Verallgemeinerung der Poisson-Jacobischen Störungsformeln

von

Ernst Schering.

Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Ges. d. Wiss. am 1. November 1873.

I.

Normale Form der Canonischen Substitution.

In meiner Abhandlung über die Hamilton-Jacobische Theorie*) habe ich nachgewiesen, dass die von Jacobi als canonisch bezeichnete Form der Integrale für ein mechanisches Problem immer dann möglich ist, wenn in dem von mir angegebenen Sinne ein verallgemeinertes Potential besteht. Bestimmt man nemlich die virtuellen Bewegungen durch Variationen der Coordinaten, so kommt es darauf an, ob man die Summe der virtuellen Momente der Kräfte in eine vollständige Variation einer Function und in eine vollständige nach der Zeit genommene Derivirte eines Ausdruckes zerlegen kann. Die Function habe ich Potential genannt, aus ihr lässt sich auch leicht der andere nach der Zeit zu derivirende Ausdruck ableiten.

Die Jacobischen canonischen Integrale sind ein specielles canonisches System von Grössen. Bezeichnen nemlich $q_1, q_2 \cdot\cdot q_n$ ein System von einander unabhängiger Grössen, durch deren Werthe die Lage sämmtlicher bei dem mechanischen Problem in Betracht kommenden Massentheilchen vollständig bestimmt sind, so dass man sie also ein vollständiges System von Coordinaten im allgemeineren Sinne des Wortes nennen kann, bezeichnet t die Zeit, q'_l die Derivirte von q_l nach der Zeit, θ die Differentiation eines Ausdrucks von $t, q_1 \cdot\cdot q_n, q'_1 \cdot\cdot q'_n$ nach diesen Grössen, νT die lebendige Kraft, V die Potentialfunction, so ist diejenige Grösse, welche für den speciellen Fall, dass in dem Raume das Quadrat des Längenelementes durch ein Aggregat von Quadraten der Differentiale der Coordinaten ausgedrückt werden kann also $\nu = 2$ wird, die Summe der virtuellen Momente der

*) Band XVIII. der Abhandlungen der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen.

in die Massentheilchen multiplicirten Beschleunigungen vermindert um die virtuellen Momente der einwirkenden Kräfte bedeutet, nach Artikel I. [4] jener Abh. gleich

$$[1] \quad -\delta(T+V)+\frac{d}{dt}\Sigma\frac{\partial(T+V)}{\partial q'_l}\delta q_l \text{ oder } \Sigma\Big\{-\frac{\partial(T+V)}{\partial q_l}+\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial(T+V)}{\partial q'_l}\Big]\Big\}\delta q_l$$

worin die Summation Σ sich auf die Werthe $1, 2, 3 \ldots n$ des Index l bezieht.

Setzen wir

$$[2] \qquad p_l = \frac{\partial(T+V)}{\partial q'_l}$$

so sind $q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n$ nach Jacobi ein vollständiges System canonischer Veränderlichen zu nennen.

Sollen $\psi_1 \ldots \psi_n, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ ebenfalls ein vollständiges System canonischer Veränderlichen für dies mechanische Problem sein, so gibt es Functionen S und $\dot{E}$ von $t, q_1 \ldots q_n, \psi_1 \ldots \psi_n$ der Art, dass die Gleichung

$$[3] \qquad \mathrm{D}S = -E\mathrm{D}t + \Sigma p_l \mathrm{D}q_l - \Sigma\varphi_l \mathrm{D}\psi_l$$

erfüllt wird, worin D die allgemeinste Differentiation bedeutet (Art. IV der schon bezeichneten Abhandlung).

Aus dieser Bedeutung der D Differentiation ergibt sich zunächst identisch und dann nach Einführung der Grössen $p_1 \ldots p_n$ mit Hülfe der Gleichungen [2] so wie der Grössen $\psi_1 \ldots \psi_n, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ mit Hülfe von [3] folgende dreifache Gleichung

$$[4] \quad \Sigma\Big\{-\frac{\partial(T+V)}{\partial q_l}+\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial(T+V)}{\partial q'_l}\Big]\Big\}(\mathrm{D}q_l - q'_l\mathrm{D}t)$$

$$= -\mathrm{D}(T+V)+\frac{d}{dt}\Big\{\Big(T+V-\Sigma\frac{\partial(T+V)}{\partial q'_l}q'_l\Big)\mathrm{D}t+\Sigma\frac{\partial(T+V)}{\partial q'_l}\mathrm{D}q'_l\Big\}$$

$$= -\mathrm{D}(T+V)+\frac{d}{dt}\Big\{\Big(T+V-\Sigma p_l\frac{dq_l}{dt}\Big)\mathrm{D}t+\Sigma p_l \mathrm{D}q_l\Big\}$$

$$= -\mathrm{D}\Big(T+V-\frac{dS}{dt}\Big)+\frac{d}{dt}\Big\{\Big(T+V-\frac{dS}{dt}-\Sigma\varphi_l\frac{d\psi_l}{dt}\Big)\mathrm{D}t+\Sigma\varphi_l\mathrm{D}\psi_l\Big\}$$

Sind nun die Bedingungen für das mechanische Problem der Art, dass zu jeder virtuellen Bewegung auch die im entgegengesetzten Sinne möglich ist, so muss in Folge des D'Alembertschen Princips oder allgemeiner nach dem Gaussischen Princip des kleinsten Zwanges oder nach noch allgemeineren Grundsätzen der Ausdruck unter [1] also, wie leicht zu sehen, auch die erste Seite der letzten Gleichung zu Null werden.

