Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen.

Von

A. Clebsch.

Der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften überreicht am 5. November 1870.

Wenn man bisher vorzugsweise lineare Transformationen algebraischer Formen behandelt hat, so erkennt man doch leicht, dass auch die Untersuchung höherer Transformationen schliesslich auf jene als ihre erste Quelle zurückführt, und namentlich die Arbeiten von Hermite und Gordan über die Einführung höherer Substitutionen in die Theorie der binären Formen haben dies deutlich gezeigt. Die Untersuchungen der Letztgenannten wurden zugleich die Veranlassung zu den vorliegenden Betrachtungen, deren Entstehung im Wesentlichen schon mehr als zwei Jahre zurückdatirt.

Unter höhern Transformationen einer Form f verstehe ich hier diejenigen, welche ich auch sonst als „eindeutige" bezeichnet habe; sie haben die besondere beschränkende Eigenschaft, dass mit Hülfe der Gleichung $f=0$ sowohl die alten Variabeln durch die neuen, als umgekehrt die neuen durch die alten, rational ausdrückbar sind. Die Transformation ist im Allgemeinen immer eindeutig, sobald man die neuen (homogenen) Variabeln gleich ganzen rationalen Functionen der ursprünglichen setzt; und nur unter besondern Bedingungen kann die Eindeutigkeit aufgehoben werden. Als transformirte Form wird die linke Seite der Gleichung bezeichnet, welche entsteht, wenn man aus der gedachten Transformationsgleichung und aus der gleich Null gesetzten gegebenen Form die ursprünglichen Veränderlichen eliminirt. Die Ordnung der neuen Form ist der der ursprünglichen gleich. Ihre absoluten Invarianten sind simultane Invarianten in Bezug auf die gegebene Form und auf die beiden, welche den Zähler und den Nenner der Transformation bilden. Aber nicht umgekehrt kann jede absolute simultane Invariante der letztgenannten drei Formen auch als eine absolute Invariante der transformirten Form aufgefasst werden. Vielmehr müssen alle diese gewissen partiellen Differentialgleichungen genügen, deren Aufstellung der Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist.

Die aufzustellenden Differentialgleichungen geben namentlich ein für die allgemeine Anschauung dieser Verhältnisse bemerkenswerthes Resultat. Als absolute Invarianten der ursprünglichen und der transformirten Form bezeichnete ich Ausdrücke, welche sich bei linearer Transformation der betreffenden Form nicht mehr ändern; und zwar kann es, sobald von der Aufstellung partieller Differentialgleichungen die Rede ist, welche mit der Frage der Rationalität überhaupt nichts zu thun haben, ganz gleichgültig bleiben, ob man von rationalen oder von irrationalen oder transcendenten absoluten Invarianten handelt. Aber man kann nun den Begriff der absoluten Invariante selbst, welcher sich zunächst nur auf lineare Transformation bezieht, zu erweitern versuchen, und fragen, ob es nicht Functionen der Coefficienten einer Form giebt, welche auch bei höhern Transformationen der hier behandelten Art ihren Werth nicht ändern, und also absolute Invarianten in höherm Sinne sind. Dass bei Formen mit mehr als zwei homogenen Veränderlichen solche Grössen existiren, weiss man aus der Theorie der Abelschen Functionen, wo die Moduln einer Classe gerade die Eigenschaft besitzen, für höhere eindeutige Transformationen ungeändert zu bleiben. Aber diesem entspricht nichts bei den binären Formen. Es *giebt für diese keine Invarianten in höherem Sinne.* Wenn also auch eine Invariante, wie z. B. die Discriminante, die Eigenschaft besitzt, durch höhere Transformation sich nur um einen rationalen Factor zu ändern, so können doch niemals zwei Invarianten (oder Potenzen von Invarianten) existiren, für welche dieser Factor derselbe ist.

1.

Erste Form der partiellen Differentialgleichungen.

Eine gegebene binäre Form sei $f(x, y)$, von der $n$ten Ordnung in der homogenen Veränderlichen x, y. Führt man nun zwei neue homogene Veränderliche $\varkappa$, λ durch die Gleichung

$$1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varkappa\varphi(x,y) + \lambda\psi(x,y) = 0$$

ein, wo φ und ψ zwei homogene Functionen $m$ter Ordnung sind, so wollen wir dies eine Transformation $m$ter Ordnung nennen, als transformirte Form aber diejenige Form F bezeichnen, welche die Resultante der beiden Gleichungen

$$2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{c} f = 0 \\ \varkappa\varphi + \lambda\psi = 0 \end{array} \right.$$

ist. Die Resultante F ist von der Ordnung n in den neuen Veränderlichen; ihre Coefficienten sind simultane Invarianten von f, φ und ψ, welche in Bezug auf die Coefficienten von f vom Grade m sind, für die Coefficienten von φ und ψ aber vom Gesammtgrade n[1]).

Aus diesen Coefficienten setzen sich die Invarianten der transformirten Form F zusammen. Es wird sich zeigen, dass dieselben von den Coefficienten der transformirenden Functionen φ und ψ nur in einer beschränkten Weise abhängen, welche durch partielle Differentialgleichungen ausgedrückt wird, denen jene Invarianten genügen.

---

1) Es kann unter Umständen wesentlich sein zu bemerken, dass es bei gegebenem n nur nothwendig ist, Transformationen zu betrachten, welche unterhalb einer gewissen von n abhängigen Grenze bleiben. Denn welches auch der Werth von m sein mag, man kann den Quotienten $\frac{\varphi}{\psi}$, welcher nur in Zusammenhang mit der Gleichung $f = 0$ betrachtet wird, immer auf einen Quotienten $\frac{\Phi}{\Psi}$ der Ordnung $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ zurückführen, indem man nur die Coefficienten von Φ, Ψ so bestimmt, dass der Ausdruck

$$\varphi\Psi - \psi\Phi$$

durch f theilbar wird. Für den vorliegenden Zweck hat diese Reduction keine Wichtigkeit.

Indem ich die homogenen Veränderlichen verlasse, setze ich

$$3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad z = \frac{x}{y}, \quad \mu = \frac{\varkappa}{\lambda},$$

und bezeichne durch $f(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ diejenigen Formen, in welche die oben durch f, φ, ψ bezeichneten Functionen durch Division mit entsprechenden Potenzen von y übergehen, so dass

$$4 \quad . \quad . \quad f(z) = \frac{1}{y^n} f(x,y), \quad \varphi(z) = \frac{1}{y^m} \varphi(x,y), \quad \psi(z) = \frac{1}{y^m} \psi(x,y).$$

Sind nunmehr $z_1, z_2 \ldots z_n$ die Wurzeln von $f = 0$, so sind die absoluten Invarianten von f bekanntlich Functionen der z, welche characterisirt werden durch die drei partiellen Differentialgleichungen;

$$5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial z_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_2} \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial z_n} = 0 \\ z_1 \frac{\partial \Pi}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial \Pi}{\partial z_2} \cdots + z_n \frac{\partial \Pi}{\partial z_n} = 0 \\ z_1^2 \frac{\partial \Pi}{\partial z_1} + z_2^2 \frac{\partial \Pi}{\partial z_2} \cdots + z_n^2 \frac{\partial \Pi}{\partial z_n} = 0. \end{cases}$$

Die Wurzeln $\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_n$ der transformirten Gleichung $F = 0$ hängen nach 2. 3. mit den z einzeln zusammen durch die Gleichungen:

$$6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \mu_1 \varphi(z_1) + \psi(z_1) = 0 \\ \mu_2 \varphi(z_2) + \psi(z_2) = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ \mu_n \varphi(z_n) + \psi(z_n) = 0 \end{cases}$$

Die absoluten Invarianten von F sind Functionen der μ, welche partiellen Differentialgleichungen genügen, die den Gleichungen 5. völlig analog sind. Setzt man aber

$$7 \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \varphi(z) = b z^m + b_1 z^{m-1} \cdots + b_m \\ \psi(z) = c z^m + c_1 z^{m-1} \cdots + c_m, \end{cases}$$

so kann man die μ und also auch die absoluten Invarianten von F auch als Functionen der Grössen

$$8 \quad . \quad . \quad . \quad z_1, z_2 \ldots z_n; \; b, b_1 \ldots b_m; \; c, c_1 \ldots c_m$$

betrachten; und die erste Anschauungsweise kann man dann so modificiren, dass man die absoluten Invarianten von F als Functionen von

$$9 \quad \ldots \quad \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n;\ b, b_1 \ldots b_m;\ c, c_1 \ldots c_m$$

ansieht, *welche aber die Grössen b_i und c_i nicht mehr enthalten.* Wir wollen nun die Differentialquotienten einer absoluten Invariante Π von F unter beiden Anschauungsweisen bilden. Und zwar wollen wir dieselben in Klammern schliessen, sobald wir Π als Function der Grössen 9. ansehen, die Differentialquotienten aber ohne Klammer schreiben, sobald Π als Function der Grössen 8. aufgefasst wird.

Gehen wir von der ersten Anschauung aus, so genügt Π, als Function der μ allein, den Gleichungen

$$10 \quad \ldots \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right) = 0 & \left(\frac{\partial \Pi}{\partial c}\right) = 0 \\ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial b_1}\right) = 0 & \left(\frac{\partial \Pi}{\partial c_1}\right) = 0 \\ \ldots & \ldots \\ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial b_m}\right) = 0 & \left(\frac{\partial \Pi}{\partial c_m}\right) = 0. \end{cases}$$

Insofern aber Π zugleich eine absolute Invariante von F sein soll, treten noch die drei folgenden, nach der Analogie von 5. gebildeten Gleichungen hinzu:

$$11 \quad \ldots \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_1}\right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_2}\right) \ldots + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_m}\right) = 0 \\ \mu_1 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_1}\right) + \mu_2 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_2}\right) \ldots + \mu_m \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_m}\right) = 0 \\ \mu_1^2 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_1}\right) + \mu_2^2 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_2}\right) \ldots + \mu_m^2 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_m}\right) = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen 10. 11. umfassen alles, was zur Definition von Π als absoluter Invariante von F erforderlich ist. Die Gleichungen 10. 11. sind also die gesuchten Differentialgleichungen; es kommt darauf an, ihnen die passende Form zu geben, indem man von den eingeklammerten Differentialquotienten zu nicht eingeklammerten übergeht.

2.

Zweite Form des Systems partieller Differentialgleichungen.

Um diesen Uebergang auszuführen, werde ich zunächst die Gleichungen 10. 11. durch eine Art symbolischer Bezeichnung in eine einzige zusammenfassen.

