Ueber den Werth einiger Summen.

Von

M. A. Stern.

Der Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften vorgelegt am 11. Mai 1872.

In der Abhandlung „über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie" (§. 18) hat Herr Professor Clebsch durch eine eigenthümliche Betrachtung den Werth der Summe ermittelt, welche man erhält, wenn man in dem Ausdrucke

$$(m+n-2k-h+1)\,(p+k-h+1)\,(m+n+p-2h-k+2)$$

wo m, n, p ganze positive Zahlen bedeuten, k und h die Werthe $0, 1 \ldots n$ durchlaufen lässt, unter der Beschränkung, dass $k \leqq m$, $h \leqq p$, $k+h \leqq n$. Der Wunsch eine einfachere in der Beschaffenheit der Summe begründete Behandlung dieses Gegenstandes zu finden, war die Veranlassung zu den folgenden Erörterungen.

1.

Es bezeichne n eine ganze positive Zahl, k und h sind zwei Ausdrücke, von denen jeder die Werthe $0, 1, 2, \ldots. n$ annehmen kann, jedoch sollen sie an die Bedingung $k+h \leqq n$ gebunden seyn. Unter diesen Voraussetzungen bezeichne $S(k-h)$ die Summe der Werthe, die man aus $k-h$ erhält, wenn man für k und h alle nach obigen Bedingungen erlaubten Werthe setzt, in demselben Sinne sind die Ausdrücke $S(k-h)^2$, $S(2k+h)$ und ähnliche, im Folgenden vorkommende, zu verstehen.

Man kann offenbar in allen diesen Summen k und h vertauschen, ohne den Werth der Summen zu ändern. Sind nämlich k und h nicht einander gleich, so entspricht, wenn α und β zwei ganze positive Zahlen bedeuten, die der Bedingung $\alpha+\beta \leqq n$ genügen, einer jeden Combination

$k = \alpha$, $h = \beta$ auch die entgegengesetzte $k = \beta$, $h = \alpha$. Hieraus folgt zunächst

$$1)\qquad S(k-h) = 0$$

Ferner ist

$$2)\qquad S(n-2k-h) = 0$$

denn, wenn man die sämmtlichen erlaubten Zusammenstellungen von k und h gebildet hat, so wird, nach dem oben Gesagten, die Summe aller k dieselbe seyn, wie die Summe aller h; es wird demnach $S(2k+h)$ das dreifache aller in diesen Zusammenstellungen vorkommenden h seyn. Diese h bestehen aber aus folgenden $n+1$ Reihen mit $\frac{n+1.n+2}{2}$ Gliedern

$$\begin{array}{l} 0, 1, 2 \ldots n \\ 0, 1, 2 \ldots n-1 \\ \ldots\ldots \\ 0, 1 \\ 0 \end{array}$$

indem die erste Reihe mit $k = 0$, die zweite mit $k = 1$ u. s. w. zu verbinden ist. Die Summe aller h ist mithin $\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}$ folglich $S(2k+h) = \frac{n.n+1.n+2}{2}$ und $S(n-2k-h) = \frac{n.n+1.n+2}{2} - S(2k+h) = 0$.

Man hat ferner

$$3)\qquad S(k^2-h^2) = 0.$$

Nun ist $2(k-h)(2k+h) = (k-h)^2 + 3(k^2-h^2)$ also

$$4)\qquad S(k-h)^2 = 2S[(k-h)(2k+h)]$$

und da

$$S[(k-h)(n-2k-h)] = Sn(k-h) - S[(k-h)(2k+h)] = -S[(k-h)(2k+h)]$$

so folgt hieraus weiter

$$5)\qquad S(k-h)^2 = -2S[(k-h)(n-2k-h)].$$

Man hat auch $S[kh(k-h)] = 0$ und $S(k^3-h^3) = 0$. Nun ist

$$(k-h)(2k+h)^2 - (k-h)^2(2k+h) = 2(k^3-h^3) + 3kh(k-h)$$

also

$$S[(k-h)(2k+h)^2] - S[(k-h)^2(2k+h)] = 2S(k^3-h^3) + 3S[kh(k-h)] = 0$$

oder

$$6)\qquad S[(k-h)(2k+h)^2] = S[(k-h)^2(2k+h)].$$

Nun ist

$$S[(k-h)(n-2k-h)^2] = S[n^2(k-h)] - 2S[n(k-h)(2k+h)] + S[(k-h)(2k+h)^2]$$
$$S[(k-h)^2(n-2k-h)] = S[n(k-h)^2] - S[(k-h)^2(2k+h)]$$

also, da $S[n^2(k-h)] = 0$, wegen 4) und 6)

$$7) \qquad S[k-h)^2(n-2k-h)] = -S[(k-h)(n-2k-h)^2].$$

2.

In $S(k-h)$ kommt, wenn n eine gerade Zahl ist,
$\frac{n}{2}+1$mal die Zahl 0 vor, nemlich in $k=0,\ h=0 \dots k=\frac{n}{2},\ h=\frac{n}{2}$
$\frac{n}{2}$ mal die Zahl 1, nemlich in $k=1,\ h=0 \dots k=\frac{n}{2},\ h=\frac{n}{2}-1$
allgemein kommt $\frac{n}{2}-(l-1)$ mal die Zahl $2l$ vor, in $k=2l,\ h=0 \dots k=\frac{n}{2}+l$, $h=\frac{n}{2}-l$; die Zahl $2l+1$ kommt $\frac{n}{2}-l$ mal vor, nemlich in $k=2l+1$, $h=0 \dots k=\frac{n}{2}+l,\ h=\frac{n}{2}-(l+1)$.