Hamilton hat solche Functionen, wie die hier mit φ und ψ bezeichneten, nur in dem Sinne gebraucht, dass sie ein vollständiges System von Integralen für die Differentialgleichungen eines mechanischen Problems bilden, was immer dann eintritt, wenn die Grösse $-E$ von der Grösse $-H$

$$-H = T + V - \Sigma p_l q'_l \qquad [5]$$

sich nur um eine additive absolute Constante unterscheidet. Ausser in dieser Bedeutung hat Jacobi, in seiner Abhandlung über partielle lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, solche Functionen, wie die ψ hier sind, betrachtet, welche gleich Constanten gesetzt die nöthigen Beziehungen zwischen p und q bestimmen, damit

$$p_1 \mathrm{d}q_1 + p_2 \mathrm{d}q_2 + \cdots + p_n \mathrm{d}q_n$$

allgemein, ohne eine Relation zwischen den Grössen $q_1 \ldots q_n$ für sich zuzulassen, ein vollständiges Differential werde.

In allen diesen Fällen ergibt sich unmittelbar aus den allgemeinen Voraussetzungen, dass $\psi_1 \ldots \psi_n$, $q_1 \ldots q_n$, t von einander unabhängige Veränderliche werden, durch welche alle übrigen Grössen, die bei derselben Substitution in Betracht kommen, als Functionen dargestellt werden können. Diese Art der Abhängigkeit ist aber für die ganze Untersuchung von grosser Bedeutung, nicht nur folgen daraus so einfache Relationen, wie die Hamiltonschen im Artikel XII. meiner Abhandlung über die Hamilton-Jacobische Theorie angegebenen sind, sondern sie dienen auch vorzugsweise dazu, um für solche Functionen, deren Poissonsche Differentialausdrücke die einfachsten in den Gleichungen [15] jener Abhandlung aufgestellten Werthe annehmen, alle übrigen hieraus sich ergebenden Eigenschaften abzuleiten.

Schon in dem einfachsten Falle, wenn sämmtliche $\psi_1 \ldots \psi_n$ als Functionen allein von $q_1 \ldots q_n$, t vorausgesetzt sind und sich also zwischen diesen Grössen und $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, $p_1 \ldots p_n$, E leicht unmittelbar solche Beziehungen aufstellen lassen, dass die Fundamentalgleichung der Substitution erfüllt wird und die Poissonschen Differentialausdrücke verschwinden, sind die Grössen φ, p, E nicht durch ψ, q, t bestimmbar. Hier wird jedoch dadurch, dass man statt der gegebenen q_l und p_l beziehungsweise $-p_l$ und q_l setzt und zu der Substitutionsfunction noch $\Sigma p_l q_l$ hinzufügt, eine solche canonische Substitution erhalten, bei welcher alle Grössen durch Functionen von q, ψ, t darstellbar sind und die Werthe der Poissonschen Differentialausdrücke ungeändert bleiben.

Ausser in diesen beiden einfachsten Fällen besteht auch sonst immer der Satz:

Eine gegebene canonische Substitution, wenn sie eine vollständige ist, wenn nemlich alle vorkommenden Grössen sowol durch die p_l, q_l, t allein als auch durch die $\varphi_\lambda, \psi_\lambda, t$ allein bestimmbar sind, kann man durch etwaige Vertauschung der Glieder einzelner Paare von zusammengehörigen Grössen q_k und p_k mit $-p_k$ und q_k in solche Form bringen, dass alle vorkommenden Grössen durch die unabhängigen $q_1 .. q_n, \psi_1 .. \psi_n, t$ allein bestimmbar werden.

Eine solche Form soll eine normale heissen. Wegen der vielfachen Anwendungen dieses Satzes, dass jede vollständige canonische Substitution in eine normale Form gebracht werden kann, ist es zweckmässig, den Satz mit der geringsten Anzahl der nothwendigen Voraussetzungen auszusprechen, was in folgender Weise geschieht:

Besitzen die Functionen $\psi_1 \ldots \psi_n$ mit den unabhängigen Veränderlichen $q_{-n} .. q_{-1}, q_{+1} .. q_{+n}$ die Eigenschaft, dass für je zwei der Functionen ψ_μ, ψ_ν die Summe ihrer nach je zwei conjugirten Elementen q_l und q_{-l} genommenen Functionaldeterminanten identisch zu Null wird

$$[6] \qquad \sum_{l=+1}^{l=+n} \frac{\partial(\psi_\mu, \psi_\nu)}{\partial(q_l, q_{-l})} = 0$$

und verschwinden nicht sämmtliche $n.n$ gliederigen Functionaldeterminanten nemlich die

$$[7] \qquad \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n)}{\partial(q_{h_1}, q_{h_2}, \cdots q_{h_n})}$$

worin $h_1, h_2 .. h_n$ irgend welche n Zahlen aus der Reihe $\pm 1, \pm 2 \ldots \pm n$ bedeuten, so gibt es unter diesen nicht verschwindenden Functionaldeterminan-

ten auch wenigstens eine solche, für welche die absoluten Werthe der $h_1, h_2 \ldots h_n$ *alle von einander verschieden sind.*

Aus dem Bildungsgesetz der Functionaldeterminanten folgt mit Hülfe des Laplaceschen Satzes unmittelbar

$$\sum_{\lambda} [\Lambda] \frac{\partial(\psi_{\lambda_1}, \psi_{\lambda_2})}{\partial(q_l, \; q_{-l})} \frac{\partial(\psi_{\lambda_3}, \psi_{\lambda_4} \cdots \psi_{\lambda_\nu})}{\partial(q_{h_3}, q_{h_4} \cdots q_{h_\nu})} = \frac{\partial(\psi_{k_1}, \psi_{k_2}, \psi_{k_3} \cdots \psi_{k_\nu})}{\partial(q_l, \; q_{-l}, q_{h_3} \cdots q_{h_\nu})} \qquad [8]$$

worin die Summation auf alle die den Grössen $k_1, k_2 \ldots k_\nu$ in irgend einer Reihenfolge gleichen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\nu$ sich bezieht mit der Einschränkung $\lambda_1 < \lambda_2$ und $\lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5 \ldots < \lambda_{\nu-1} < \lambda_\nu$ bei der gestatteten Voraussetzung $k_1 < k_2 < k_3 \ldots < k_{\nu-1} < k_\nu$, worin ferner

$$\begin{aligned} \Lambda = (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})\,(\lambda_\nu \;\; & - \lambda_{\nu-2}) \ldots (\lambda_\nu - \lambda_1) \\ & (\lambda_{\nu-1} - \lambda_{\nu-2}) \ldots (\lambda_{\nu-1} - \lambda_1) \\ & \qquad \ldots (\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned} \qquad [9]$$

und $[\Lambda]$ gleich $+1$ oder -1 gesetzt ist, je nachdem Λ positiv oder negativ wird.

