2 K_2. \end{cases}$$

Setzt man also der Kürze wegen

$$2 \ldots \quad \mu_i = \alpha_i + 2\lambda \beta_i + \lambda^2 \gamma_i,$$

so ist auch

$$3 \ldots \quad \Sigma \mu_i F_i = (L_1 + \lambda L_2)(K_1 + \lambda K_2).$$

Die Ebenen, deren Coordinaten die μ_i sind, umhüllen einen Kegel 2. Ordnung; in diesen Ebenen zerfallen die Schnitte mit der Fläche 5. Ordnung in Kegelschnitte und Curven dritter Ordnung, deren Bilder die Büschel

$$4 \ldots \quad L_1 + \lambda L_2 = 0, \quad K_1 + \lambda K_2 = 0$$

sind. Jene Ebenen sind also die Tangentenebene des doppeltberührenden Kegels; und man hat folgenden Satz:

Die Kegelschnitte der Schaar bilden sich als Büschel von Geraden durch B ab, die zugehörigen Curven dritter Ordnung als Büschel von Curven 3. Ordnung durch B, A_1, A_2 . . . A_7, welcher dem Geradenbüschel projectivisch ist.

Die Berührungspuncte der doppelt berührenden Ebenen bilden sich durch die Durchschnitte entsprechenden Glieder der Schaaren

$$L_1 + \lambda L_2 = 0$$
$$K_1 + \lambda K_2 = 0$$

ab; die entsprechende Ortscurve die Abbildung ist also

$$L_1 K_2 - L_2 K_1 = 0,$$

eine Curve 4. Ordnung, welche B zum Doppelpunct, die A und C zu einfachen Puncten hat. Diese Curve ist völlig gegeben, wenn ausser den Fundamentalpuncten auch noch das Entsprechen des Büschels der Geraden und des Büschels der Curven 3. Ordnung in der Abbildung gegeben ist.

§. 23. Ebene Schnitte.

Wurde im Vorigen gezeigt, dass bei den Abbildungen der in den Tangentenebenen des doppelt berührenden Kegels gelegenen Schnitte die Kegelschnitte und Curven 3. Ordnung sich durch Gerade und Curven 3. Ordnung zweier projectivischen Büschel abbilden, so kann man auch die Bilder aller ebenen Schnitte, deren Ebenen durch die Kegelspitze gehen, auf diese Büschel zurückführen. Der allgemeinste Schnitt solcher Art bildet sich durch die Curve

$$5 \ldots \quad \alpha_1 L_1 K_1 + \alpha_2 (L_1 K_2 + L_2 K_1) + \alpha_3 L_2 K_2 = 0$$

ab. Erzeugt man nun diese Curve 4. Ordnung, welche B zum Doppelpunct, die A und C zu einfachen Puncten hat, durch die Büschel

$$L_1 + \mu L_2 = 0, \quad K_1 + \lambda K_2 = 0,$$

so ergiebt die Gleichung 5. zwischen den Parametern λ, μ die Beziehung:

$$\alpha_1 \lambda\mu - \alpha_2 (\lambda + \mu) + \alpha_3 = 0.$$

Dies ist die allgemeinste Beziehung, welche die auf einander liegenden Büschel

$$L_1 + \lambda L_2 = 0, \quad L_1 + \mu L_2 = 0$$

in Involution setzt. Man hat also den Satz:

Um die Bilder der verschiedenen Schnitte zu erzeugen, deren Ebenen durch die Kegelspitze gehen, aber nicht Tangentenebenen des doppelt berüh-

renden Kegels sind, verbinde man mit dem Büschel von Curven 3. Ordnung

$$6 \ldots \quad K_1 + \lambda K_2 = 0$$

Strahlbüschel, welche mit dem Büschel $L + \lambda L = 0$ *gemeinschaftlichen Scheitel haben, und mit ihm in Involution liegen. Diese Büschel geben mit 6. die Bilder der verschiedenen ebenen Schnitte, welche gesucht werden, als Curven 4. Ordnung durch die A und C, und mit einem Doppelpuncte in B.*

Das so erzeugte doppelt unendliche System 5. mag das System der Curven M genannt werden.