Durch $\delta\Pi$ werde ich die Variation einer Function Π bezeichnen, wie dieselbe entsteht, wenn in der Function der Grössen b_i und c_i variirt werden. Aber die Bedeutung dieser Variation hängt davon ab, welche Grössen neben den b_i und c_i als Veränderliche betrachtet werden. Es ist daher zu unterscheiden zwischen den Ausdrücken $(\delta\Pi)$ und $\delta\Pi$; bei ersteren ist Π von den Grössen 9. abhängig und die μ werden nicht variirt, bei letzterem ist Π von den Grössen 8. abhängig, und die z werden nicht variirt.

Wir können nun die Gleichungen 10. 11. zusammenfassen in die eine:

$$12 \quad . \quad . \quad 0 = (\delta\Pi) + \Sigma \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\mu_i}\right) . (\alpha + 2\beta\mu_i + \gamma\mu_i^2),$$

wenn wir nur feststellen, dass dieselben für alle Werthe der Variationen δb_i, δc_i bestehen soll, und für alle Werthe der beliebigen Coefficienten α, β, γ; denn unter dieser Voraussetzung löst 12. sich sofort wieder in die Gleichungen 10. 11. auf. In dieser Gleichung sind nun die eingeklammerten Differentialquotienten und Variationen auf nicht eingeklammerte zurückzuführen.

Die Variation $(\delta\Pi)$ hängt mit $\delta\Pi$ durch die Gleichungen

$$13 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta\Pi) = \delta\Pi + \Sigma \frac{\partial\Pi}{\partial z_i} (\delta z_i)$$

zusammen; die Differentialquotienten von Π nach den μ werden auf die nach den z genommenen durch die Gleichungen

$$14 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\mu_i}\right) = \Sigma \frac{\partial\Pi}{\partial z_k} \left(\frac{\partial z_k}{\partial\mu_i}\right)$$

zurückgeführt. Es sind also nur die Differentialquotienten und Variationen der z auszudrücken.

Die Variationen der z erhält man aus den Gleichungen 6.:

$$15 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mu_i\varphi(z_i) + \psi(z_i) = 0,$$

indem man diese Gleichungen variirt, die μ aber dabei constant lässt. Man hat dann

$$16 \quad . \quad . \quad \{\mu_i \varphi'(z_i) + \psi'(z_i)\}(\delta z_i) + \mu_i \delta\varphi(z_i) + \delta\psi(z_i) = 0;$$

und zwar bezieht sich in $\delta\varphi(z_i)$, $\delta\psi(z_i)$ die Variation nur noch auf die Coefficienten; denn der Voraussetzung nach bleiben bei den nicht eingeklammerten Variationen die z unberücksichtigt. Setzt man nun den Werth von μ_i aus 15. in 16. ein, so erhält man:

$$17 \quad . \quad . \quad (\delta z_i)\{\psi(z_i)\varphi'(z_i) - \varphi(z_i)\psi'(z_i)\} + \{\psi(z_i)\delta\varphi(z_i) - \varphi(z_i)\delta\psi(z_i)\} = 0.$$

Um den hieraus fliessenden Werth von δz_i kürzer zu schreiben, führe ich die Function θ ein durch die Gleichung

$$18 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \theta(z) = \psi(z)\varphi'(z) - \varphi(z)\psi'(z),$$

und setze ferner fest, dass der einer Function beigefügte Index i bedeute, es solle in der Function z durch z_i ersetzt werden. Alsdann ist

$$19 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta z_i) = -\left[\frac{\psi\delta\varphi - \varphi\delta\psi}{\theta}\right]_i,$$

und die Gleichung 13. $(\delta\Pi)$ verwandelt sich in die folgende:

$$20 \quad . \quad . \quad . \quad (\delta\Pi) = \delta\Pi - \Sigma\frac{\partial\Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\psi\delta\varphi - \varphi\delta\psi}{\theta}\right]_i.$$

In ähnlicher Weise findet man den Differentialquotienten $\left(\frac{\partial z_i}{\partial \mu_i}\right)$, indem man die betreffende Gleichung 6. nach μ_i differenzirt. Es ergiebt sich dann:

$$21 \quad . \quad . \quad . \quad \{\mu_i\varphi'(z_i) + \psi'(z_i)\}\left(\frac{\partial z_i}{\partial \mu_i}\right) + \varphi(z_i) = 0,$$

oder, wenn man wieder den Werth von μ aus 6. einführt:

$$22 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left(\frac{\partial z_i}{\partial \mu_i}\right) = -\left[\frac{\varphi^2}{\theta}\right]_i.$$

Da jedes μ nur von dem betreffenden z abhängt und umgekehrt, so sind alle Differentialquotienten $\left(\frac{\partial z_i}{\partial \mu_k}\right)$ gleich Null, bei denen k von i verschieden ist.

Wir können die Gleichung 12. nun in ihrer neuen Gestalt bilden, und erhalten, indem wir rechts auch noch μ_i durch seinen aus 6. genommenen Werth ersetzen:

$$23 \quad \ldots \quad 0 = \delta\Pi - \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\psi\delta\varphi - \varphi\delta\psi + \alpha\varphi^2 - 2\beta\varphi\psi + \gamma\psi}{\theta}\right]_i$$

Wir können nun auch die Differentialgleichungen 10. 11. in ihrer neuen Gestalt sofort aufstellen. Wir brauchen nur die Coefficienten der einzelnen Variationen δb_i, δc_i, so wie die Coefficienten von α, β, γ einzeln verschwinden zu lassen, und erhalten das folgende, aus drei Gruppen von Gleichungen bestehende System:

$$24 \quad \ldots \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial b} - \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\psi . z^m}{\theta}\right]_i \\ 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial b_1} - \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\psi . z^{m-1}}{\theta}\right]_i \\ \quad \ldots \ldots \\ 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial b_m} - \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\psi}{\theta}\right]_i \end{cases}$$

$$25 \quad \ldots \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial c} + \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\varphi . z^m}{\theta}\right]_i \\ 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial c_1} + \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\varphi . z^{m-1}}{\theta}\right]_i \\ \quad \ldots \ldots \\ 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial c_m} + \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\varphi}{\theta}\right]_i \end{cases}$$

$$26 \quad \ldots \quad \begin{cases} 0 = \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\varphi^2}{\theta}\right]_i \\ 0 = \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\varphi\psi}{\theta}\right]_i \\ 0 = \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\psi^2}{\theta}\right]_i. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bilden ein *vollständiges System* in dem Sinne, in welchem ich diesen Begriff im 65. Bd. des Borchardtschen Journals, p. 257, definirt habe. Denn sie sind aus den Gleichungen 10. 11. entstanden, welche offenbar ein solches System bilden. Die Zahl aller Gleichungen ist $2m + 5$; die Anzahl der in ihnen auftretenden Veränderlichen ist $2m + n + 2$. Daher besitzen sie

$$(2m + n + 2) - (2m + 5) = n - 3$$

von einander unabhängige Lösungen, die von einander unabhängigen absoluten Invarianten der Function F.

3.

Ausgezeichnete Combinationen der Gleichungen des Systems.

Um Combinationen des obigen Systems von Gleichungen herzustellen, kann man die Gleichungen des Systems mit Factoren multiplicirt addiren. Aber man erreicht dasselbe, wenn man auf die symbolische Gleichung 23. zurückgeht, und in dieser den Variationen die Werthe beilegt, welche jenen Factoren zukommen würden.

Bezeichnen wir durch δ' neue Variationen der b_i und c_i, welche mit den alten durch die Gleichungen verknüpft sind:

$$27 \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \delta'\varphi = \delta\varphi - (\beta - \varkappa)\,\varphi + \gamma\psi \\ \delta'\psi = \delta\psi - \alpha\varphi + (\beta + \varkappa)\,\psi \end{cases}$$

in denen die Grösse $\varkappa$ eine ganz beliebige Constante bedeutet. Vergleicht man die Coefficienten der Potenzen von z in 27., so ergeben sich daraus für die neuen Variationen der b_i und c_i im Zusammenhange mit den ursprünglichen die Gleichungen:

$$28 \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \delta' b_i = \delta b_i - (\beta - \varkappa)\, b_i + \gamma c_i \\ \delta' c_i = \delta c_i - a b_i + (\beta + \varkappa)\, c_i. \end{cases}$$

Da in 23. die Variationen δb_i, δc_i nur die eine Eigenschaft haben sollten, ganz willkürlich zu sein, so kommt diese Eigenschaft den Variationen $\delta' b_i$, $\delta' c_i$ noch ebenso zu. Entnehmen wir aber aus 28. die Werthe

$$29 \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \delta b_i = \delta' b_i + (\beta - \varkappa)\, b_i - \gamma c_i \\ \delta c_i = \delta' c_i + a b_i - (\beta + \varkappa)\, c_i, \end{cases}$$

so finden wir

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} \delta b_i + \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} \delta c_i \\ &= \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} \delta' b_i + (\beta - \varkappa)\, \Sigma b_i \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} - \gamma \Sigma c^i \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} \\ &\quad + \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} \delta' c_i + a \Sigma b_i \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} - (\beta + \varkappa)\, \Sigma c_i \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} \\ &= \delta'\Pi + (\beta - \varkappa) \Sigma b_i \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} - \gamma \Sigma c_i \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} + a \Sigma b_i \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} - (\beta + \varkappa)\, \Sigma c_i \frac{\partial \Pi}{\partial c_i}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies und die Ausdrücke 27. in 23. ein, so erhalten wir die transformirte symbolische Gleichung:

$$30 \quad . \quad . \quad . \quad 0 = \delta'\Pi - \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\psi\delta'\varphi - \varphi\delta'\psi}{\theta}\right]_i$$
$$+ (\beta - \varkappa)\Sigma b_i \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} - \gamma \Sigma c_i \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} + \Sigma b_i \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} - (\beta + \varkappa)\Sigma c_i \frac{\partial \Pi}{\partial c_i}.$$

Da die Grössen α, β, γ, $\varkappa$ ganz beliebig sein sollen, so ergeben sich hieraus zunächst die vier Gleichungen:

$$31 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Sigma\, b_i \dfrac{\partial \Pi}{\partial b_i} = 0 \\ \Sigma\, c_i \dfrac{\partial \Pi}{\partial b_i} = 0 \\ \Sigma\, b_i \dfrac{\partial \Pi}{\partial ci} = 0 \\ \Sigma\, c_i \dfrac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0. \end{cases}$$

Es bleibt dann von 30. eine symbolische Gleichung übrig, in welcher die Variationen δ', wie die Variationen δ, nur die Eigenschaft haben, ganz beliebig zu sein, so dass es gleichgültig ist, ob man bei den Variationen die Striche setzt oder nicht. Die übrig bleibende Gleichung kann man also schreiben:

$$32 \quad . \quad . \quad . \quad 0 = \delta\Pi - \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\psi\delta\varphi - \varphi\delta\psi}{\theta}\right]_i$$

Untersuchen wir zunächst den Inhalt der vier Gleichungen 31.