Nach den Voraussetzungen [5] über die ψ Functionen ergibt sich also

$$\sum_{l=1}^{l=n} \frac{\partial(\psi_{k_1}, \psi_{k_2}, \psi_{k_3}, \psi_{k_4} \cdots \psi_{k_\nu})}{\partial(q_l, \; q_{-l}, q_{h_3}, q_{h_4} \cdots q_{h_\nu})} = 0 \qquad [10]$$

worin $k_1, k_2 \ldots k_\nu$ irgend welche der Werthe $1, 2, 3 \ldots n$ bezeichnen; hieraus folgt z. B.

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \;\; \psi_3, \psi_4 \cdots \psi_n)}{\partial(q_{h_1}, q_{-h_1}, q_{h_3}, q_{h_4} \cdots q_{h_n})} + \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \;\; \psi_3, \psi_4 \cdots \psi_n)}{\partial(q_{h_2}, q_{-h_2}, q_{h_3}, q_{h_4} \cdots q_{h_n})} = 0 \qquad [11]$$

wenn die absoluten Werthe der $h_1, h_2, h_3, h_4 \ldots h_n$ alle von einander verschieden sind, weil aus der Summe über l hier alle andern als jene zwei Glieder identisch zu Null werden in Folge der Gleichheit zweier der unabhängigen Veränderlichen.

Wir wollen nun zunächst beweisen, dass wenn alle Functionaldeterminanten

$$[12] \qquad \frac{\partial(\psi_1,\ \psi_2 \cdot\cdot \psi_n)}{\partial(q_{h_1}, q_{h_2} \cdot\cdot q_{h_n})}$$

worin die absoluten Werthe der $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$ alle von einander verschieden sind, zu Null werden, dieses auch für alle Functionaldeterminanten von der Form

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2,\ \ \psi_3,\ \psi_4 \cdots \psi_n)}{\partial(q_l, q_{-l}, q_{h_3}, q_{h_4} \cdots q_{h_n})}$$

stattfinden muss. Denn bezeichnen $h_1, h_2, h_3, h_4 \,..\, h_n$ Indices, deren absolute Werthe von einander verschieden sind, und ist

$$[13] \qquad \frac{\partial(\psi_1,\ \psi_2,\ \ \psi_3,\ \psi_4 \cdots \psi_n)}{\partial(q_{h_1}, q_{-h_1}, q_{h_3}, q_{h_4} \cdots q_{h_n})}$$

eine Determinante, welche nicht verschwindet, so folgt nach Jacobi's Fundamentalsatz für die Functionaldeterminanten, dass $q_{h_1}, q_{-h_1}, q_{h_3}, q_{h_4} \cdot\cdot q_{h_n}$ als Functionen von $\psi_1, \psi_2 \,..\, \psi_n$ und von den übrigen Grössen $q_{h_2}, q_{-h_2}, q_{-h_3}, q_{-h_4} \cdot\cdot q_{-h_n}$, welche mit jenen erstern zusammen in den gegebenen Functionen $\psi_1, \psi_2, \,..\, \psi_n$ vorkamen, dargestellt werden können und also auch die Functionaldeterminanten

$$[14] \qquad \frac{\partial(q_\mu,\ q_\nu,\ \ \ q_{-h_3}, q_{-h_4} \cdots q_{-h_n}, \psi_1, \psi_2 \cdot\cdot \psi_n)}{\partial(q_{h_2}, q_{-h_2}, q_{-h_3}, q_{-h_4} \cdots q_{-h_n}, \psi_1, \psi_2 \cdot\cdot \psi_n)}$$

bestimmbar sind, wenn μ, ν irgend welche der vier Werthe $\pm h_1, \pm h_2$ annehmen. Solche Determinante soll für die nächste Rechnung kürzer durch

$$[15] \qquad \frac{\partial(q_\mu,\ q_\nu,\ \ \ 3*)}{\partial(q_{h_2}, q_{-h_2},\ 3*)}$$

bezeichnet werden, dann besteht zwischen diesen nach dem Bildungsgesetze der zwei mal zwei gliedrigen Functionaldeterminanten die Gleichung

$$[16] \frac{\partial(q_{h_1}, q_{-h_1}\ 3*)}{\partial(q_{h_2}, q_{-h_2}\ 3*)} = \frac{\partial(q_{h_1}, q_{h_2}\ \ 3*)}{\partial(q_{h_2}, q_{-h_2}\ 3*)} \cdot \frac{\partial(q_{-h_1}, q_{-h_2}\ 3*)}{\partial(q_{h_2},\ q_{-h_2}\ 3*)} - \frac{\partial(q_{h_1}, q_{-h_2}\ 3*)}{\partial(q_{h_2}, q_{-h_2}\ 3*)} \frac{\partial(q_{-h_1}, q_{h_2}\ \ 3*)}{\partial(q_{h_2},\ q_{-h_2}\ 3*)}$$

und nach dem Satze über die Multiplication der Functionaldeterminanten die Gleichung