Um die Verhältnisse in der Bildebene geometrisch vollends zu definiren, muss nun noch eine vierte Curve $\Phi = 0$ gegeben sein, welche durch A geht, und in B mindestens einen Doppelpunct hat. Ich wähle als solche eine beliebig gegebene Curve, welche durch die Puncte A geht, und B zum dreifachen Puncte hat. Diese Curve ist durch diese Bedingungen noch nicht völlig gegeben, vielmehr wird den Bedingungen noch durch ein Büschel von Curven genügt, aus diesen also muss *eine* beliebig gewählt werden.

Diese Curve $\Phi = 0$ bestimmt mit jeder Curve $M = 0$ ein Büschel $M + \alpha\Phi = 0$, welches die vier Parameter α_1, α_2, α_3, α linear enthält. Die Curven dieser Büschel sind es, welche, nunmehr in der Abbildung rein geometrisch definirt, die Bilder aller ebenen Schnitte der Fläche 5. Ordnung liefern.

Die Curve $\Phi = 0$ selbst ist das Bild derjenigen Curve 3. Ordnung, welche mit dem durch B dargestellten Kegelschnitt sich zu einem ebenen Schnitte ergänzt. Sie geht dreimal durch B, die ihr entsprechende Raumcurve schneidet also den zugehörigen Kegelschnitt dreimal ausserhalb der Doppelcurve. *Die Ebenen der 64 einzelnen Kegelschnitte sind also dreifach berührende Ebenen der Fläche.*

Die Ergänzungscurven für die andern 63 Kegelschnitte erfordern eine etwas verwickeltere Construction. Was zunächst diejenigen angeht, deren zugehörige Kegelschnitte sich als Gerade abbilden, so bestimmt man zuerst das Bild desjenigen ebenen Schnitts, welcher durch die Kegelspitze und durch den Schnitt der Ebene dieses Kegelschnitts mit

der Ebene des durch B abgebildeten hindurchgeht. Dieses Bild liefert die nöthige Bestimmung für das Bild der Ergänzungscurve. Bezüglich derjenigen Kegelschnitte, welche sich als Kegelschnitte oder als Curven 3. Ordnung abbilden, muss man an Stelle des durch B abgebildeten Kegelschnitts andre mit schon bekannten Ergänzungscurven benutzen, um die analoge Construction auszuführen. Es mag genügen hier auf die Ausführbarkeit hingewiesen zu haben.

§. 24. Der von der Kegelspitze ausgehende einfache Tangentenkegel.

Das System der Curven M, welches oben definirt wurde, enthält eine doppelt unendliche Anzahl von Büscheln, entsprechend ebenen Schnitten, welche durch einen von der Kegelspitze ausgehenden Strahl gehen. Man braucht, um diese Systeme sämmtlich zu finden, nur ein Strahlenpaar des in der Bildebene durch B gelegten Büschels festzuhalten, und diejenigen Involutionen zu suchen, in denen dieses Strahlenpaar sich wechselweise entspricht. Sind λ, μ die Parameter der gewählten Strahlen, so ist hiezu nur die Bedingung

$$\alpha_1 \lambda u - \alpha_2 (\lambda + \mu) + \alpha_3 = 0,$$

also *eine* Bedingung zu erfüllen, so dass eines der Verhältnisse der α noch beliebig bleibt. Alle Curven M, für welche die α so bestimmt werden, haben ausser dem Doppelpunct in B und den Puncten C, A_1, $A_2 \ldots A_7$ noch 4 Puncte gemein, diejenigen nämlich, in welchen sich ausser B noch der Strahl $L_1 + \lambda L_2 = 0$ mit der Curve 3. Ordnung $K_1 + \mu K_2 = 0$, und in welchen sich der Strahl $L_1 + \mu L_2 = 0$ mit der Curve $K_1 + \lambda K_2 = 0$ schneidet. Diese Curven M haben alle 16 Schnittpuncte gemein und bilden also ein Büschel.

Die beiden so bestimmten Punctepaare, welche als Fundamentalpuncte dieses Büschels auftreten, sind die Bilder der Punctepaare, in welchen ein gewisser von der Kegelspitze ausgehender Strahl die Fläche 5. Ordnung schneidet, $L_1 + \lambda L_2 = 0$, $L_1 + \mu L_2 = 0$ die Bilder der beiden von ihm getroffenen Kegelschnitte der Schaar.