Ist n eine ungerade Zahl, so kommt sowohl die Zahl $2l$ als die Zahl $2l+1$ in dieser Summe $\frac{n-2l+1}{2}$ mal vor und zwar $2l$ in $k=2l$, $h=0 \dots k=\frac{n-1}{2}+l,\ h=\frac{n-1}{2}-l$, dagegen $2l+1$ in $k=2l+1$, $h=0 \dots k=\frac{n+1}{2}+l,\ h=\frac{n-1}{2}-l$.

Zugleich kommt jede dieser Zahlen ebenso oft mit dem $-$ Zeichen als mit dem $+$ Zeichen vor.

In $S(2k+h)$ kommen die Zahlen 0 bis $2n$ vor. Ist $2l$ eine Zahl, die nicht grösser als n, so kommt sie in den Verbindungen $k=0,\ h=2l$; $k=1,\ h=2(l-1) \dots k=l,\ h=0$, im Ganzen $l+1$mal vor und eben so oft kommt auch die Zahl $2l+1$ vor, wenn sie nicht grösser als n ist. Ferner, wenn n eine gerade Zahl, so kommt $n+2l-1$ in $k=2l-1,\ h=n-(2l-1) \dots k=\frac{n}{2}+l-1,\ h=1$, also $\frac{n}{2}-l+1$ mal vor und ebenso oft kommt auch $n+2l$ vor. Ist n ungerade, so kommt $n+2l-1$ in $k=2l-1,\ h=n-(2l-1) \dots k=\frac{n-1}{2}+l$, $h=0$ vor, also $\frac{n-1}{2}-l+2$ mal vor, dagegen $n+2l$ in $k=2l$, $h=n-2l, \dots k=\frac{n-1}{2}+l,\ h=1$ mithin $\frac{n-1}{2}-l+1$ mal. Es ergiebt sich hieraus dass, sowohl wenn n gerade als wenn es ungerade ist, in $S(2k+h)$ die Zahlen $n+2l$ und $n-2l$ gleich oft vorkommen und ebenso die Zahlen $n+2l+1$ und $n-(2l+1)$, dass also überhaupt die Zahlen $n-l$ und $n+l$ gleich oft vorkommen. Auch folgt hieraus weiter, dass in $S(n-2k-h)$ die Zahl $n-2l$ und $n-(2l+1)$ jede $l+1$ mal vorkommt. Ist nun n eine gerade Zahl und setzt man $n-2l=2u$ so kommt, nach den vorhergehenden Erörterungen $2u$ in $S(k-h)$ ebenfalls $\frac{n}{2}-(u-1)=l+1$ mal vor und ebenso ergiebt sich, wenn n ungerade, dass $n-(2l+1)=2u$ ebenfalls $l+1$ mal in $S(k-h)$ vorkommt. Ist n ungerade und man setzt $n-2l=2u+1$ oder ist n gerade und $n-(2l+1)=2u+1$ so findet sich wieder, dass in beiden Fällen $2u+1$ ebenso oft in $S(n-2k-h)$ als in $S(k-h)$ vorkommt. Es ergiebt sich hieraus, dass überhaupt alle positiven geraden und ungeraden Zahlen, die sich in $S(k-h)$ finden, ebenso oft in $S(n-2k-h)$ vorkommen und umgekehrt. Da ferner in $S(2k+h)$ die Zahlen $n+l$ ebenso oft vorkommen als die Zahlen $n-l$, so kommen in $S(n-2k-h)$ die Zahlen $-l$ ebenso oft vor als die Zahlen l, d. h. ebenso oft als die Zahlen l und $-l$ in $S(k-h)$ vorkommen, und da die Anzahl der Glieder in beiden Summen dieselbe ist, so müssen auch die Glieder, welche Null sind, in beiden Summen gleich oft vorkommen. Abgesehen von der Ordnung in welcher die Glieder auf einander folgen, sind demnach die beiden Summen vollkommen identisch. Es ist demnach auch

$$S(k-h)^r = S(n-2k-h)^r$$

und namentlich

$$8) \qquad S(k-h^2 = S(n-2k-h)^2.$$

3.

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, folgenden Satz zu beweisen:

Wenn m und p irgend welche Zahlen bedeuten, n, k und h aber die frühere Bedeutung beibehalten, so ist

$$9)\quad \Sigma = S[(m+n-h-2k+1)(p+k-h+1)(m+n+p-2h-k+2)]$$
$$= \frac{n+1 . n+2}{2}(m+1)(p+1)(m+p+2).$$

Ich werde in der Folge den ersten, zweiten, dritten Faktor unter dem Summenzeichen bezüglich durch α, β, γ bezeichnen, so dass $\gamma = \alpha + \beta$.

Man kann den Werth der Summe in zwei Theile zerlegen, indem man

$$A = S[(p+k-h+1)^2(m+n-h-2k+1)]$$
$$B = S[(m+n-h-2k+1)^2(p+k-h+1)]$$

setzt, also $\Sigma = A + B$, es sind demnach nur die Werthe von A und B zu bestimmen. Nun ist

$$(p+k-h+1)^2(m+n-h-2k+1) = (p+1)^2(m+1) + 2(m+1)(p+1)(k-h)$$
$$+ (m+1)(k-h)^2 + (p+1)^2(n-h-2k) + 2(p+1)(k-h)(n-h-2k)$$
$$+ (k-h)^2(n-h-2k)$$

$$(m+n-h-2k+1)^2(p+k-h+1) = (m+1)^2(p+1) + 2(m+1)(p+1)(n-h-2k)$$
$$+ (p+1)(n-h-2k)^2 + (m+1)^2(k-h) + 2(m+1)(k-h)(n-h-2k)$$
$$+ (k-h)(n-h-2k)^2$$