$$\frac{\partial(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4 \cdots \psi_n,\ q_{+h_2},\ q_{-h_2},\ q_{-h_3},\ q_{-h_4} \cdots q_{-h_n})}{\partial(q_{h_1},\ q_{-h_1},\ q_{h_3},\ q_{h_4} \cdots q_{h_n},\ q_{+h_2},\ q_{-h_2},\ q_{-h_3},\ q_{-h_4} \cdots q_{-h_n})} \cdot \frac{\partial(q_{h_1},\ q_{-h_1}\ {}^{3*})}{\partial(q_{h_2},\ q_{-h_2}\ {}^{3*})}$$
$$= \frac{\partial(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4 \cdots \psi_n,\ q_{h_1},\ q_{-h_1},\ q_{-h_3},\ q_{-h_4} \cdots q_{-h_n})}{\partial(q_{h_2},\ q_{-h_2},\ q_{h_3},\ q_{h_4} \cdots q_{h_n},\ q_{h_1},\ q_{-h_1},\ q_{-h_3},\ q_{-h_4} \cdots q_{-h_n})} \qquad [17]$$

In dieser letzten Gleichung sind die erste und die dritte Functionaldeterminante die beiden Glieder, deren Summe [11] nach den zwischen den ψ bestehenden Bedingungsgleichungen [6] zu Null werden soll; die erste dieser beiden Determinanten ist als von Null verschieden vorausgesetzt [13], also wird auch die andere und damit dann ihre Verhältnisszahl, nemlich

$$\frac{\partial(q_{h_1},\ q_{-h_1}\ {}^{3*})}{\partial(q_{h_2},\ q_{-h_2}\ {}^{3*})}$$

sich von Null verschieden ergeben und daraus folgen, dass wenigstens zwei der Functionaldeterminanten in der vorhergehenden Gleichung [16], also wenigstens zwei der Determinanten von der Form

$$\frac{\partial(q_{h_\mu},\ q_{h_\nu}\ {}^{3*})}{\partial(q_{h_2},\ q_{-h_2}\ {}^{3*})} \quad \text{für } h_\mu = \pm h_1,\ h_\nu = \pm h_2$$

nicht verschwinden dürfen. Das Product jeder derselben multiplicirt in [13] ist nach dem Satze über die Multiplication der Functionaldeterminanten

$$\frac{\partial(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4 \cdots \psi_n,\ q_{h_2},\ q_{-h_2},\ q_{-h_3},\ q_{-h_4} \cdots q_{-h_n})}{\partial(q_{h_1},\ q_{-h_1},\ q_{h_3},\ q_{h_4} \cdots q_{h_n},\ q_{h_2},\ q_{-h_2},\ q_{-h_3},\ q_{-h_4} \cdots q_{-h_n})} \cdot \frac{\partial(q_{h_\mu},\ q_{h_\nu}\ {}^{3*})}{\partial(q_{h_2},\ q_{-h_2}\ {}^{3*})}$$
$$= \frac{\partial(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4 \cdots \psi_n,\ q_{h_\mu},\ q_{h_\nu},\ q_{-h_3},\ q_{-h_4} \cdots q_{-h_n})}{\partial(q_{h_1},\ q_{-h_1},\ q_{h_3},\ q_{h_4} \cdots q_{h_n},\ q_{h_2},\ q_{-h_2},\ q_{-h_3},\ q_{-h_4} \cdots q_{-h_n})} \qquad [18]$$

also kann diese letzte Determinante auch nicht zu Null werden, was der Voraussetzung [12] widerspricht, da sie abgesehen vom Vorzeichen mit einer der vier Determinanten

$$\frac{\partial(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4 \cdots \psi_n)}{\partial(q_{\pm h_1},\ q_{\pm h_2},\ q_{h_3},\ q_{h_4} \cdots q_{h_n})}$$

gleiche Bedeutung hat.

Verschwinden also sämmtliche Determinanten von der Form

$$[19] \qquad \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 \cdots \psi_n)}{\partial(q_{h_1}, q_{h_2}, q_{h_3}, q_{h_4} \cdots q_n)}$$

für solche $h_1, h_2, h_3, h_4 \ldots h_n$, welche dem absoluten Werthe nach alle von einander verschieden sind, so kann keine der $n.n$ gliedrigen Functionaldeterminanten, in welcher nur zwei der Indices der q gleiche absolute Werthe haben, von Null verschieden sein.

Auf ganz analoge Weise ergibt sich, dass, wenn alle Functionaldeterminanten verschwinden, für welche nur ein Paar der Indices gleiche absolute Werthe haben, auch die Functionaldeterminanten mit zwei Paar Indices von gleichen Werthen zu Null werden müssen, denn wäre z. B.

$$[20] \qquad \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6 \ldots \psi_n)}{\partial(q_{h_1}, q_{-h_1}, q_{h_4}, q_{-h_4}, q_{h_5}, q_{h_6} \cdots q_{h_n})}$$

von Null verschieden, so müsste, weil nach den zwischen den ψ bestehenden Bedingungsgleichungen [6] die Summe der Functionaldeterminante [20] und der beiden aus ihr nach Ersetzung von $+h_1, -h_1$ entweder durch $+h_2, -h_2$ oder durch $+h_3, -h_3$ gebildeten Functionaldeterminanten gleich Null ist, auch wenigstens noch eine dieser beiden andern Functionaldeterminanten von Null verschieden sein. Werde also noch

$$[21] \qquad \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6 \cdots \psi_n)}{\partial(q_{h_2}, q_{-h_2}, q_{h_4}, q_{-h_4}, q_{h_5}, q_{h_6} \cdots q_{h_n})}$$

von Null verschieden, so müsste die Functionaldeterminante

$$[22] \qquad \frac{\partial(q_{h_\mu}, q_{h_\nu}, q_{h_3}, q_{-h_3}, q_{-h_5}, q_{-h_6} \cdots q_{-h_n}, \psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n)}{\partial(q_{+h_2}, q_{-h_2}, q_{h_3}, q_{-h_3}, q_{-h_5}, q_{-h_6} \cdots q_{-h_n}, \psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n)}$$