Diejenigen Strahlen, welche einen Kegelschnitt der Schaar berühren, bilden den einfach berührenden Tangentenkegel, welcher von der Kegelspitze ausgeht (§. 3.). Ihre Berührungspuncte bilden auf der Fläche eine Curve 7. Ordnung, deren Bild in der frühern Abbildung die Uebergangscurve war. Um ihr Bild in der jetzigen Abbildung zu finden, brauchen wir nur zu untersuchen, wann die Gerade $L_1 + \lambda L_2 = 0$ die Curve $K_1 + \mu K_2 = 0$ ausserhalb des Punctes B berührt. Dieses Bild ist also der geometrische Ort aller Berührungspuncte von Tangenten, welche, vom Puncte B ausgehend, Curven des Systems $K_1 + \lambda K_2 = 0$ berührt, oder der Ort der Durchschnittspuncte, welche dieses System mit dem System

$$DK_1 + \mu DK_2 = 0$$

der in Bezug auf dasselbe genommenen Polaren von B gemein hat. Diese Ortscurve hat also die Gleichung

$$1 \ldots \qquad K_1 DK_2 - K_2 DK_1 = 0,$$

sie ist von der 5. Ordnung und hat, wie leicht zu sehen ist, die A und C zu einfachen Puncten, B aber zum dreifachen Punct.

Die Curve wird nach §. 14. von der Abbildung der Berührungscurve des doppeltberührenden Kegels in 6 Puncten getroffen. Die Gleichung der letztern ist nach §. 22

$$L_1 K_2 - L_2 K_1 = 0,$$

eine Curve 4. Ordnung, welche B zum Doppelpunct, C und die A zu einfaohen Puncten hat. Beide Curven schneiden sich 6 mal in B, je einmal in den 8 Puncten C, A_1, $A_2 \ldots A_7$, so dass in der That 6 Schnittpuncte übrig bleiben. Man findet sie aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} K_1 + \lambda K_2 &= 0 \\ DK_1 + \lambda DK_2 &= 0 \\ L_1 + \lambda L_2 &= 0, \end{aligned}$$

welche wirklich auf eine Gleichung 6. Grades in λ führen.

Nach §. 10. geht ferner die hier untersuchte Berührungscurve durch die Doppelpuncte der Geradenpaare. Dies drückt sich hier so aus, *dass*

die Tangente der Curve 1. in jedem der Puncte A durch B geht. Man zeigt dies unmittelbar, indem man die Gleichung der Tangente von 1. bildet. Aber dasselbe gibt auch von C; und man hat daher noch den Satz: *Die Berührungscurve des einfachen Tangentenkegels der Kegelspitze berührt in dieser den durch sie gehenden Kegelschnitt der Schaar.*

§. 25. Eine mit der Abbildung gegebene Verwandtschaft 5. Grades.

Jedem Puncte der Oberfläche, dessen Bild π sei, entspricht nach dem Vorigen ein bestimmter zweiter, dessen Abbildung π' sein möge. Denn wenn man den ersten Punct mit der Kegelspitze verbindet, so trifft diese Gerade den durch π gehenden Kegelschnitt der Schaar in einem bestimmten Puncte. Die Gesammtheit aller Puncte π' steht mit der Gesammtheit aller Puncte π in einer eindeutigen Beziehung, und zwar ist dieselbe offenbar eine reciproke. In Bezug auf diesen doppelten Character jedes Punctes der Ebene kann man die Bildebene als Vereinigung zweier Ebenen E, E' betrachten; einem Punct π in E entspricht ein Punct π' in E'; aber auch umgekehrt dem Puncte π' als E angehörig der Punct π als Punct von E.

Die hiedurch ausgedrückte Verwandtschaft entspricht genau derjenigen, welche bei der Abbildung auf der Doppelebene zwei über einander liegende Puncte verband, und welche dort also gewissermassen eine Identität wurde. Für die gegenwärtige Abbildungsart soll der Character dieser Verwandtschaft nun aufgesucht werden.