Berücksichsigt man nun, dass die Anzahl der Verbindungen von k und h, wie schon oben (§. 1) bemerkt wurde, $= \frac{n+1 . n+2}{2}$ ist, also auch sowohl A als B aus ebensoviel Gliedern bestehen werden, so findet man

$$A = \frac{n+1 . n+2}{2}(p+1)^2(m+1) + 2(m+1)(p+1)S(k-h) + (m+1)S(k-h)^2$$
$$+ (p+1)^2 S(n-h-2k) + 2(p+1)S[(k-h)(n-h-2k)] + S[(k-h)^2(n-h-2k)]$$
$$B = \frac{n+1 . n+2}{2}(m+1)^2(p+1) + 2(m+1)(p+1)S(n-h-2k) + (p+1)S(n-h-2k)^2$$
$$+ (m+1)^2 S(k-h) + 2(m+1)S[(k-h)(n-h-2k)] + S[(k-h)(n-h-2k^2)].$$

Berücksichtigt man nun die Gleichungen 1), 2), 5), 6), 7), 8), so sieht man, dass man diese Werthe auch in folgender Weise schreiben kann

$$10)\quad \begin{aligned} A &= \frac{n+1 . n+2}{2}(p+1)^2(m+1) + (m+p)S(k-h)^2 + S[(k+h)^2(n-h-2k)] \\ B &= \frac{n+1 . n+2}{2}(m+1)^2(p+1) - (m-p)S(k-h)^2 - S[(k-h)^2(n-h-2k)] \end{aligned}$$

und mithin, wie bewiesen werden sollte,

$$11) \qquad \Sigma = A + B = \frac{n+1 \,.\, n+2}{2} (m+1)(p+1)(m+p+2)$$

Setzt man für m und p bestimmte Werthe, so lassen sich hieraus mancherlei einzelne bemerkenswerthe Sätze ableiten. Ist z. B. $m = e^{-x}$ und $p = e^{x}$ oder umgekehrt $m = e^{x}$ und $p = e^{-x}$, so findet man

$$S[(e^{\pm x}+n-h-2k+1)(e^{\mp x}+k-h+1)(n+e^{x}+e^{-x}-2h-k+2)]$$
$$= \frac{n+1 \,.\, n+2}{2} (e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}})^4$$

Da m und n in der Summe Σ vollkommen symmetrisch vorkommen, so folgt aus dem eben Bewiesenen auch unmittelbar der Satz:

Welches immer die Werthe von n und p sind, ist m eine ganze positive Zahl und man lässt sowohl h als k die Werthe $0, 1 \ldots m$ durchlaufen, unter der Bedingung $h + k \leqq m$, so hat man

$$\Sigma = \frac{m+1 \,.\, m+2}{2} (n+1)(p+1)(n+p+2).$$

Sind m und n beide ganze positive Zahlen und $m > n$ und durchlaufen h und k die Werthe $0, 1 \ldots m$ unter den Bedingungen $h + k > n$ und $h + k \leqq m$, so ist der Werth der entsprechenden Summe

$$\frac{p \,.\, (m+1)(n+1)(p+1)(m-n)}{2}$$

so wie umgekehrt, wenn $n > m$ und h und k die Werthe $0, 1 \ldots n$ unter der Bedingung $h+k > m$, $h+k \leqq n$ durchlaufen, der Werth der Summe

$$\frac{p\,(m+1)(n+1)(p+1)(n-m)}{2}$$

ist.

4.

Kehrt man wieder zu der anfänglichen Voraussetzung zurück, dass nemlich n eine ganze positive Zahl und k und h die Werthe $0, 1 \ldots n$ durchlaufen, während $k + h \leqq n$, so kann man ferner folgende Sätze beweisen.

a) Was auch immer p bedeute, ist m eine ganze positive Zahl, welche kleiner als n ist, Null nicht ausgeschlossen, so werden sämmtliche Glieder der Summe Σ bei welchen $k > m$ falls sie nicht von selbst dadurch wegfallen, dass sie den Faktor Null enthalten, sich aufheben und zwar in der Weise, dass die Glieder, welche zu demselben Werthe von h gehören sich paarweise aufheben, so dass wenn das eine Glied aus den Faktoren $\alpha . \beta . \gamma$ besteht, das andere $= - \alpha . \gamma . \beta$ seyn wird. Man nehme nemlich ein Glied, welches zu einem bestimmten $k > m$ und zu einem bestimmten h gehört, man nehme ferner ein zweites Glied, welches zu k' und h' gehört, die bezüglich an die Stelle von k und h getreten sind, so dass $k' = m + n + 1 - (k + h)$ und $h' = h$ (mithin wegen $k \leqq n$ und $k > m$ und $k + h \leqq n$ auch $k' > m$ und $\leqq n$ und $k' + h' \leqq n$) so hat das erste Glied die Faktoren

$$\alpha = m + n - h - 2k + 1,\ \beta = p + k - h + 1,\ \gamma = m + n + p - 2h - k + 2$$

das zweite dagegen die Faktoren

$$m+n-h-2(m+n+1-k-h)+1 = -\alpha,\ p+m+n+1-k-2h+1 = \gamma$$
$$\text{und } p + k - h + 1 = \beta.$$

Ist $k' = k$ also $2k + h = m + n + 1$, so ist der erste Factor $= 0$, ist dies nicht der Fall, so lassen sich wirklich sämmtliche Glieder in Paare der angegebenen Art zusammenstellen, wobei jedoch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, dass jedes Glied eines solchen Paares für sich $= 0$ ist. Setzt man nemlich $h = n - s$, so ist jedenfalls $s \geqq m + 1$, da sonst $h + k > n$ wäre; es sind also für k die Werthe $m + 1$ bis s zu setzen. Ist nun $s - m$ eine gerade Zahl, so hat man die zusammengehörenden Werthe

$$k = m+1,\ k' = s;\ k = m+2,\ k' = s-1 \text{ u. s. w. bis } k = m + \tfrac{s-m}{2},\ k' = m + \tfrac{s-m}{2} + 1$$

wodurch die sämmtlichen Werthe, welche k annehmen kann, erschöpft sind. Ist aber $s - m$ eine ungerade Zahl, so schliesst die Reihe dieser Werthe mit $k = m + \frac{s-m+1}{2}$ und $k' = m + \frac{s-m+1}{2}$ also $k = k'$, so dass das entsprechende Glied der Summe Σ verschwindet.

