Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhangen

von

Ernst Schering.

Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Ges. d. Wiss. am 1. Novemb. 1873.

Hamilton führt durch seine zuerst im Jahre 1834 veröffentlichte neue Methode der Behandlung einiger mechanischen Probleme bekanntlich die Aufgabe der Bestimmung der Bewegung auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurück und erreicht dadurch eine besonders einfache Form der Differentialgleichungen für die Elemente einer durch sogenannte Störungskräfte beeinflussten Bewegung. Jacobi hat den Grundgedanken dieser Theorie in einer einfacheren Form aufgefasst, die Anwendbarkeit der Methode verallgemeinert und dadurch in diesem weiten Gebiete der analytischen Mechanik eine vollständige Neugestaltung der Behandlungsweise geschaffen, welcher auch die Herrn Richelot Liouville Bertrand Donkin Lipschitz neue Entdeckungen hinzugefügt haben.

In den vorliegenden Blättern werde ich diese Methode in der Form darstellen, dass ich als Ausgangspunkt die Aufgabe betrachte, für die Veränderlichen, die den bekannten Differentialgleichungen für die Bewegung zu Grunde liegen, andere von der Beschaffenheit einzuführen, dass die zwischen ihnen sich ergebenden Gleichungen eine analog einfache Form erhalten wie die ursprünglichen sie besitzen. Die Bedingungsgleichungen für eine solche Substitution lassen sich in besonders einfacher Form darstellen, wenn man allgemeine von der die wirkliche Bewegung darstellende nach der Zeit genommenen vollständigen Differentiation so

wie von der die virtuelle Bewegung darstellende Variation verschiedene Differentiationen zu Hülfe zieht. Die Theorie dieser canonischen Substitutionen ihre Anwendung auf die Integrationen der Bewegungsgleichungen auch für die Einwirkung von solchen Kräften, deren Maass nicht nur von der gegenseitigen Lage der Körper sondern auch von deren Ortsänderung abhangen, so wie ferner die Eigenschaften der im Artikel IX. aufgestellten allgemeinen Gleichungen für die Variationen der Elemente dann der daraus sich als specielle Fälle ergebenden von Lagrange Poisson Hamilton und Jacobi gefundenen Gleichungen habe ich zuerst im Sommersemester 1862 in meinen academischen Vorlesungen mitgetheilt.

Die folgenden Blätter enthalten ausser diesen Untersuchungen noch eine Ableitung der Hamiltonschen Gleichungen aus dem Gaussischen Princip des kleinsten Zwanges. Eine andere Abhandlung wird sich mit dem Nachweise der Existenz einer normalen Form für jede canonische Substitution mit den nur theilweis gegebenen Substitutionen und mit den Differentialdeterminanten der canonischen Veränderlichen beschäftigen.

I.

Princip des kleinsten Zwanges.

Unter den verschiedenen Grundgesetzen der Mechanik besitzt das Gaussische Princip des kleinsten Zwanges mehrere Vorzüge. Es gilt in ganz gleicher Form für die Bewegung wie für die Ruhe, ferner für solche Bedingungen und Beschränkungen der Bewegungen, dass die jeder möglichen Bewegung entgegengesetzte gleich möglich oder nicht gleich möglich ist. Es reicht auch vollständig hin, die Bewegung in allen solchen Räumen zu bestimmen, in welchen das Quadrat des Längenelementes durch einen homogenen Ausdruck zweiten Grades der dem Längenelemente entsprechenden Differentialen von den Coordinaten dargestellt wird.

Gauss spricht sein Princip in folgender Form aus, Bd. V seiner Werke:

Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Besckränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in mög-

lich grösster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglich kleinstem Zwange, indem man als Maass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Producte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punkts von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet.

Die Anwendung dieses Grundsatzes auf die Bestimmung der Bewegung von Körpern der äusseren Natur bedarf also noch der Kenntniss der Bewegung eines einzelnen freien Massentheilchens. Die hierfür geltenden Gesetze ergeben sich aus der Natur der Körper und aus der Art der Wirkung der vorhandenen Kräfte, sind also wesentlich physikalische. Die allgemein gültigsten und an den übligen Begriff von Kraft sich anschliessenden sind die beiden folgenden Voraussetzungen:

Ein einzelnes frei bewegliches Massentheilchen, auf welches keine Kraft wirkt, bewegt sich in einer kürzesten Linie des Raumes und mit unveränderlicher Geschwindigkeit, beschreibt in gleich grossen Zeitabschnitten gleich grosse Wegstrecken.

Ein einzelnes frei bewegliches Theilchen mit der Masse m, welches augenblicklich noch keine Bewegung hat aber unter der Einwirkung einer Kraft R steht, wird eine Bewegung beginnen in der Richtung der Kraft R und mit der Beschleunigung gleich $\frac{R}{m}$ wird also in jener Richtung während des nächsten Zeitelements dt den Weg $\frac{1}{2}\frac{R}{m}dt^2$ zurücklegen.

Diese beiden Gesetze für sich bestimmen noch nicht die Bewegung eines freien Massentheilchens unter der Voraussetzung einer anfänglichen Bewegung und der gleichzeitigen Einwirkung einer oder mehrerer Kräfte; aber mit Zuhülfenahme des Princips des kleinsten Zwanges in seiner allgemeinsten Deutung lassen jene Fälle sich erledigen. Nach Zulassung des Princips ist man auch berechtigt bei der Bestimmung der Bewegung eines Systems irgend eine Gruppe der gegebenen freien Bewegungen durch solche andere fingirte freie Bewegungen und die gegebenen Bedingungen und Beschränkungen für die Bewegung des Systems durch solche andere gedachte Bedingungen zu ersetzen, so dass die Bedingungen im Ganzen bestehen bleiben und die aus diesen fingirten freien Bewegungen resultirende Bewegung des ganzen Systems dieselbe wie die aus jener Gruppe von freien Bewegungen resultirende des ganzen Systems wird.

Eine der fruchtbarsten Art der Anwendung dieses Verfahrens besteht darin, dass man sich die einzelnen Massentheilchen m wieder in kleinere Massentheilchen m_0, $m_{,}$, . . zerlegt denkt; so dass $m = m_0 + m_{,} + \ldots$ wird, und zu den vorhandenen Bedingungen noch die neuen hinzutreten lässt, dass m_0, $m_{,}$, . . untrennbar mit einander verbunden bleiben. Irgend eine dem Massentheilchen m innewohnende freie Bewegung kann dann durch eine einem beliebigen der Theilchen zum Beispiel m_0 zugeschriebene bestimmte freie Bewegung ersetzt werden.

Die Lage eines Punktes des Raumes, worin die Bewegung vor sich gehe, sei gegeben durch die Werthe der von einander unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_h \ldots$ Von dem Punkte $x_1, x_2, \ldots x_h \ldots$ seien kürzeste Linien gezogen nach dem Punkte $x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, \ldots x_h + \mathrm{d}x_h, \ldots$ und nach dem Punkte $x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots x_h + \delta x_h \ldots$ und von diesem letzteren Punkte eine kürzeste Linie nach der zuerst genannten Linie oder nach deren Verlängerung so wie der Treffungspunkt der letztern construirt. Die von dem Punkte x nach diesem Treffungspunkte gezogene kürzeste Linie heisse die Projection der von x nach $x + \delta x$ gezogenen Linie auf die von x nach $x + \mathrm{d}x$ gezogenen Linie und werde als positiv betrachtet, wenn die Projection und diese Linie nach derselben Seite hin liegen, negativ wenn nach entgegengesetzten Seiten. Das Product der Länge der Projection multiplicirt in die Länge dieser Linie werde mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet und sei gleich

$$\sum_{hk} X_{hk} \mathrm{d}x_h \delta x_k$$

worin X_{hk} von der Beschaffenheit des Raumes und der gewählten Coordinaten $x_1, x_2 \ldots$ abhangen, allgemein der Bedingung $X_{hk} = X_{kh}$ genügen und allein Functionen von $x_1, x_2 \ldots$ aber nicht von $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \ldots \delta x_1 \delta x_2 \ldots$ sind, worin ferner die Summation Σ über so viele Werthe 1, 2, 3 . . der Indices h und k sich erstreckt, wie der Raum Dimensionen hat. Fällt der Punkt $x + \mathrm{d}x$ mit $x + \delta x$ zusammen so geht jener Ausdruck in

$$\sum_{hk} X_{hx} \mathrm{d}x_h \mathrm{d}x_k$$

über, welcher mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet werden soll und das Quadrat der Länge der

vom Punkte x nach $x+\mathrm{d}x$ gezogenen Linie bedeutet also bei beliebigen $\mathrm{d}x$ immer einen positiven Werth annimmt.

Die Länge einer Linie, deren Punkte durch Werthe der $x_1, x_2 \ldots x_h \ldots$ als Functionen Einer unabhängigen Veränderlichen gegeben sind, ist gleich

$$\int \sqrt{(\sum_{hk} X_{hk} \mathrm{d}x_h \mathrm{d}x_k)}$$

dieses Integral muss also für eine kürzeste Linie, die durch zwei feste Punkte, welchen die constanten Grenzwerthe des Integrals entsprechen, zu einem Minimum werden. Bezeichnet die Variation δ eine beliebige Umformung der Functionen $x_1, x_2 \ldots x_h \ldots$ so müssen für eine kürzeste Linie zwischen diesen Veränderlichen solche Relationen bestehen, dass sich $\delta\sqrt{\mathfrak{T}}$ auf ein vollständiges d Differential reducirt. Es ist nun, wenn man in dem obigen Ausdruck $\mathfrak{D}$ die δ Differentiation in demselben Sinne nimmt wie hier die Variation,

$$\delta\sqrt{\mathfrak{T}} - \mathrm{d}\frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{\mathfrak{T}}} = \frac{\frac{1}{2}\delta\mathfrak{T} - \mathrm{d}\mathfrak{D}}{\sqrt{\mathfrak{T}}} + \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{T}}\mathrm{d}\sqrt{\mathfrak{T}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{T}}}\sum_{hk}\delta X_{hk}.\mathrm{d}x_h.\mathrm{d}x_k - \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{T}}}\sum_{hk}\mathrm{d}(X_{hx}\,\mathrm{d}x_h).\delta x_k + \frac{\mathrm{d}\sqrt{\mathfrak{T}}}{\mathfrak{T}}.\sum_{hk}X_{hk}\mathrm{d}x_h\delta x_k$$

also dieser Ausdruck, welcher von den δx und nicht mehr von deren Differentialen $\mathrm{d}\delta x$ abhangt und von $\delta\sqrt{\mathfrak{T}}$ sich nur um ein totales Differential $\mathrm{d}\frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{\mathfrak{T}}}$ unterscheidet, muss für eine kürzeste Linie verschwinden.

Ist diese die Bahn eines frei beweglichen Massentheilchens und betrachtet man bei der d Differentiation die Zeit als die einzige unabhängige Veränderliche und deren Differential $\mathrm{d}t$ als constant, so wird $\sqrt{\mathfrak{T}}$ gleich der Geschwindigkeit multiplicirt in $\mathrm{d}t$, demnach $\mathrm{d}\sqrt{\mathfrak{T}}$ gleich der Beschleunigung multiplicirt in $\mathrm{d}t^2$, also, wenn das Massentheilchen sich frei ohne Einwirkung von Kräften bewegen soll, muss nach dem Grundgesetz $\mathrm{d}\sqrt{\mathfrak{T}} = 0$ und zufolge der obigen Gleichung demnach auch

$$\tfrac{1}{2}\delta\mathfrak{T} - \mathrm{d}\mathfrak{D} = 0$$

werden für jedes beliebige Werthensystem der $\delta x_1, \delta x_2 \ldots \delta x_h \ldots$ und unter andern auch für $\delta x_1 = \mathrm{d}x_1$, $\delta x_k = \mathrm{d}x_k$, $\delta x_h = \mathrm{d}x_h$, so dass die vorhergehende Gleichung $\mathrm{d}\sqrt{\mathfrak{T}} = 0$ als specieller Fall wieder entsteht.

Die von dem Zustand der Ruhe ausgehende durch eine Kraft R hervorgebrachte Bewegung eines Massentheilchens m während des ersten Zeitelementes $\mathrm{d}t$ kann man nach dem Grundgesetz als zusammenfallend betrachten mit dem ersten Theile einer von dem Punkte x nach $x+\mathrm{d}x$ gezogenen kürzesten Linie, wenn sie mit der Kraft R gleiche Richtung hat. Diese Bedingung lässt sich analytisch, wie leicht aus der Bedeutung der hier gewählten Bezeichnungen hervorgeht, dadurch darstellen, dass $\frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{\mathfrak{T}}}$ die Länge der Projection einer von dem Punkte $x_1, x_2, x_3 \ldots$ nach einem beliebigen unendlich nahe liegenden Punkte $x_1+\delta x_1$, $x_2+\delta x_2$, $x_3+\delta x_3 \ldots$ gehenden sogenannten virtuellen Bewegung auf die Richtung der Kraft R bezeichnen soll also dasjenige, was man die in der Richtung der Kraft R von dem Massentheilchen m ausgeführte virtuelle Bewegung δr zu nennen pflegt. Nimmt man wieder die Zeit t als unabhängige Veränderliche der Differentiation d und ferner $\mathrm{d}t$ constant, so bedeutet $\sqrt{\mathfrak{T}}$ das Product der Geschwindigkeit multiplicirt in $\mathrm{d}t$ wird also nach dem Grundgesetz für den Anfang der Bewegung $t=t_0$ zu Null, was nicht anders stattfinden kann, als wenn für diesen Zeitpunkt die Derivirten $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}, \ldots$ verschwinden. Unter denselben Voraussetzungen wird $\mathrm{d}\sqrt{\mathfrak{T}}$ dem Producte der Beschleunigung multiplicirt in $\mathrm{d}t^2$ also nach dem Grundgesetze dem Werth von $\frac{R}{m}\mathrm{d}t^2$ gleich. Multiplicirt man die obige allgemeine Gleichung für eine kürzeste Linie mit $\sqrt{\mathfrak{T}}$, so erhält man hier:

$$\tfrac{1}{2}\delta\mathfrak{T}-\mathrm{d}\mathfrak{D}+\frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{\mathfrak{T}}}\mathrm{d}\sqrt{\mathfrak{T}}=-\sum_{hk}X_{hk}\mathrm{d}\,\mathrm{d}x_h.\delta x_k+\delta r\frac{R}{m}\mathrm{d}t^2=0,$$

$$\mathrm{d}\sqrt{\mathfrak{T}}=\frac{R}{m}\mathrm{d}t^2,\ \mathfrak{T}=0,\ \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=0,\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=0\ldots,\ \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{\mathfrak{T}}}=\delta r,\ \text{für}\ t=t_0$$

für beliebige $\delta x_1, \delta x_2, \ldots$ als Gleichungen zur Bestimmung der vom Zustand der Ruhe zur Zeit $t=t_0$ ausgehenden Bewegung, welche die Kraft R in dem frei beweglichen Massentheilchen m hervorbringt.

Indem wir uns nun zur Untersuchung eines beliebigen Systems von Massentheilchen wenden, bezeichnen wir für das einzelne Massentheilchen m mit $x_1, x_2, x_3 \ldots$ die Coordinaten und betrachten die Differentiation d als auf $\mathrm{d}t$ bezüglich und zwar als diejenige Aenderung der Grössen, wie sie in Folge der Bewegung wirklich entsteht. Jedem Massentheilchen m mag

eine Bewegung innewohnen, vermöge welcher es, wenn es von diesem Zeitpunkte t an frei wäre und von keiner Kraft eine Einwirkung erlitte, sich während der Zeit $\mathrm{d}t$ von dem Punkte x_h nach dem Punkte

$$x_h + \mathrm{d}_0 x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 x_h + \tfrac{1}{1.2.3}\mathrm{d}_0^3 x_h + \cdot\cdot$$

bewegen würde, für welchen

$$\tfrac{1}{2}\delta\mathfrak{T}_0 - \mathrm{d}_0\mathfrak{D}_0 = 0$$

bei jetzt ganz beliebigen δx_h wird, wenn nemlich mit $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{D}_0$ diejenigen Ausdrücke bezeichnet werden, welche entstehen, wenn die Differentiation d im Sinne von d_0 und zwar für verschiedene Massentheilchen m auch wieder beliebig verschieden genommen wird. Auf jedes Massentheilchen m wirke je eine besondere Gruppe Kräfte $R_{,}, R_{,,}\cdot\cdot$ welche, wenn sie einzeln für sich auf m wirkten und letzteres augenblicklich im Ruhezustande aber frei beweglich wäre, je nach dem Punkte

$$x_h + \mathrm{d}_{,} x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,} x_h + \tfrac{1}{1.2.3}\mathrm{d}_{,}^3 x_h + \cdot\cdot$$

oder

$$x_h + \mathrm{d}_{,,} x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,,}\mathrm{d}_{,,} x_h + \tfrac{1}{1.2.3}\mathrm{d}_{,,}^3 x_h + \cdot\cdot$$

etc. treiben würden, worin

$$\tfrac{1}{2}\delta\mathfrak{T}_{,} - \mathrm{d}_{,}\mathfrak{D}_{,} + \frac{\mathfrak{D}_{,}}{\sqrt{\mathfrak{T}_{,}}}\,\mathrm{d}_{,}\sqrt{\mathfrak{T}_{,}} = -\sum_{hk} X_{hk}\,\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,} x_h\,\delta x_k + \delta r_{,}\frac{R_{,}}{m}\mathrm{d}t^2 = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\delta\mathfrak{T}_{,,} - \mathrm{d}_{,,}\mathfrak{D}_{,,} + \frac{\mathfrak{D}_{,,}}{\sqrt{\mathfrak{T}_{,,}}}\,\mathrm{d}_{,,}\sqrt{\mathfrak{T}_{,,}} = -\sum_{hk} X_{hk}\,\mathrm{d}_{,,}\mathrm{d}_{,,} x_h\,\delta x_k + \delta r_{,,}\frac{R_{,,}}{m}\mathrm{d}t^2 = 0$$

und entsprechend für die übrigen Kräfte ist.