Führen wir in den Gleichungen 31. statt der b_i und c_i die folgenden Veränderlichen ein, welche, wie man sieht, unabhängige Functionen der erstern sind, da sich diese aus jenen berechnen lassen:

$$33 \quad . \quad . \quad . \begin{cases} \qquad\qquad\qquad b,\ b_1,\ c,\ c_1, \\ r_2 = b_2 c - c_2 b,\ \ r_3 = b_3 c - c_3 b\ \ldots r_m = b_m c - c_m b \\ s_2 = b_2 c_1 - c_2 b_1,\ \ s_3 = b_3 c_1 - c_3 b_1 \ldots r_m = b_m c_1 - c_m b_1, \end{cases}$$

und klammern wieder die im letzten Sinne genommenen Differentialquotienten ein. Wir haben dann:

$$
34 \ldots \begin{cases}
\frac{\partial \Pi}{\partial b} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right) - \Sigma c_i \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r_i}\right) & \frac{\partial \Pi}{\partial c} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial c}\right) + \Sigma b_i \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r_i}\right) \\
\frac{\partial \Pi}{\partial b_1} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial b_1}\right) - \Sigma c_i \left(\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}\right) & \frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial c_1}\right) + \Sigma b_i \left(\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}\right) \\
\frac{\partial \Pi}{\partial b_i} = c\left(\frac{\partial \Pi}{\partial r_i}\right) + c_1\left(\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}\right) & \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = -b\left(\frac{\partial \Pi}{\partial r_i}\right) - b_1\left(\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}\right)
\end{cases}
$$

$$(i > 1);$$

und die Gleichungen 31. gehen in folgende über:

$$
35 \ldots \begin{cases}
b\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right) + b_1\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b_1}\right) + \Sigma r_i \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r_i}\right) + \Sigma s_i \left(\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}\right) = 0, \\
c\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right) + c_1\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b_1}\right) = 0, \quad b\left(\frac{\partial \Pi}{\partial c}\right) + b_1\left(\frac{\partial \Pi}{\partial c_1}\right) = 0, \\
c\left(\frac{\partial \Pi}{\partial c}\right) + c_1\left(\frac{\partial \Pi}{\partial c_1}\right) + \Sigma r_i \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r_i}\right) + \Sigma s_i \left(\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}\right) = 0.
\end{cases}
$$

Bildet man aber aus der ersten und vierten dieser Gleichungen die Combination;

$$36 \ldots b\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right) + b_1\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b_1}\right) - c\left(\frac{\partial \Pi}{\partial c}\right) - c_1\left(\frac{\partial \Pi}{\partial c_1}\right) = 0,$$

so giebt diese mit der zweiten und dritten Gleichung 35. zusammen die Verhältnisse der vier Grössen

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right), \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial b_1}\right), \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial c}\right), \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial c_1}\right).$$

Denn nach der zweiten und dritten Gleichung 35. kann man setzen:

$$
37 \ldots \begin{cases}
\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right) = \rho c_1, & \left(\frac{\partial \Pi}{\partial b_1}\right) = -\rho c, \\
\left(\frac{\partial \Pi}{\partial c}\right) = \sigma b_1, & \left(\frac{\partial \Pi}{\partial c_1}\right) = -\sigma b,
\end{cases}
$$

und 36. giebt dann:

$$(\rho + \sigma)(bc_1 - cb_1) = 0,$$

also

$$38 \ldots\ldots\ldots \sigma = -\rho.$$

Daher folgt aus 37., soweit Π von b, b_1, c, c_1 abhängt:

$$d\Pi = \rho\{c_1 db + b dc_1 - c db_1 - b_1 dc\} = \rho d(bc_1 - cb_1).$$

Es ist also Π eine Function der Grössen

$$r_2, r_3 \ldots r_m, s_2, s_3 \ldots s_m, \; t = bc_1 - cb_1$$

allein. Und zwar hat man

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right) = \quad c_1 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b_1} = -c \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right)$$
$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial c}\right) = -b_1 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = \quad b \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right),$$

also

$$b\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right) + b_1\left(\frac{\partial \Pi}{\partial b_1}\right) = c\left(\frac{\partial \Pi}{\partial c}\right) + c_1\left(\frac{\partial \Pi}{\partial c_1}\right) = t\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right).$$

Die Gleichungen 35. kommen daher auf die eine zurück:

$$t\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right) + \Sigma r_i \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r_i}\right) + \Sigma s_i \left(\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}\right) = 0,$$

welche aussagt, *dass* Π *eine homogene Function nullter Ordnung der* $2m-1$ *Grössen*

$$t, r_2, r_3 \ldots r_m, s_2, s_3 \ldots s_m$$

ist. Unter dieser Voraussetzung, und nur unter dieser, werden die Gleichungen 35. oder 31. sämmtlich befriedigt.

Man kann statt dessen auch sagen, dass Π eine homogene Function nullter Ordnung der $\frac{m.m+1}{2}$ Grössen

$$b_i c_k - c_i b_k$$

sei; denn nach einer sehr bekannten Identität ist

$$b_i c_k - c_i b_k = \frac{r_i s_k - s_i r_k}{t},$$

so dass jede homogene Function nullter Ordnung der Grössen $b_i c_k - c_i b_k$ auch eine solche der Grössen t, r_i, s_i ist, während umgekehrt auch das letztere stattfindet, da die letztern Grössen unter den ersten enthalten sind.

Die Grössen $b_i c_k$ sind die Coefficienten des Ausdrucks

$$\varphi(x)\,\psi(y) - \psi(x)\,\varphi(y);$$

man kann also endlich auch sagen, dass wegen der Gleichungen 31. Π eine homogene Function nullter Ordnung der Coefficienten dieses Ausdrucks sei, wie Hr. Gordan auf anderm Wege bewiesen hat. —

Die Gesammtzahl aller in 23. enthaltenen Gleichungen war $2m+5$; dagegen liefert 32. noch $2m+2$ Gleichungen, während zugleich die 4 Gleichungen 31. bestehen. Diese $2m+6$ Gleichungen können nicht sämmtlich von einander unabhängig sein; vielmehr muss eine aus 32. fliessende Combination existiren, welche zugleich eine Combination der Gleichungen ist. Man findet eine solche, indem man die Variation δ so bestimmt, dass $\delta\varphi=\varphi$, $\delta\psi=\psi$ wird; $\delta\Pi$ wird dann

$$\delta\Pi=\Sigma\, b_i\frac{\partial\Pi}{\partial b_i}+\Sigma\, c_i\frac{\partial\Pi}{\partial c_i},$$

und die Gleichung 32. geht in die Summe der ersten und der letzten Gleichung 31. über.

Ferner giebt es vier aus 32. folgende Combinationen, welche die soeben genannte umfassen, und zugleich nichts andres liefern, als die partiellen Differentialgleichungen, denen jede simultane absolute Invariante von f, φ, ψ genügt. Man erhält diese, indem man die Variationen δb_i, δc_i aus den folgenden Gleichungen bestimmt:

$$39\;.\;.\;.\;\begin{cases}\delta\varphi=(\alpha z+\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial z}-(\alpha' z+\beta')\left(m\varphi-z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\\ \delta\psi=(\alpha z+\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial z}-(\alpha' z+\beta')\left(m\psi-z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),\end{cases}$$

wo α, β, α', β' willkürliche Grössen bezeichnen sollen.

Es stehen hier wirklich auf beiden Seiten nur Functionen $m$ter Ordnung, da in den Ausdrücken

$$m\varphi-z\frac{\partial\varphi}{\partial z},\qquad m\psi-z\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

die höchsten Terme sich aufheben. Vergleicht man aber die Coefficienten auf beiden Seiten der Gleichungen 39., so hat man

$$40\;.\;.\;\begin{cases}\delta b=m\alpha b-\alpha' b_1\\ \delta b_1=(m-1)\alpha b_1-2\alpha' b_2+m\beta b-\beta' b_1\\ \delta b_2=(m-2)\alpha b_2-3\alpha' b_3+(m-1)\beta b_1-2\beta' b_2\\ \quad .\;\;.\;\;.\;\;.\\ \delta b_{m-1}=\alpha b_{m-1}-m\alpha' b_m+2\beta b_{m-2}-(m-1)\beta' b_{m-1}\\ \delta b_m=\beta b_{m-1}-m\beta' b_m\end{cases}$$

$$41\ldots\begin{cases}\delta c = mac - \alpha' c_1 \\ \delta c_1 = (m-1)\alpha c_1 - 2\alpha' c_2 + m\beta c - \beta' c_1 \\ \delta c_2 = (m-2)\alpha c_2 - 3\alpha' c_3 + (m-1)\beta c_1 - 2\beta' c_2 \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \delta c_{m-1} = \alpha c_{m-1} - m\alpha' c_m + 2\beta c_{m-2} - (m-1)\beta' c_{m-1} \\ \delta c_m = \beta c_{m-1} - m\beta' c_m.\end{cases}$$

Es wird also:

$$\begin{aligned}42\ldots\delta\Pi = \alpha\{ & mb\frac{\partial\Pi}{\partial b} + (m-1)b_1\frac{\partial\Pi}{\partial b_1} + \ldots + mc\frac{\partial\Pi}{\partial c} + (m-1)c_1\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} + \ldots\} \\ + \beta\{ & mb\frac{\partial\Pi}{\partial b_1} + (m-1)b_1\frac{\partial\Pi}{\partial b_2} + \ldots + mc\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} + (m-1)c_1\frac{\partial\Pi}{\partial c_2} + \ldots\} \\ - \alpha'\{ & b_1\frac{\partial\Pi}{\partial b} + 2b_2\frac{\partial\Pi}{\partial b_1} + \ldots + c_1\frac{\partial\Pi}{\partial c} + 2c_2\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} + \ldots\} \\ - \beta'\{ & b_1\frac{\partial\Pi}{\partial b_1} + 2b_2\frac{\partial\Pi}{\partial b_2} + \ldots + c_1\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} + 2c_2\frac{\partial\Pi}{\partial c_2} + \ldots\},\end{aligned}$$

während zugleich nach 39.:

$$43\ldots\ldots \psi\delta\varphi - \varphi\delta\psi = (\alpha' z^2 + (\alpha + \beta')z + \beta)\,.\,\Theta.$$

Führt man diese Ausdrücke in 32. ein, und lässt die Coefficienten von α, α', β, β' verschwinden, so erhält man die vier Gleichungen:

$$44\ldots\begin{cases} mb\frac{\partial\Pi}{\partial b} + (m-1)b_1\frac{\partial\Pi}{\partial b_1}\cdots + mc\frac{\partial\Pi}{\partial c} + (m-1)c_1\frac{\partial\Pi}{\partial c_1}\cdots = \Sigma z_i\frac{\partial\Pi}{\partial z_i} \\ mb\frac{\partial\Pi}{\partial b_1} + (m-1)b_1\frac{\partial\Pi}{\partial b_2}\cdots + mc\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} + (m-1)c_1\frac{\partial\Pi}{\partial c_2}\cdots = \Sigma\frac{\partial\Pi}{\partial z_i} \\ b_1\frac{\partial\Pi}{\partial b} + 2b_2\frac{\partial\Pi}{\partial b_1}\cdots + c_1\frac{\partial\Pi}{\partial c} + 2c_2\frac{\partial\Pi}{\partial c_1}\cdots = -\Sigma z_i^2\frac{\partial\Pi}{\partial z_i} \\ b_1\frac{\partial\Pi}{\partial b} + 2b_2\frac{\partial\Pi}{\partial b_2}\cdots + c_1\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} + 2c_2\frac{\partial\Pi}{\partial c_2}\cdots = -\Sigma z_i\frac{\partial\Pi}{\partial z_i},\end{cases}$$

welche die partiellen Differentialgleichungen für die simultanen absoluten Invarianten von f, φ, ψ sind.