Zwei Puncte $\pi\,\pi'$ sind die Puncte eines Paars (§. 24), welche durch die Gleichungen

$$L_1 + \lambda L_2 = 0$$
$$K_1 + \mu K_2 = 0$$

(mit Ausschluss des Fundamentalpunctes B) bestimmt werden. Sind

p, q, r die Coordinaten von π, p', q', r' die von π', so hat man also (indem alles dem letztern entsprechende durch einen obern Strich bezeichnet wird):

$$1 \ldots \quad \begin{cases} L_1 L'_2 - L_2 L'_1 = 0 \\ K_1 K'_2 - K_2 K'_1 = 0. \end{cases}$$

Die Coordinaten von B seien p^0, q^0, r^0; es muss dann

$$2 \ldots \quad \begin{cases} p' = p + \varrho p^0 \\ q' = q + \varrho q^0 \\ r' = r + \varrho r^0 \end{cases}$$

sein, da π, π' mit B auf einer Geraden liegen. Für p^0, q^0, r^0 verschwinden sowohl die L wie die K; geht noch, mit Einführung der Werthe 2. K_1 und K_2 in

$$K_1 + 3\varrho D K_1 + 3\varrho^2 D^2 K_1 + D^3 K_1$$
$$K_2 + 3\varrho D K_2 + 3\varrho^2 D^2 K_2 + D^3 K_2$$

über, so verschwindet $D^3 K_1$ und $D^3 K_2$, und man hat also aus 1.:

$$3 \ldots \quad K_1 (D K_2 + \varrho D^2 K_2) - K_2 (D K_1 + \varrho D^2 K_1) = 0.$$

Die Gleichung des Punctes π' ist demnach:

$$up' + vq' + wr' = 0,$$

oder

$$(up + vq + wr) + \varrho (up^0 + vq^0 + wr^0) = 0,$$

und endlich, indem man den Werth von ϱ aus 3. entnimmt:

$$4 \ldots \quad (up + vq + wr)(K_1 D^2 K_2 - K_2 D^2 K_1) - (up^0 + vq^0 + wr^0)(K_1 D K_2 - K_2 D K_1) = 0.$$

Die Bestimmung des zu π gehörigen Puncts π' wird also durch die Gleichungen vermittelt:

$$5\ldots\quad\begin{cases}\sigma p' = p\,(K_1 D^2K_2 - K_2 D^2K_1) - p^0\,(K_1 DK_2 - K_2 DK_1)\\ \sigma q' = q\,(K_1 D^2K_2 - K_2 D^2K_1) - q^0\,(K_1 DK_2 - K_2 DK_1)\\ \sigma r' = r\,(K_1 D^2K_2 - K_2 D^2K_1) - r^0\,(K_1 DK_2 - K_2 DK_1),\end{cases}$$

während 4. für constante Werthe von u, v, w die einer Geraden von E entsprechende Curve von E' darstellt, welche von der 5. Ordnung ist.

Die Curven 4. haben, wie man leicht nicht, B zum vierfachen, C und die A zu einfachen Puncten. Die Abbildung der Ebene (E) auf sich selbst (E') hat also einen vierfachen und 8 einfache Fundamentalpuncte, während die Ordnung der Abbildungsfunctionen 5 ist. In der That erhält man daraus nach den allgemeinen Formeln für die Ordnung der abgebildeten Fläche (E) $25 - 16 - 8 = 1$, wie es sein muss.

Da nun die Abbildung eines ebenen Schnittes S (in E) durch den Punct B zweimal, durch die Puncte A je einmal hindurchgeht, so entspricht einer Curve S in E' eine Curve S' von der Ordnung

$$5.4 - 4.2 - 7 = 5,$$

welche als eindeutige Abbildung von S eine zusammenhängende Curve vom Geschlecht $p = 2$ sein muss. Um zu finden, wie oft sie durch die Fundamentalpuncte geht, nehmen wir an, sie gehe αmal durch jeden der Puncte A, βmal durch B, γmal durch C. Wegen des Werthes von p ist zunächst

$$2 = 6 - 7\,\frac{\alpha.\alpha-1}{2} - \frac{\beta.\beta-1}{2} - \frac{\gamma.\gamma-1}{2};$$

da ferner wegen der Reciprocität des Entsprechens sich die Curve 5. Ordnung S' wieder durch S abbildet, so muss, indem man die Ordnung der S' entsprechenden Curve aufstellt, sich die Zahl 4 ergeben, also

$$4 = 25 - 7\alpha - 4\beta - 8.$$

Von den Zahlen α, β, γ kann keine grösser als 4, überhaupt α nur 0 oder 1 sein; daher findet man als einzige Lösung:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 2.$$