Jedes Massentheilchen m werde in kleinere Massentheilchen $m_0\, m_{,}\cdot\cdot$ beliebig für jedes einzelne m zerlegt, so dass also zu den ursprünglichen Bedingungen noch die neue hinzukommt, dass je $m_0\, m_{,}\cdot\cdot$, welche die Theile einer Masse m ausmachen, mit einander fest verbunden sein sollen. Wir wollen annehmen, dass die Grössen $(m, m_0)_h$ so bestimmt seien, dass es für die ganze Bewegung denselben Erfolg habe, ob der Masse m eine Bewegung innewohnt, die ihn, wenn er frei und keinen Kräften ausge-

setzt wäre, nach dem eben angegebenen Punkte brächte, oder ob den Theilen $m_{,}$, $m_{,,}$ . . keine Bewegung innewohnt, dagegen dem Theile m_0 eine solche, so dass, wenn dieser sich frei bewegte, er nach dem Punkte

$$x_h + (m, m_0)_h \{ \mathrm{d}_0 x_h + \tfrac{1}{2} \mathrm{d}_0 \mathrm{d}_0 x_h + \tfrac{1}{1.2.3} \mathrm{d}_0^3 x_h + . \}$$

gelangen würde, ferner mögen $(m, m_{,})_h$, $(m, m_{,,})_h$ . . der Art bestimmt sein, dass die Einwirkungen der Kräfte $R_{,}$, $R_{,,}$ auf die Massen ersetzt werden durch Kräfte, welche auf die einzelnen Theile $m_{,}$, $m_{,,}$ . . allein wirken, so dass diese bei freier Bewegung einzeln je nach dem Punkte

$$x_h + (m, m_{,})_h \{ \mathrm{d}_{,} x_h + \tfrac{1}{2} \mathrm{d}_{,} \mathrm{d}_{,} x_h + \tfrac{1}{1.2.3} \mathrm{d}_{,}^3 x_h + . . \}$$

und dem Punkte

$$x_h + (m, m_{,,})_h \{ \mathrm{d}_{,,} x_h + \tfrac{1}{2} \mathrm{d}_{,,} \mathrm{d}_{,,} x_h + \tfrac{1}{1.2.3} \mathrm{d}_{,,}^3 x_h + . . \}$$

gelangen würden.

Die wirklich ausgeführte Bewegung bringe die Masse m also jeden seiner Theile m_0 $m_{,}$ $m_{,,}$ . . von dem Punkte x_h nach

$$x_h + \mathrm{d} x_h + \tfrac{1}{2} \mathrm{d}\mathrm{d} x + \tfrac{1}{1.2.3} \mathrm{d}^3 x_h + . .$$

irgend eine andere mit der innern Verknüpfung der Massen und mit den Bedingungen und den äussern Beschränkungen verträgliche Lage des Systems können wir dann in der Weise darstellen, dass die Masse m und also jedes seiner Theile m_0 $m_{,}$ $m_{,,}$ . . den Ort

$$x_h + \delta x_h + \mathrm{d} x_h + \tfrac{1}{2} \mathrm{d}\mathrm{d} x_h + \tfrac{1}{1.2.3} \mathrm{d}^3 x_h + .$$

einnehme, so dass, weil δ und d unendlich kleine Aenderungen bedeuten, auch der Ort

$$x_h + \delta x_h$$

für die Masse m ein mit den Bedingungen verträglicher ist. Diejenigen Differentiale der Coordinaten, welche der Abweichung irgend einer möglichen von der freien Bewegung der Theilchen entsprechen, werden also

für m_0

$$(m, m_0)_h(\mathrm{d}_0 x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 x_h + \ldots) - (\delta x_h + \mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_h + \ldots)$$

für $m_{,}$

$$(m, m_{,})_h(\mathrm{d}_{,} x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,} x_h + \ldots) - (\delta x_h + \mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_h + \ldots)$$

und so fort also nach der für den Raum und diese Coordinaten gemachten Voraussetzung das Quadrat dieser Abweichung

für m_0

$$\sum_{hk} X_{hk}\{(m, m_0)_h(\mathrm{d}_0 x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 x_h + \ldots) - (\delta x_h + \mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_h + \ldots)\}\times$$
$$\times\{(m, m_0)_k(\mathrm{d}_0 x_k + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 x_k + \ldots) - (\delta x_k + \mathrm{d}x_k + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_k + \ldots)\}$$

für $m_{,}$

$$\sum_{hk} X_{hk}\{(m, m_{,})_h(\mathrm{d}_{,} x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,} x_h + \ldots) - (\delta x_h + \mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_h + \ldots)\}\times$$
$$\times\{(m, m_{,})_k(\mathrm{d}_{,} x_k + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,} x_k + \ldots) - (\delta x_k + \mathrm{d}x_k + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_k + \ldots)\}$$

also das Maass des Zwanges für diese Bewegung gleich

$$\sum_m [m_0 \sum_{hk} X_{hk}\{(m, m_0)_h(\mathrm{d}_0 x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 x_h + \ldots) - (\delta x_h + \mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_h + \ldots)\}\times$$
$$\times\{(m, m_0)_k(\mathrm{d}_0 x_k + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 x_k + \ldots) - (\delta x_k + \mathrm{d}x_k + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_k + \ldots)\}$$
$$+ m_{,} \sum_{hk} X_{hk}\{(m, m_{,})_h(\mathrm{d}_{,} x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,} x_h + \ldots) - (\delta x_h + \mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_h + \ldots)\}\times$$
$$\times\{(m, m_{,})_k(\mathrm{d}_{,} x_k + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,} x_k + \ldots) - (\delta x_k + \mathrm{d}x_k + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_k + \ldots)\}$$
$$+ \text{u. s. f.}]$$

Nach Gauss Princip sind die $\mathrm{d}x_h$ und $\mathrm{d}\mathrm{d}x_h \ldots$ so zu bestimmen, dass dieser Ausdruck unter allen möglichen Werthen der δx_h seinen kleinsten Werth für $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = 0 \ldots \delta x_h = 0$ annimmt, also dass, wenn man diesen Ausdruck nach Potenzen von den δx entwickelt, die sich ergebende Summe der linearen Glieder nemlich

$$-2\sum_m \sum_{hk} X_{hk}\{m_0(m, m_0)_h(\mathrm{d}_0 x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 x_h + \ldots)$$
$$+ m_{,}(m, m_{,})_h(\mathrm{d}_{,} x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,} x + \ldots) - m(\mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_h \ldots)\}\delta x_k$$

worin $m_0 + m_{,} + m_{,,} + \ldots$ durch m ersetzt ist, nie negativ wird.

Die noch unbekannten $(m, m_0)_h$, $(m, m_{,})_h$ .. ergeben sich durch die Betrachtung, dass, wenn der aus m_0, $m_{,}$, $m_{,,}$, .. bestehende Massenpunkt m für sich frei wäre und von keiner Kraft eine Einwirkung erführe also sich nach

$$x_h + \mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{1.2.3}\mathrm{d}^3x_k + . = x_h + \mathrm{d}_0x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0x_h + \tfrac{1}{1.2.3}\mathrm{d}_0{}^3x_k + ..$$

bewegen würde, er dahin auch gelangen müsste, wenn von seinen mit einander fest verbundenen Theilen nur m_0 eine freie Bewegung nemlich nach

$$x_h + (m, m_0)(\mathrm{d}_0x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0x_h + \tfrac{1}{1.2.3}\mathrm{d}_0{}^3x_h + ..)$$

dagegen die übrigen Theile keine freie Bewegung besässen also

$$\mathrm{d}_{,}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,}x_h + \tfrac{1}{1.2.3}\mathrm{d}_{,}^3x_h + .. = 0 \text{ für alle } h$$

sein müsste. Nach dem Princip des kleinsten Zwanges darf dann also

$$-2\sum_{hk} X_{hk}\{m_0(m, m_0)_h(\mathrm{d}_0x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0x_h + ..) - m(\mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_h + ..)\}\delta x_k$$

für kein Werthensystem $\pm\delta x_1, .. \pm\delta x_h ..$ negativ werden, muss also $= 0$ sein. Hierin ist der Factor von $X_{hk}\delta x_k$ nur ein besonderer Werth von δx_h, er muss also, da für diesen besondern Fall die Summe proportional dem Quadrate eines Längenelementes im Raume wird, selbst $= 0$ sein, es entsteht daher mit Hinzuziehung der obigen Gleichung die Relation

$$\begin{aligned} m_0(m, m_0)_h(\mathrm{d}_0x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0x_h + ..) &= m(\mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_h + ..) \\ &= m(\mathrm{d}_0x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0x_h + ..) \end{aligned}$$

demnach ist

$$(m, m_0)_h = \frac{m}{m_0}$$

Durch gleiche Betrachtungen ergibt sich

$$(m, m_{,})_h = \frac{m}{m_{,}}, \quad (m, m_{,,})_h = \frac{m}{m_{,,}}, ..$$

Nach Einsetzung dieser Werthe nimmt die in dem Maasse des Zwanges enthaltene Summe der in Bezug auf δx linearen Glieder die Form an:

$$-2\sum_m m\sum_{hk} X_{hk}\{(\mathrm{d}_0 x_h+\tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 x_h+\ldots)+(\mathrm{d}_{,} x_h+\tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,} x_h+\ldots)+\cdot+\cdot$$
$$-(\mathrm{d}x_h+\tfrac{1}{2}\mathrm{d}\,\mathrm{d}x_h+\ldots)\}\delta x_k$$

In diesem Ausdrucke sind noch $\frac{\mathrm{d}_{,} x_h}{\mathrm{d}t}=0$, $\frac{\mathrm{d}_{,,} x_h}{\mathrm{d}t}=0,\ldots$ für alle Indices h. Bestehen keine solche innere Verknüpfungen der Massen und äussere Beschränkungen der Bewegung, welche eine Unstetigkeit in der Grösse oder Richtung der Bewegnng veranlassen, so wird

$$\mathrm{d}_0 x_h=\mathrm{d}x_h$$

für alle Indices h und alle Massentheilchen m.

Es reducirt sich also der in δx lineare Theil des Maasses des Zwanges auf

$$-2\sum_m m\sum_{hk} X_{hk}(\tfrac{1}{2}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 x_h+\tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,} x_h+\tfrac{1}{2}\mathrm{d}_{,,}\mathrm{d}_{,,} x_h+\ldots-\tfrac{1}{2}\mathrm{d}\,\mathrm{d}x_h)\,\delta x_k$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{2}\delta\mathfrak{T}_0-\mathrm{d}_0\mathfrak{D}_0=\tfrac{1}{2}\sum_{hk}\delta X_{hk}.\mathrm{d}_0 x_h.\mathrm{d}_0 x_k-\sum_{hk}\mathrm{d}_0 X_{hx}.\mathrm{d}_0 x_h.\delta x_k-\sum_{hk}X_{hk}\mathrm{d}_0\mathrm{d}_0 x_h.\delta x_k=0$$
$$\tfrac{1}{2}\delta\mathfrak{T}_{,}-\mathrm{d}_{,}\mathfrak{D}_{,}+\frac{\mathfrak{D}_{,}}{\sqrt{\mathfrak{T}_{,}}}\mathrm{d}_{,}\sqrt{\mathfrak{T}_{,}}=-\sum_{hk}X_{hk}\mathrm{d}_{,}\mathrm{d}_{,} x_h\,\delta x_k+\delta r_{,}\frac{R_{,}}{m}\mathrm{d}t^2=0$$
$$\tfrac{1}{2}\delta\mathfrak{T}_{,,}-\mathrm{d}_{,,}\mathfrak{D}_{,,}+\frac{\mathfrak{D}_{,,}}{\sqrt{\mathfrak{T}_{,,}}}\mathrm{d}_{,,}\sqrt{\mathfrak{T}_{,,}}=-\sum_{hk}X_{hk}\mathrm{d}_{,,}\mathrm{d}_{,,} x_h\,\delta x_k+\delta r_{,,}\frac{R_{,,}}{m}\mathrm{d}t^2=0$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\tfrac{1}{2}\delta\mathfrak{T}-\mathrm{d}\mathfrak{D}=\tfrac{1}{2}\sum_{hk}\delta X_{hh}.\mathrm{d}x_h.\mathrm{d}x_k-\sum_{hk}\mathrm{d}X_{hk}.\mathrm{d}x_h.\delta x_k-\sum_{hk}X_{hk}\mathrm{d}\,\mathrm{d}x_h\,\delta x_k$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum_{hk}\delta X_{hk}.\mathrm{d}_0 x_h.\mathrm{d}_0 x_k-\sum_{hk}\mathrm{d}_0 X_{hk}.\mathrm{d}_0 x_h.\delta x_k-\sum_{hk}X_{hk}\mathrm{d}\,\mathrm{d}x_h\,\delta x_k$$

ist, auf

$$-\sum_m m(\tfrac{1}{2}\delta\mathfrak{T}-\mathrm{d}\mathfrak{D})-\sum_i R_i\delta r_i\mathrm{d}t^2$$

oder

$$-\delta\sum_m\tfrac{1}{2}m\sum_{hk}X_{hk}\mathrm{d}x_h\mathrm{d}x_k+\mathrm{d}\sum_m m\sum_{hk}X_{hk}\mathrm{d}x_h\,\delta x_k-\sum_i R_i\delta r_i\mathrm{d}t^2$$

welcher Ausdruck also für eine stetige Bewegung der Massentheilchen m

nie negativ werden darf, wenn nemlich x_h die Coordinaten von m zur Zeit t dagegen

$$x_h + \mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{d}x_h + \tfrac{1}{1.2.3}\mathrm{d}^3x_h + \ldots$$

die Coordinaten des m zur Zeit $t + \mathrm{d}t$ sind und

$$x_h + \delta x_h$$

solche Coordinaten des m bedeuten, welche eine Lage dieser Massentheilchen bestimmen, die nach den gegebenen innern Verknüpfungen derselben und den äussern Bedingungen und Beschränkungen der Bewegung des Systems möglich ist. Die R_i bedeuten sämmtliche auf die Massentheilchen einwirkenden Kräfte und δr_i die bei den virtuellen Bewegungen $\delta x_1, \delta x_2 \ldots \delta x_h \ldots$ entstehende virtuelle Bewegung, welche der Angriffspunkt von R_i in der Richtung dieser Kraft beschreiben würde.

Für einen Raum von der Beschaffenheit, dass bei $n$facher Ausdehnung das Längenelement darin durch die νte Wurzel eines nicht reducirbaren homogenen Ausdrucks νten Grades der Differentiale der n Coordinaten nemlich durch

$$\sqrt[\nu]{\mathfrak{T}} = \sqrt[\nu]{\sum_h X_{h_1 h_2 \ldots h_\nu}\, \mathrm{d}x_{h_1}\, \mathrm{d}x_{h_2} \ldots \mathrm{d}x_{h_\nu}}$$

dargestellt wird, hat die Bestimmungsweise der Bewegung mit der eben betrachteten am meisten Analogie, wenn man, mit R_i die wirklichen Kräfte und mit $\mathfrak{D}$ die νfache über alle aus der Reihe $1.\,2.\,3 \ldots n$ genommenen Indices $h_1 \ldots h_\nu$ zu erstreckende Summe

$$\sum_h X_{h_1 h_2 \ldots h_\nu}\, \delta x_{h_1}\, \mathrm{d}x_{h_2} \ldots \mathrm{d}x_{h_\nu}$$

bezeichnend, den Ausdruck

$$-\sum_m m\left(\tfrac{1}{\nu}\delta\mathfrak{T} - \mathrm{d}\mathfrak{D}\right) - \sum_i R_i \delta r_i \,\mathrm{d}t^\nu \qquad [1]$$

für keine mit den gegebenen Beschränkungen verträgliche virtuelle Bewegung $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ der Massentheilchen m negativ werden lässt. Auch hier würde dann die freie Bewegung eines Massentheilchens m, auf wel-

ches keine Kräfte wirken, mit gleicher Geschwindigkeit in einer kürzesten Linie geschehen, weil

$$\delta\sqrt[\nu]{\mathfrak{T}} - \mathrm{d}(\mathfrak{D}.\mathfrak{T}^{\frac{1}{\nu}-1}) = (\tfrac{1}{\nu}\,\delta\mathfrak{T} - \mathrm{d}\mathfrak{D})\mathfrak{T}^{\frac{1}{\nu}-1} + (\nu-1)\mathfrak{D}.\mathfrak{T}^{-1}.\mathrm{d}\sqrt[\nu]{\mathfrak{T}}$$

ist.