Sondert man aus den $2m+2$ durch 32. dargestellten Gleichungen diese vier ab, so bleiben noch $2m-2$ übrig, welche der vorliegenden Frage eigenthümlich sind. Es kommt darauf an, diese in einer symmetrischen und übersichtlichen Form aufzustellen.

4.

Die Wurzeln von $\theta = 0$.

Die $2m-2$ Combinationen der partiellen Differentialgleichungen, welche zusammen mit den Gleichungen 31. und 44. das ganze System bilden, kann man in einer gewissen Weise den $2m-2$ Wurzeln der Gleichungen $\theta = 0$ entsprechen lassen, Wir untersuchen deswegen zunächst diese Wurzeln selbst, um sie sodann an Stelle der b_i und c_i als Veränderliche in die Differentialgleichungen einzuführen.

Die Function θ hat den Ausdruck:

$$\begin{aligned}\theta &= \psi\varphi'(z) - \varphi\cdot\psi'(z)\\ &= (cz^m + c_1 z^{m-1}\ldots)(mb\,z^{m-1} + (m-1)b_1 z^{m-2}\ldots)\\ &\qquad - (bz^m + b_1 z^{m-1}\ldots)(mcz^{m-1} + (m-1)c_1 z^{m-2}\ldots)\\ &= (bc_1 - cb_1)z^{2m-2} + \ldots\end{aligned}$$

Der erste Coefficient von θ ist also die Grösse t, und indem man die Wurzeln von $\theta = 0$ durch $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{2m-2}$ bezeichnet, hat man

$$* \quad 45 \quad \ldots \quad \theta = t(z-\xi_1)(z-\xi_2)\ldots(z-\xi_{2m-2}).$$

Da nun sämmtliche Coefficienten von θ offenbar lineare Combinationen der Grössen $b_i c_k - c_i b_k$ sind, so hängen die ξ nur von diesen Ausdrücken ab; und zwar sind sie homogene Functionen nullter Ordnung dieser Ausdrücke, denn die Wurzeln von $\theta = 0$ werden nicht geändert, wenn eine der Functionen φ oder ψ um einen constanten Factor geändert wird. *Die Wurzeln von* θ *sind also gemeinsame Lösungen der vier Gleichungen* 31.

Die vier Gleichungen 31. enthalten $2m+2$ Veränderliche und lassen also höchstens, und wie aus dem Frühern hervorgeht, auch wirklich, $2m-2$ von einander unabhängige Lösungen zu. Ich werde nun zeigen, dass die Grössen ξ_i in der That von einander unabhängige Functionen sind. Es folgt dann, *dass alle Lösungen der Gleichungen* 31. *als Functionen der* ξ_i *betrachtet werden können, und dass man jene Gleichungen in allgemeinster Weise vollständig befriedigt, indem man* Π *als Function der* z_i *und der* ξ_i *allein betrachtet.*

Der Beweis, dass die ξ von einander unabhängige Lösungen der Gleichungen 31. sind, ist leicht in folgender Weise zu führen. Alle Lösungen jener Gleichungen sind homogene Functionen nullter Ordnung von $t, r_2, r_3 \ldots r_m, s_2, s_3 \ldots s_m$, oder, was dasselbe ist, Functionen der $2m-2$ Grössen

$$\frac{r_2}{t}, \frac{r_3}{t}, \ldots \frac{r_m}{t}, \frac{s_2}{t}, \frac{s_3}{t}, \ldots \frac{s_m}{t}.$$

Schliesst man also die Differentialquotienten nach den r_i und s_i wieder in Klammern ein, so hat man die folgenden Formeln für die ξ_k, welche den Formeln 34. analog gebildet sind:

$$46 \ldots \begin{aligned} \frac{\partial \xi_k}{\partial b_i} &= c \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial r_i}\right) + c_1 \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial s_i}\right) \\ \frac{\partial \xi_k}{\partial c_i} &= -b \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial r_i}\right) + -b_1 \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial s_i}\right). \end{aligned} \qquad (i = 2, 3 \ldots m)$$

Die ξ_k sind $2m-2$ von einander unabhängige Functionen, sobald die Functionaldeterminante der ξ_k nach den r_i und s_i von Null verschieden ist, also die Determinante:

$$47 \ldots R = \left| \begin{matrix} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial r_2}\right) & \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial s_2}\right) & \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial r_3}\right) & \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial r_3}\right) & \ldots & \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial r_m}\right) & \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial s_m}\right) \\ \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial r_2}\right) & \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial s_2}\right) & \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial r_3}\right) & \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial s_3}\right) & \ldots & \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial r_m}\right) & \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial s_m}\right) \\ & & & \ldots & & & \end{matrix} \right|$$

Multiplicirt man aber diese Determinante mit der $(m-1)$ten Potenz der Determinante

$$\left| \begin{matrix} c & c_1 \\ -b & -b_1 \end{matrix} \right| = t,$$

so hat dieses wegen der Formel 46. nur den Erfolg, dass an Stelle der eingeklammerten Differentialquotienten nach den r_i, s_i die nicht eingeklammerten nach den b_i, c_i treten, so dass man die Formel hat:

$$48 \ldots R \,.\, t^{m-1} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial b_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial c_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial b_3} & \frac{\partial \xi_1}{\partial c_3} & \ldots & \frac{\partial \xi_1}{\partial b_m} & \frac{\partial \xi_1}{\partial c_m} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial b_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial c_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial b_3} & \frac{\partial \xi_2}{\partial c_3} & \ldots & \frac{\partial \xi_2}{\partial b_m} & \frac{\partial \xi_2}{\partial c_m} \\ & & & \ldots & & & \end{matrix} \right| .$$

Die Werthe der in dieser Formel auftretenden Differentialquotienten ergaben sich durch Differentiation der Gleichung:

$$0 = \theta(\xi_k) = \psi(\xi_k) \cdot \varphi'(\xi_k) - \varphi(\xi_k) \cdot \psi'(\xi_k).$$

Man erhält, indem man diese Gleichung nach b_i oder c_i differenzirt, wo $i = 2, 3 \ldots m$ ist:

$$49 \ldots \begin{cases} \theta'(\xi_k) \cdot \dfrac{\partial \xi_k}{\partial b_i} = -(m-i)\,\xi_k^{m-i-1} \cdot \psi(\xi_k) + \xi_k^{m-i} \cdot \psi'(\xi_k) \\ \theta'(\xi_k) \cdot \dfrac{\partial \xi_k}{\partial c_i} = (m-i)\,\xi_k^{m-i-1} \cdot \varphi(\xi_k) - \xi_k^{m-i} \cdot \varphi'(\xi_k). \end{cases}$$

Der linke auftretende Factor $\theta'(\xi_k)$ ist für keines der ξ_k identisch Null, oder was dasselbe ist, die Gleichung $\theta = 0$ hat nicht an und für sich eine Doppelwurzel. Denn für eine solche müssten gleichzeitig die Gleichungen

$$\psi \cdot \varphi' - \varphi \cdot \psi' = 0$$
$$\psi \cdot \varphi'' - \varphi \cdot \psi'' = 0$$

bestehen. Es müsste also entweder gleichzeitig $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sein, d. h. φ und ψ müssten an und für sich einen gemeinsamen Factor besitzen, was nicht der Fall ist; oder es müsste ein Factor λ existiren, so dass gleichzeitig

$$\varphi + \lambda\psi = 0$$
$$\varphi' + \lambda\psi' = 0$$
$$\varphi'' + \lambda\psi'' = 0,$$

d. h. eine Combination von φ und ψ müsste einen dreifachen Factor besitzen, was ebenso wenig eintreten kann, ohne besondere Beziehungen zwischen den veränderlichen Coefficienten b_i, c_i vorauszusetzen.

Man kann also die Gleichung 48. beiderseits mit dem Quadrate des Products

$$P = \theta'(\xi_1) \cdot \theta'(\xi_2) \ldots \theta'(\xi_{2m-2}),$$

welches bis auf einen nicht verschwindenden Factor die Discriminante von θ ist, multipliciren, und der Ausdruck

$$P^2 t^{m-1} R$$

wird durch die Determinante der rechten Seiten der Gleichungen 49. dargestellt.