Die Curve S' hat also einen Doppelpunct in C, einen dreifachen in B, und geht durch die Puncte A einfach hindurch. Sie repräsentirt demnach eine auf der Fläche liegende Raumcurve der Ordnung

$$5.4 - 3.2 - 7 = 7,$$

und man hat den Satz:

Wenn man von der Kegelspitze nach den Puncten eines ebenen Schnitts Strahlen zieht, und immer die Puncte aufsucht, in denen sie den entsprechenden Kegelschnitt der Schaar nochmals treffen, so erhält man eine Raumcurve 7. Ordnung vom Geschlecht $p = 2$, welche jede Gerade der Fläche einmal trifft und die Kegelspitze zum wirklichen Doppelpuncte hat.

Von der Curve S' kann man beliebig viele Puncte construiren, indem man die Büschel $L_1 + \lambda L_2 = 0$ und $K_1 + \mu K_2 = 0$ zu Hülfe nimmt. Man kann also auch ihre Schnittpuncte mit S bilden, deren Anzahl

$$20 - 6 - 7 = 7$$

ist. *Diesen Puncten entsprechen die Durchschnittspuncte des ebenen Schnitts mit der Raumcurve 7. Ordnung, längs welcher der von der Kegelspitze ausgehende einfache Berührungskegel die Fläche berührt.* Denn in jedem solchen Puncte berührt ein von der Kegelspitze ausgehender Strahl einen Kegelschnitt der Schaar, und es fallen also zwei Puncte zusammen, welche sich als Paar $\pi\,\pi'$ abbilden. Die Schnittpuncte von S mit S' entsprechen sich selbst, und die Curve solcher Puncte (§. 24. 1.) bildet für die oben betrachtete Verwandtschaft einen Ort sich selbst entsprechender Puncte.

§. 26. Die Abbildung der Doppelcurve.

Nach den allgemeinen Principien, welche ich im 1. Bande der Math. Annalen p. 270 gegeben habe, bildet sich die Doppelcurve als

Curve 7. Ordnung ab, welche B zum dreifachen Puncte, die A zu Doppelpuncten hat.

Diese Curve gehört zum Geschlecht $p = 5$; aber sie hat einen speciellen Character. Sie besteht aus Punctepaaren, den Abbildungen der Puncte der Doppelcurve. Die Verbindungslinien der Paare entsprechen diesen Puncten eindeutig, und umhüllen also eine Curve, für welche $p = 1$, wie für die Doppelcurve selbst. Die Curve 7. Ordnung lässt sich also durch eine irrationale Substitution, welche nur eine Quadratwurzel enthält, auf eine solche zurückführen, für welche $p = 1$ ist.

Unter der vierfach unendlichen Schaar von Curven 4. Ordnung, welche durch die 7 Puncte A gehen und B zum Doppelpuncte haben, besitzt die dreifach unendliche Schaar der Bilder ebener Schnitte die Eigenschaft, das Bild der Doppelcurve in 4 Punctepaaren zu schneiden, welche den Durchschnitten der Doppelcurve mit der Ebene des Schnitts entsprechen. Um solche 4 Punctepaare für jeden Schnitt, und damit überhaupt beliebig viel Puncte der Doppelcurve zu finden, schlage ich folgenden Weg ein.