In dem hier betrachteten Falle kann man also, ohne den Werth der Summe zu ändern, statt der Bedingung $k \leqq n$, auch die Bedingung $k \leqq m$ nehmen.

b) Was auch immer m sey, ist p eine ganze positive Zahl (Null nicht ausgeschlossen) $< n$, so werden sich alle Glieder der Summe Σ, bei welchen $h > p$, falls sie nicht von selbst wegfallen, aufheben und zwar so, dass sich immer die Glieder, die zu demselben Werthe von $k + h$ gehören paarweise aufheben. Man nehme nemlich ein Glied mit einem bestimmten k und einem bestimmten $h = p + l$, man nehme dann ein zweites Glied, welches zu k' und h' gehört, die bezüglich an die Stelle von k und h getreten sind, und setze $k' = l - 1$, $h' = p + k + 1$, so sind mithin die Faktoren des ersten Gliedes

$$m + n - (p + l) - 2k + 1,\ k - l + 1,\ m + n - p - 2l - k + 2,$$

die Faktoren des zweiten Gliedes aber sind

$$m + n - p - 2l - k + 2,\ l - k - 1,\ m + n - (p + l) - 2k + 1$$

d. h. wenn das erste Glied $= \alpha\beta\gamma$, so ist das zweite $= \gamma . - \beta . \alpha$. Ist $p + l = p + k + 1$ also $k - l + 1 = 0 = \beta$, so fällt das Glied von selbst weg. Ist dies nicht der Fall, so lässt sich wieder zeigen, dass sich wirklich sämmtliche Glieder in Paare der angegebenen Art zusammenstellen lassen, wobei aber wieder die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, dass jedes Glied eines solchen Paares für sich $= 0$ ist. Man nehme nemlich für $k + h$ den bestimmten Werth s, lässt man h die $s - p$ Werthe $p + 1, p + 2 \ldots s$ durchlaufen, so hat man für k die entsprechenden Werthe $s - p - 1, s - p - 2 \ldots . 0$ zu setzen. Ist nun $s - p$ gerade, so ergeben sich hieraus die Zusammenstellungen in Paare

$$k = 0,\ h = s,\ k' = s - p - 1,\ h' = p + 1$$

$$k = 1,\ h = s - 1,\ k' = s - p - 2,\ h' = p + 2$$

$$\cdots\cdots$$

$$k = \frac{s-p}{2} - 1,\ h = \frac{s+p}{2} + 1,\ k' = \frac{s-p}{2},\ h' = \frac{s+p}{2}$$

wodurch alle in Betracht kommenden Werthe von k und h erschöpft sind. Ist dagegen $s - p$ ungerade so hat die Reihe der k das Mittelglied $k = \frac{s-p-1}{2}$ welchem kein k' zugeordnet ist, dann ist aber $2k + p + 1 = k + h$ also $k + p + 1 = h$ und mithin das entsprechende Glied der Summe $= 0$.

In diesem Falle kann man also ohne den Werth der Summe zu ändern, statt der Bedingung $h \leqq n$ auch die Bedingung $h \leqq p$ nehmen.

c) Sind p und m beide ganze positive Zahlen und $p < n$, $m < n$, so fallen nach a) alle Glieder weg, bei welchen $k > m$ damit fallen aber zugleich auch alle Glieder weg die zu demselben Werthe von $k + h$ gehören, in welchen $k > m$ und $h > p$.

Nun müssen aber nach b) auch alle Glieder wegfallen, welche zu demselben Werthe von $k + h$ gehören, in welchen $k < m$ und $h > p$, es fallen also überhaupt alle Glieder weg, in welchen $h > p$ und es bleiben mithin nur die Glieder übrig, bei welchen zugleich die drei Bedingungen $k \leqq m$, $h \leqq p$, $k + h \leqq n$ erfüllt sind. Es ergiebt sich unmittelbar aus der Gestalt der Summe, dass diese letzteren Glieder sämmtlich positiv sind.

Ist, unter Beibehaltung der Voraussetzung, dass m und n ganze positive Zahlen, $p > n$ und $m < n$, so muss man, wegen der Bedingung $k + h \leqq n$, auch $h \leqq n$ nehmen, während man $k \leqq n$ oder auch $\leqq m$ nehmen kann. Ebenso wenn umgekehrt $p < n$ und $m > n$ so muss man $k \leqq n$ nehmen, während man $h \leqq n$ oder auch $\leqq p$ nehmen kann. Ist endlich $p > n$ und $m > n$ so muss man $k \leqq n$ und $h \leqq n$ nehmen. Fasst man alle diese Fälle zusammen, so ergiebt sich dass immer $\Sigma = \frac{n+1 \,.\, n+2}{2} (m+1)(p+1)(m+p+2)$ wenn zugleich die drei Bedingungen $k \leqq m$, $h \leqq p$, $k + h \leqq n$ erfüllt sind. Dies ist der von Herrn Professor Clebsch gefundene Satz.

5.