Die rechten Seiten der Gleichungen 49. sind Functionen von ξ_k, welche bis zur $(2m-3)$ten Potenz einschliesslich aufsteigen. Die fragliche Determinante von $2m-3$ Reihen ist aber dadurch characterisirt, dass ihre Verticalreihen verschiedene Functionen $(2m-3)$ter Ordnung, ihre Horizontalreihen $2m-2$ Veränderliche ξ_k enthalten. Daher zerfällt diese Determinante sofort in zwei Factoren. Der eine ist die aus den Reihen

$$\xi_k^{2m-3} \quad \xi_k^{2m-4} \ldots \xi_k^2 \quad \xi_k \quad 1$$

gebildete Determinante, und wird dem Differenzenproduct der ξ_k bis aufs Vorzeichen gleich; da dieses Differenzenproduct nicht identisch verschwindet, so ist nur noch der andere Factor zu betrachten. Dieser andere Factor nun ist die Determinante der Coefficienten aller $2m-2$ Functionen, welche die rechten Seiten der Gleichungen 49. bilden. Und zwar sind, abgesehen vom Vorzeichen und von ihrer Reihenfolge, diese Functionen die folgenden:

$$50 \ldots \left\{ \begin{aligned} (m-2)\xi^{m-3}\varphi - \xi^{m-2}\varphi' &= \sum_{h=0}^{h=m} (h-2) \quad b_h \xi^{2m-h-3} \\ (m-3)\xi^{m-4}\varphi - \xi^{m-3}\varphi' &= \sum_{h=0}^{h=m} (h-3) \quad b_h \xi^{2m-h-4} \\ &\;\;\ldots\ldots \\ \varphi - \xi \quad \varphi' &= \sum_{h=0}^{h=m} (h-m+1)\, b_h \xi^{m-h} \\ - \quad \varphi' &= \sum_{h=0}^{h=m} (h-m) \quad b_h \xi^{m-h-1} \end{aligned} \right.$$

$$51 \ldots \left\{ \begin{aligned} (m-2)\xi^{m-3}\psi - \xi^{m-2}\psi' &= \sum_{h=0}^{h=m} (h-2) \quad c_h \xi^{2m-h-3} \\ (m-3)\xi^{m-4}\psi - \xi^{m-3}\psi' &= \sum_{h=0}^{h=m} (h-3) \quad c_h \xi^{2m-h-4} \\ &\;\;\ldots\ldots \\ \psi - \xi \quad \psi' &= \sum_{h=0}^{h=m} (h-m+1)\, c_h \xi^{m-h} \\ - \quad \psi' &= \sum_{h=0}^{h=m} (h-m) \quad c_h \xi^{m-h-1} \end{aligned} \right.$$

Für $m = 2$ ist die Determinante der Coefficienten dieser Functionen:

$$\begin{vmatrix} -2b & -b_1 & 0 & 0 \\ -0 & -3b & -2b_1 & -b_2 \\ -2c & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & -3c & -2c_1 & -c_2 \end{vmatrix} = -2(bc_1 - cb_1)(b_1c_2 - c_1b_2),$$

also von Null verschieden, wie zu beweisen war. Für alle höheren Werthe von m aber erhält man schon von Null verschiedene Werthe der Determinante, wenn man in den Coefficienten die folgenden besondern Annahmen macht:

$$b = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0 \ldots b_m = 0,\ c = 0,\ c_2 = 0 \ldots c_m \quad = 0,$$

so dass nur b, c_1, c_m von Null verschieden bleiben. Die Functionen 50. gehen dann bis auf die Zahlenfactoren über in die Potenzen

$$52 \quad \ldots \quad \xi^{2m-3},\ \xi^{2m-1} \ldots \xi^{m-1},$$

während die Functionen 51. die Ausdrücke annehmen:

$$53 \quad \ldots \quad \begin{cases} - \quad c_1\xi^{2m-4} + (m-2)c_m\xi^{m-3} \\ - \quad 2c_1\xi^{2m-5} + (m-3)c_m\xi^{m-4} \\ \quad \ldots\ldots \\ -(m-2)c_1\xi^{m-1} + \quad c_m \\ -(m-1)c_1\xi^{m-2}. \end{cases}$$

Man sieht, dass aus den Functionen 52. und 53. sich auch die Potenzen

$$\xi^{m-2},\ \xi^{m-3} \ldots\ldots,\ \xi^0,$$

also mit 52. überhaupt alle Potenzen von ξ bis zur $(2m-3)$ten einschliesslich, zusammensetzen lassen. Daher kann die oben betrachtete Determinante, welche den Nenner bilden würde, wenn man die Potenzen von ξ durch die Functionen 50. 51. auszudrücken versuchte, nicht identisch verschwinden.

Es ist also auch R nicht identisch Null, und damit bewiesen, dass man die Wurzeln von θ als die unabhängigen Lösungen der Gleichungen 31. zu Grunde legen darf.

5.

Einführung der Wurzeln von $\theta = 0$ als neuer Veränderlichen.

Da die ξ_k von einander unabhängige Lösungen der Gleichungen 31. sind, und ihre Zahl hinreichend gross ist, so kann man diese Gleichungen identisch erfüllen, indem man Π ausser von den z_i nur von den ξ_k abhängig sein lässt. Alle noch von Π zu befriedigenden partiellen Differentialgleichungen sind in der symbolischen Gleichung 32.

54 . . . . $$0 = \delta\Pi - \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\left[\frac{\psi\delta\varphi - \varphi\delta\psi}{\theta}\right]_i$$

enthalten, und es ist also nur nöthig diese Gleichung in einer solchen Weise umzugestalten, dass darin die Variationen der ξ_k an Stelle der Variationen δb_i, δc_i erscheinen.

Nun ist der Zähler des Ausdrucks

$$\frac{\psi\delta\varphi - \varphi\delta\psi}{\theta}$$

um 2 Ordnungen höher als der Nenner; setzt man also an Stelle von θ seinen Werth (45.)

$$\theta = t(z-\xi_1)(z-\xi_2)\dots(z-\xi_{2m-2}),$$

und zerlegt in Partialbrüche, so erhält man für die Zerlegung die Form:

55 . . . . $$\frac{\psi\delta\varphi - \varphi\delta\psi}{\theta} = Az^2 + Bz + C + \sum_k \frac{M_k}{z-\xi_k}.$$

Ich werde nun zunächst zeigen, dass die $2m+1$ Constanten A, B, C, M_1, M_2 . . . M_{2m-2} ganz beliebig bleiben, sobald man die Variationen der Coefficienten b_i, c_i als ganz beliebige Constanten voraussetzt. Hierzu gehört nur, dass man zeigt, wie bei beliebig gegebenen Werthen der A, B, C, M sich immer Functionen $m$ter Ordnung $\delta\varphi$, $\delta\psi$ angeben lassen, so dass die Gleichung 55. besteht.

Zu diesem Zwecke bezeichne ich die Wurzeln der Gleichung $\varphi = 0$ durch $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m$, die von $\psi = 0$ durch $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_m$, so dass

56 . . . . $$\begin{cases} \varphi = b\cdot(z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_m) \\ \psi = c\cdot(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\dots(z-\gamma_m). \end{cases}$$

Ich setze nun in 55. für z der Reihe nach einmal die Werthe β_i, einmal die Werthe c_i ein. Da

$$\theta = \psi \cdot \varphi'(z) - \varphi \cdot \varphi'(z),$$

so wird

$$57 \quad \ldots \quad \begin{cases} \theta(\beta_i) = \quad \psi(\beta_i) \cdot \varphi'(\beta_i) \\ \theta(\gamma_i) = -\varphi(\gamma_i) \cdot \psi'(\gamma_i), \end{cases}$$

und man erhält also aus 55. folgende zwei Gleichungen:

$$58 \quad \ldots \quad \begin{cases} (\delta\varphi)_{\beta_i} = \varphi'\beta_i)\{A\beta_i^2 + B\beta_i + C + \sum\limits_k \frac{M_k}{\beta_i - \xi_k}\} \\ (\delta\psi)_{\gamma_i} = \psi'(\gamma_i)\{A\gamma_i^2 + B\gamma_i + C + \sum\limits_k \frac{M_k}{\gamma_i - \xi_k}\}. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Werthe, welche $\delta\varphi$ und $\delta\psi$ für die Nullwerthe von φ und ψ annehmen, kann man nun nach der Lagrangeschen Interpolationsformel die Function $\delta\varphi$ und $\delta\psi$ wirklich bilden, bis auf additive Glieder, welche beziehungsweise aus φ oder ψ, multiplicirt mit willkürlichen Constanten, bestehen. Denn es ist

$$\delta\varphi = \varphi \cdot \{\varphi_0 + \sum \frac{(\delta\varphi)_{\beta_i}}{(z-\beta_i)\varphi'(\beta_i)}\}$$

$$\delta\psi = \psi \cdot \{\psi_0 + \sum \frac{(\delta\psi)_{\gamma_i}}{(z-\gamma_i)\psi'(\gamma_i)}\}$$

wo φ_0, ψ_0 willkürliche Constante bedeuten; und daher hat man, indem man die rechten Theile der Gleichungen 58. einführt:

$$59 \ldots \begin{cases} \delta\varphi = \varphi \cdot \varphi_0 + \varphi \cdot \sum \frac{A\beta_i^2 + B\beta_i + C}{z - \beta_i} + \varphi \sum\sum \frac{M_k}{z-\beta_i \cdot \beta_i - \xi_k} \\ \delta\psi = \psi \cdot \psi_0 + \psi \cdot \sum \frac{A\gamma_i^2 + B\gamma_i + C}{z - \gamma_i} + \psi \sum\sum \frac{M_k}{z-\gamma_i \cdot \gamma_i - \xi_k}. \end{cases}$$

Die nach i genommenen Summen kann man nach den Regeln der Partialbruchzerlegung ausführen. Man hat nämlich:

$$60 \ldots \begin{cases} \sum \frac{A\beta_i^2 + B\beta_i + C}{z-\beta_i} = \frac{(Az^2 + Bz + C)\varphi'(z)}{\varphi(z)} - Amz - \frac{Bm - Ab_1}{b} \\ \sum \frac{A\gamma_i^2 + B\gamma_i + C}{z-\gamma_i} = \frac{(Az^2 + Bz + C)\psi'(z)}{\psi(z)} - Amz - \frac{Bm - Ab_1}{b}, \end{cases}$$

und ebenso

$$61 \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Sigma_i \dfrac{1}{z-\beta_i \cdot \beta_i-\xi_k} = \dfrac{\varphi'(z)}{(z-\xi_k)\varphi(z)} - \dfrac{\varphi'(\xi_k)}{(z-\xi_k)\varphi(\xi_k)} \\ \Sigma_i \dfrac{1}{z-\gamma_i \cdot \gamma_i-\xi_k} = \dfrac{\psi'(z)}{(z-\xi_k)\psi(z)} - \dfrac{\psi'(\xi_k)}{(z-\xi_k)\psi(\xi_k)}, \end{cases}$$

und die Ausdrücke für $\delta\varphi$, $\delta\psi$ können daher in der Form geschrieben werden:

$$62 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \delta\varphi = \varphi \cdot \varphi'_0 + (Az^2 + Bz + C)\varphi'(z) - Amz \cdot \varphi(z) \\ \qquad + \Sigma \dfrac{M_k}{z-\xi_k}\left(\varphi'(z) - \dfrac{\varphi'(\xi_k)}{\varphi(\xi_k)}\varphi(z)\right) \\ \delta\psi = \psi \cdot \psi'_0 + (Az^2 + Bz + C)\psi'(z) - Amz \cdot \psi(z) \\ \qquad + \Sigma \dfrac{M_k}{z-\xi_k}\left(\psi'(z) - \dfrac{\psi'(\xi_k)}{\psi(\xi_k)}\psi(z)\right), \end{cases}$$

wo der Kürze wegen an Stelle von φ_0, ψ_0 die ebenso unbestimmten Constanten

$$63 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \varphi'_0 = \varphi_0 - \dfrac{Bm - Ab_1}{b} \\ \psi'_0 = \psi_0 - \dfrac{Bm - Ac_1}{c}. \end{cases}$$

eingeführt sind. Bildet man nun aus 62. wiederum die Verbindung $\varphi\delta\varphi - \varphi\delta\psi$, indem man zugleich den Ausdruck von θ und die für die ξ_k bestehende Gleichung $\theta = 0$ oder

$$\frac{\varphi'(\xi_k)}{\varphi(\xi_k)} = \frac{\psi'(\xi_k)}{\psi(\xi_k)}$$

berücksichtigt, so erhält man

$$\psi\delta\varphi - \varphi\delta\psi = \varphi\psi(\varphi'_0 - \psi'_0) + \theta\left\{Az^2 + Bz + C + \Sigma \frac{M_k}{z-\xi_k}\right\}.$$