Sind die für die Bewegung gegebenen Bedingungen der Art, dass zu jeder möglichen Bewegung auch die in entgegengesetztem Sinne möglich ist, so muss der obige Ausdruck [1], welcher in den beiden Fällen entgegengesetzte Zeichen enthält und nie negativ werden darf, $= 0$ sein.

II.

Kräftefunction.

In dem obigen Ausdrucke [1] stehen die beiden ersten Glieder in der Beziehung zu einander, dass das erste Glied mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen $\frac{1}{\nu}\,\delta\mathfrak{T}$ die vollständige δ Variation enthält, welche in dem zweiten Gliede $\mathrm{d}\mathfrak{D}$ nach Ausführung der angedeuteten Differentiation vorkommt, und umgekehrt das zweite Glied enthält die vollständige d Differentiation, welche in dem mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen ersten Gliede nach Ausführung der δ Variation vorkommt. Durch diese Regel für die Bildung der Glieder ist jedes von beiden schon durch das andere bestimmt.

Bezeichnet man alle Coordinaten x_h von allen Massentheilchen m der Reihe nach mit $\xi_1\ \xi_2\ ..\ \xi_l..$ und setzt man allgemein

$$\frac{\mathrm{d}x_h}{\mathrm{d}t} = x'_h\,, \qquad \frac{d\xi_l}{\mathrm{d}t} = \xi'_l$$

und die von Leibnitz für den Fall $\nu = 2$ lebendige Kraft genannte Grösse

$$= \sum_m m \sum_h X_{h_1 h_2 .. h_\nu} x'_{h_1} x'_{h_2} \ldots x'_{h_\nu} = \nu T$$

so wird die Grundgleichung

$$-\delta T + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_l \frac{\theta T}{\theta \xi'_l}\,\delta\xi_l - \sum_i R_i \delta p_i = 0$$

wenn bei der partiellen θ Differentiation einer Function die Grössen ξ

und ξ'_l als von einander unabhängig betrachtet werden und in der Summe für die ξ_l der Reihe nach alle Coordinaten von allen Massentheilchen m gesetzt werden.

Die Grundgleichung für die Bewegung wird also eine besonders einfache Form annehmen, wenn auch das letzte Glied $\sum_i R_i \delta r_i \mathrm{d}t'$ in solcher Weise als Differenz einer totalen Variation und totalen Differentiation dargestellt werden kann. Für die meisten Kräfte der Natur ist, wie Lagrange zuerst bemerkt hat, $\sum_i R_i \delta r_i$ die totale Variation einer Function, welche allein von den Coordinaten der Massentheilchen m und nicht von dem Bewegungszustande derselben abhangen, von dieser Function enthält also die Variation kein Differential, oder solches ist gleich 0 zu setzen.

Gauss hat zuerst auch Kräfte von der Beschaffenheit betrachtet, dass ihr Maass nicht nur von der Lage, sondern auch von dem Bewegungszustande der Massentheilchen m abhangen. Wir wollen für die weitere Untersuchung voraussetzen, diese Abhängigkeit sei eine solche, so dass

$$\sum_i R_i \delta r_i$$

die Differenz einer totalen Variation und einer totalen Derivirten nach der Zeit werde. Ist die totale Variation

$$= \delta V$$

so muss die totale Derivirte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\sum_l \frac{\theta V}{\theta \xi'_l} \delta x_l + \sum \frac{\theta V}{\theta \xi''_l} \delta \xi'_l + \ldots\right\}$$

sein, worin $\xi''_l = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\xi_l}{\mathrm{d}t}$ u. s. f. ist. Die Grösse V mag in Verallgemeinerung des von Gauss eingeführten Namens das Potential oder in Verallgemeinerung der Hamiltonschen Bezeichnung die Kräftefunction für die gegebenen Kräfte bei der Bewegung eines Systems genannt werden. Wir wollen unsere Untersuchung auf den Fall beschränken wo V keine höhere Derivirte als die ersten ξ'_l enthält, so dass also

$$\sum_i R_i \delta r_i = \delta V - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_l \frac{\theta V}{\theta \xi'_l} \delta \xi_l$$

wird und die Fundamentalgleichung [1] der Bewegung die Form

$$-\delta(T+V)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_l \frac{\theta(T+V)}{\theta\xi'_l}\delta\xi_l = 0 \qquad [2]$$

annimmt.

Hierin besitzt der Ausdruck

$$\sum_l \frac{\theta(T+V)}{\theta\xi'_l}\delta\xi_l$$

die Eigenschaft, dass sein Werth ungeändert bleibt, welche im Raume feste oder bewegliche von einander abhängige oder unabhängige Coordinaten ξ auch zu Grunde gelegt werden.

Bezeichnen nemlich $q_1, q_2, \ldots q_\lambda \ldots$ solche von einander unabhängige Veränderliche, so müssen die $\ldots \xi_l \ldots$ als Functionen von t und den q dargestellt werden können, es ist demnach

$$\frac{\mathrm{d}\xi_l}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\xi_l}{\partial t} + \sum_h \frac{\partial\xi_l}{\partial q_h}\frac{\mathrm{d}q_h}{\mathrm{d}t} \quad \text{oder} \quad \xi'_l = \frac{\partial\xi_l}{\partial t} + \sum_h \frac{\partial\xi_l}{\partial q_h} q'_h$$

worin ∂ die partiellen Differentiationen nach t und den q bezeichnen und $\frac{\partial\xi_l}{\partial t}, \frac{\partial\xi_l}{\partial q_h}$ für alle Indices l und h von allen $\ldots q'_k \ldots$ unabhängig sind, so dass also allgemein

$$\frac{\theta\xi'_l}{\theta q'_h} = \frac{\partial\xi_l}{\partial q_h}$$

ist, und dadurch, wie bewiesen werden sollte,

$$\sum_l \frac{\theta(T+V)}{\theta\xi'_l}\delta\xi_l = \sum_l \frac{\theta(T+V)}{\theta\xi'_l}\sum_h \frac{\partial\xi_l}{\partial q_h}\delta q_h = \sum_l \frac{\theta(T+V)}{\theta\xi'_l}\sum_h \frac{\theta\xi'_l}{\theta q'_h}\delta q_h = \sum_h \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_h}\delta q_h$$

entsteht.

Setzen wir nun entsprechend dem von Lagrange zuerst eingeschlagenen Wege

$$\frac{\theta(T+V)}{\theta q'_l} = p_l \qquad [3]$$

so wird die Gleichung [1] zu

$$0 = -\delta(T+V) + \frac{d}{dt}\Sigma\frac{\theta(T+V)}{\theta q'_l}\delta q_l$$

$$= -\Sigma\frac{\theta(T+V)}{\theta q_l}\delta q_l - \Sigma\frac{\theta(T+V)}{\theta q'_l}\delta q'_l + \Sigma\frac{d}{dt}\left[\frac{\theta(T+V)}{\theta q'_l}\right].\delta q_l + \Sigma\frac{\theta(T+V)}{\theta q'_l}\frac{d\delta q}{dt}$$

$$= \Sigma\left\{-\frac{\theta(T+V)}{\theta q_l} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\theta(T+V)}{\theta q'_l}\right]\right\}\delta q_l = \Sigma\left\{\frac{dp_l}{dt} - \frac{\theta(T+V)}{\theta q_l}\right\}\delta q_l \qquad [4]$$

worin die Summationen über alle Werthe 1, 2, 3 . . . n des im Ausdrucke allein vorkommenden Index l zu erstrecken sind.

III.

Allgemeine Differentiale.

Die Untersuchung der vielen merkwürdigen Eigenschaften der Function $T+V$ wird bedeutend vereinfacht, wenn man den Begriff eines allgemeinen Differentials D in dem Sinne einführt, dass es für eine Function und die in ihr vorkommenden Grössen irgend welche nur durch die Form dieser Function bedingte Veränderungen darstellt, so dass also, wenn für die Function und deren Argumente die den gegebenen Differentialgleichungen genügenden Integralgleichungen hinzugenommen werden auch die Integrationsconstanten dieser allgemeinen Differentiation unterworfen werden müssen.

Die bisher schon benutzte Variation δ, welche eine beliebige virtuelle Bewegung bedeutete, ist eine allgemeinere Differentiation als die nach der Zeit t genommene sogenannte vollständige Differentiation, umfasst aber von der Allgemeinen Differentiation nur diejenige, bei welcher die Coordinaten eine mit den gegebenen Bedingungen verträgliche unendlich kleine Aenderung erleiden.

Die Function $T+V$ ist nach Einführung der Grössen q, welche die Lage des Systems der bewegten Massen für die Zeit t bestimmen und dieserhalb die Coordinaten im allgemeineren Sinne des Wortes heissen mögen zunächst als Function von $t, \ldots q_l \ldots q'_l$ gegeben, wenn wir also die partielle Differentiation in Bezug auf diese Grössen wieder mit θ bezeichnen, so wird das allgemeine Differential

$$\mathrm{D}(T+V) = \frac{\theta(T+V)}{\theta t}\mathrm{D}t + \Sigma\frac{\theta(T+V)}{\theta q_l}\mathrm{D}q_l + \Sigma\frac{\theta(T+V)}{\theta q'_l}\mathrm{D}q'_l$$

oder mit Rücksicht auf die Definitionsgleichungen [3] für die p und die zuletzt gefundene Bewegungsgleichung [4]

$$\mathrm{D}(T+V) = \frac{\theta(T+V)}{\theta t}\mathrm{D}t + \Sigma p'_l \mathrm{D}q_l + \Sigma p_l \mathrm{D}q'_l$$

worin also die $\mathrm{D}q'_l$ und $\mathrm{D}t$ vollständig unabhängige Differentiale bedeuten während $\mathrm{D}q_1, \mathrm{D}q_2 \ldots \mathrm{D}q_n$ den für die Bewegung gegebenen Beschränkungen genügen müssen.

Die beiden hier vorkommenden Differentiationen D und d sind von einander unabhängig ihre Reihenfolge kann also vertauscht werden, dadurch entsteht aus der letzten Gleichung

$$\mathrm{D}(T+V) = \frac{\theta(T+V)}{\theta t}\mathrm{D}t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma p_l \mathrm{D}q_l$$

Nimmt man hierin die allgemeine Differentiation D in dem speciellen Sinne der vollständigen Differentiation d nach der t und dividirt die so entstandene Gleichung durch den für die vollständige Differentiation d nach der Zeit t constanten Factor $\mathrm{d}t$ so wird

$$\frac{\mathrm{d}(T+V)}{\mathrm{d}t} = \frac{\theta(T+V)}{\theta t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma p_l q'_l$$

und durch Substitution des hieraus sich ergebenden Werthes der partiellen Derivirten von $T+V$ nach t geht die allgemeine Gleichung in:

$$\mathrm{D}(T+V) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(T+T-\Sigma p_l q'_l)\mathrm{D}t + \Sigma p_l \mathrm{D}q_l\} \qquad [5]$$

oder

$$\mathrm{D}(T+V) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V-\Sigma p_l q').\mathrm{D}t + \Sigma p'_l \mathrm{D}q_l + \Sigma p_l \mathrm{D}q'_l \qquad [6]$$

über, woraus durch specielle Annahmen über die allgemeine Differentiation $\mathrm{D}t \ldots \mathrm{D}q_l \ldots \mathrm{D}q'_l \ldots$ die obigen Definitionsgleichungen [3] für die p die Bewegungsgleichung [4] und der schon gefundene Werth für $\frac{\theta(T+V)}{\theta t}$ sich ergeben.

Subtrahirt man von den beiden Seiten dieser Gleichung die entsprechenden Seiten der identischen Gleichung

$$D\Sigma p_l q'_l = \Sigma q'_l Dp_l + \Sigma p_l Dq'_l$$

so entsteht

$$D(T+V-\Sigma p_l q'_l) = \frac{d}{dt}(T+V-\Sigma p_l q'_l).Dt + \Sigma p'_l Dq_l - \Sigma q'_l Dp_l$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$-T-V+\Sigma p_l q'_l = -(T+V)+\Sigma q'_l \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_l} = H \qquad [7]$$

und

$$\frac{dH}{dt} = H'$$

setzt:

$$DH = H'Dt - \Sigma p'_l Dq_l + \Sigma q'_l Dp_l \qquad [8]$$

Für den Fall, dass mit Rücksicht auf die inneren Verknüpfungen und die gegebenen äussern Beschränkungen die Veränderlichen q von einander unabhängig sind, enthält diese Gleichung, wenn man sich in dem obigen Ausdrucke für H, welchen Jacobi die Hamiltonsche Function genannt hat, die Grössen q' mit Hülfe der Definitionsgleichungen [3] für die p durch $t_l \ldots q_l \ldots p_l \ldots$ bestimmt denkt und in Bezug auf diese letzten Veränderlichen die partiellen Differentiationen mit ∂ bezeichnet, als besondere Fälle die folgenden, unter specielleren Voraussetzungen als ihnen hier zu Grunde liegen, von Hamilton aufgestellten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_l} &= q'_l = \frac{dq_l}{dt} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_l} &= p'_l = \frac{dp_l}{dt} = \frac{\theta(T+V)}{\theta q_l} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= H' = \frac{dH}{dt} = -\frac{\theta(T+V)}{\theta t} \end{aligned} \qquad [8^*]$$

Es ist oben in [6] das allgemeine Differential von $T+V$ durch eine nach t genommene vollständige Derivirte dargestellt, beschränkt man nun den Sinn jener allgemeinen Differentiation auf den der Variation, so ergibt sich daraus der verallgemeinerte Hamiltonsche Satz:

$$0 = \delta\int(T+V)\,dt = \delta\int(\Sigma p_l \frac{dq_l}{dt} - H)\,dt$$

wenn nemlich die Werthe der Grössen an den Grenzen dieses Hamiltonschen Integrals unveränderlich vorausgesetzt werden. Durch Ausführung der Variation entsteht:

$$0 = \delta\int(T+V)\mathrm{d}t = \int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Sigma\frac{\theta(T+V)}{\theta q'_l}\delta q_l\right).\mathrm{d}t + \int\Sigma\left\{\frac{\theta(T+V)}{\theta q_l} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\theta(T+V)}{\theta q'_l}\right]\right\}\delta q_l.\mathrm{d}t$$

so dass aus der Bedingung des Verschwindens der Variation auch wieder die zuvor aufgestellten Bewegungsgleichungen folgen.

Diese Verallgemeinerung des Hamiltonschen Satzes hat Herr Lipschitz in seiner „Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist" Borchardt's Journal Bd. 74 als Grundlage zur Bestimmung der Bewegung angenommen, wenn die Bewegung unter Einwirkung von Kräften geschieht, die von der Lage und nicht der Veränderung des Systems abhangen und eine Kräftefunction V besitzen, wenn ferner der Raum so construirt gedacht ist, dass das Längenelement durch die νte Wurzel eines homogenen Ausdrucks νten Grades von den Differentialen der Coordinaten dargestellt wird.

Aus der Gleichung $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\theta(T+V)}{\theta t}$ folgt, dass wenn $T+V$ neben den Grössen q und q' nicht die Grösse t explicite enthält,

$$\Sigma p_l q'_l - (T+V) = H = \text{const.}$$

ein Integral der Gleichungen [8*] für die Bewegung des Systems wird und die Verallgemeinerung des von Johann Bernoulli zuerst gefundenen Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft bildet.

Sind die q im Raume feste Coordinaten, so enthält T die Zeit t nicht explicite, in diesem Falle braucht also nur das Potential V die Zeit t nicht zu enthalten, damit das obige Integral gilt.

Ist das Potential V unabhängig von der Bewegung, enthält also die q' nicht, sind noch $..q_l..$ im Raume feste Coordinaten, so wird unter Anwendung des Eulersschen Satzes auf T als homogene Function νten Grades von den Grössen q'

$$\sum_l p_l q'_l = \sum_l q'_l \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_l} = \sum_l q'_l \frac{\theta T}{\theta q'_l} = \nu T$$

Enthält ferner das Potential V die Zeit t nicht explicite, also ist $H =$ constans so wird

$$\int \Sigma (p_l q'_l - H) \mathrm{d}t = \int \nu T \mathrm{d}t - H \int \mathrm{d}t$$
$$= \int \Sigma m_i v_i^{\nu} \mathrm{d}t - H \int \mathrm{d}t = \int \Sigma m_i v_i^{\nu-1} \mathrm{d}s_i - H \int \mathrm{d}t$$

wenn $\mathrm{d}s_i$ oder $v_i \mathrm{d}t$ den von dem Massentheilchen m_i während der Zeit $\mathrm{d}t$ zurückgelegten Weg bedeutet. Da die Variation des ersten Gliedes dieser Gleichung nach dem oben angeführten verallgemeinerten Hamiltonschen Satze verschwindet, so muss unter Zuhülfenahme der Integralgleichung $H =$ const. die Variation auch von $\int \Sigma m_i v_i^{\nu-1} \mathrm{d}s_i$ zu Null werden, wie es für $\nu = 2$ Maupertius' Princip des kleinsten Kraftaufwandes erfordert.