Sei wieder S Bild eines ebenen Schnitts, welcher nicht durch die Kegelspitze geht, π ein Punct in S. Ihm entsprechen zwei Puncte π'', deren entsprechende auf der Oberfläche dadurch entstehen, dass man den zu π gehörigen Punct mit der Kegelspitze verbindet, und die beiden Durchschnitte dieses Strahls mit demjenigen Kegelschnitt der Schaar sucht, in dessen Ebene der Strahl liegt, und welcher nicht durch den zu π gehörigen Punct geht. Die beiden Puncte π'' erhält man auf folgende Weise (vgl. §. 24). Durch π legt man die betreffende Gerade $L_1 + \lambda L_2 = 0$, und die betreffende Curve 3. Ordnung $K_1 + \mu K_2 = 0$, und sucht dann die Gerade $L_1 + \mu L_2 = 0$ und die Curve $K_1 + \lambda K_2 = 0$. Die beiden letztern schneiden sich ausser in B in den beiden gesuchten Puncten π''. Die Puncte, welche der ebene Schnitt aber mit der Doppelcurve gemein hat, bilden sich offenbar als Punctepaare $\pi\pi''$ ab, und um zu finden, welche Punctepaare in S Puncte der Doppelcurve abbilden, hat man nur zu fragen, in welchen Fällen gleichzeitig π und einer der

zugehörigen Puncte π'' auf S liegt. Man bildet also den Ort S'' aller Puncte π'', welche Puncten π von S zugeordnet sind, und die Schnittpuncte von S'' mit S liefern die gesuchten Punctepaare.

Wenn man von der Kegelspitze nach den Puncten des zu S gehörigen ebenen Schnittes einen Kegel 5. Ordnung legt, so schneidet derselbe die Fläche 5. Ordnung in einer Raumcurve 25. Ordnung. Aber diese zerfällt in drei Theile. Der erste dieser Theile ist der ebene Schnitt selbst. Der zweite entsteht, wenn man auf jeder Kegelseite den Punct der Fläche nimmt, welcher mit dem betreffenden Puncte des ebenen Schnitts auf demselben Kegelschnitt der Schaar liegt. Dies ist nach dem Vorigen eine Raumcurve 7. Ordnung, welche die Kegelspitze zum Doppelpuncte hat; ihr Bild ist S'.

Der übrigbleibende dritte Theil ist es, welcher durch S'' abgebildet wird. Die Raumcurve, welche zu S'' gehört, ist also von der 13. Ordnung, und da offenbar der ganze Durchschnitt der Fläche mit dem Kegel die Kegelspitze zum 5fachen Puncte hat, so muss dieser dritte Theil desselben in ihr einen 3fachen Punct haben.

Der ganze Durchschnitt bildet sich als Curve von der Ordnung $5.4 = 20$ ab, mit einem $2.5 = 10$ fachen Puncte in B, einem 5fachen in jedem Puncte A, und einem 5fachen in C. Da nun S von der 4. Ordnung ist, mit einem Doppelpunct in B, und einem einfachen in jedem A, da ferner S' von der 5. Ordnung ist, mit einem dreifachen Puncte in B, einem einfachen in jedem A und einem Doppelpunct in C, so muss S'' eine Curve 11. Ordnung sein, mit einem 5fachen Puncte in B, einem dreifachen in C und einem dreifachen in jedem der A.

Diese Curve S'' von der 11. Ordnung schneidet S noch in

$$11.4 - 5.2 - 7.3 = 13$$

Puncten. Es giebt also auf der Abbildung S eines ebenen Schnittes 13 Puncte π, denen ebenfalls auf S gelegene Puncte π'' entsprechen. Aber

diese theilen sich in zwei Gruppen. Entweder kann π'' mit π zusammenfallen oder nicht. Der erste Fall trifft dann ein, wenn die auf dem zugehörigen von der Kegelspitze im Raum gezogenen Strahl liegenden Punctepaare zusammenfallen, wenn also der zu π gehörige Punct der Fläche zugleich der Berührungscurve des doppelt berührenden Kegels angehört. Da letztere Curve von der 5. Ordnung ist (§. 3.), so tritt dieser Fall 5mal ein. Es bleiben noch 8 Puncte übrig, und diese liefern, indem sie sich paarweise gruppiren, die Bilder der 4 Puncte, in welchen der betrachtete ebene Schnitt die Doppelcurve trifft.

Man sieht ferner aus der Abbildung sofort die folgenden Bestimmungen ein:

Jeder Kegelschnitt der Schaar trifft die Doppelcurve 4 mal, jede Gerade der Fläche ist eine Sehne der Doppelcurve.