Die auf die allgemeinste Weise gebildeten Functionen $\delta\varphi$ und $\delta\psi$ befriedigen also auch die Gleichung 55. vollkommen, sobald nur

$$\varphi'_0 = \psi'_0$$

gesetzt wird. Diese Beziehung zwischen den willkürlichen Constanten voraussetzend, haben wir also in den Ausdrücken 62. in der That diejenigen Functionen $\delta\varphi$, $\delta\psi$, welche den beliebig gewählten constanten Werthen von $A, B, C, M_1, M_2, \ldots M_{2m-2}$ entsprechen, und es ist damit nachgewiesen, dass diese in der That als völlig willkürlich angesehen werden dürfen. Dabei erscheinen freilich die Ausdrücke 62. als Functionen $(m+1)$ter Ordnung, aber dies ist eben nur scheinbar, da die Terme $(m+1)$ter Ordnung sich, theils durch Subtraction, theils durch Division, überall aufheben.

Setzt man

$$64 \quad . \; . \; . \; . \quad \varphi'_0 = \psi'_0 = \varkappa \qquad \frac{\varphi'(\xi_k)}{\varphi(\xi_k)} = \frac{\psi'(\xi_k)}{\psi(\xi_k)} = \lambda_k$$

und

$$65 \quad . \; . \; . \; . \quad \begin{cases} P = \varkappa - Amz - \Sigma\, \frac{\lambda_k M_k}{z-\xi_k} \\ Q = Az^2 + Bz + C + \Sigma\, \frac{M_k}{z-\xi_k}, \end{cases}$$

so haben die Ausdrücke 62. die Form:

$$66 \quad . \; . \; . \; . \quad \begin{cases} \delta\varphi = P \cdot \varphi(z) + Q \cdot \varphi'(z) \\ \delta\psi = P \cdot \varphi(z) + Q \cdot \psi'(z) \end{cases}$$

Von dieser Form ausgehend, kann man leicht $\delta\theta$, und damit auch die Variationen $\delta\xi_k$ bilden, deren man zur Herstellung der Gleichung 32. noch bedarf.

Da

$$\theta = \psi\,\varphi' - \varphi\psi',$$

so hat man

$$67 \quad . \; . \; . \; . \quad \delta\theta = \varphi' \cdot \delta\psi - \psi' \cdot \delta\varphi + \psi \cdot \delta\varphi' - \varphi \cdot \delta\psi'.$$

Aus 66. aber folgt, indem man nach z differenzirt:

$$68 \quad . \; . \; . \quad \begin{cases} \delta\varphi' = P \cdot \varphi'(z) + Q \cdot \varphi''(z) + \varphi \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \varphi'(z)\, \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \delta\psi' = P \cdot \psi'(z) + Q \cdot \psi''(z) + \psi \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \psi'(z)\, \frac{\partial Q}{\partial z}. \end{cases}$$

Wenn man nun noch hinzunimmt, dass

$$\theta' = \psi \cdot \varphi'' - \psi \cdot \varphi'',$$

so findet man aus 66. 68.:

$$\varphi'\delta\psi - \psi'\delta\varphi = \theta \cdot P$$
$$\psi\delta\varphi' - \varphi\delta\psi' = \theta \cdot (P + \tfrac{\partial Q}{\partial z}) + Q \cdot Q',$$

und die Gleichung 67. liefert also:

$$69 \quad . \quad . \quad . \quad \delta\Theta = \Theta \, . \left\{2P + \frac{\partial Q}{\partial z}\right\} + Q \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Um hieraus nun die Ausdrücke für die Variationen $\delta\xi_k$ zu finden, hat man nur zu bemerken, dass

$$\Theta = t(z-\xi_1)(z-\xi_2) - (z-\xi_{2m-2})$$

war. Durch logarithmische Variation folgt daher:

$$\frac{\delta\Theta}{\Theta} = \frac{\delta t}{t} - \Sigma \frac{\delta \xi_k}{z-\xi_k},$$

und indem man dies in 69. einführt, findet man:

$$\frac{\delta t}{t} - \Sigma \frac{\delta \xi_k}{z-\xi_k} = 2P + \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \frac{\partial \log \Theta}{\partial z},$$

oder wenn man die Werthe von P und Q einsetzt:

$$70 \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\delta t}{t} - \Sigma \frac{\delta \xi_k}{z-\xi_k} = 2\varkappa - 2Amz - 2\Sigma \frac{\lambda_k M_k}{z-\xi_k}$$
$$+ 2Az + B - \Sigma \frac{M_k}{(z-\xi_k)^2}$$
$$+ \left(Az + Bz + C + \Sigma \frac{M_k}{z-\xi_k}\right) . \Sigma \frac{1}{z-\xi_h}.$$

Um die Uebereinstimmung in der Form beider Seiten dieser Gleichung zu erkennen, braucht man nur das letzte Glied zu entwickeln. Es ist

$$\frac{Az^2 + Bz + C}{z-\xi_k} = A(z+\xi_k) + B + \frac{A\xi^2 + B\xi_k + C}{z-\xi_k}.$$

Von dem letzten Gliede der Gleichung 70. rührt daher der Term Az $(2m-2)$mal her, so dass dies sich ganz aufhebt. Ebenso heben sich alle Glieder der Form

$$\frac{M_k}{(z-\xi_k)^2}$$

auf, während

$$\frac{M_k}{(z-\xi_h)(z-\xi_k)} = \frac{M_k}{(\xi_h-\xi_k)}\left(\frac{1}{z-\xi_h} - \frac{1}{z-\xi_k}\right).$$

Führt man nun noch an Stelle der willkürlichen Constante $\varkappa$ die ebenso willkürliche Constante

$$\rho = 2\varkappa + (2m-1)B + A\Sigma\xi_k$$

ein, so erhält man aus 70. die Formel:

$$71\ldots\frac{\delta t}{t} - \Sigma\frac{\delta\xi_k}{z-\xi_k} = \rho + \Sigma\frac{A\xi_k^2 + B\xi_k + C}{z-\xi_k} + \Sigma\Sigma\frac{M_k}{\xi_k-\xi_h}\left\{\frac{1}{z-\xi_k} - \frac{1}{z-\xi_h}\right\} - 2\Sigma\frac{\lambda_k M_k}{z-\xi_k}.$$

In der Doppelsumme sind dabei für k alle Zahlen von 1 bis $2m$—2 zu setzen; bei jedem Werthe von k aber hat man der Zahl h nur die von k verschiedenen Werthe beizulegen.

Aus der vorliegenden Formel kann man sogleich den Werth von $\delta\xi_k$ entnehmen, indem man rechts den Gesammtfactor von

$$\frac{1}{z-\xi_k}$$

aufsucht. Aber man kann statt dessen unmittelbar zu dem Ausdrucke von $\delta\Pi$ übergehen, wenn man nur bemerkt, dass die linke Seite in $\delta\Pi$ sich verwandelt, sobald man den von z freien Term auslässt, und dann immer $\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_k}$ an Stelle von

$$-\frac{1}{z-\xi_k}$$

setzt. Indem man eben dieses auf der rechten Seite von 71. ausführt, gelangt man sofort zu dem folgenden Ausdrucke für $\delta\Pi$:

$$72\ldots\ldots \delta\Pi = \Sigma_k M_k\left\{2\lambda_k\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_k} + \Sigma_h\frac{1}{\xi_k-\xi_h}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_h} - \frac{\partial\Pi}{\partial\xi_k}\right)\right\}$$
$$- \Sigma\,(A\xi_k^{\,2} + B\xi_k + C)\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_k}.$$

Die symbolische Gleichung 31. wird jetzt, mit Benutzung von 55. und 72:

$$73\ldots 0 = \Sigma_k M_k\left\{2\lambda_k\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_k} + \Sigma_h\frac{1}{\xi_k-\xi_h}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_h} - \frac{\partial\Pi}{\partial\xi_k}\right)\right\} - \Sigma_k(A\xi_k^{\,2} + B\xi_k + C)\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_k}$$
$$- \Sigma_i\left(Az_i^{\,2} + Bz_i + C\,\Sigma_k\frac{M_k}{z_i-\xi_k}\right)\frac{\partial\Pi}{\partial z_i}.$$

Um die verschiedenen hierin enthaltenen Differentialgleichungen zu finden, braucht man nur die Coefficienten der willkürlichen Constanten A, B, C, M_k einzeln verschwinden zu lassen. Die Coefficienten von A, B, C geben die drei Gleichungen:

$$74 \quad \ldots\ldots \begin{cases} \Sigma \dfrac{\partial \Pi}{\partial \xi_k} + \Sigma \dfrac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0 \\ \Sigma \xi_k \dfrac{\partial \Pi}{\partial \xi_k} + \Sigma z_i \dfrac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0 \\ \Sigma \xi_k^2 \dfrac{\partial \Pi}{\partial \xi_k} + \Sigma z_i^2 \dfrac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0. \end{cases}$$

Sie drücken nichts weiter aus, als dass Π eine simultane Invariante von f und θ ist, und vertreten daher die Stelle der Gleichungen 44., von denen die Summe der ersten und letzten, als in 31. enthalten, bereits identisch erfüllt ist.

Dagegen erhält man die für die Invarianten von F characteristischen $2m-2$ weitern Differentialgleichungen, indem man die Coefficienten der M_k in 73. verschwinden lässt. Man hat als Typus derselben die Gleichung:

$$75 \quad \ldots\ldots \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_k}\left(2\lambda_k - \Sigma_h \frac{1}{\xi_k - \xi_h}\right) + \Sigma_h \frac{1}{\xi_k - \xi_h} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_h} - \Sigma_i \frac{1}{z_i - \xi_k} \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0,$$

aus welcher man das ganze System erhält, indem man für k der Reihe nach die Werthe $1, 2 \ldots 2m-2$ einsetzt.