Unter den hier aufgeführten Voraussetzungen und für $\nu = 2$ erhält man auch das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$\text{const.} = H = \Sigma p_l q'_l - T - V = (\nu - 1) T - V = T - V$$

Zu den beiden oben aufgestellten Systemen von Differentialgleichungen kann man noch zwei andere Systeme hinzufügen. Subtrahirt man die Gleichung [6] nach Einführung der Function H durch Gleichung [7]

$$\mathrm{D}(T + V) = -H'.\mathrm{D}t + \Sigma p'_l \mathrm{D}q_l + \Sigma p_l \mathrm{D}q'_l$$

von der identischen Gleichung

$$\mathrm{D}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Sigma p_l q_l = \Sigma p'_l \mathrm{D}q_l + \Sigma p_l \mathrm{D}q'_l + \Sigma q'_l \mathrm{D}p_l + \Sigma q_l \mathrm{D}p'_l$$

so entsteht:

$$\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Sigma p_l q_l - T - V\right) = H' \mathrm{D}t + \Sigma q'_l \mathrm{D}p_l + \Sigma q_l \mathrm{D}p'_l$$

wird demnach $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Sigma q_l p_l - T - V$ als Function von den Veränderlichen $t, p_1 \cdot\cdot p_n p'_1 \cdot\cdot p'_n$ dargestellt, so sind ihre nach diesen Veränderlichen genommenen partiellen Derivirten der Reihe nach gleich $H', q'_1 \cdot\cdot q'_n, q_1 \cdot\cdot q_n$.

Subtrahirt man dieselbe Gleichung [6] von der identischen Gleichung

$$\mathrm{D}\Sigma p'_l q_l = \Sigma p'_l \mathrm{D}q_l + \Sigma q_l \mathrm{D}p'_l$$

so ensteht

$$\mathrm{D}(\Sigma p'_l q_l - T - V) = H'.\mathrm{D}t + \Sigma q_l \mathrm{D}p'_l - \Sigma p_l \mathrm{D}q'_l$$

wird demnach $\Sigma p'_l q_l - T - V$ als Function von den Veränderlichen $t, p'_1 \cdot\cdot p'_n q'_1 \cdot\cdot q'_n$ dargestellt, so sind ihre nach diesen Veränderlichen genommenen partiellen Derivirten der Reihe nach gleich

$$H', q_1 \cdot\cdot q_n, \quad -p_1 \cdot\cdot -p_n$$

IV.

Substitutionsfunction. Integration. Störungstheorie.

Die besonders einfache Form der für ein mechanisches Problem aufgestellten Differentialgleichungen ergab sich dadurch, dass zu einem System unabhängiger Coordinaten $\cdot\cdot q_l \cdot\cdot$, ein geeignetes System von Veränderlichen $\cdot\cdot p_l \cdot\cdot$ eingeführt wurde und zwar konnten die ursprünglichen $\cdot\cdot q_l \cdot\cdot$ ganz beliebig gewählt werden, es ergaben sich immer zugehörige $\cdot\cdot p_l \cdot\cdot$ Aber auch in noch allgemeinerer Weise können Systeme zusammengehöriger Veränderlicher von der Eigenschaft gefunden werden, dass sie den Differentialgleichungen jene einfache Form geben und die deshalb nach Jacobi den Namen Canonischer Variabeln führen. In der That die Gleichung

$$\mathrm{D}(T+V) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(T+V-\Sigma p_l \tfrac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t})\mathrm{D}t + \Sigma p_l \mathrm{D}q_l\}$$

die alle übrigen enthält, zeigt, dass, wenn die φ und ψ statt der p und q ein neues System canonischer unabhängiger Veränderlicher bilden sollen, es nur nöthig wird, nach Ersetzung der p und q durch die φ und ψ in jener Gleichung für die Function $T+V$ entweder dieselbe Function jetzt in t φ ψ ausgedrückt oder eine neue Function zu setzen. Dieser neuen Function können wir die Form $T+V-S'$ geben, worin S' noch näher zu bestimmen bleibt, wir erhalten dann

$$\mathrm{D}(T+V-S') = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(T+V-S'-\Sigma \varphi_l \tfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t})\mathrm{D}t + \Sigma \varphi_l \mathrm{D}\psi_l\}$$

und nach Subtraction dieser Gleichung von der vorhergehenden noch

$$\mathrm{D}S' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(S' + \Sigma\varphi_l \frac{\mathrm{d}\psi_l}{\mathrm{d}t} - \Sigma p_l \frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t})\,\mathrm{D}t - \Sigma\varphi_l \mathrm{D}\psi_l + \Sigma p_l \mathrm{D}q_l\}$$

Soll diese Gleichung der Substitution der canonischen Veränderlichen $\varphi_l\,\psi_l$ für die $p_l\,q_l$ allgemein gelten, das heisst unabhängig von den besonderen Gleichungen für ein bestimmtes mechanisches Problem, so muss, weil die eine Seite eine vollständige Derivirte nach der Zeit t ist, auch die andere $\mathrm{D}S'$ und demnach S' es sein. Es muss also eine Function S geben, welche die Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = S'$$

$$\mathrm{D}S = (\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + \Sigma\varphi_l \frac{\mathrm{D}\psi_l}{\mathrm{d}t} - \Sigma p_l \frac{\mathrm{D}q_l}{\mathrm{d}t})\,\mathrm{D}t - \Sigma\varphi_l \mathrm{D}\psi_l + \Sigma p_l \mathrm{D}q_l$$

$$\mathrm{D}S = -E\mathrm{D}t + \Sigma p_l \mathrm{D}q_l - \Sigma\varphi_l \mathrm{D}\psi_l \qquad [9]$$

worin

$$E = \Sigma p_l \frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} - \Sigma\varphi_l \frac{\mathrm{d}\psi_l}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \qquad [10]$$

gesetzt ist, erfüllt.

Umgekehrt genügt auch die Gleichung [9] bei beliebigen Functionen S und E, damit die eingeführten Veränderlichen ψ und φ ein canonisches System werden, weil aus [9] die Gleichung [10] als specieller Fall der D Differentiation folgt und durch beide aus der Fundamentalgleichung [6] für $..q_l..$, $..p_l..$ die oben aufgestellte Fundamentalgleichung für die $..\psi_l..$, $..\varphi_l..$ entsteht, die sich auch in der Form

$$\mathrm{D}(T + V - S') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + V - S' - \Sigma\varphi_l\psi'_l).\mathrm{D}t + \Sigma\varphi'_l \mathrm{D}\psi + \Sigma\varphi_l \mathrm{D}\psi'_l$$

oder

$$\mathrm{D}(T + V - S' - \Sigma\varphi_l\psi'_l) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + V - S' - \Sigma\varphi_l\psi'_l).\mathrm{D}t + \Sigma\varphi'_l \mathrm{D}\psi_l - \Sigma\psi'_l \mathrm{D}\varphi_l =$$

$$-\mathrm{D}(H - E) = -(H' - E')\mathrm{D}t - \Sigma\psi'_l \mathrm{D}\varphi_l + \Sigma\varphi'_l \mathrm{D}\psi_l \qquad [11]$$

darstellen lässt. Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt, dass wenn $T + V - S'$ als Function von t, ψ'_l, ψ_l aufgefasst wird, ihre partiellen Derivirten nach diesen Grössen der Reihe nach gleich $-H' + E'$, φ_l, φ'_l werden. Wenn man $T + V - S' - \Sigma\varphi_l\psi'_l$ oder $-H + E$ als Function von t, φ_l, ψ_l betrachtet und die partiellen Derivirten nach diesen Veränderlichen mit ϑ bezeichnet, so erhält man aus der zweiten [11] jener beiden Gleichungen

$$\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\varphi_l} = \psi'_l = \frac{d\psi_l}{dt}$$

$$-\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\psi_l} = \varphi'_l = \frac{d\varphi_l}{dt} \qquad [12]$$

$$\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta t} = H'-E' = \frac{d(H-E)}{dt}$$

Die Fundamentalgleichung der Bewegung, die Substitutionsgleichung und die dadurch transformirte Bewegungsgleichung stimmen in ihrer Form der Art überein, dass die allgemeinen Relationen welche allein zwischen den Grössen $q_1 \cdot\cdot q_n\ p_1 \cdot\cdot q_n\ \psi_1 \cdot\cdot \psi_n\ \varphi_1 \cdot\cdot, \varphi_n$ bestehen, und welche in den folgenden Artikeln ausführlicher entwickelt werden, auch zwischen den Grössen $q_1 \cdot\cdot q_n\ p'_1 \cdot\cdot p'_n\ q'_1 \cdot\cdot q'_n\ -p_1 \cdot\cdot -p_n$ und ebenso zwischen $q_1 \cdot\cdot q_n\ p'_1 \cdot\cdot p'_n\ p_1 \cdot\cdot p_n\ q'_1 \cdot\cdot q'_n$ ferner zwischen $\psi_1 \cdot\cdot \psi_n\ \varphi'_1 \cdot\cdot \varphi'_n\ \varphi_1 \cdot\cdot \varphi_n\ \psi'_1 \cdot\cdot \psi'_n$ und so fort bestehen.

Die allgemeine Substitutionsgleichung enthält den besonderen Fall, wo die Grössen ψ ebenso wie die q die Bedeutung von Coordinaten haben, in der Form, dass S und also auch S' zu Null wird, dass ferner die Grössen q als Functionen von t und den ψ gegeben sind und zwar in solcher unabhängigen Weise, welche die ψ auch als Functionen von t und den q darstellen lässt, und dass endlich die Grössen E und φ durch die Substitutionsgleichung bestimmt sind.

Eine andere sehr allgemeine und besonders wichtige Art der Substitution ist diejenige, bei welcher die Relationen zwischen den beiden Systemen von Veränderlichen sich so darstellen lassen, dass die p zu Functionen von den Grössen t, q, ψ werden. Durch diese letztern können dann auch nach Einsetzung der für die p_l erhaltenen Ausdrücke alle übrigen Grössen bestimmt werden. Wegen der Wichtigkeit dieser Art der Darstellung der verschiedenen Veränderlichen wollen wir für die partiellen nach t, q, ψ genommenen Derivirten ein besonderes Zeichen einführen und zwar δ, da diese Differentiation die oben betrachtete Variation als speciellen Fall enthält. Die allgemeine Substitutionsgleichung gibt dann:

$$\frac{\delta S}{\delta q_l} = p_l, \quad \frac{\delta S}{\delta \psi_l} = -\varphi_l, \quad \frac{\delta S}{\delta t} = -E = \frac{dS}{dt} - \Sigma\varphi_l \frac{d\psi_l}{dt} + \Sigma p_l \frac{dq_l}{dt}$$

und hieraus ist ersichtlich, *wie, wenn die* $p_1 \ldots p_n$ *so als Functionen von* $t, q_1 \ldots q_n$ $\psi_1 \ldots \psi_n$ *gegeben sind, dass sie die nach* $q_1 \ldots q_n$ *genommenen partiellen Derivirten irgend einer und derselben Function sein können, die übrigen Veränderlichen sich als ein Canonisches System von Veränderlichen* $\psi_1 \ldots \psi_n$ $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ *bestimmen lassen.*

Wird bei einer solchen Substitution $H - E$ von einer oder mehren oder allen der Grössen ψ und φ unabhängig, so folgt aus den Gleichungen [12] für die partiellen Derivirten von $H - E$, dass die jedesmal mit demselben Index versehene entsprechende Grösse $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ $\psi_1 \ldots \psi_n$ eine Integrationsconstante ist. Wird $H - E$ zu Null oder auch nur unabhängig von $\psi_1 \ldots \psi_n$ $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, so sind diese letztern sämmtlich Integrationsconstanten und bilden ein vollständiges System von Integralen der Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_l} = \frac{\mathrm{d} q_l}{\mathrm{d} t}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_l} = \frac{\mathrm{d} p_l}{\mathrm{d} t}$$

Die Aufgabe, diese Gleichungen vollständig zu integriren, lässt sich also auch in der Form aussprechen, die Grössen $-H$, $p_1 \ldots p_n$ als solche Functionen von t, $q_1 \ldots q_n$ und einer mit den q gleich grossen Anzahl von Grössen $\psi_1 \ldots \psi_n$ darzustellen, dass sie die partiellen Derivirten einer einzigen Function sein können und zwar die partiellen Derivirten beziehungsweise nach t $q_1 \ldots q_n$ genommen. Die mehrgliedrige Quadratur

$$\int (\Sigma p_l \mathrm{D} q_l - H \mathrm{D} t)$$

deren untere Grenzen absolute Constanten sind oder doch nur von den bei der Integration als constant anzusehenden Grössen ψ abhangen, ergibt dann eine Substitutionsfunction S und deren partiellen nach ψ genommenen Derivirten bilden mit den ψ zusammen ein vollständiges System von Integralen der gegebenen Differentialgleichungen.

Eine specielle Form dieser Auflösung besteht darin, die Grössen p als solche Functionen von den q und einer gleich grossen Anzahl von Grössen ψ darzustellen, dass sie wie zuvor die partiellen Derivirten einer

gemeinsamen Function sein können und dass zugleich H sich auf eine Function allein von t und den ψ reducirt, die mehrgliedrige Quadratur

$$\int(\Sigma p_l \mathrm{D} q_l - H \mathrm{D} t)$$

gibt dann eine ebensolche Substitutionsfunction wie zuvor.

Diese Aufgabe lässt sich in der von Hamilton und Jacobi angewandten Form auch so aussprechen: die gegebene Gleichung

$$H = \text{funct.}\ (t,\ q_1 \cdot\cdot q_l \cdot\cdot q_n\ p_1 \cdot\cdot p_l \cdot\cdot p_n)$$

werde durch Einsetzung von

$$-H = \frac{\delta W}{\delta t}, \qquad p_1 = \frac{\delta W}{\delta q_l}$$

in eine partielle Differentialgleichung

$$0 = \frac{\delta W}{\delta t} + \text{funct.}\ (t,\ q_1 \cdot\cdot q_n,\ \frac{\delta W}{\delta q_1} \cdots \frac{\delta W}{\delta q_n})$$

verwandelt, deren allgemeines Integral W eine von einer additiven Constanten und von n andern Integrationsconstanten $\psi_1 \cdot\cdot \psi_n$ abhängige Function der Grössen $t,\ q_1 \cdot\cdot q_n$ ist. Diese Function W ist dann eine Substitutionsfunction wie S und die übrigen Integrale der Bewegungsgleichungen entstehen, wenn man $\frac{\delta W}{\delta \psi_l} = \text{const.}_l$ setzt.

Bei der hier durchgeführten Untersuchung kann die Kräftefunction V auf eine beliebige Weise von den Grössen $\frac{\mathrm{d} q_1}{\mathrm{d} t} \cdot\cdot \frac{\mathrm{d} q_n}{\mathrm{d} t}$ und damit $T+V$ und ferner $H = -\frac{\delta W}{\delta t}$ auf eine beliebige Weise von $p_l = \frac{\delta W}{\delta q_l}$ abhangen, also sind die folgenden allgemeinen Entwickelungen unmittelbar auf jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung anwendbar, wenn man noch beachtet, dass man nach Jacobi eine Differentialgleichung, welche ausser den unabhängigen Veränderlichen und den partiellen Derivirten der gesuchten Function W^* auch noch die Function W^* selbst enthält, durch die Einsetzung

$$W = \tau W^* \text{ also } W^* = \frac{\delta W}{\delta \tau},\ \frac{\delta W^*}{\delta t} = \frac{1}{\tau}\frac{\delta W}{\delta t},\ \frac{\delta W^*}{\delta q_l} = \frac{1}{\tau}\frac{\delta W}{\delta q_l}$$

auf eine Differentialgleichung, welche die Function W ohne Differentiation nicht enthält, zurückführen kann.

Gilt das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft, wird demnach H eine Constante, so gibt die partielle Differentialgleichung

$$0 = -H + \text{funct.}\left(q_1, \ldots q_n, \frac{\delta W}{\delta q_1}, \ldots \frac{\delta W}{\delta q_n}\right)$$

als allgemeines Integral ein von einer additiven Constante und $n-1$ anderen Constanten $\psi_1 \ldots \psi_{n-1}$ abhängige Function W, und

$$W - H.t$$

wird eine Substitutionsfunction S, worin H die Stelle von ψ oder einer Function von $\psi_1 \ldots \psi_{n-1}, \psi_n$ vertritt.

Die hier angegebene erste Form der Aufgabe, welche mit der vollständigen Integration der $2n$ Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_l} = \frac{\mathrm{d} q_l}{\mathrm{d} t}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_l} = \frac{\mathrm{d} p_l}{\mathrm{d} t}$$

übereinstimmt, enthält den ganz speciellen aber vielfacher Anwendung fähigen Fall, jede der Grössen p_k, wenn solches möglich ist, in der Art als Function von dem mit gleichem Index versehenen q_k und einem System von n Grössen $\psi_1 \ldots \psi_n$ in der Weise zu bestimmen, dass durch Einsetzung dieser Ausdrücke für die p die Function H unabhängig von den q wird. Die Integrale in

$$\int p_1 \mathrm{D} q_1 + \ldots + \int p_n \mathrm{D} q_n - \int H \mathrm{D} t = S$$

sind dann bei unveränderlichen $\psi_1 \ldots \psi_n$ einfache Quadraturen und wenn man als untere feste Grenzen der Integrale Functionen von den ψ nimmt wird S eine Substitutionsfunction und $\psi_1 \ldots \psi_n, \frac{\delta S}{\delta \psi_1}, \ldots \frac{\delta S}{\delta \psi_n}$ bilden ein vollständiges System von Integrationsconstanten für die vorgegebenen Differentialgleichungen.