Jeder der 64 einzelnen Kegelschnitte trifft die Doppelcurve dreimal.

§. 27. Kegelschnitte, welche eine Raumcurve 4. Ordnung und 1. Sp. dreimal, und 5 ihrer Sehnen je einmal treffen.

Aus dem letzten Satze des vorigen §. lässt sich der merkwürdige Satz ableiten:

Wenn eine Raumcurve 4. Ordnung und 1. Sp. gegeben ist, so wie 5 ihrer Sehnen, welche weder einander schneiden, noch von denen drei auf einer durch die Curve gehenden Fläche 3. Ordnung liegen, so giebt es im Allgemeinen nur zwei Kegelschnitte, welche die Curve dreimal und jede der 6 Sehnen einmal treffen.

Die Richtigkeit dieses Satzes, welcher durch die geringe Anzahl von Lösungen einer scheinbar verwickelten Aufgabe von Interesse ist, vermuthete ich schon vor längerer Zeit, ehe ich noch im Stande war, die Existenz der 64 Kegelschnitte auf den hier behandelten Flächen 5. Ordnung strenge nachzuweisen. Hrn. Professor Lüroth in Carlsruhe,

welchem ich meine Vermuthung damals mittheilte, gelang es, durch eine Reihe scharfsinniger Schlüsse den Satz direct zu beweisen; dieser Beweis wird in den math. Annalen mitgetheilt werden. Wenn es indessen gelingt, eine Fläche 5. Ordnung zu construiren, welche die Raumcurve zur Doppelcurve hat und die 5 Sehnen ganz enthält, so muss jeder der gesuchten Kegelschnitte ganz auf der Fläche liegen, indem er sie in 11 Puncten schneidet, muss also unter den 64 einzelnen Kegelschnitten der Fläche enthalten sein. Nun giebt es unter diesen immer nur zwei, welche 5 sich nicht schneidende Gerade der Fläche treffen; wodurch denn der Satz bewiesen ist.

Es kommt also nur darauf an, eine solche Fläche 5. Ordnung zu legen. Dies ist, nach einer Mittheilung welche ich Hrn. Lüroth verdanke, im Allgemeinen möglich, und zwar auf unendlich viele Arten. Ich bemerke in dieser Beziehung nur Folgendes. In dem durch die Curve bestimmten Flächenbüschel 2. Ordnung $\varphi + \lambda\psi = 0$ seien $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_5$ die Parameter der 5 Flächen, welche beziehungsweise eine der 5 Sehnen ganz enthalten; der Voraussetzung nach sind diese Parameter von einander verschieden. Setzt man $\varphi + \lambda_i\psi = 0$, so geht die Gleichung

$$A\psi^2 - 2B\varphi\psi + C\varphi^2 = 0$$

der gesuchten Fläche in

$$1 \ldots \qquad A + 2\lambda_i B + \lambda^2{}_i C = 0$$

über, und für die entsprechende i^{te} Sehne muss also diese Gleichung erfüllt sein, damit die Fläche 5. Ordnung sie ganz enthalte. Die 5 Ebenen 1. müssen also einzeln durch die 5 gegebenen Sehnen hindurchgehen. Man kann die Gleichungen des Problems dann aber auch in folgender Weise interpretiren:

Es soll ein Kegel 2. Ordnung gesucht werden, von welchem 5 Tangentenebenen durch 5 gegebene Gerade gehen, und bei welchem immer 4 der Ebenen die 5. Gerade nach einem gegebenen Doppelverhältniss schneiden.

Durch zwei der Doppelverhältnisse sind die übrigen bestimmt; die Aufgabe selbst aber ist im Allgemeinen auf unendlich viele Weise lösbar. Eine genauere Discussion des Problems und der möglichen Ausnahmsfälle würde hier zu weit führen.

Druckfehler.

p. 18 Z. 2 v. u. st. A. l. 4 A.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1870

Band/Volume: 15

Autor(en)/Author(s): Clebsch Alfred

Artikel/Article: Ueber die Abbildung einer Classe von Fläche 5. O. 3-64