welche für irgend zwei der Werthe $\pm h_1, \pm h_2$ statt h_μ und h_ν genommen eine bestimmte Bedeutung hat, für $h_\mu = +h_1$ und $h_\nu = -h_1$ als Verhältnisszahl zwischen den beiden vorgenannten nicht verschwindenden Functionaldeterminanten [20] und [21] auch von Null verschieden sein. Diese Determinante [22] für $h_\mu = +h_1$, $h_\nu = -h_1$ lässt sich aber ähnlich wie vorhin in [16] als Summe von Producten der analogen vier Functionaldeterminanten für $h_\mu = \pm h_1$, $h_\nu = \pm h_2$ darstellen, also wenigstens eine dieser vier muss von Null verschieden sein.

Durch Multiplication dieser nicht verschwindenden Functionaldeterminante in die nach der Voraussetzung nicht verschwindende Functionaldeterminante [20] würde sich eine von Null verschiedene Functionaldeterminante mit nur einem Paar dem absoluten Werthe nach gleichen Indices h_4 nnd $-h_4$ ergeben, was der Voraussetzung widerspricht; es müssen also auch alle Functionaldeterminanten mit zwei Paar dem absoluten Werthe nach gleichen Indices der q verschwinden.

Daraus lässt sich dann weiter, ebenso wie hier, das Nullwerden aller Functionaldeterminanten mit mehreren Paaren dem absoluten Werthe nach gleichen Indices schliessen und also das Verschwinden sämmtlicher Functionaldeterminanten der Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$, was aber der ersten Voraussetzung widerspricht. Es ist daher die Annahme, alle Functionaldeterminanten mit n dem absoluten Werthe nach verschiedenen Indices der q seien gleich Null nicht zulässig, wenn überhaupt irgend eine der $n.n$ gliedrigen Functionaldeterminanten nicht verschwinden und die Gleichungen [6] bestehen sollen.

II.

Theilweis gegebene Substitution.

In meiner Abhandlung über die Hamilton-Jacobische Theorie Artikel X. ist gezeigt,

dass die vervollständigten Poissonschen Differentialgleichungen:

$$\sum_l \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\frac{\partial \psi_k}{\partial p_l} - \frac{\partial \psi_h}{\partial p_l}\frac{\partial \psi_k}{\partial q_l}\right) = 0 \qquad [23]$$

$$\sum_l \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} - \frac{\partial \psi_h}{\partial p_l}\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l}\right) \begin{aligned} &= 0 \text{ für } h \lessgtr k & [24] \\ &= 1 \text{ für } h = k & [25] \end{aligned}$$

$$\sum_l \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_l}\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} - \frac{\partial \varphi_h}{\partial p_l}\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l}\right) = 0 \qquad [26]$$

$$[27] \qquad \sum_l \left(\frac{\partial E}{\partial q_l}\frac{\partial \psi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial E}{\partial p_l}\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \psi_h}{\partial t}$$

$$[28] \qquad \sum_l \left(\frac{\partial E}{\partial q_l}\frac{\partial \varphi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial E}{\partial p_l}\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \varphi_h}{\partial t}$$

für $\qquad l = 1, 2, 3 \ldots n$

die $2n+1$ *Functionen* $E, \psi_1, \ldots \psi_n, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ *als canonische Substitution charakterisiren, nemlich sie eine Gleichung von der Form*

$$\mathrm{D}S = \sum_l p_l \mathrm{D} q_l - \sum_l \varphi_l \mathrm{D} \psi_l - E\mathrm{D}t$$

erfüllen lassen; aber wenn nur eine geringere Anzahl von jenen $2n+1$ *Functionen gegeben ist, so genügen die zwischen ihnen bestehenden Poissonschen Gleichungen auch noch, damit die Functionen die ihrer Bezeichnung entsprechenden Glieder einer canonischen Substitution ausmachen.*

Den Beweis dieses fundamentalen Lehrsatzes werde ich führen, indem ich zeige, dass zu beliebigen unter den $\psi_1, \ldots \psi_n, \varphi_1, \ldots \varphi_n, E$ gegebenen Functionen, welche die unter ihnen bestehenden Gleichungen in der Reihe [23]...[28] erfüllen, die andern Functionen so bestimmt werden können, dass allen übrigen Gleichungen in jener Reihe auch genügt wird. Von den verschiedenen Methoden, die man anwenden kann, um die Ausführung der Lösung einer solchen Aufgabe zu erleichtern, werde ich an dieser Stelle nicht weiter handeln.

Zunächst lässt sich die Ordnung der gegebenen Functionen φ, ψ so einrichten, dass die Aufgabe in einer übersichtlichen Form auftritt. Ist nemlich für einen Index oder für mehrere h die Function φ_h gegeben, aber nicht die conjugirte Function ψ_h, so wollen wir die Rechnung so stellen, als sei die gegebene Function ein ψ_h; wenn dafür die Aufgabe gelöst ist, braucht man zur gefundenen Substitutionsfunction S nur das so gefundene $-\varphi_h \psi_h$ hinzuzufügen, dann nimmt das gefundene φ_h die Stelle des gesuchten $-\psi_h$ und das in die Rechnung eingeführte ψ_h die Stelle der gegebenen Function φ_h ein. Für die paarweis zusammengehörigen und gegebenen φ_h und ψ_h mögen die kleinsten Indices $1, 2, \ldots n''$ genommen werden, für die einzeln gegebenen oder dafür in Rechnung gesetzten

ψ die darauf folgenden Indices $n''+1, n''+2, \dots n'$, also werden die noch zu suchenden ψ die Indices $n'+1, n'+2, \dots n$ und die noch zu suchenden φ die Indices $n''+1, n''+2, \dots n', n'+1, \dots n$ haben.