In dieser Form erhält man die Bestimmung der Bewegung eines freien Massentheilchens, welches von einem oder zwei festen Massentheilchen

nach dem Newtonschen Gesetze angezogen wird oder auch auf einer Ellipsoidfläche ohne Einwirkung von Kräften zu bleiben gezwungen ist, unmittelbar, wenn man, wie Jacobi es durchgeführt hat, als unabhängige Veränderliche die Ellipsoidcoordinaten einführt.

Die Hamilton-Jacobische Form der Störungstheorie ergibt sich aus der canonischen Substitution auf folgende Weise. Bezeichnet H die Hamiltonsche Function [7] für das vollständige mechanische Problem [8*] also mit Einschluss der sogenannten störenden Kräfte, dagegen E die Hamiltonsche Function für diejenige Bewegung, welche entstehen würde, wenn die störenden Kräfte nicht vorhanden wären, sind ferner $\psi_1 \cdot\cdot \psi_n$ $\varphi_1 \cdot\cdot \varphi_n$ für dies letztere Problem also für die $2n$ Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial p_l} = \frac{\vartheta q_l}{\vartheta t}$$

$$-\frac{\partial E}{\partial q_l} = \frac{\vartheta p_l}{\vartheta t}$$

die canonischen Integrale und ist endlich

$$S = \int (\Sigma p_l \frac{\vartheta q_l}{\vartheta t} - E) \mathrm{d}t$$

das zugehörige Hamiltonsche Integral, demnach

$$\mathrm{D}S = -E\mathrm{D}t + \Sigma p_l \mathrm{D}q_l - \Sigma \varphi_l \mathrm{D}\psi_l$$

so werden wie in den Gleichungen [12] die durch die störenden Kräfte veränderten Elemente ψ und φ vermittelst der $2n$ Differentialgleichungen

$$\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta \varphi_l} = \frac{\mathrm{d}\psi_l}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta \psi_l} = \frac{\mathrm{d}\varphi_l}{\mathrm{d}t}$$

bestimmt, worin $H - E$ als Function von t, $\psi_1 \cdot\cdot \psi_n$ $\varphi_1 \cdot\cdot \varphi_n$ dargestellt gedacht ist.

V.

Kräfte deren Maass von der Bewegung abhängt.

Gauss zuerst hat, wie es aus seinen handschriftlichen, im fünften Bande seiner von mir herausgegebenen Werke abgedruckten, Aufzeichnungen hervorgeht, im Jahre 1835 den Gedanken gehabt, Kräfte zu bestimmen, welche nicht nur von der gegenseitigen Lage der auf einander wirkenden Körper sondern auch von der Bewegung derselben abhangen. Seine vielfachen hierauf gerichteten Untersuchungen verfolgten den Zweck, aus solchen Kräften die bei galvanischen Strömen auftretenden Erscheinungen zu erklären. Unter der Annahme, dass die Wechselwirkungen zwischen dem Galvanischen Strome und seinem Träger der Art sind, dass jede auf den Strom wirkende Kraft übertragen wird auf den Träger, dass ferner die beiden auf zwei verschiedenartige Electricitätstheile an derselben Stelle in einander entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte einen Galvanischen Strom hervorbringen, dessen Intensität durch den ganzen linearen Stromleiter gleich gross und der Summe der beiden Kräfte proportional ist, habe ich in meiner Preisschrift 'zur mathematischen Theorie electrischer Ströme' im Jahre 1857 zuerst streng bewiesen, wie die von Ampère, Faraday, Lenz und Franz Neumann gefundenen electrodynamischen und electromotorischen Gesetze durch solche von Gauss untersuchte Kräfte erklärt werden können. Leider war mir zu jener Zeit Gauss handschriftlicher Nachlass noch nicht zugänglich, sonst würde ich einige Untersuchungen haben ersparen können, wenn schon ein Beweis des Hülfssatzes der Uebereinstimmung des Potentials für die Wechselwirkung zwischen Galvanischen Strömen mit dem Potential für die Wechselwirkungen zwischen magnetischen Flächen, wie ich ihn dort gegeben habe bei Gauss sich nicht findet sondern nur der Beweis für die Uebereinstimmung zwischen den mit den Coordinatenaxen parallelen Kräftecomponenten, Gauss' Werke Bd. V. Seite 624.

Die neuesten von Herrn Helmholtz durchgeführten und sehr eingehenden Untersuchungen über die Natur der electrodynamischen Kräfte haben dargethan, dass wenn man die Wechselwirkung zwischen den electri-

electrischen Körpern und ihren Trägern nicht vollständiger bestimmt, als es bisher geschehen ist, die Voraussetzung solcher von der Bewegung abhängigen Kräfte zu Erscheinungen führen müsste, welche unserer Vorstellung von der Natur der die Bewegungen hervorbringenden Kräfte widersprechen.

An dieser Stelle will ich die von der Bewegung abhangenden Kräfte nur mit Rücksicht darauf bestimmen, dass die analytische Behandlung derselben so weit wie möglich mit der Behandlung der von der gegenseitigen Lage der auf einander wirkenden Körper abhängigen Kräfte übereinkommt. So ist das Princip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung unmittelbar übertragbar. Die Principien von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts und der Erhaltung der Flächengeschwindigkeit werden bestehen, wenn die Kraft zwischen je zwei Massentheilchen der Masse proportional ist, ihre Richtung in der Verbindungslinie der beiden Massen oder in deren Verlängerung liegt und die Grösse der Kraft im Uebrigen nur abhängt von der Entfernung zwischen den beiden Massen, also bei der Entfernung $= r$ zwischen zwei Massentheilchen von den Intensitäten $\varepsilon_{,}\varepsilon_{,,}$ die Summe der virtuellen Momente der beiden gegenseitig auf die Massentheilchen ausgeübten Kräfte durch

$$\varepsilon_{,}\varepsilon_{,,}F\left(r, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^3r}{\mathrm{d}t}, \ldots\right).\delta r$$

dargestellt wird. Bei der Ableitung der Bewegungsgleichung habe ich oben nachgewiesen, dass die Einfachheit ihrer Form wesentlich auf dem Umstande beruht, dass die virtuellen Momente der Kräfte als Summe einer totalen Variation von einer Function und der totalen nach der Zeit genommenen Derivirten von einer Summe von Functionen multiplicirt in die Variation der Coordinaten dargestellt werden kann. Wenn diese einfache Form der Bewegungsgleichung für die hier betrachteten Kräfte gültig bleiben soll, so muss also

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{,}\varepsilon_{,,}F\left(r, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^3r}{\mathrm{d}t^3}, \ldots\right).\delta r\\ &\quad = \delta V\left(r, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t^3}, \frac{\mathrm{d}^3r}{\mathrm{d}t^2}, \ldots\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{V_1\left(r, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t^2}, \ldots\right).\delta r\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial r}\delta r + \frac{\partial V}{\partial \frac{dr}{dt}} . \delta \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \frac{ddr}{dt^2}} \delta \frac{ddr}{dt^2} \cdots$$

$$+ \frac{\partial V_1}{\partial r} \frac{dr}{dt} . \delta r + \frac{\partial V_1}{\partial \frac{dr}{dt}} \frac{ddr}{dt^2} . \delta r + \cdots$$

$$+ V_1 \frac{d\delta r}{dt} + \cdots$$

identisch sein können, und demnach

$$\varepsilon_{,}\varepsilon_{,,} F . \delta r = \frac{\partial V}{\partial r}\delta r + \frac{\partial V_1}{\partial r}\frac{dr}{dt}\delta r + \frac{\partial V_1}{\partial \frac{dr}{dt}}\frac{ddr}{dt^2}\delta r + \cdots$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \frac{dr}{dt}} \delta \frac{dr}{dt} + V_1 \delta \frac{dr}{dt}$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \frac{ddr}{dt}} \delta \frac{ddr}{dt^2}$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \frac{d^3r}{dt^3}} \delta \frac{d^3r}{dt^2}$$

also $V =$ Function $(r, \frac{dr}{dt})$

$$V_1 = -\frac{\partial V}{\partial \frac{dr}{dt}}$$

$$\varepsilon_{,}\varepsilon_{,,} F(r, \frac{dr}{dt}, \frac{ddr}{dt^2}) = \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial \frac{dr}{dt}}\right) . \frac{dr}{dt} - \frac{\partial}{\partial \frac{dr}{dt}}\left(\frac{\partial V}{\partial \frac{dr}{dt}}\right) . \frac{ddr}{dt^2}$$

$$\varepsilon_{,}\varepsilon_{,,} F(r, \frac{dr}{dt}, \frac{ddr}{dt^2})\delta r = \delta V - \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial V}{\partial \frac{dr}{dt}}\delta r\right\}$$

sein. Ist z. B.

$$V = V_0 + \sum_n V_n . \left(\frac{dr}{dt}\right)^n$$

worin V_0 und V_n von $\frac{dr}{dt}$ unabhängig sind, so wird

$$\varepsilon_{,}\varepsilon_{,,} F(r, \frac{dr}{dt}, \frac{ddr}{dt^2})\delta r = \delta\{V_0 + \sum_n V_n \left(\frac{dr}{dt}\right)^n\} - \frac{d}{dt}\{\sum n V_n \left(\frac{dr}{dt}\right)^{n-1} . \delta r\}$$

$$\varepsilon_{,}\varepsilon_{,,} F(r, \frac{dr}{dt}, \frac{ddr}{dt^2}) = \frac{\partial V_0}{\partial r} - \sum (n-1) \frac{\partial V_n}{\partial r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^n - \sum n(n-1) V_n \left(\frac{dr}{dt}\right)^{n-2} \frac{ddr}{dt^2}$$

und daraus folgt für $n = 2$ und für constante Werthe von rV_0 und rV_n das von Hrn. W. Weber im Jahre 1852 veröffentlichte Gesetz.

VI.

Zwei freie Massentheilchen.

Um die vollständige Bestimmung der Bewegung unter Einwirkung solcher Kräfte, welche von der Bewegung der Körper abhangen, vor Augen zu haben, will ich zwei nach der in Art. IV angegebenen speciellen Methode einfach lösbare Probleme hier ausführen, und zunächst zwei in einem νfach ausgedehnten ebenen Raume sich bewegende Massentheilchen betrachten.

Sind $m, x_1, \ldots x_\nu$ Trägheitsmasse und rechtwinkelige geradlinige Coordinaten des einen Massenpunktes

$M, X_1, \ldots X_\nu$ das Entsprechende für den andern Punkt

so ist für die Entfernung r der beiden Punkte von einander

$$rr = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} (x_\lambda - X_\lambda)^2$$

und der Voraussetzung nach die Kräftefunction V allein von m, M, r und $\frac{dr}{dt}$ abhängig. Die ganze lebendige Kraft wird

$$2T = m \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} x'_\lambda x'_\lambda + M \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} X'_\lambda X'_\lambda$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$m + M = L^{-2}, \quad \frac{m+M}{mM} = NN$$

und führen die Grössen $q_1 \ldots q_{2\nu}$ durch die Gleichungen

$$mx_1 = mLq_{\nu+1} + \tfrac{1}{N} q_1 \cos q_2$$

$$mx_\lambda = mLq_{\nu+\lambda} + \tfrac{1}{N} q_1 \sin q_2 \sin q_3 \ldots \sin q_\lambda \cos q_{\lambda+1} \quad \text{für } 1 < \lambda < \nu$$

$$mx_\nu = mLq_{2\nu} + \tfrac{1}{N} q_1 \sin q_2 \sin q_3 \ldots \sin q_{\nu-1} \sin q_\nu$$

$$MX_1 = MLq_{\nu+1} - \tfrac{1}{N} q_1 \cos q_2$$

$$MX_\lambda = MLq_{\nu+\lambda} - \tfrac{1}{N} q_1 \sin q_2 \sin q_3 \ldots \sin q_\lambda \cos q_{\lambda+1} \quad \text{für } 1 < \lambda < \nu$$

$$MX_\nu = MLq_{2\nu} - \tfrac{1}{N} q_1 \sin q_2 \sin q_3 \ldots \sin q_{\nu-1} \sin q_\nu$$

ein, so wird $r = Nq_1$ und die ganze lebendige Kraft

$$2T = q'_1 q'_1 + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\nu} (q_1 \sin q_2 \,.\,.\, \sin q_{\lambda-1} q'_\lambda)^2 + \sum_{\mu=\nu+1}^{\mu=2\nu} q'_\mu q'_\mu$$

also

$$p_1 = \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_1} = q'_1 + \frac{\theta V}{\theta q'_1}$$

$$p_\lambda = \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_\lambda} = (q_1 \sin q_2 \,.\,.\, \sin q_{\lambda-1})^2 q'_\lambda \qquad \text{für } 1 < \lambda \leqq \nu$$

$$p_\mu = \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_\mu} = q'_\mu \qquad \text{für } \nu+1 \leqq \mu \leqq 2\nu$$

und demnach

$$H = \sum_{l=1}^{l=2\nu} p_l q'_l - T - V = T - V + q'_1 \frac{\theta V}{\theta q'_1}$$

$$= -V + q'_1 \frac{\theta V}{\theta q'_1} + \tfrac{1}{2} q'_1 q'_1$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\nu} (q_1 \sin q_2 \,.\,.\, \sin q_{\lambda-1})^{-2} p_\lambda p_\lambda$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\mu=\nu+1}^{\mu=2\nu} p_\mu p_\mu$$

Setzt man analog dem Jacobischen Verfahren

$$\tfrac{1}{2} p_\mu p_\mu = \psi_\mu \qquad \text{für } \nu \leqq \mu \leqq 2\nu$$

$$\tfrac{1}{2} p_\lambda p_\lambda + \psi_{\lambda+1} \operatorname{cosec} q_\lambda^2 = \psi_\lambda \qquad \text{für } 1 < \lambda < \nu$$

$$-V + q'_1 \frac{\theta V}{\theta q'_1} + \tfrac{1}{2} q'_1 q'_1 + \frac{\psi_2}{q_1 q_1} = \psi_1$$

so wird

$$H = \psi_1 + \sum_{\mu=\nu+1}^{\mu=2\nu} \psi_\mu$$

und wenn man in der Gleichung

$$S = -\psi_1 t - \sum_{\mu=\nu+1}^{\mu=2\nu} \psi_\mu t + \int p_1 \mathrm{d}q_1 + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\nu-1} \int \sqrt{(2\psi_\lambda - 2\psi_{\lambda+1} \operatorname{cosec} q_\lambda^2)} \mathrm{d}q_\lambda + \sum_{\mu=\nu}^{\mu=2\nu} q^\mu \sqrt{2\psi_\mu}$$

mit Hülfe der Einführungsgleichung für ψ_1 die Grösse p_1 als Function von q_1 und von den ψ darstellt, werden alle Integrale in derselben bei constanten ψ zu Quadraturen, deren obere Grenzen wieder q_1, q_λ seien.

Es ist also die Hamiltonsche Function H durch die von einander unabhängigen Grössen ψ allein darstellbar, der Differentialausdruck $\Sigma p_l \mathrm{D} q_l$ ist durch diese Substitution bei unveränderlichen ψ ein vollständiges Differential geworden, es sind daher die durch die obigen Gleichungen bestimmten Functionen für alle Indices $l = 1, 2, 3 \,..\, 2\nu$

$$\psi_l = \text{const.}, \quad \frac{\delta S}{\delta \psi_l} = -\varphi_l = \text{const.}$$

gesetzt, die 4ν Integralgleichungen, durch welche die Bewegung der freien nach dem Gesetze der Kräftefunction V auf einander wirkenden Massentheilchen m und M im νfach ausdehnten ebenen Raume bestimmt wird.

Für den speciellen Fall, wo die Kräftefunction die einfache Form

$$V = V_0 + V_1 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + V_2 \frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}$$

hat und V_0 V_1 V_2 Functionen allein von r sind, entsteht

$$p_1 = NV_1 + \sqrt{(2 + NNV_2)}\sqrt{(V_0 - \frac{\psi_2}{q_1 q_1} + \psi_1)}$$

VII.

Zwei Massentheilchen im mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Raume.

Befindet sich das eine Massentheilchen fest im Anfangspunkt der Coordinaten, ist von diesem Punkte nach dem beweglichen Punkte der Radius vector r gezogen, sind von dessen Halbirungspunkte auf die ν zu einander rechtwinkligen aus kürzesten Linien gebildeten Coordinatenaxen kürzeste Linien gezogen und begrenzen diese auf den Axen vom Anfangspunkte der Coordinaten an nach bestimmten Richtungen positiv gerechnet die Abschnitte ξ_1 ξ_2 .. ξ_ν so wird nach meinen Untersuchungen über die mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räume in den „Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1873 Januar 4 Nr. 2 Lehrsatz IV“

$$\sin \tfrac{1}{2} i r^2 = \frac{\Sigma \operatorname{tang} i \xi_\mu^2}{1 + \Sigma \operatorname{tang} i \xi_\mu^2}$$

und das Quadrat des Längenelementes gleich

$$\frac{4}{ii}\frac{\Sigma(\mathrm{d}\,\mathrm{tang}\,i\xi_\mu)^2}{(1+\Sigma\,\mathrm{tang}\,i\xi_\mu'^2)^2}$$

wenn nemlich die Summationen über $\mu = 1, 2, 3, \ldots \nu$ erstreckt werden und i für einen Riemannschen oder homogenen endlichen Raum den reciproken Werth der absoluten Längeneinheit dagegen für einen Gaussischen oder unendlichen Raum den mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten reciproken Werth der absoluten Längeneinheit bedeutet.