Zur Erläuterung des Vorhergehenden diene folgendes Beispiel. Man habe $m = 2$, $p = 5$ $n = 7$. Setzt man sowohl für k als für h alle Werthe von 0 bis 7 so erhält man folgende Verbindungen

$$k = 0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,6,6,7$$
$$h = 0,1,2,3,4,5,6,7,0,1,2,3,4,5,6,0,1,2,3,4,5,0,1,2,3,4,0,1,2,3,0,1,2,0,1,0$$

Hieraus ergeben sich folgende 36 Glieder der Summe

1) 10. 6. 16	13) 4. 3. 7	25) 1. 6. 7
2) 9. 5. 14	14) 3. 2. 5	26) 0. 5. 5
3) 8. 4. 12	15) 2. 1. 3	27) 2. 10. 12
4) 7. 3. 10	16) 6. 8. 14	28) 1. 9. 10
5) 6. 2. 8	17) 5. 7. 12	29) 0. 3. 8
6) 5. 1. 6	18) 4. 6. 10	30) —1. 7. 6
7) 4. 0. 4	19) 3. 5. 8	31) 0. 11. 11
8) 3. —1. 2	20) 2. 4. 6	32) —1. 10. 9
9) 8. 7. 15	21) 1. 3. 4	33) —2. 9. 7
10) 7. 6. 13	22) 4. 9. 13	34) —2. 12. 10
11) 6. 5. 11	23) 3. 8. 11	35) —3. 11. 8
12) 5. 4. 9	24) 2. 7. 9	36) —4. 13.

Die Glieder 22) bis 36) gehören zu Werthen von $k \geqq 3$ und geben, insofern sie nicht von selbst verschwinden, folgende sich aufhebende Paare:

22) 4. 9. 13; $k = 3,\ h = 0$
36) —4. 13. 9; $k = 7,\ h = 0$

27) 2. 10. 12; $k = 4,\ h = 0$
34) —2. 12. 10; $k = 6,\ h = 0$

23) 3. 8. 11; $k = 3,\ h = 1$
35) —3. 11. 8; $k = 6,\ h = 1$

28) 1. 9. 10; $k = 4,\ h = 1$
32) —1. 10. 9; $k = 5,\ h = 1$

24) 2. 7. 9; $k = 3,\ h = 2$
33) —2. 9. 7; $k = 5,\ h = 2$

25) 1, 6. 7; $k = 3,\ h = 3$
30) —1. 7. 6; $k = 4,\ h = 3$

Dann finden sich noch drei Glieder, bei welchen $k < 3$ und $h > 5$ nemlich 7) 8) und 15). Davon fällt 7), welches zu $k = 0,\ h = 6$ gehört, von selbst weg, man hat noch

$$8)\ 3.\ -1.\ \ 2;\ \ k=0,\ h=7$$
$$15)\ 2.\ \ \ 1.\ \ 3;\ \ k=1,\ h=6$$

welche sich aufheben. Es bleiben also nur die Glieder, bei welchen zugleich $k \leqq 2$, $h \leqq 5$.

6.

Setzt man $p = 0$ so findet man nach §. 3

$$12)\quad S[(m+n-h-2k+1)(k-h+1)(m+n-2h-k+2)] = \frac{n+1.n+2}{2}(m+1)(m+2)$$

wo wieder m beliebig und h und k die Werthe $0, 1 \ldots n$ unter der Bedingung $k+h \leqq n$ durchlaufen. Nach §. 4 b) fallen aber alle Glieder weg, bei welchen $h > 0$, man hat daher auch, indem noch immer m beliebig angenommen werden kann,

$$13)\quad S[(m+n-2k+1)(k+1)(m+n-k+2)] = \frac{n+1.n+2}{2}(m+1)(m+2)$$

unter der Voraussetzung $k \leqq n$. Ist nun aber m eine ganze positive Zahl und kleiner als n, so fallen nach §. 4 a) auch noch alle die Glieder weg, bei welchen $k > m$, der Werth von 12) und 13) bleibt also derselbe wenn man k die Werthe $0, 1 .. m$ durchlaufen lässt.

Setzt man $m = 0$ so findet man

$$14)\quad S[(n-h-2k+1)(p+k-h+1)(n+p-2h-k+2)] = \frac{n+1.n+2}{2}(p+1)(p+2)$$

wo also p beliebig und h und k wie früher die Werthe $0, 1 .. n$ mit der Bedingung $h+k \leqq n$ durchlaufen. Nun fallen aber nach §. 4 a) alle Glieder weg, bei welchen $k > 0$, man hat daher auch bei beliebigem p

$$15)\quad S[(n-h+1)(p-h+1)(n+p-2h+2)] = \frac{n+1.n+2}{2}(p+1)(p+2)$$

wenn die Bedingung $h \leqq n$ bleibt.

Ist p eine ganze positive Zahl $< n$, so fallen zugleich alle Glieder weg, bei welchen $h > p$, und der Werth von 15) bleibt derselbe wenn man $h \leqq p$ nimmt. Dies lässt sich freilich nicht aus §. 4, b) beweisen.

Dort wurde nemlich gezeigt, dass sich alle Glieder aufheben, die zu demselben $k+h$ gehören, ist aber $k=0$, so gehört zu demselben h nur ein einziges Glied. In der That werden sich auch hier die Glieder paarweise aufheben, die Form des sich aufhebenden Gliederpaares wird aber eine andere seyn. Während nemlich dort die Glieder eines solchen Paares durch $\alpha\,\beta\,\gamma$ und $\gamma\,.\,-\beta\,.\,\alpha$ darzustellen waren, wird hier, wenn das eine Glied die Form $\alpha\,\beta\,\gamma$ hat, das andere $=-\beta\,.\,-\alpha\,.\,-\gamma$ seyn. Man nehme nemlich ein Glied der Reihe, welches zu einem bestimmten h gehört und ein zweites, bei welchem h' an die Stelle von h getreten ist, und setze $h'=n+p+2-h$. Während also die Faktoren des ersten Gliedes

$$n+1-h,\quad p+1-h,\quad n+p+2-2h$$

sind, sind die des zweiten

$$h-(p+1),\quad h-(n+1),\quad 2h-(n+p+2)$$

Wäre $h'=h$ also $n+p+2-2h=0$, so würde das entsprechende Glied verschwinden, da der dritte Faktor Null wird. Lässt man nun h die Werthe $p+1\ldots n$ durchlaufen, so gehört zunächst zu $h=p+1$ ein verschwindendes Glied, da der zweite Faktor Null wird.