III.

Bestimmung einer Substitutionsfunction durch ihre nach der Zeit genommene Derivirte.

Der Fall, dass die Function E und entweder keine der Functionen φ und ψ oder doch nur solche von diesen gegeben sind, deren Indices die Reihe $1, 2, 3, \dots n$ nicht vollständig ausfüllen, lässt sich auf den Fall zurückführen, dass solche Function E der Null gleich ist.

Die $2n$ Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} &= +\frac{\partial E}{\partial p_1}, \dots \frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} = +\frac{\partial E}{\partial p_l}, \dots \frac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}t} = +\frac{\partial E}{\partial p_n} \\ \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial E}{\partial p_1}, \dots \frac{\mathrm{d}p_l}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial E}{\partial q_l}, \dots \frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial E}{\partial q_n} \end{aligned} \qquad [29]$$

worin E als Function von $t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$ gegeben gedacht ist, und auf diese $2n+1$ Grössen sich die partielle ∂ Differentiation bezieht, während d die totale nach t genommene Differentiation bedeutet, lassen sich durch $2n$ Lösungen integriren, indem die $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$ als Functionen ihrer für die Zeit t^0 geltenden Anfangswerthe $q_1^0, \dots q_n^0, p_1^0, \dots p_n^0$ und der Zeit t dargestellt werden. Diese Functionen eingesetzt, machen, wenn wie auch in der Folge die Summation Σ über die Werthe $l = 1, 2, \dots n$ sich erstreckt, das Integral

$$\int_{t^0}^{t} (\Sigma p_l \frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} - E)\,\mathrm{d}t = S^0 \qquad [30]$$

zu einer Function von $q_1^0, \dots q_n^0, p_1^0, \dots p_n^0, t$.

Es ist aber für eine auf t sich nicht beziehende im Uebrigen allgemeine Differentiation δ identisch:

$$\begin{aligned} &\delta \int (\Sigma p_l \frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} - E)\,\mathrm{d}t \\ &\quad = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Sigma p_l \delta q_l) . \mathrm{d}t + \int \Sigma \left\{ \left(\frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial E}{\partial p_l}\right) \delta p_l - \left(\frac{\mathrm{d}p_l}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial E}{\partial q_l}\right) \delta q_l \right\} . \mathrm{d}t \end{aligned} \qquad [31]$$

also, wenn man mit D eine allgemeine Differentiation bezeichnet, wird zufolge der Gleichungen [29] für das Integral S^0

$$\mathrm{D}S^0 = \Sigma p_l \mathrm{D}q_l - \Sigma p_l^0 \mathrm{D}q_l^0 + e\mathrm{D}t$$

worin e eine noch zu bestimmende Function bedeutet. Diese Gleichung geht für den Fall, dass die D Differentiation die nach der Zeit genommene vollständige d Differentiation bedeutet, in die Form

$$\frac{\mathrm{d}S^0}{\mathrm{d}t} = \Sigma p_l \frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} + e$$

über, während aus der Definitionsgleichung [30] für S^0 folgt

$$\frac{\mathrm{d}S^0}{\mathrm{d}t} = \Sigma p_l \frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} - E$$

demnach ist $e = -E$ und

$$[32] \qquad \mathrm{D}S^0 = \Sigma p_l \mathrm{D}q_l - \Sigma p_l^0 \mathrm{D}q_l^0 - E\mathrm{D}t$$

Es lässt sich also für jede Function E von $q_1, .. q_n, p_1, .. p_n, t$ ein System canonischer Variabeln $q_1^0, .. q_n^0, p_1^0, .. p_n^0$ und eine zugehörige Substitutionsfunction S^0 finden. Ist nun keine der Functionen $\psi_1, .. \psi_n$, $\varphi_1, .. \varphi_n$ gegeben, so würden $q_1^0, .. q_n^0, p_1^0, .. p_n^0$ dafür genommen schon eine Auflösung der gesuchten Aufgabe bilden.

Sind aber einige der ψ und φ Functionen gegeben, so ist eine weitere Transformation erforderlich.

Bedeutet A eine Function von $q_1, .. q_n, p_1, .. p_n, t$, so besteht die identische Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial A}{\partial q_l}\frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial A}{\partial p_l}\frac{\mathrm{d}p_l}{\mathrm{d}t}\right) \quad (\text{für } l = 1, 2, 3, .. n)$$

also mit Berücksichtigung der obigen Gleichungen [29] auch

$$[33] \qquad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial A}{\partial q_l}\frac{\partial E}{\partial p_l} - \frac{\partial A}{\partial p_l}\frac{\partial E}{\partial q_l}\right) \quad (\text{für } l = 1, 2, 3, .. n)$$

setzt man die gegebenen Functionen $\psi_1, .. \psi_{n'}, \varphi_1, .. \varphi_{n''}$ für A, so verschwinden die zweiten Seiten dieser Gleichungen [33] in Folge der für die Functionen ψ und φ gemachten Voraussetzungen [27], [28] und es wird

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \ldots \frac{d\psi_{n'}}{dt} = 0, \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \ldots \frac{d\varphi_{n''}}{dt} = 0 \qquad [34]$$

also sind $\psi_1, \ldots \psi_{n'}, \varphi_1, \ldots \varphi_{n''}$ Integrale der obigen $2n$ Differentialgleichungen [29] und können demnach als Functionen allein von den Grössen $q_1^0, \ldots q_n^0, p_1^0, \ldots p_n^0$ ohne t dargestellt werden.