Setzt man nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{tang}\,i\xi_1 &= \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}iq_1 \cos q_2 \\
\mathrm{tang}\,i\xi_2 &= \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}iq_1 \sin q_2 \cos q_3 \\
\mathrm{tang}\,i\xi_\mu &= \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}iq_1 \sin q_2 \sin q_3 \ldots \sin q_\mu \cos q_{\mu+1} \quad \text{für } \mu<\nu \\
\mathrm{tang}\,i\xi_{\nu-1} &= \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}iq_1 \sin q_2 \sin q_3 \ldots \sin q_{\nu-1} \cos q_\nu \\
\mathrm{tang}\,i\xi_\nu &= \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}iq_1 \sin q_2 \sin q_3 \ldots \sin q_{\nu-1} \sin q_\nu
\end{aligned}$$

so wird also

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} \mathrm{tang}\,i\xi_\mu^2 = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}iq_1^2, \quad q_1 = r$$

und die lebendige Kraft, wenn für die Masse des beweglichen Theilchens die Einheit genommen ist, gleich

$$\begin{aligned}
2T = q'_1 q'_1 &+ \tfrac{1}{ii}\sin iq_1^2 . q'_2 q'_2 + \tfrac{1}{ii}\sin iq_1^2 . \sin q_2^2 . q'_3 q'_3 + \ldots \\
&+ \tfrac{1}{ii}\sin iq_1^2 . \sin q_2^2 . \sin q_3^2 . \sin q_{\mu-1}^2 . q'_\mu q'_\mu + \ldots \\
&+ \tfrac{1}{ii}\sin iq_1^2 . \sin q_2^2 . \sin q_3^2 \ldots \sin q_{\nu-1}^2 . q'_\nu q'_\nu
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_1} = \frac{\theta V(q_1, q'_1)}{\theta q'_1} + q'_1 \\
p_2 &= \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_2} = \tfrac{1}{ii}\sin iq_1^2 . q'_2 \\
p_\mu &= \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_\mu} = \tfrac{1}{ii}\sin iq_1^2 . \sin q_2^2 . \sin q_3^2 \ldots \sin q_{\mu-1}^2 . q'_\mu, \quad \text{für } 1<\mu\leqq\nu
\end{aligned}$$

und daher

$$H = \sum_{l=1}^{l=n} p_l q_l' - T - V = T - V + q'_1 \frac{\theta V}{\theta q'_1}$$

$$= -V + q'_1 \frac{\theta V}{\theta q'_1} + \tfrac{1}{2} q'_1 q'_1$$

$$+ \sum_{\mu=2}^{\mu=\nu} \tfrac{1}{2} ii \operatorname{cosec} i q_1^2 . \operatorname{cosec} q_2^2 . \operatorname{cosec} q_3^2 \,.\,. \operatorname{cosec} q_{\mu-1}^2 . p_\mu p_\mu$$

Die Substitution

$$\tfrac{1}{2} p_\nu p_\nu = \psi_\nu$$

$$\tfrac{1}{2} p_{\nu-1} p_{\nu-1} + \psi_\nu \operatorname{cosec} q_{\nu-1}^2 = \psi_{\nu-1}$$

$$\tfrac{1}{2} p_\lambda p_\lambda + \psi_{\lambda+1} \operatorname{cosec} q_\lambda^2 = \psi_\lambda \quad \text{für } 1 < \lambda < \nu$$

$$-V + q'_1 \frac{\theta V}{\theta q'_1} + \tfrac{1}{2} q'_1 q'_1 + ii \psi_2 \operatorname{cosec} i q_1^2 = \psi_1$$

ergibt

$$H = \psi_1$$

und für constante ψ

$$\mathrm{D}S = -H \mathrm{D}t + \sum_{l=1}^{l=n} p_l \mathrm{D} q_l$$

Die Substitutionsfunction ist

$$S = -\psi_1 t + \int p_1 \, \mathrm{d}q_1 + \sum_{\mu=2}^{\mu=\nu-1} \int \sqrt{(2\psi_\mu - 2\psi_{\mu+1} \operatorname{cosec} q_\mu^2)} \, \mathrm{d}q_\mu + q_\nu \sqrt{(2\psi_\nu)}$$

weil p_1 mit Zuziehung der Gleichung für ψ_1 eine Function allein von q_1 und den Grössen ψ wird. Die oberen Grenzen der Integrale sind q_μ.

Die in einem homogenen ν fach ausgedehnten Raume stattfindende Bewegung eines freien Massentheilchens, auf welches ein festes nach dem Gesetze der Kräftefunction $V(r, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t})$ wirkt, ist also durch die Gleichungen

$$\psi = \text{const.}, \quad \frac{\delta S}{\delta \psi_l} = -\varphi_l = \text{const.}$$

worin l der Reihe nach die Indices 1, 2, 3 . . ν bedeutet, vollständig bestimmt.

VIII.

Allgemeine Differentialgleichungen für die Substitution.

In der Theorie der allgemeinen Störungen nehmen die von Lagrange und Poisson gefundenen Störungsformeln eine wichtige Stelle ein. Sie beziehen sich auf die Variation derjenigen Grössen, der sogenannten Elemente, welche bei der ungestörten Bewegung Integrations-Constanten sein würden. Sie erhalten, wie Jacobi bemerkt hat, für die von Hamilton benutzten canonischen Integrations-Constanten besonders einfache Werthe.

Diese Relationen, sowie die von Hamilton und Jacobi hinzugefügten neuen Gleichungen ergeben sich sehr einfach aus der oben aufgestellten Substitutions-Gleichung [9]:

$$\mathrm{D}S = \Sigma p_l \mathrm{D}q_l - \Sigma \varphi_l \mathrm{D}\psi_l - E\mathrm{D}t$$

Differentiirt man diese mit einer allgemeinen aber von der D Differentiation unabhängigen Δ Differentiation, so entsteht

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{D}S = {} & \Sigma p_l \Delta\mathrm{D}q_l - \Sigma \varphi_l \Delta\mathrm{D}\psi_l - E\Delta\mathrm{D}t \\ & + \Sigma \Delta p_l \mathrm{D}q_l - \Sigma \Delta\varphi_l \mathrm{D}\psi_l - \Delta E\mathrm{D}t\end{aligned}$$

Denkt man aber in der ersten Gleichung die allgemeine Differentiation Δ gebraucht

$$\Delta S = \Sigma p_l \Delta q_l - \Sigma \varphi_l \Delta\psi_l - E\Delta t$$

und differentiirt dann mit D so entsteht

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\Delta S = {} & \Sigma p_l \mathrm{D}\Delta q_l - \Sigma \varphi_l \mathrm{D}\Delta\psi_l - E\Delta\mathrm{D}t \\ & + \Sigma \mathrm{D}p_l \Delta q_l - \Sigma \mathrm{D}\varphi_l \mathrm{D}\psi_l - \mathrm{D}E\Delta t\end{aligned}$$

Die beiden Differentiationen D und Δ sind von einander unabhängig, die Reihenfolge derselben ist also ohne Einfluss auf den Werth, demnach erhält man durch Subtraction der beiden Differential-Gleichungen zweiter Ordnung von einander die Gleichung

$$\Sigma(\mathrm{D}q_l \Delta p_l - \Delta q_l \mathrm{D}p_l) = \Sigma(\mathrm{D}\psi_l \Delta\varphi_l - \Delta\psi_l \mathrm{D}\varphi_l) + \mathrm{D}t.\Delta E - \Delta t.\mathrm{D}E \quad [13]$$

oder, wenn man den Ausdruck $Dq_l \Delta p_l - \Delta q_l Dp_l$ eine Differential-Determinante von dem Functionen-Paare q_l und p_l nennt, in Worten:

Bilden die $q_1 \,..\, q_n$ und $p_1 \,..\, p_n$ ein System canonischer Veränderlicher, so ist, damit die durch vorgegebene Substitutions-Gleichungen eingeführten Grössen $\psi_1 \,..\, \psi_n$ und $\varphi_1 \,..\, \varphi_n$ allgemein auch ein System canonischer Veränderlicher bilden, nöthig und hinreichend, dass die Summe der allgemeinen zweigliedrigen Differential-Determinanten von allen zusammengehörigen Paaren q_l und p_l sich von der ebenso aus ψ_l und φ_l gebildeten Summe nur um die zweigliedrige Differential-Determinante von der Veränderlichen t und irgend einer Function E unterscheidet.

Dieser Satz gilt auch noch, wenn man den Begriff der allgemeinen Differentiation in so weit beschränkt, dass die Zeit t unverändert bleibt. Dann werden die beiden Summen der Differentialdeterminanten einander gleich, und es gibt immer eine Function E, welche die Bedingungen dieses vollständigen Lehrsatzes erfüllt.

Dass die Differentialgleichung [13] auch hinreicht, um die Grössen φ und ψ ein System canonischer Veränderlicher werden zu lassen, wollen wir beweisen, indem wir dabei die sechs Fälle unterscheiden

1. es sind die p und φ als Functionen von den q, ψ und t gegeben, dann sei

$$\begin{aligned} \chi_l &= p_l, & \chi_{n+l} &= -\varphi_l, & \chi_{2n+1} &= \chi_m = -E \\ x_l &= q_l, & x_{n+l} &= \psi_l, & x_{2n+1} &= x_m = t \end{aligned}$$

2. es sind die q und φ als Functionen von den p, ψ und t gegeben, dann sei

$$\begin{aligned} \chi_l &= -q_l, & \chi_{n+l} &= -\varphi_l, & \chi_{2n+1} &= \chi_m = -E \\ x_l &= p_l, & x_{n+l} &= \psi_l, & x_{2n+1} &= x_m = t \end{aligned}$$

3. es sind die p und ψ als Functionen von den q, φ und t gegeben, dann sei

$$\begin{aligned} \chi_l &= p_l, & \chi_{n+l} &= \psi_l, & \chi_{2n+1} &= \chi_m = -E \\ x_l &= q_l, & x_{n+l} &= \varphi_l, & x_{2n+1} &= x_m = t \end{aligned}$$

4. es sind die q und ψ als Functionen von den p, φ und t gegeben, dann sei

$$\chi_l = -q_l, \quad \chi_{n+l} = \psi_l, \quad \chi_{2n+1} = \chi_m = -E$$
$$x_l = \quad p_l, \quad x_{n+l} = \varphi_l, \quad x_{2n+1} = x_m = \quad t$$

5. es sind die q und p als Functionen von den ψ, φ und t gegeben, dann sei

$$\chi_l = \sum_h p_h \frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_l} - \varphi_l, \quad \chi_{n+l} = \sum_h p_h \frac{\vartheta q_h}{\vartheta \varphi_l}, \quad \chi_{2n+1} = \chi_m = \sum_h p_h \frac{\vartheta q_h}{\vartheta t} - E$$
$$x_l = \psi_l \qquad x_{n+l} = \varphi_l \qquad x_{2n+1} = x_m = t$$

6. es sind die ψ und φ als Functionen von den q, p und t gegeben, dann sei

$$\chi_l = p_l - \sum_h \varphi_h \frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}, \quad \chi_{n+l} = -\sum_h \varphi_h \frac{\partial \psi_h}{\partial p_l}, \quad \chi_{2n+1} = \chi_m = -\sum_h \varphi_h \frac{\partial \psi_h}{\partial t} - E$$
$$x_l = q_l \qquad x_{n+l} = p_l \qquad x_{2n+1} = x_m = t.$$

Die Bedingungsgleichung [13] geht für alle Fälle in die Form

$$\sum_{k=l}^{k=m} (\mathrm{D} x_k \Delta \chi_k - \Delta x_k \mathrm{D} \chi_k) = 0$$

über, nimmt man nun für $\xi_1, \ldots \xi_m$ irgend welche den Ausdruck $\xi_1 \chi_1 + \xi_2 \chi_2 + \ldots + \xi_m \chi_m$ nicht verschwinden lassende Functionen von den x und denkt die Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sum_1^m \xi_k \chi_k} = \frac{\mathrm{d}x_1}{\xi_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_m}{\xi_m}$$

vollständig integrirt, so werden dabei m Integrationsconstanten $y_1 y_2 \ldots y_m$ auftreten, von denen eine, es sei y_m, mit y durch Addition verbunden ist und die Variabeln x können als Functionen der Grössen $y, y_1, y_2 \ldots y_m$ betrachtet werden. Es ergibt sich dann

$$\chi_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} + \chi_2 \frac{\partial x_2}{\partial y} + \ldots + \chi_m \frac{\partial x_m}{\partial y} = \chi_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \chi_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_m} + \ldots + \chi_m \frac{\partial x_m}{\partial x_m} = 1$$

also für eine allgemeine D Differentiation

$$\chi_1 \mathrm{D}x_1 + \chi_2 \mathrm{D}x_2 + . + \chi_m \mathrm{D}x_m$$
$$= \mathrm{D}(y + y_m) + Y_1 \mathrm{D}y_1 + Y_2 \mathrm{D}y_2 + .. + Y_{m-1} \mathrm{D}y_{m-1}$$

worin $Y_1 .. Y_{m-1}$ Functionen von $y, y_1 .. y_{m-1}, y_m$ sind, welche in Folge der obigen Bedingung zwischen den χ und x die Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{k=m-1} (\mathrm{D}y_k \Delta Y_k - \Delta y_k \mathrm{D}Y_k) = 0$$

erfüllen müssen. In dem speciellen Fall, dass für die D Differentiation alle Grössen y constant sind mit Ausnahme von y_l, wo $1 \leqq l \leqq m-1$, und für die Δ Differentiation alle Grössen y constant sind mit Ausnahme einmal von y und dann von y_m, wird die Gleichung zu

$$\mathrm{D}y_l \cdot \frac{\partial Y_l}{\partial y} \Delta y = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{D}y_l \cdot \frac{\partial Y_l}{\partial y_m} \Delta y_m = 0$$

also für jeden Index l zwischen 1 und $m-1$ ist Y_l unabhängig von y und von y_m. Demnach ist

$$Y_1 \mathrm{D}y_1 + Y_2 \mathrm{D}y_2 + .. + Y_{m-1} \mathrm{D}y_{m-1}$$

ein Differentialausdruck mit nur $m-1$ unabhängigen Veränderlichen und die Coefficienten $Y_1 .. Y_{m-1}$ genügen mit ihren unabhängigen Veränderlichen $y_1 .. y_{m-1}$ der entsprechenden Bedingung wie die Coefficienten $\chi_1 \ldots \chi_m$ in dem linearen Ausdruck mit den m unabhängigen Veränderlichen x. Der Differentialausdruck mit $m-1$ Gliedern kann also nach demselben Verfahren auch wieder in ein Differential und in einen linearen Differentialausdruck mit $m-2$ unabhängigen Veränderlichen zerlegt werden mit entsprechender Bedingung. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man also dazu, den linearen Ausdruck als das Differential einer einzigen Function darzustellen:

$$\chi_1 \mathrm{D}x_1 + \chi_2 \mathrm{D}x_2 + \ldots + \chi_m \mathrm{D}x_m = \mathrm{D}w$$

Bezeichnen wir die in der Anwendung dieses Satzes auf unsere Untersu-

chung in den oben unterschiedenen sechs Fällen jedesmal entstehende Function der Reihe nach mit w_1, w_2 .. w_6 so wird:

$$\Sigma p_l \mathrm{D} q_l - \Sigma \varphi_l \mathrm{D} \psi_l - E \mathrm{D} t = \mathrm{D} w_1$$

$$-\Sigma q_l \mathrm{D} p_l - \Sigma \varphi_l \mathrm{D} \psi_l - E \mathrm{D} t = \mathrm{D} w_2$$

$$\Sigma p_l \mathrm{D} q_l + \Sigma \psi_l \mathrm{D} \varphi_l - E \mathrm{D} t = \mathrm{D} w_3$$

$$-\Sigma q_l \mathrm{D} p_l + \Sigma \psi_l \mathrm{D} \varphi_l - E \mathrm{D} t = \mathrm{D} w_4$$

$$\sum_l (\sum_h p_h \frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_l} - \varphi_l) \mathrm{D} \psi_l + \sum_l \sum_h p_h \frac{\vartheta q_h}{\vartheta \varphi_l} \mathrm{D} \varphi_l + (\Sigma p_h \frac{\vartheta q_h}{\vartheta t} - E) \mathrm{D} t = \mathrm{D} w_5$$

$$\sum_l (p_l - \sum_h \varphi_h \frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}) \mathrm{D} q_l - \sum_l \sum_h \varphi_h \frac{\partial \psi_h}{\partial p_l} \mathrm{D} p_l - (\Sigma \varphi_h \frac{\partial \psi_h}{\partial t} + E) \mathrm{D} t = \mathrm{D} w_6$$

oder mit Zuhülfenahme der identischen Gleichungen

$$\mathrm{D} \Sigma p_l q_l = \Sigma p_l \mathrm{D} q_l + \Sigma q_l \mathrm{D} p_l, \quad \mathrm{D} \Sigma \varphi_l \psi_l = \Sigma \varphi_l \mathrm{D} \psi_l + \Sigma \psi_l \mathrm{D} \varphi_l$$

und durch Zusammenziehung der partiellen Differentiale

$$\Sigma p_l \mathrm{D} q_l - \Sigma \varphi_l \mathrm{D} \psi_l - E \mathrm{d} t = \mathrm{D} w_1 = \mathrm{D}(w_2 + \Sigma p_l q_l) =$$
$$= \mathrm{D}(w_3 - \Sigma \varphi_l \psi_l) = \mathrm{D}(w_4 + \Sigma p_l q_l - \Sigma \varphi_l \psi_l) = \mathrm{D} w_5 = \mathrm{D} w_6$$

in allen Fällen existirt also eine Substitutionsfunction S, welche die beiden Systeme von Veränderlichen die q, p und die ψ, φ so verbindet, dass, wenn das eine System ein canonisches ist, auch das andere ein solches wird.