Die den folgenden Werthen von h entsprechenden Glieder werden sich, wenn $n+p$ eine ungerade Zahl ist, paarweise aufheben, indem $h=p+2$, $h'=n$; $h=p+3$, $h'=n-1$ u. s. w. $h=\frac{p+n+1}{2}$, $h'=\frac{p+n+3}{2}$, die ganze Reihe der h erschöpfen. Ist aber $n+p$ gerade, so hat die Reihe ein Mittelglied $\frac{p+n+2}{2}$ also $h'=h$ und das entsprechende Glied der Summe verschwindet.

Aus dem symmetrischen Vorkommen von m und n in 12) und 13) ergiebt sich sofort, dass der Werth dieser Summen ungeändert bleibt, wenn man n beliebig und für m eine ganze positive Zahl nimmt, zugleich in 12) für h und k die Werthe $0, 1\ldots m$ unter der Bedingung $k+h\leqq m$ und in 13) für k die Werthe $0, 1\ldots m$ nimmt. Eben so folgt aus der Symmetrie zwischen n und p in 15), dass der Werth dieser Summe ungeändert bleibt, wenn man n beliebig und für p eine ganze positive Zahl nimmt und zugleich h die Werthe $0, 1\ldots p$ durchlaufen lässt.

7.

Man kann ohne der Allgemeinheit zu schaden, die Gestalt der in Formel 9) ausgedrückten Summe Σ vereinfachen. Da nemlich m ganz beliebig ist, so kann man statt dessen auch $m-n$ setzen und erhält

$$16)\qquad S[(m-h-2k+1)(p+k-h+1)(m+p-2h-k+2)$$
$$=\frac{n+1.n+2}{2}(p+1)(m+1-n)(m+p+2-n)$$

wo wieder m und p ganz beliebig sind und sowohl k als h die Werthe $0, 1\ldots n$ durchlaufen, unter der Bedingung $k+h \leqq n$.

Diese Summe ist $=0$ wenn $n=m+1$ oder $n=m+p+2$, negativ wenn $n>m+1$ und $<m+p+2$, sonst positiv, sobald m und p positiv sind.

In Beziehung auf diese Summe lassen sich ähnliche Bemerkungen machen. wie sie in §. 4 entwickelt worden sind und die daher hier kürzer angedeutet werden mögen.

a) Ist p beliebig aber m eine ganze positive Zahl, so lässt sich wieder nachweisen, dass, abgesehen von den Gliedern, die von selbst wegfallen, eine gewisse Anzahl Glieder der Summe sich paarweise aufhebt und zwar immer solche, die zu demselben Werthe von h gehören, so dass zu einem Gliede von der Form $\alpha\beta\gamma$ ein entsprechendes von der Form $-\alpha\gamma\beta$ gehört. Man benutzt hierbei die Bemerkung, dass wenn man in den drei Faktoren

$$17)\qquad \alpha=m-h-2k+1,\quad \beta=p+k-h+1,\quad \gamma=m+p-2h-k+2$$

eines Gliedes mit einem bestimmten Werthe von k und h, statt dieser bezüglich k' und h' einführt, so dass $h'=h$ und $k'=m+1-(k+h)$, man statt α, β, γ bezüglich die drei Faktoren $-\alpha, \gamma, \beta$ erhält.

Ist nun $n \leqq m$, so ist der kleinste Werth, den k' annehmen kann, $=m-n+1$ es folgt hieraus dass sich alle Glieder paarweise aufheben werden, bei welchen $k>m-n$, vorausgesetzt dass solche Werthe von k vorhanden sind, d. h. vorausgesetzt, dass $m-n<n$. Ist dies der Fall, so erhält man mithin denselben Werth der Summe, wenn man k nur die Werthe $1\ldots m-n$ statt $1\ldots n$ durchlaufen lässt.

Ist $n=m+1$ so ist der kleinste Werth, den k' annehmen kann, $=0$; alle zu demselben h gehörenden Glieder, bei welchen $k \gtreqqless 0$ heben sich paarweise auf, d. h. es heben sich überhaupt alle Glieder der Summe (insofern sie nicht von selbst wegfallen) paarweise auf und daher ist die Summe $= 0$.