Setzen wir in der identischen Gleichung

$$\mathrm{D}A . \Delta B - \Delta A . \mathrm{D}B = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{h=1}^{h=k} \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta_h}\frac{\partial B}{\partial \zeta_k} - \frac{\partial B}{\partial \zeta_h}\frac{\partial A}{\partial \zeta_k}\right)(\mathrm{D}\zeta_h \Delta\zeta_k - \Delta\zeta_h \mathrm{D}\zeta_k)$$

die Grössen $\zeta_1, \ldots \zeta_m$ der Reihe nach gleich $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$, nehmen die D und Δ Differentiationen speciell als die partiellen nach q_l^0, p_l^0 gebildeten mit d zu bezeichnenden Differentiationen, dividiren beide Seiten der Gleichung mit $\mathrm{D}q_l^0 . \Delta p_l^0$, summiren dann über die Werthe $l = 1, 2, 3 \ldots n$ und berücksichtigen die für die canonische Substitution nach dem vorigen Artikel bestehenden Gleichungen

$$\sum_l \left(\frac{dq_h}{dq_l^0}\frac{dq_k}{dp_l^0} - \frac{dq_h}{dp_l^0}\frac{dq_k}{dq_l^0}\right) = 0$$

$$\sum_l \left(\frac{dq_h}{dq_l^0}\frac{dp_k}{dp_l^0} - \frac{dq_h}{dp_l^0}\frac{dp_k}{dq_l^0}\right) \begin{matrix} = 0 & \text{für } h \gtrless k \\ = 1 & \text{für } h = k \end{matrix}$$

$$\sum_l \left(\frac{dp_h}{dq_l^0}\frac{dp_k}{dp_l^0} - \frac{dp_h}{dp_l^0}\frac{dp_k}{dq_l^0}\right) = 0$$

so erhalten wir

$$\sum_l \left(\frac{dA}{dq_l^0}\frac{dB}{dp_l^0} - \frac{dA}{dp_l^0}\frac{dB}{dq_l^0}\right) = \sum_l \left(\frac{\partial A}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial B}{\partial p_l} - \frac{\partial B}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial A}{\partial p_l}\right) \qquad [35]$$

wenn alle Summationen sich auf $l = 1, 2, \ldots n$ beziehen. Setzt man hierin für A und B je zwei der Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{n'}, \varphi_1 \ldots \varphi_{n''}$ so wird:

$$\sum_l \left(\frac{d\psi_h}{dq_l^0}\frac{d\psi_k}{dp_l^0} - \frac{d\psi_h}{dp_l^0}\frac{d\psi_k}{dq_l^0}\right) = 0 \quad \text{für } 1 \leqq h \leqq n', \quad 1 \leqq k \leqq n'$$

$$\sum_l \left(\frac{d\psi_h}{dq_l^0}\frac{d\varphi_\nu}{dp_l^0} - \frac{d\psi_h}{dp_l^0}\frac{d\varphi_\nu}{dq_l^0}\right) \begin{matrix} = 0 & \text{für } h \gtrless \nu, \quad 1 \leqq h \leqq n'; \quad 1 \leqq \nu \leqq n'' \\ = 1 & \text{für } h = \nu \end{matrix}$$

$$\sum_l \left(\frac{d\varphi_\mu}{dq_l^0}\frac{d\varphi_\nu}{dp_l^0} - \frac{d\varphi_\mu}{dp_l^0}\frac{d\varphi_\nu}{dq_l^0}\right) = 0 \quad \text{für } 1 \leqq \mu \leqq n'', \quad 1 \leqq \nu \leqq n''$$

Kann man also zu den in $q_1^0, \ldots q_n^0, p_1^0, \ldots p_n^0$ allein und ohne t ausgedrückten und gegebenen Functionen $\psi_1, \ldots \psi_{n'}, \varphi_1, \ldots \varphi_{n''}$ die übrigen Functionen $\psi_{n'+1} \ldots \psi_n, \varphi_{n''+1} \ldots \varphi_n$ finden, mit denen sie zusammen eine canonische Substitution bilden, wie solches in den folgenden Artikeln gezeigt wird, so ergibt sich auch eine von t freie Substitutionsfunction S^* der Art, dass

$$\mathrm{D}S^* = \sum_l p_l^0 \mathrm{D} q_l^0 - \sum_l \varphi_l \mathrm{D} \psi_l \quad (\text{für } l = 1, 2, \ldots n)$$

und also

$$\mathrm{D}(S^0 + S^*) = \sum_l p_l \mathrm{D} q_l - \sum_l \varphi_l \mathrm{D} \psi_l - E \mathrm{D} t$$

wird, wie wir es suchten.

IV.

Bestimmung einer Substitution durch eine gegebene unvollständige Reihe der eingeführten Veränderlichen.

Sind nur die Functionen

$$\psi_1, \ldots \psi_{n'}, \quad \varphi_1, \ldots \varphi_{n''} \quad \text{für } n'' \leqq n' < n$$

aber nicht die Function E gegeben, so lassen sich, wie wir jetzt nachweisen wollen, die Functionen $\psi_{n'+1}, \psi_{n'+2}, \ldots \psi_n$ mit Hülfe der Jacobi'schen Lehrsätze über simultane lineare partielle Differentialgleichungen bestimmen.

Hiebei werden die Functionen $\psi_{n'+1}, \ldots \psi_n$ nach einander aufgesucht, und an jeder Stelle der weiteren Aufsuchung kommen die gefundenen Functionen schon mit in Betracht. Um nun bei der nachfolgenden Entwickelung sogleich den Umstand mit zu berücksichtigen, dass schon einige der Functionen ψ gefunden sind, sollen die $\psi_1, \ldots \psi_{n'}, \varphi_1, \ldots \varphi_{n''}$ nicht nur die gegebenen sondern auch die an irgend einer Stelle der Rechnung schon gefundenen Functionen mit bedeuten.