Beschränkt man den Begriff der allgemeinen Differentiale D und Δ in der Weise, dass man die Zeit t ungeändert lässt, so wird für eine canonische Substitution

$$\Sigma(\mathrm{D} p_l \Delta p_l - \Delta q_l \mathrm{D} p_l) = \Sigma(\mathrm{D} \psi_l \Delta \varphi_l - \Delta \psi_l \mathrm{D} \varphi_l), \quad \mathrm{D} t = 0, \quad \Delta t = 0$$

Diese Form der Bedingungsgleichung genügt, damit die Substitution eine canonische ist. In der That setzt man bei dem vorstehenden Beweise $\mathrm{D} t = 0$, $\Delta t = 0$ voraus, so ergibt sich als Resultat die Existenz von Functionen w_1 w_2 .. w_6, welche den zuvor gefundenen Gleichungen unter der Voraussetzung $\mathrm{D} t = 0$ genügen und demnach von E ganz unabhängig bestimmt werden. Setzt man dann:

$$E = -\frac{\delta w_1}{\delta t}, \quad E = -\frac{\partial_2 w_2}{\partial_2 t}, \quad E = -\frac{\partial_3 w_3}{\partial_3 t}, \quad E = -\frac{\partial_4 w_4}{\partial_4 t}$$

$$E = -\frac{\vartheta w_5}{\vartheta t} + \Sigma p_h \frac{\vartheta q_h}{\vartheta t}, \quad E = -\frac{\partial w_6}{\partial t} - \Sigma \varphi_h \frac{\partial \psi_h}{\partial t}$$

worin die partiellen Differentiationen δ, ∂_2, ∂_3, ∂_4, ϑ, ∂ sich der Reihe nach auf diejenigen Systeme der von einander als unabhängig betrachteten Veränderlichen beziehen, durch welche in jedem der sechs Fälle die übrigen Grössen als Functionen dargestellt sind, so wird S auf dieselbe Weise bestimmt, wie zuvor.

IX.

Jacobi's Störungsformeln.

Die allgemeine Differentialgleichung [13]

$$\Sigma(\mathrm{D}q_l \Delta p_l - \Delta q_l \mathrm{D}p_l) = \Sigma(\mathrm{D}\psi_l \Delta \varphi_l - \Delta \psi_l \mathrm{D}\varphi_l) + \mathrm{D}t \Delta E - \Delta t \mathrm{D}E$$

wird, wenn wir die Differentiationen in dem speciellen Sinne

$$\text{alle } \mathrm{D}q = 0, \quad \mathrm{D}p_l = 0 \text{ für } l \gtrless h, \quad \mathrm{D}t = 0$$

$$\Delta\psi_l = 0 \text{ für } l \lessgtr k, \quad \text{alle } \Delta\varphi = 0, \quad \Delta t = 0$$

nehmen, zu

$$-\frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_k} \Delta \psi_k . \mathrm{D}p_h = -\Delta \psi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \mathrm{D}p_h$$

also ist

$$\frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h}$$

Führt man die verschiedenen speciellen derartigen Annahmen für die Differentiationen aus, indem man bei den D Differentiationen der Grössen p, q, t alle diese bis auf eine und ebenso bei den Δ Differentiationen der ψ, φ, t alle diese bis auf eine unveränderlich voraussetzt, so erhält man die von Jacobi aufgestellten für alle Indices h und k gültigen neun Systeme von Gleichungen

$$\frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h}, \quad \frac{\vartheta q_h}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\partial \psi_k}{\partial p_h}, \quad \frac{\vartheta q_h}{\vartheta t} = \frac{\partial E}{\partial p_h}$$
$$\frac{\vartheta p_h}{\vartheta \psi_k} = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h}, \quad \frac{\vartheta p_h}{\vartheta \varphi_k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial q_h}, \quad \frac{\vartheta p_h}{\vartheta t} = -\frac{\partial E}{\partial q_h} \qquad [14]$$
$$\frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}, \quad \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\partial \psi_k}{\partial t}, \quad \frac{\vartheta E}{\vartheta t} = \frac{\partial E}{\partial t}$$

Um diesen verschiedenen Systemen eine gemeinsame Form zu geben, wollen wir die Bezeichnungen

$$q_{-\nu} = p_\nu, \quad q_{+0} = E, \quad q_{-0} = t$$
$$\psi_{-\nu} = \varphi_\nu, \quad \psi_{+0} = E, \quad \psi_{-0} = t$$
$$[h] = +1 \text{ für } h \geqq \pm 0, \quad [h] = -1 \text{ für } h < 0$$

einführen, die gemeinsame Form wird dann

$$[h]\frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_{-k}} = [-k]\frac{\partial \psi_k}{\partial q_{-h}} \qquad [14^*]$$
$$h = +0, \pm 1, \pm 2 \,..\, \pm n, \quad k = +0, \pm 1, \pm 2 \,..\, \pm n$$

Umgekehrt besteht auch der Satz, dass wenn die Jacobischen Gleichungen erfüllt sind, diese Substitution der Grössen q, p durch ψ, φ eine canonische ist, denn durch Ausführung der Summation über die genannten Werthe der h und k wird identisch

$$\sum_h \sum_k \left\{[h]\frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_{-k}} - [-k]\frac{\partial \psi_k}{\partial q_{-h}}\right\} \Delta q_{-h} \mathrm{D}\psi_{-k} = \sum_h [h] \mathrm{D} q_h \Delta q_{-h} - \sum_k [-k] \Delta \psi_k \mathrm{D}\psi_{-k}$$

also die zweite Seite dieser Gleichung zu Null, wodurch nach Wiedereinführung der ursprünglichen Bezeichnungen die allgemeine für die canonische Substitution geltende Differentialgleichung [13] entsteht.

Ist die Function E nicht gegeben, so braucht man in der eben durchgeführten Entwickelung nur $\mathrm{D}t = 0 = \Delta t$ vorauszusetzen. Die dann entstandene Differentialgleichung enthält nicht die Function E und diese lässt sich nach der in Artikel VIII. ausgeführten Weise bestimmen.

X.

Poisson's Störungsformeln.

Sind q, p als Functionen von ψ, φ, t und umgekehrt auch ψ, φ als Functionen von q, p, t darstellbar, bezeichnet Φ eine der $4n+1$ Grössen q, p, ψ, φ, t und Ψ eine Function derselben, so ist identisch

$$\frac{\vartheta\Psi}{\vartheta\Phi} = \frac{\partial\Psi}{\partial\Phi} + \Sigma\frac{\partial\Psi}{\partial q_l}\frac{\vartheta q_l}{\vartheta\Phi} + \Sigma\frac{\partial\Psi}{\partial p_l}\frac{\vartheta p_l}{\vartheta\Phi}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi} = \frac{\vartheta\Psi}{\vartheta\Phi} + \Sigma\frac{\vartheta\Psi}{\vartheta\psi_l}\frac{\partial\psi_l}{\partial\Phi} + \Sigma\frac{\vartheta\Psi}{\vartheta\varphi_l}\frac{\partial\varphi_l}{\partial\Phi}$$

wenn die Summationen über die Indices $l = 1, 2, 3 \ldots n$ ausgedehnt werden. Nimmt man in diesen Gleichungen für Ψ und Φ der Reihe noch je zwei der Grössen φ, ψ, t und ersetzt mit Hülfe der Jacobischen Gleichungen im vorigen Artikel $\frac{\vartheta q_l}{\vartheta\Phi}$ und $\frac{\vartheta p_l}{\vartheta\Phi}$ durch die ihnen gleichen Derivirten, so erhält man für eine canonische Substitution die Bedingungen

$$\begin{aligned}
&\sum_l\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial q_l}\frac{\partial\psi_k}{\partial p_l} - \frac{\partial\psi_h}{\partial p_l}\frac{\partial\psi_k}{\partial q_l}\right) = 0\\
&\sum_l\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial q_l}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_l} - \frac{\partial\psi_h}{\partial p_l}\frac{\partial\varphi_k}{\partial q_l}\right) \begin{matrix} = 0 & \text{für } h \lessgtr k\\ = 1 & \text{für } h = k\end{matrix}\\
&\sum_l\left(\frac{\partial\varphi_h}{\partial q_l}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_l} - \frac{\partial\varphi_h}{\partial p_l}\frac{\partial\varphi_k}{\partial q_l}\right) = 0 \qquad [15]\\
&\sum_l\left(\frac{\partial E}{\partial q_l}\frac{\partial\psi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial E}{\partial p_l}\frac{\partial\psi_h}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial\psi_h}{\partial t}\\
&\sum_l\left(\frac{\partial E}{\partial q_l}\frac{\partial\varphi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial E}{\partial p_l}\frac{\partial\varphi_h}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial\varphi_h}{\partial t}
\end{aligned}$$

für $l = 1, 2, 3 \ldots n$.

Benutzen wir dieselben Bezeichnungen wie im vorigen Artikel und gebrauchen noch $\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial\psi_{-k}}\right)$ und $\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial q_\lambda}\right)$ in der Bedeutung, dass

$$\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial\psi_{-k}}\right) = 1 \quad \text{für } h = -k$$

$$\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial \psi_{-k}}\right) = \frac{\partial \psi_h}{\partial t} \quad \text{für } k = +0$$

aber in allen anderen Fällen

$$\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial \psi_{-k}}\right) = 0$$

ist, dass

$$\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial q_\lambda}\right) = 1 \quad \text{für} \quad h = \lambda = +0,$$

in allen andern Fällen aber

$$\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial q_\lambda}\right) = \frac{\partial \psi_h}{\partial q_\lambda}$$

ist, setzen wir $[\lambda] = +1$ für ein positives λ, $[\lambda] = -1$ für einen negativen Werth von λ und $[+0] = [-0] = +1$, so können wir den obigen fünf Systemen von Gleichungen die gemeinsame Form

$$[k]\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial \psi_{-k}}\right) - \sum_{\lambda=+0}^{\lambda=\mp n} [-\lambda]\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial q_\lambda}\right)\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial q_{-\lambda}}\right) = 0 \qquad [15^*]$$

geben und andererseits folgt, dass diese Gleichung für alle Werthensysteme ± 0, ± 1, $\pm 2 \ldots \pm n$ der h und k mit Ausschluss von $h = -k = -0$ richtig bleibt.

Solche Differentialausdrücke, wie sie unter den obigen auf l sich beziehenden Summen in [15] stehen, hat Poisson zuerst aufgestellt, Mémoire sur la variation des contantes arbitaires dans les questions de Mécanique. 1809 Octobre 16. Journal de l'école polytechnique. Cah. 15.

Schliesst man die Werthsysteme $h = +0$ und $h = -k = -0$ aus, so wird bei der Summation das Glied für $\lambda = +0$ immer verschwinden und die Gleichung [15*] nimmt die einfachere Form an

$$[k]\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial \psi_{-k}}\right) + \sum_{\lambda=\pm 1}^{\lambda=\mp n} [\lambda] \frac{\partial \psi_h}{\partial q_\lambda} \frac{\partial \psi_k}{\partial q_{-\lambda}} = 0$$

Sind diese Gleichungen [15] oder [15*] erfüllt, so ist auch umgekehrt die Substition eine canonische, denn wenn man in dem Ausdrucke

$$\sum_{h,k,\nu}[-k][\nu]\left(\frac{\vartheta q_\nu}{\vartheta\psi_{+k}}\right)\mathrm{D}q_{-\nu}\mathrm{D}\psi_{-k}\cdot\left\{[k]\left(\frac{\partial\psi_{+h}}{\partial\psi_{-k}}\right)-\sum_{\lambda=+0}^{\pm n}[-\lambda]\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial q_\lambda}\right)\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial q_{-\lambda}}\right)\right\}$$

$$\left(\frac{\vartheta q_\nu}{\vartheta\psi_h}\right)=1 \quad \text{für} \quad \nu=h=+0,$$

für alle anderen Werthsysteme der ν und h aber

$$\left(\frac{\vartheta q_\nu}{\vartheta\psi_h}\right)=\frac{\vartheta q_\nu}{\vartheta\psi_h}$$

bedeuten lässt, die einzelnen Fälle, worin die eingeklammerten Glieder einen von den Derivirten verschiedenen Sinn haben, gesondert behandelt, dann zunächst die Summationen in Bezug auf h über die Werthe ± 0, ± 1, $\pm 2 \ldots \pm n$ darnach die Summationen in Bezug auf λ, ν, k über die Werthe $+0$, ± 1, $\pm 2 \ldots \pm n$ mit Ausschluss der Combination $h=-k=-0$ durchführt, so entsteht

$$-\sum_\nu[\nu]\Delta q_\nu \mathrm{D}q_{-\nu}+\sum_k[-k]\mathrm{D}\psi_k\Delta\psi_{-k}$$

Dieser Ausdruck muss also zu Null werden und ergibt dadurch wieder die für eine canonische Substitution geltende Digerentialgleichung [13]. Ist die Function E nicht bekannt, so braucht man in dieser Entwickelung nur $\mathrm{D}t=\Delta t=0$ zu setzen und die Indices ± 0 auszuschliessen, dann kommen die Gleichungen, welche E enthalten, nicht mit in Rechnung, und diese Function bestimmt sich erst aus der zuvor berechneten Substitutionsfunction S wie in Artikel VIII.

XI.

Lagrange's Störungsformeln.

Nimmt man in der allgemeinen Differentialgleichung [13] für die canonische Substitution die Differentiationen D und Δ in dem besonderen Sinne, dass je zwei der Grössen $\psi_1 \ldots \psi_n \varphi_1 \ldots \varphi_n$ und t als unabhängig veränderlich aber die übrigen als unveränderlich betrachtet werden, so erhält man

$$\sum_l \left(\frac{\vartheta q_l}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta p_l}{\vartheta \psi_k} - \frac{\vartheta p_l}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta q_l}{\vartheta \psi_k}\right) = 0$$

$$\sum_l \left(\frac{\vartheta q_l}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta p_l}{\vartheta \varphi_k} - \frac{\vartheta p_l}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta q_l}{\vartheta \varphi_k}\right) \begin{matrix} = 0 & \text{für} & h \lessgtr k \\ = 1 & \text{für} & h = k \end{matrix}$$

$$\sum_l \left(\frac{\vartheta q_l}{\vartheta \varphi_h}\frac{\vartheta p_l}{\vartheta \varphi_k} - \frac{\vartheta p_l}{\vartheta \varphi_h}\frac{\vartheta q_l}{\vartheta \varphi_k}\right) = 0 \qquad [16]$$

$$\sum_l \left(\frac{\vartheta q_l}{\vartheta t}\frac{\vartheta p_l}{\vartheta \psi_h} - \frac{\vartheta p_l}{\vartheta t}\frac{\vartheta q_l}{\vartheta \psi_h}\right) = \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_h}$$

$$\sum_l \left(\frac{\vartheta q_l}{\vartheta t}\frac{\vartheta p_l}{\vartheta \varphi_h} - \frac{\vartheta p_l}{\vartheta t}\frac{\vartheta q_l}{\vartheta \varphi_h}\right) = \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_h}$$

Und umgekehrt characterisiren diese fünf Systeme von Gleichungen diese Substitution als eine canonische, denn wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}\psi_h \Delta\psi_k \\ &\mathrm{D}\psi_h \Delta\varphi_k - \Delta\psi_h \mathrm{D}\varphi_k \\ -&\mathrm{D}\varphi_k \Delta\varphi_h \\ &\mathrm{D}t\ \Delta\psi_h - \Delta t \mathrm{D}\psi_h \\ &\mathrm{D}t\ \Delta\varphi_h - \Delta t \mathrm{D}\varphi_h \end{aligned}$$

multiplicirt, dann über sämmtliche Indices summirt, die hiernach erhaltenen Gleichungen addirt und die Summen partieller Differentiale zusammenzieht, so erhält man wieder die für die canonische Substitution geltende allgemeine Differentialgleichung [13].