Die Gleichungen 75. enthalten die gesuchten partiellen Differentialgleichungen in symmetrischer Form, und so dass keine jener Gleichungen dabei überflüssig ist.

6.

Beweis, dass absolute Invarianten binärer Formen in höherem Sinne nicht existiren.

An die oben gegebene Form der partiellen Differentialgleichungen knüpft sich unmittelbar der Beweis für den am Eingange erwähnten Satz an, dass absolute Invarianten im höhern Sinne, d. h. Functionen der Coefficienten, welche auch bei höhern Transformationen ungeändert bleiben, für binäre Formen nicht existiren.

Wäre nämlich Π eine solche absolute Invariante, so müsste dieselbe von den Transformationscoefficienten, also von den Grössen ξ_k völlig unabhängig sein, so dass man die Gleichungen hätte:

$$76 \quad \ldots \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2} = 0 \ldots \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{2m-2}} = 0.$$

Alsdann aber verwandeln sich die Gleichungen 75. in folgende,

$$77 \quad \ldots \quad \begin{cases} \Sigma_i \frac{1}{z_i - \xi_1} \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0 \\ \Sigma_i \frac{1}{z_i - \xi_2} \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0 \\ \quad \ldots \\ \Sigma_i \frac{1}{z_i - \xi_{2m-2}} \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0. \end{cases}$$

Schon eine dieser Gleichungen genügt, um die Nichtexistenz einer solchen Function Π zu beweisen. Denn nimmt man irgend eine der Gleichungen

$$78 \quad \ldots \quad \Sigma_i \frac{1}{z_i - \xi_k} \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0,$$

und differenzirt man diese Gleichung wiederholt nach ξ_k, indem man immer berücksichtigt, dass $\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_k}$ identisch verschwinden soll, so erhält man die Gleichungen:

$$79 \quad \ldots \quad \begin{cases} \Sigma_i \frac{1}{(z_i - \xi_k)^2} \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0 \\ \Sigma_i \frac{1}{(z_i - \xi_k)^3} \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0. \\ \quad \ldots \end{cases}$$

Diese Gleichungen können nicht bestehen, ohne dass Π eine Constante ist. Denn fügt man den ersten $n-2$ Gleichungen 79. die Gleichung 78. und die aus der ersten Gleichung 74. entspringende Gleichung

$$\Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0$$

hinzu, so hat man n homogene lineare Gleichungen für die n Grössen $\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}$ vor vor sich, deren Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{1}{z_1 - \xi_k} & \frac{1}{z_2 - \xi_k} & \ldots & \frac{1}{z_n - \xi_k} \\ \frac{1}{(z_1 - \xi_k)^2} & \frac{1}{(z_2 - \xi_k)^2} & \ldots & \frac{1}{(z_n - \xi_k)^2} \end{vmatrix}$$

das Differenzenproduct der Grössen $\frac{1}{z_i - \xi_k}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ ist, also das Product der Ausdrücke

$$\frac{1}{z_i - \xi_k} - \frac{1}{z_h - \xi_k} = \frac{z_h - z_i}{(z_i - \xi_k)(z_h - \xi_k)}.$$

Diese Determinante ist also gleich dem Differenzenproduct der z, dividirt durch die $(n-1)$te Potenz von $f(\xi_k)$, also von Null verschieden. Daher folgt aus den angeführten partiellen Differentialgleichungen sofort:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z_2} = 0 \ldots \frac{\partial \Pi}{\partial z_n} = 0,$$

d. h. Π muss eine Constante sein, was zu beweisen war.

4.

Die Functionen λ_k.

In der Form 75., welche wir den partiellen Differentialgleichungen gegeben haben, werden die Coefficienten theils aus der z_i und ξ_k auf einfache Weise zusammengesetzt, theils enthalten sie die Grössen λ_k, auf deren Character wir genauer eingehen müssen.

Die Grössen λ_k wurden durch die Gleichung 64.

$$\lambda_k = \frac{\varphi'(\xi_k)}{\varphi(\xi_k)} = \frac{\psi'(\xi_k)}{\psi(\xi_k)}$$

definirt, oder, was dasselbe ist, durch die Gleichung:

80 . . . . . $\lambda_k = \dfrac{p\varphi'(\xi_k) + q\psi'(\xi_k)}{p\varphi(\xi_k) + q\psi(\xi_k)}$,

in welcher p und q ganz beliebige Grössen bedeuten. Setzen wir z. B. $p = -c$, $q = b$, so haben wir

81 . . . $\lambda_k = \dfrac{b\psi'(\xi_k) - c\varphi'(\xi_k)}{b\psi(\xi_k) - c\varphi(\xi_k)} = \dfrac{(m-1)t\xi_k^{m-2} + (m-2)r_2\xi_k^{m-3} + (m-3)r_3\xi_k^{m-4} \ldots + r_{m-1}}{t\xi_k^{m-1} + r_2\xi_k^{m-2} + r_3\xi_k^{m-3} \ldots + r_{m-1}\xi_k + r_m}$

Man sieht hieraus, dass die λ_k ausser den ξ nur die Grössen $t, r_2, r_3 \ldots r_m$ enthalten, und zwar so, dass wenn man durch t in Zähler und Nenner dividirt, nur die Quotienten

82 . . . . . . $\dfrac{r_2}{t}, \dfrac{r_3}{t} \ldots \dfrac{r_m}{t}$

auftreten. Statt der r_i hätte man auch die s_i anführen können; man hätte dann nur nöthig gehabt, in der Gleichung 80. $p = -c_1$, $q = b_1$ zu setzen. Aber es handelt sich darum, die Grössen λ_k als Functionen der ξ darzustellen; und wie man sieht, kommt dieses auf die Forderung zurück, die Grössen 82. als Functionen der ξ_k darzustellen. Dass dieses möglich sein muss, folgt aus dem früheren; denn die Grössen 82. sind Lösungen der Gleichungen 31., und andrerseits ist nachgewiesen, dass alle Lösungen der Gleichungen 31. Functionen der ξ_k allein sind. Aber es sind höhere Gleichungen, von denen dies abhängt, *und die* λ_k *sind also irrationale Functionen der* ξ_k, mit Ausnahme des Falles $m = 2$.

Es ist leicht zu übersehen, durch welche algebraische Gleichungen die in Rede stehende Bestimmung erfolgt. Schon oben wurde erwähnt, dass wegen der Identität

$$b_i c_k - c_i b_k = \frac{r_i s_k - s_i r_k}{t} \qquad (i \text{ und } n > 1)$$

sich alle Grössen $b_i c_k - c_i b_k$ durch die r_i, s_i ausdrücken lassen; und man kann hinzufügen, dass alle Grössen

$$83 \quad \ldots\ldots \quad \frac{b_i c_k - c_i b_k}{t}$$

sich durch die Grössen $\frac{r_i}{t}$, $\frac{s_i}{t}$ ausdrücken. Nun sind die Coefficienten von $\theta = 0$, wenn man durch den ersten Coefficienten von θ, t, dividirt, lineare Functionen der Ausdrücke 83., und da sie andrerseits gleich den einfachsten symmetrischen Functionen der ξ_k sind, so hat man durch Vergleichung $2m-2$ Gleichungen vor sich, in denen lineare Functionen der Ausdrücke 83. symmetrischen Functionen der ξ_k gleich werden, und man hat also ebenso viel Gleichungen als Unbekannte r_i, s_i, welche die gesuchte Bestimmung liefern müssen. Aber in den r_i, s_i selbst sind diese Gleichungen quadratisch, und ihre Lösung führt daher auf Irrationalitäten. Ich will in den einfachsten Fällen diese Bestimmungen durchführen.

Bei $m = 2$ tritt, wie erwähnt, noch keine Irrationalität auf. Man hat nämlich in diesem Falle

$$\theta = \begin{vmatrix} 2b\xi + b_1 & b\xi^2 + b_1\xi + b_2 \\ 2c\xi + c_1 & c\xi^2 + c_1\xi + c_2 \end{vmatrix}$$
$$= (bc_1 - cb_1)\xi^2 + 2(bc_2 - cb_2)\xi + (b_1c_2 - c_1b_2)$$
$$= t\xi^2 + 2r_2\xi + s_2.$$

Man hat also in diesem Falle ohne Weiteres

$$\frac{r_2}{t} = -\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \frac{s_2}{t} = \xi_1\xi_2.$$

Daher liefert die Gleichung 81.:

$$\lambda_k = \frac{t}{t\xi_k + r_2} = \frac{1}{\xi_k - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}},$$

oder

$$\lambda_1 = \frac{2}{\xi_1 - \xi_2}, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{\xi_1 - \xi_2},$$

und die auf die Transformation zweiter Ordnung bezüglichen Differentialgleichungen nehmen aus 75. die elegante Form an:

$$84 \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \frac{1}{\xi_1 - \xi_2}\left(3\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2}\right) = \Sigma \frac{1}{z_i - \xi_1}\frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \\ \frac{1}{\xi_2 - \xi_1}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} + 3\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2}\right) = \Sigma \frac{1}{z_i - \xi_2}\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}. \text{ —} \end{cases}$$

Bei $m = 3$ hat man

$$\theta = \begin{vmatrix} 3b\xi^2 + 2b_1\xi + b_2 & b\xi^3 + b_1\xi^2 + b_2\xi + b_3 \\ 3c\xi^2 + 2c_1\xi + c_2 & c\xi^3 + c_1\xi^2 + c_2\xi + c_3 \end{vmatrix}$$
$$= (bc_1 - cb_1)\xi^4 + 2(bc_2 - cb_2)\xi^3 + [3(bc_3 - cb_3) + (b_1c_2 - c_1b_2)]\xi^2$$
$$+ 2(b_1c_3 - c_1b_3)\xi + (b_2c_3 - c_2c_3)$$
$$= t\xi^4 + 2r_2\xi^3 + (3r_3 + s_2)\xi^2 + 2s_3\xi + \frac{r_2s_3 - s_2r_3}{t}.$$

Bezeichnen wir durch A, B, C, D die symmetrischen Grundformen der ξ_k, so ist dann

$$85 \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \frac{2r_2}{t} = -A \\ \frac{3r_3 + s_2}{t} = B \\ \frac{2s_3}{t} = -C \\ \frac{r_2s_3 - s_2r_3}{t} = D. \end{cases}$$