Ist $n > m + 1$ so darf man in dem Werthe von k' für $k + h$ nur Werthe setzen, die $\leqq m + 1$ sind, es werden sich also alle zu demselben h gehörenden Glieder, die nicht von selbst wegfallen, paarweise aufheben, bei welchen diese Bedingung erfüllt ist.

b) Ist m beliebig und p eine ganze positive Zahl, die kleiner als n ist, so findet sich wieder, dass wenn man in den drei Faktoren der Formel 17) für h den Werth $p + l$ setzt, wodurch sie in

$$\alpha = m - p - l - 2k + 1,\ \beta = k - l + 1,\ \gamma = m - p - 2l - k + 2$$

übergehen und dann $k' = l - 1$ statt k und $h' = p + k + 1$ statt k setzt, so dass $k' + h' = k + h$, die sich hieraus ergebenden Faktoren

$$m - p - 2l - k + 2 = \gamma,\ l - k - 1 = -\beta,\ m - p - l - 2k + 1 = \alpha$$

sind. Der kleinste Werth, welchen k' annehmen kann, ist $p + 1$. Ist also, wie vorausgesetzt wird, $p < n$, so heben sich alle Glieder, bei welchen $h > p$, und zwar die zu demselben Werthe von $k + h$ gehörenden, paarweise auf. Man erhält also denselben Werth der Summe, wenn man h die Werthe $1 \ldots p$ statt $1 \ldots n$ durchlaufen lässt.

c) Ist $m + p + 2 = n$ so wird der Werth der Summe dadurch $= 0$ dass sich alle Glieder, die nicht von selbst wegfallen, paarweise aufheben und zwar so, dass von je zweien, welche zu demselben Werthe von k gehören, dass eine die Form $\alpha\beta\gamma$, das andere die Form $-\beta \,.\, -\alpha \,.\, -\gamma$ hat. Wenn man nemlich in den drei Faktoren der Formel 17) $h' = m + p + 2 - (k + h)$ statt h und $k' = k$ statt k setzt, so erhält man die Faktoren

$$-p + h - k - 1 = -\beta,\ -m + 2k + h - 1 = -\alpha,\ -(m + p) + k + 2h - 2 = -\gamma$$

der kleinste Werth den h' annehmen kann ist $h' = 0$, alle zu demselben k gehörenden Glieder, bei welchen $h \gtreqless 0$ heben sich paarweise auf (abgesehen von den Gliedern die von selbst wegfallen) d. h. es verschwinden alle Glieder der Summe. Es ist bemerkenswerth, dass dies nur voraussetzt, dass $m+p$ eine ganze Zahl ist, während m und p beliebige Zahseyn können.

8.

Aus dem bei Bestimmung des Werthes der Summe 9) angewandten Verfahren ergiebt sich unmittelbar, dass man, unter Beihaltung der dortigen Voraussetzungen, denselben Werth erhält, wenn man, statt dieser Summe, die Summe

$$16)\quad \Sigma' = S[(m+\alpha n-\alpha(2k+h)+1)(p+\alpha(k-h)+1)(m+p+\alpha n+2-\alpha(k+2h))]$$

betrachtet, wo wieder der dritte Faktor unter dem Summenzeichen die Summe der zwei vorhergehenden ist und α eine ganz beliebige Zahl bedeutet. Man kann nemlich wieder diese Summe in zwei Theile A und B zerlegen, so dass $\Sigma' = A+B$, indem man

$$\begin{aligned} A = \frac{n+1.n+2}{2}(p+1)^2(m+1) + 2\alpha(p+1)(m+1)S(k-h) + \alpha^2(m+1)S(k-h)^2 \\ +\alpha(p+1)^2 S(n-2k-h) + 2\alpha^2(p+1)S[(k-h)(n-2k-h) \\ +\alpha^3 S[(k-h)^2(n-2k-h)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = \frac{n+1.n+2}{2}(m+1)^2(p+1) + 2\alpha(p+1)(m+1)S(n-2k-h) \\ +\alpha^2(p+1)S(n-2k-h)^2 + \alpha(m+1)^2 S(k-h) + 2\alpha^2(m+1)S[(k-h)(n-2k-h)] \\ +\alpha^3 S[(k-h)(n-2k-h)^2] \end{aligned}$$

setzt.

Berücksichtigt man hier wieder die Gleichungen 1), 2), 5), 7), 8) so hat man

$$A = \frac{n+1.n+2}{2}(p+1)^2(m+1) + \alpha^2(m-p)S(k-h)^2 + \alpha^3 S[(k-h)^2(n-2k-h)]$$

$$B = \frac{n+1.n+2}{2}(m+1)^2(p+1) - \alpha^2(m-p)S(k-h)^2 - \alpha^3 S[(k-h)^2(n-2k-h)]$$

und mithin

$$\Sigma' = \frac{n+1.n+2}{2}(m+1)(p+1)(m+p+2)$$

was auch m und p bedeuten mögen. Setzt man daher $m-\alpha n$ statt m so hat man unter denselben Verhältnissen

$$\begin{aligned} S[(m+1-\alpha(2k+h))(p+1+\alpha(k-h))(m+p+2-\alpha(k+2h))] \\ = \frac{n+1.n+2}{2}(p+1)(m+1-\alpha n)(m+p+2-\alpha n). \end{aligned}$$

Aehnliche Sätze, wie sie in §. 4 gefunden worden sind, finden jedoch bei der Summe Σ' nur unter besonderen Beschränkungen und Voraussetzungen statt und können daher nur ein untergeordnetes Interesse darbieten. Dies zeigt sich schon bei dem einfachsten auf die Annahme $a = 1$ folgenden Fall, nemlich wenn man $a = 2$ setzt, über welchen noch einige Erörterungen folgen mögen.

Sey p beliebig aber m eine ganze positive Zahl $< n$, man nehme einen Werth k der so beschaffen ist, dass $2k > m$ und substituire in den Faktoren

$$\alpha = m+2n-2(2k+h)+1,\ \beta = p+2(k-h)+1,\ \gamma = m+p+2n+2-2(k+2h)$$

den Werth $2k' = m+2n+1-2(2k+h)$ statt $2k$ und $h' = h$, so dass $2k' > m$ so erhält man die Faktoren $-\alpha, \gamma, \beta$ so dass diese zwei Glieder sich aufheben. Aus dem Werthe von $2k'$ ergiebt sich aber, dass diese Substitution nur dann möglich ist, wenn m eine ungerade Zahl ist. Hieraus ergiebt sich der dem Satze in §. 4, a analoge: Was auch p sey, ist m eine ganze ungerade Zahl $< n$, so werden sämmtliche Glieder der Summe Σ' bei welche $2k > m$ sich paarweise aufheben und zwar immer diejenigen, welche zu demselben h gehören, falls sie nicht von selbst wegfallen.