Es genügen auch die drei ersten Systeme von den Gleichungen [16], um die Substitution zu einer canonischen zu machen, wie sich ergibt, wenn in vorhergehender Untersuchung $\mathrm{D}t = 0 = \Delta t$ angenommen und die Functionen S und E wie in Artikel VIII bestimmt werden.

Wendet man die allgemeine Differentialgleichung [13] auf den Fall an, wo $\psi_1 \cdot\cdot \psi_n \varphi_1 \cdot\cdot \varphi_n$ Integrationsconstanten sind und stellt diese durch Functionen irgend welcher anderer $2n$ Integrationsconstanten $c_1 c_2 \cdot\cdot c_{2n}$ dar; nimmt man dann die Differentiationen D und Δ in dem Sinne, dass für D nur c_μ, für Δ nur c_ν sich ändert, die übrigen c aber und t

unverändert bleiben, so wird die zweite Seite der allgemeinen Differentialgleichung [13] das Product von $Dc_\mu \Delta c_\nu$ multiplicirt in eine Function der Integrationsconstanten, man erhält also den Lagrangeschen Satz

$$\sum_l \left(\frac{dq_l}{dc_\mu}\frac{dp_l}{dc_\nu} - \frac{dp_l}{dc_\mu}\frac{dq_l}{dc_\nu}\right) = \text{const.}$$

XII.

Hamilton's Störungsformeln.

Sind die Grössen p und φ als Functionen von den q, ψ und t darstellbar, so kann man in der allgemeinen Gleichung

$$\Sigma(Dq_l \Delta p_l - \Delta q_l Dp_l) = \Sigma(D\psi_l \Delta\varphi_l - \Delta\psi_l D\varphi_l) + Dt\,\Delta E - \Delta t\, DE$$

$$Dq_l = 0 \quad \text{für} \quad l \lesseqgtr h, \quad \text{alle} \quad D\psi = 0, \quad Dt = 0$$

$$\Delta q_l = 0 \quad \text{für} \quad l \lesseqgtr k, \quad \text{alle} \quad \Delta\psi = 0, \quad \Delta t = 0$$

nehmen, wodurch

$$Dq_h \cdot \frac{\delta p_h}{\delta q_k}\Delta q_k - \Delta q_k \cdot \frac{\delta p_k}{\delta q_h} Dq_h = 0$$

also

$$\frac{\delta p_h}{\delta q_k} = \frac{\delta p_k}{\delta q_h}$$

entsteht, wenn wieder die partiellen Derivirten nach den Veränderlichen q, ψ und t mit δ bezeichnet werden.

Setzt man

$$Dq_l = 0 \quad \text{für} \quad l \lesseqgtr h, \quad \text{alle} \quad D\psi = 0, \quad Dt = 0$$

$$\Delta\psi_l = 0 \quad \text{für} \quad l \gtreqless k, \quad \text{alle} \quad \Delta q = 0, \quad \Delta t = 0$$

so geht die Gleichung [13] in

$$Dq_h \cdot \frac{\delta p_h}{\delta \psi_k}\Delta\psi_k = -\Delta\psi_k \cdot \frac{\delta \varphi_k}{\delta q_h} Dq_h$$

über, also ist

$$\frac{\delta p_h}{\delta \psi_k} = -\frac{\delta \varphi_k}{\delta q_h}.$$

Setzt man

$$\mathrm{D}q_l = 0 \quad \text{für} \quad l \lessgtr h, \quad \text{alle} \quad \mathrm{D}\psi = 0, \quad \mathrm{D}t = 0$$

$$\text{alle} \quad \Delta q = 0, \quad \text{alle} \quad \Delta\psi = 0$$

so entsteht aus der allgemeinen Gleichung

$$\mathrm{D}q_q \cdot \frac{\delta p_h}{\delta t} \Delta t = -\Delta t \cdot \frac{\delta E}{\delta q_h} \mathrm{D}_h$$

also ist

$$\frac{\delta p_h}{\delta t} = -\frac{\delta E}{\delta q_h}$$

Führt man auf solche Weise die Untersuchung aller derartig zulässigen besondern Annahmen für die D und Δ Differentiationen durch, so erhält man die fünf Systeme der unter specielleren Voraussetzungen von Hamilton aufgestellten Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{\delta p_h}{\delta q_k} = \frac{\delta p_k}{\delta q_h}, \quad \frac{\delta p_h}{\delta \psi_k} = -\frac{\delta \varphi_k}{\delta h_q}, \quad \frac{\delta \varphi_h}{\delta \psi_k} = \frac{\delta \varphi_k}{\delta \psi_h}, \\ &\frac{\delta p_h}{\delta t} = -\frac{\delta E}{\delta q_h}, \quad \frac{\delta \varphi_h}{\delta t} = \frac{\delta E}{\delta \psi_h} \end{aligned} \qquad [17]$$

welche für alle Indices von h und k gelten.

Umgekehrt genügen aber diese Gleichungen bei einer beliebigen Function E damit die vorausgesetzte Darstellung der q und p als Functionen der ψ, φ und t eine canonische Substitution bilden, wie schon daraus folgt, dass es die bekannten Bedingungsgleichungen für die Existenz einer Function S sind, deren nach $q_1 \ldots q_n$, $\psi_1 \ldots \psi_n$ und t genommenen partiellen Derivirten gleich $p_1 \ldots p_n$, $-\varphi_1 \ldots -\varphi_n$ und $-E$ werden sollen.

Setzen wir für ein positives ν

$$\begin{aligned} Q_\nu &= q, \quad Q_{-\nu} = \psi_\nu, \quad Q_0 = t \\ P_\nu &= p_\nu, \quad P_{-\nu} = \varphi_\nu, \quad P_0 = E \end{aligned}$$

so lassen sich die fünf Systeme Hamilton'scher Gleichungen in der gemeinsamen Form

$$[-h]\frac{\delta P_h}{\delta Q_k} = [-k]\frac{\delta P_k}{\delta Q_h} \qquad [17^*]$$

für h und k gleich $0, \pm 1, \pm 2 \,..\, \pm n$

schreiben, multipliciren wir die beiden Seiten dieser Gleichung mit $\mathrm{D}Q_k \Delta Q_h$ und summiren über alle Werthe von h und k so erhalten wir

$$\Sigma[-h]\mathrm{D}P_h \Delta Q_h = \Sigma[-k]\mathrm{D}Q_k \Delta P_k$$

welches wieder die allgemeine Differentialgleichung für eine canonische Substitution ist.

Die obigen fünf Systeme von Gleichungen sind in der Weise vollständig, dass von den in $q_1 \,..\, q_n \; \psi_1 \,..\, \psi_n$ und t ausgedrückten Functionen $p_1 \,..\, p_n \; \varphi_1 \,..\, \varphi_n \; E$ beliebig viele gegeben sein können, wenn nur die zwischen diesen gegebenen Functionen nach jenem Systeme geltenden Gleichungen erfüllt sind, so lassen sich die übrigen Functionen der Art bestimmen, dass sie zusammen eine canonische Substitution bilden.

In der That man braucht in der letzten Gleichung nur diejenigen $\mathrm{D}q_h$ und Δq_h, $\mathrm{D}\psi_\lambda$ und $\Delta\psi_\lambda$ gleich Null anzunehmen, für welche die beziehungsweise mit gleichem Index versehenen p_h und φ_λ nicht gegeben sind, ebenso $\mathrm{D}t$ und Δt gleich Null zu setzen, wenn nicht E gegeben ist, dann kommen in jener Gleichung die nicht gegebenen p_h und φ_λ und etwa auch E nicht vor und man erhält nur für die gegebenen

$$p_1, p_2 \,..\, p_m, \quad \varphi_1 \,...\, \varphi_\mu \text{ und etwa } E$$

die Gleichung

$$0 = \sum_{l=1}^{l=m} (\mathrm{D}q_l \Delta p_l - \Delta q_l \mathrm{D}p_l) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} (\mathrm{D}\psi_\lambda \Delta\varphi_\lambda - \Delta\psi_\lambda \mathrm{D}\varphi_\lambda) + \mathrm{D}t_l . \Delta E - \Delta t . \mathrm{D}E$$

welche nach Artikel VIII Nr. 1 die Bedingungsgleichung dafür ist, dass bei constanten $q_{m+1} \,...\, q_n \; \psi_{\mu+1} \,..\, \psi_n$ der Ausdruck

$$\sum_{l=1}^{l=m} p_l \mathrm{D} q_l - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} \varphi_\lambda \mathrm{D} \psi_\lambda - E \mathrm{D} t$$

das vollständige Differential $\mathrm{D} S^*$ einer Function S^* wird, deren partielle Derivirten

$$\frac{\delta S^*}{\delta q_{m+1}} = p_{m+1}, \cdots \frac{\delta S^*}{\delta q_n} = p_n, \quad \frac{\delta S^*}{\delta \psi_{\mu+1}} = -\varphi_{\mu+1}, \cdots \quad \frac{\delta S^*}{\delta \psi_n} = -\varphi_n$$

und wenn E nicht gegeben war

$$\frac{\delta S^*}{\delta t} = -E$$

zu setzen sind.

XIII.

Neue Differentialgleichungen für die canonische Substitution.

Bei den Jacobischen und Hamiltonschen Differentialgleichungen für die canonische Substitution kommen drei verschiedene Systeme unabhängiger Veränderliche in Betracht, einmal die Grössen q, p, t, dann ψ, φ, t und endlich die q, ψ, t; die drei entsprechenden verschiedenen Differentiationen haben wir beziehungsweise mit ∂, ϑ und δ bezeichnet. Für manche Untersuchungen sind nun noch andere Gruppirungen der von einander unabhängigen Veränderlichen erforderlich.

Indem wir zur leichtern Uebersicht

$$p_\nu = q_{-\nu}, \quad E = \psi_{+0} \quad \text{oder} \quad E = q_{+0}$$
$$\varphi_\nu = \psi_{-\nu}, \quad t = \psi_{-0} \quad \text{oder} \quad t = q_{-0}$$

setzen, wollen wir $2n$ Grössen unter $q_{\pm 1} \cdots q_{\pm n}\ \psi_{\pm 1} \cdots \psi_{\pm n}$ und eine unter $q_{-0}\ \psi_{-0}$ als ein System von $2n+1$ unabhängigen Veränderlichen gewählt denken und diese mit

$$q_{h_1} \ldots q_{h_\nu}\ \psi_{k_1} \ldots \psi_{k_\mu}$$

und deren partielle Differentiation mit $\mathfrak{d}$ bezeichnen, so dass also für jede Function P identisch

$$\frac{\partial P}{\partial q_l} = \frac{\mathfrak{d} P}{\mathfrak{d} q_l} + \sum_k \frac{\mathfrak{d} P}{\mathfrak{d} \psi_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial q_l}$$

$$\frac{\vartheta P}{\vartheta \psi_l} = \frac{\mathfrak{d} P}{\mathfrak{d} \psi_l} + \sum_h \frac{\mathfrak{d} P}{\mathfrak{d} q_h} \frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_l}$$

$$\frac{\mathfrak{d} P}{\mathfrak{d} q_h} = \sum_l \frac{\vartheta P}{\vartheta \psi_l} \frac{\mathfrak{d} \psi_l}{\mathfrak{d} q_h}$$

$$\frac{\mathfrak{d} P}{\mathfrak{d} \psi_k} = \sum_l \frac{\partial P}{\partial q_l} \frac{\mathfrak{d} q_l}{\mathfrak{d} \psi_k}$$

ist, wenn die auf h und die auf k sich beziehenden Summationen über sämmtliche als unabhängige Veränderliche auftretende q_h und ψ_k und die auf l sich beziehenden Summationen über sämmtliche Werthe -0, ± 1, $\pm 2 \,..\, \pm n$ erstreckt werden.

Nach den ersten beiden Formeln geht die Gleichung:

$$\sum_h \sum_k \frac{\mathfrak{d} \Phi}{\mathfrak{d} q_h} \frac{\mathfrak{d} P}{\mathfrak{d} \psi_k} \left([-k] \frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_{-k}} - [h] \frac{\partial \psi_k}{\partial q_{-h}} \right) = 0$$

welche unmittelbar aus den Jacobischen Gleichungen [14] Art. IX folgt, in die Gleichung über.

$$-\sum_h [h] \frac{\mathfrak{d} \Phi}{\mathfrak{d} q_h} \left(\frac{\partial P}{\partial q_{-h}} - \frac{\mathfrak{d} P}{\mathfrak{d} q_{-h}} \right) + \sum_k [-k] \frac{\mathfrak{d} P}{\mathfrak{d} \psi_k} \left(\frac{\vartheta \Phi}{\vartheta \psi_{-k}} - \frac{\mathfrak{d} \Phi}{\mathfrak{d} \psi_{-k}} \right) = 0 \qquad [18]$$

Diese Gleichung enthält als specielle Fälle die Jacobischen, wenn man die $\mathfrak{d}$ Differentiation in dem Sinne nimmt, dass als unabhängige Veränderliche z. B. neben anderen q_l und ψ_λ aber nicht q_{-l} und $\psi_{-\lambda}$ gelten, und wenn man dann $\Phi = q_l$, $P = \psi_\lambda$ setzt. Die Gleichung [18] geht in die zweite Hamiltonsche [17] über, wenn man die $\mathfrak{d}$ Differentiation auf die unabhängigen Veränderlichen $q_1 \,..\, q_n \; \psi_1 \,..\, \psi_n \; t$ bezieht und $P = p_l$, $\Phi = \varphi_\lambda$ setzt; mit Hülfe der so erhaltenen Gleichung ergibt sich aus der obigen [18] auch die erste Hamiltonsche Gleichung, wenn man $P = p_l$, $\Phi = p_\lambda$ setzt, und ferner die dritte, wenn man $P = \varphi_l$, $\Phi = \varphi_\lambda$ setzt, auch die vierte Gleichung könnte man direct ableiten, wenn man die $\mathfrak{d}$ Differentiation auf die Grössen $E \; \psi_1 \,..\, \psi_n \; q_1 \,..\, q_n$ als unabhängige Veränderliche beziehn und in obiger Gleichung [18]

$$\Phi = t, \quad P = p_l = q_{-l}, \quad \psi_0 = E, \quad \psi_{-0} = t$$

setzen wollte, sie würde dann

$$0 = -\frac{\mathfrak{d}t}{\mathfrak{d}q_l} + \frac{\mathfrak{d}p_l}{\mathfrak{d}E} = \frac{\mathfrak{d}t}{\mathfrak{d}E}\frac{\mathfrak{d}E}{\mathfrak{d}q_l} + \frac{\mathfrak{d}p_l}{\mathfrak{d}t}\frac{\mathfrak{d}t}{\mathfrak{d}E}$$

Auf analoge Weise ergibt sich die fünfte Hamiltonsche Gleichung.

Die allgemeine Form der Gleichung für den Fall, dass E in [18] als unabhängige Veränderliche gilt, wollen wir hier nicht untersuchen.

Bemerkenswerth an der obigen allgemeinen Relation [18] ist noch, dass sie nur für diejenigen ψ, welche bei der $\mathfrak{d}$ Differentiation als Unabhängige auftreten und diejenigen ψ, welche in Φ vorkommen, die für die Poissonschen Differentialausdrücke geltenden Gleichungen [15] voraussetzt, denn der obige Ausdruck entsteht auch, wenn man in

$$\sum_k \sum_l \left(\frac{\vartheta \Phi}{\vartheta \psi_l} - \frac{\mathfrak{d}\Phi}{\mathfrak{d}\psi_l}\right)\frac{\mathfrak{d}P}{\mathfrak{d}\psi_k}\left\{-[k]\left(\frac{\partial \psi_l}{\partial \psi_{-k}}\right) + \sum_h [-h]\left(\frac{\partial \psi_l}{\partial q_h}\right)\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial q_{-h}}\right)\right\}$$

zunächst die Summation nach l über die in Betracht kommenden ψ_l ausführt. Mit Rücksicht hierauf kann man aus der obigen allgemeinen Gleichung [18] dadurch, dass man als Unabhängige für die $\mathfrak{d}$ Differentiation die Grössen

$$q_1 q_2 \cdot \cdot q_n \psi_1 \psi_2 \cdot \cdot \cdot \psi_i p_{i+1} p_{i+2} \cdot \cdot p_n$$

wählt, und $P = p_\lambda$, $\Phi = \text{funct.}\,(\psi_1 \ldots \psi_n) = f$ setzt, die von Jacobi in seiner Abhandlung „Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi" Borchardts Journal Bd. 60 aufgestellte für jedes $\lambda \leqq i$ geltende Gleichung

$$0 = -\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}q_\lambda} + \sum_{h=i+1}^{h=n}\left(\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}q_h}\frac{\mathfrak{d}p_\lambda}{\mathfrak{d}p_h} - \frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}p_h}\frac{\mathfrak{d}p_\lambda}{\mathfrak{d}q_h}\right)$$

als einen in [18] enthaltenen speciellen Fall ableiten.

Berichtigungen.

Seite 9 vorletzte Zeile lese man: dem Massenpunkte m.

» 18 Zeile 5 füge man hinzu: wenn wir von jetzt an mit n die Anzahl der veränderlichen Grössen q bezeichnen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1873

Band/Volume: 18

Autor(en)/Author(s): Schering Ernst

Artikel/Article: Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhangen 3-54