Es sind also die Grössen $\frac{r_2}{t}$, $\frac{s_3}{t}$ sofort bekannt, und nur $\frac{r_3}{t}$, $\frac{s_2}{t}$ noch zu bestimmen. Bilden wir aber die erste Invariante i von θ:

$$i = t^2\left(D - \frac{AC}{4} + \frac{B^2}{12}\right),$$

so finden wir, indem wir für A, B, C, D die linken Theile der Gleichungen 85. einsetzen:

$$\frac{i}{t^2} = \frac{(3r_3 - s_2)^2}{12t^2},$$

und daher, indem wir die Wurzel ziehen:

$$86 \quad \ldots\ldots \quad 3r_3 - s_2 = \sqrt{12i}.$$

Dies ist die einzige Irrationalität, welche auftritt. Combinirt man 86. mit der zweiten Gleichung 85., so erhält man:

$$r_3 = \frac{Bt + \sqrt{12i}}{6}$$

$$s_2 = \frac{Bt - \sqrt{12i}}{2},$$

und aus 81. hat man also für λ_k den Ausdruck:

$$\lambda_k = \frac{2t\xi + r_2}{t\xi_k^2 + r_2\xi_k + r_3} = \frac{2\xi_k - \frac{A}{2}}{\xi_k^2 - \frac{A}{2}\xi_k + \frac{B}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{12D - 3AC + B^2}},$$

ein Ausdruck, der sich noch in mannigfacher Weise umformen lässt. —

Der Umstand, dass diese Irrationalitäten in die oben gegebene Form der partiellen Differentialgleichungen eingehen, wird auch dann nicht aufgehoben, wenn man etwa statt der ξ_k ihre symmetrischen Functionen, oder, was dasselbe ist, statt der Wurzeln die Coefficienten von θ als unabhängige Veränderliche in die partiellen Differentialgleichungen einführt. Es geht daraus hervor, *dass eine absolute Invariante der transformirten Form F, welche die Coefficienten von f, φ, ψ rational enthält, niemals die letztern nur zu Coefficienten von θ rational vereinigt enthalten kann*, sondern dass diese noch in andern Verbindungen auftreten müssen, welche durch die Coefficienten von θ nur irrational ausdrückbar sind. Als solche andern Verbindungen kann man die Coefficienten höherer ungerader Ueberschiebungen von φ mit ψ betrachten, welche mit denen von θ ausreichen, um alle Grössen $b_i c_k - c_i b_k$ rational auszudrücken.

8.

Die partiellen Differentialgleichungen für die Transformation zweiter Ordnung.

Die partiellen Differentialgleichungen, welche wir für die Transformation zweiter Ordnung haben, und welche sich durch die Rationalität ihrer Coefficienten auszeichnen, sind nach 74. 84. folgende:

$$87. \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2} + \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0 \\ &\xi_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2} + \Sigma z_i \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0 \\ &\xi_1^2 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} + \xi_2^2 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2} + \Sigma z_i^2 \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0 \end{aligned}\right.$$

$$88. \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\xi_1 - \xi_2}\left(3\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2}\right) = \Sigma \frac{1}{z_i - \xi_1} \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \\ &\frac{1}{\xi_2 - \xi_1}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} + 3\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2}\right) = \Sigma \frac{1}{z_i - \xi_2} \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen bilden ein vollständiges System von 5 Gleichungen mit $n+2$ Veränderlichen; sie müssen daher $n-3$ von einander unabhängige Lösungen zulassen, und es ist in der That leicht, solche anzugeben, und damit das ganze System vollständig zu integriren.

Zu diesem Zwecke führe ich an Stelle der z_i die neuen Veränderlichen ein

$$89. \quad \ldots\ldots \quad w_i = \left(\frac{z_i - \xi_1}{z_i - \xi_2}\right)^2,$$

und bezeichne durch Klammern diejenigen partiellen Differentialquotienten, bei welchen die Grössen

$$w_1, w_2 \ldots w_n, \xi_1, \xi_2$$

als das System der unabhängigen Veränderlichen betrachtet werden. Man hat dann

$$90. \quad \ldots \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_k} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_k}\right) + \Sigma_k \left(\frac{\partial \Pi}{\partial w_i}\right) \frac{\partial w_i}{\partial \xi_k} \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial w_i}\right) \frac{\partial w_i}{\partial z_i}. \end{aligned}\right.$$

Nun sind die w_i einerseits nur von den *Differenzen* der z_i und ξ_k abhängig und befriedigen daher die erste der Gleichungen 87., wenn man irgend eines der w_i an Stelle von Π setzt; andrerseits hängen sie auch nur von den Verhältnissen der z_i, ξ_k ab, und genügen deshalb auch der zweiten Gleichung 87. Führt man also die neue Art der Differentiation in die ersten beiden Gleichungen 87. ein, so verschwinden die Coefficienten der $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial w_i}\right)$, und es bleibt nur übrig:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1}\right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2}\right) = 0$$

$$\xi_1 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1}\right) + \xi_2 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2}\right) = 0$$

also

91. . . . . . $$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2}\right) = 0.$$

Die Function Π *hängt also von den* w_i *allein ab, und wenn man* Π *so annimmt, sind die ersten beiden Gleichungen* 87. *bereits identisch erfüllt.*

Die drei übrigen Gleichungen 87. verwandeln sich nun in Folge der Gleichungen 90. 91. in folgende:

92. . . $$\begin{cases} 0 = \Sigma \left(\frac{\partial \Pi}{\partial w_i}\right) \left\{ \xi_1^2 \frac{\partial w_i}{\partial \xi_1} + \xi_2^2 \frac{\partial w_i}{\partial \xi_2} + z_i^2 \frac{\partial w_i}{\partial z_i} \right\} \\ 0 = \Sigma \left(\frac{\partial \Pi}{\partial w_i}\right) \left\{ \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} \left(3 \frac{\partial w_i}{\partial \xi_1} + \frac{\partial w_i}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{z_i - \xi_1} \frac{\partial w_i}{\partial z_i} \right\} \\ 0 = \Sigma \left(\frac{\partial \Pi}{\partial w_i}\right) \left\{ \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_1} + 3 \frac{\partial w_i}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{z_i - \xi_1} \frac{\partial w_i}{\partial z_i} \right\} \end{cases}$$

Aber wegen der beiden ersten Gleichungen 87., welche durch $\Pi = w_i$ befriedigt werden, hat man

$$\xi_1 \frac{\partial w_i}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial w_i}{\partial \xi_2} + z_i \frac{\partial w_i}{\partial z_i} = 0,$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \xi_1} + \frac{\partial w_i}{\partial \xi_2} + \frac{\partial w_i}{\partial z_i} = 0$$

also

$$\frac{\partial w_i}{\partial \xi_1} = -\frac{z_i - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \frac{\partial w_i}{\partial z_i}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \xi_2} = \frac{z_i - \xi_1}{\xi_1 - \xi_2} \frac{\partial w_i}{\partial z_i}$$

Setzt man dies in die Gleichungen 92. ein, so erhält man:

$$93. \quad \ldots \quad \begin{cases} 0 = \Sigma \left(\frac{\partial \Pi}{\partial w_i}\right) \left(\frac{\partial w_i}{\partial z_i}\right) (z_i - \xi_1)(z_i - \xi_2) \\ 0 = \Sigma \left(\frac{\partial \Pi}{\partial w_i}\right) \left(\frac{\partial w_i}{\partial z_i}\right) \frac{(z_i - \xi_2)(2z_i - \xi_1 - \xi_2)}{z_i - \xi_1} \\ 0 = \Sigma \left(\frac{\partial \Pi}{\partial w_i}\right) \left(\frac{\partial w_i}{\partial z_i}\right) \frac{(z_i - \xi_1)(2z_i - \xi_1 - \xi_2)}{z_i - \xi_2} \end{cases}$$

Inzwischen ergiebt sich durch logarithmische Differentiation der Gleichung 89.

$$\frac{1}{w_i}\frac{\partial w_i}{\partial z_i} = \frac{2(\xi_1 - \xi_2)}{(z_i - \xi_1).(z_i - \xi_2)},$$

und die Gleichungen 93. verwandeln sich also in folgende:

$$\Sigma\, w_i \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} = 0$$

$$\Sigma\, w_i \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} \cdot \frac{(z_i - \xi_1)^2 - (z_i - \xi_2)^2}{(z_i - \xi_1)^2} = 0$$

$$\Sigma\, w_i \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} \cdot \frac{(z_i - \xi_1)^2 - (z_i - \xi_2)^2}{(z_i - \xi_2)^2} = 0$$

Die zweite und dritte Gleichung können durch Abziehen oder Addiren der ersten modificirt werden; setzt man dann noch w_i aus 89. für seinen Werth ein, so ergeben sich die transformirten Gleichungen in der folgenden einfachen Gestalt:

$$\Sigma \quad \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} = 0$$

$$\Sigma\, w_i \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} = 0$$

$$\Sigma\, w_i^2 \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} = 0.$$

Diese Gleichungen, welche nichts anderes als die Gleichungen für die Invarianten einer Form

$$94. \quad \ldots \quad F = Z - w_1 \,.\, Z - w_2 \ldots Z - w_n$$

sind, werden durch die Doppelverhältnisse

$$\frac{\dfrac{w_i - w_k}{w_i - w_l}}{\dfrac{w_h - w_k}{w_h - w_l}}$$

befriedigt, und man sieht also, *dass die allgemeine Lösung der Gleichungen* 87. 88. *eine willkürliche Function der aus den Grössen* 89. *gebildeten Doppelverhältnisse ist.*

Es ist sehr leicht, sich von der Nothwendigkeit dieser Resultate Rechenschaft abzulegen. Denn man braucht nur zu erwägen, dass

$$95. \quad \ldots \quad \varphi = (z-\xi_1)^2, \quad \psi = (z-\xi_2)^2$$

zwei quadratische Formen sind, deren Functionaldeterminante θ gerade die Wurzeln ξ_1 und ξ_2 hat. Indem man also die Formen 95. als Substitutionsfunctionen benutzt, wird die quadratische Substitution durch die Formel

$$Z = \frac{(z-\xi_1)^2}{(z-\xi_2)^2} = w$$

gegeben sein können, und die Resultante von

$$f = 0, \quad Z = w$$

ist nichts anderes als $F = 0$, wo F durch den Ausdruck 94. gegeben wird. Die absoluten Invarianten des Ausdrucks 94., oder die Doppelverhältnisse der w_i, sind also in der That diejenigen Grössen, für welche die Gleichungen 87. 88. aufgestellt waren.

Göttingen, im December 1870.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1870

Band/Volume: 15

Autor(en)/Author(s): Clebsch Alfred

Artikel/Article: Ueber die partielle Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen. 65-99