Ist m eine gerade Zahl so findet ein ähnlicher Satz nicht statt.

Sey ferner m beliebig, aber p eine ganze positive Zahl $< n$, man nehme einen Werth h der so beschaffen ist dass $2h > p$ und setze daher $2h = p + l$, man substituire in den Faktoren

$$\alpha = m+2n-4k-p-l+1,\ \beta = 2k-l+1,\ \gamma = m+2n-p+2-2k-2l$$

die man hierdurch erhält, $2k' = l-1$ statt $2k$ und $2h' = p+2k+1$ statt $2h$ so gehen hierdurch die Faktoren α, β, γ bezüglich in $\gamma, -\beta, \alpha$ über. Aus dem Werthe von $2h'$ ergiebt sich aber, dass diese Substitution nur in dem Falle möglich ist, wenn p eine ungerade Zahl ist. Hieraus folgt also dem Satze §. 4, b analog: Was auch m sey, ist p eine ganze positive ungerade Zahl $< n$, so werden sämmtliche Glieder der Summe Σ' bei welchen $2h > p$, insofern sie nicht von selbst verschwinden, sich paarweise aufheben und zwar immer diejenigen, welche zu demselben Werthe von $k+h$ gehören.

Ist p eine gerade Zahl, so findet ein ähnlicher Satz nicht statt.

Sind m und p beide ganze positive ungerade Zahlen und beide kleiner als n so folgt hieraus dem Satze 4, c analog, dass dann alle Glieder wegfallen, bei welchen nicht zugleich die drei Bedingungen $2k \leqq m$, $2h \leqq p$, $k+h \leqq n$ erfüllt sind.

9.

Als eine der Summe Σ verwandte Summe lässt sich noch, unter Beibehaltung der früheren Voraussetzungen, die Summe

$$\Sigma'' = S[(m+2n-5k-h+1)(p+4k-4h+1)(m+p+2n+2-k-5h)]$$

bezeichnen, wo wieder der dritte Faktor die Summe der zwei vorhergehenden ist. Hier sind ausser der schon bekannten Gleichungen

$$S(k-h) = 0;\ S(k^2-h^2) = 0;\ S(k^3-h^3) = 0 \text{ und } S[kh(k-h)] = 0$$

noch folgende zu berücksichtigen. Zunächst folgt ebenso, wie in §. 1 gezeigt wurde, dass $S(2k+h) = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{2}$, auch

$$S(5k+h) = n.\overline{n+1}.\overline{n+2}$$

und daher

$$S(2n-5k-h) = 0$$

Es ist ferner

$$(k-h)(5k+h)^2 - 4(k-h)^2(5k+h) = 5(k^3-h^3) + 21kh(k-h)$$

also

$$17)\qquad S[(k-h)(5k+h)^2] = 4\, S[(k-h)^2(5k+h)]$$

auch ist

$$(k-h)(5k+h) = 2\,(k-h)^2 + 3\,(k^2-h^2)$$

also

$$18)\qquad S[(k-h)(5k+h)] = 2\, S(k-h)^2 = -\, S[(k-h)(2n-5k-h)].$$

Nun ist

$$4(k-h)(2n-5k-h)^2 = 16n^2(k-h) - 16n(k-h)(5k+h) + 4(k-h)(5k+h)^2$$

also $4\,S[(k-h)(2n-5k-h)^2] = 4\,S[(k-h)(5k+h)^2] - 16n\,S[(k-h)(5k+h)]$
$= 16\,S[(k-h)^2(5k+h)] - 16n\,S[(k-h)(5k+h)]$ (nach Form. 17)
$= -16\,S[(k-h)^2(2n-5k-h)] + 32n\,S(k-h)^2 - 16n\,S[(k-h)(5k+h)]$

also (nach Formel 18)

$$S[(k-h)(2n-5k-h)^2] = -4\,S[(k-h)^2(2n-5k-h)].$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} A &= S[(p+4(k-h)+1)^2(m+2n-5k-h+1)] \\ B &= S[(m+2n-5k-h+1)^2(p+4(k-h)+1)] \end{aligned}$$

so dass $\Sigma'' = A + B$ und entwickelt, indem man die oben gefundenen Gleichungen berücksichtigt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} A = {} & \tfrac{n+1.n+2}{2}(p+1)^2(m+1) + 16(m+1)S(k-h)^2 - 16(p+1)S(k-h)^2 \\ & -4S[(k-h)(2n-5k-h)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = {} & \tfrac{n+1.n+2}{2}(m+1)^2(p+1) + (p+1)S(2n-5k-h)^2 - 16(m+1)S(k-h)^2 \\ & +4S[(k-h)(2n-5k-h)^2] \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \Sigma'' &= \tfrac{n+1.n+2}{2}(m+1)(p+1)(m+p+2) + (p+1)[S(2n-5k-h)^2 - 16S(k-h)^2] \\ &= \tfrac{n+1.n+2}{2}(m+1)(p+1)(m+p+2) - 2(p+1)n^2(n+1)(n+2) \\ &\quad + (p+1)[S(5k+h)^2 - S(4k-4h)^2] \end{aligned}$$

Die Entwickelung der zuletzt angedeuteten Summen bietet kein weiteres Interesse, man sieht aber dass Σ'' immer den Faktor $p+1$ enthält.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1872

Band/Volume: 17

Autor(en)/Author(s): Stern Moritz Abraham

Artikel/Article: Ueber den Werth einiger Summen. 63-80