Bezeichnen wir zur Abkürzung $\varphi_1, \ldots \varphi_{n''}$ der Reihe nach mit $\psi_{-1}, \ldots \psi_{-n''}$ und für irgend eine Function f von den Grössen $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n, t$ die Operation

$$\sum_l \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\frac{\partial f}{\partial p_l} - \frac{\partial \psi_h}{\partial p_l}\frac{\partial f}{\partial q_l}\right) \quad \text{mit} \quad \Psi_h[f] \tag{36}$$

$$\sum_\lambda \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial q_\lambda}\frac{\partial \Psi_h[f]}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial \psi_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial \Psi_h[f]}{\partial q_\lambda}\right) \quad \text{mit} \quad \Psi_k\Psi_h[f] \tag{37}$$

wobei, wie auch sonst in diesem Artikel, die auf l und λ sich beziehenden Summationen über die Werthe $1, 2, 3, \ldots n$ zu erstrecken sind, so wird identisch

$$\Psi_k\Psi_h[f] = \sum_l\sum_\lambda \left(\frac{\partial\partial f}{\partial p_\lambda \partial p_l}\frac{\partial \psi_k}{\partial q_\lambda}\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l} - \frac{\partial\partial f}{\partial p_\lambda \partial q_l}\frac{\partial \psi_k}{\partial q_\lambda}\frac{\partial \psi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial\partial f}{\partial q_\lambda \partial p_l}\frac{\partial \psi_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l} + \frac{\partial\partial f}{\partial q_\lambda \partial q_l}\frac{\partial \psi_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial \psi_h}{\partial p_l}\right)$$
$$+\sum_l \frac{\partial f}{\partial p_l}\sum_\lambda\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial q_\lambda}\frac{\partial\partial \psi_h}{\partial p_\lambda \partial q_l} - \frac{\partial \psi_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial\partial \psi_h}{\partial q_\lambda \partial q_l}\right) - \sum_l \frac{\partial f}{\partial q_l}\sum_\lambda\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial q_\lambda}\frac{\partial\partial \psi_h}{\partial p_\lambda \partial p_l} - \frac{\partial \psi_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial\partial \psi_h}{\partial q_\lambda \partial p_l}\right)$$

und daher

$$\Psi_k\Psi_h[f] - \Psi_h\Psi_k[f] = +\sum_l \frac{\partial f}{\partial p_l}\frac{\partial}{\partial q_l}\sum_\lambda\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial q_\lambda}\frac{\partial \psi_h}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial \psi_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial \psi_h}{\partial q_\lambda}\right)$$
$$-\sum_l \frac{\partial f}{\partial q_l}\frac{\partial}{\partial p_l}\sum_\lambda\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial q_\lambda}\frac{\partial \psi_h}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial \psi_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial \psi_h}{\partial q_\lambda}\right)$$

oder mit Benutzung der oben unter [36] eingeführten Bezeichnung, auch

$$\Psi_k\Psi_h[f] - \Psi_h\Psi_k[f] = \sum_l \left(\frac{\partial f}{\partial p_l}\frac{\partial \Psi_k[\psi_h]}{\partial q_l} - \frac{\partial f}{\partial q_l}\frac{\partial \Psi_k[\psi_h]}{\partial p_l}\right)$$
$$= \sum_l \left(\frac{\partial f}{\partial q_l}\frac{\partial \Psi_h[\psi_k]}{\partial q_l} - \frac{\partial f}{\partial p_l}\frac{\partial \Psi_h[\psi_k]}{\partial q_l}\right) \tag{38}$$

Nach den hier zu Grunde liegenden Voraussetzungen [23] bis [26] erfüllen die schon bekannten Functionen

$$\psi_1, \cdots \psi_{n''}, \; \psi_{n''+1}, \cdots \psi_{n'}, \; \psi_{-1} \cdots \psi_{-n''}$$

identisch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Psi_\mu[\psi_\nu] = -\Psi_\nu[\psi_\mu] &= 0 \quad \text{für} \quad \mu+\nu \gtrless 0 \\ &= 1 \quad \text{für} \quad \mu+\nu = 0, \; \mu > 0 \end{aligned} \tag{39}$$

es ist also für jede Function f auch

$$\Psi_\mu\Psi_\nu[f] = \Psi_\nu\Psi_\mu[f] \tag{40}$$

wenn μ und ν irgend zwei der Indices

$$-n'', -(n''-1), \ldots -1, +1, \ldots +n'' +n''+1, \ldots n'$$

bedeuten.

Jede noch aufzusuchende Function ψ_η für $\eta > n'$ muss die $n'+n''$ linearen homogenen Differentialgleichungen

[41] $\Psi_\nu[\psi_\eta] = 0$ für $\nu = -n'', -(n''-1), \ldots -1, 1, \ldots n'', \ldots n'$

erfüllen, und von den Functionen $\psi_{n''+1}, \psi_{n''+2}, \ldots \psi_{n'}$ unabhängig sein.

Nach dem Jacobi'schen Satze gibt es für $n'+n''$ simultane lineare Differentialgleichungen $\Psi_\nu[\psi] = 0$, welche die Bedingung $\Psi_\mu \Psi_\nu[f] = \Psi_\nu \Psi_\mu[f]$ identisch erfüllen, und welche die nach $2n$ unabhängigen Veränderlichen wie hier $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$ genommenen partiellen Derivirten enthalten, $2n-(n'+n'')-1$ von einander unabhängige und von einer Constanten verschiedene Functionen ψ als Lösungen.

Von diesen Lösungen sind die $\psi_{n''+1}, \psi_{n''+2}, \ldots \psi_{n'}$ auszuscheiden, es bleiben also nur noch $2n-(n'+n'')-1-(n'-n'') = 2n-2n'-1$ von einander unabhängige Lösungen ψ, es kann daher durch Fortsetzung dieses Verfahrens, so lange die Anzahl n' der gefundenen Functionen $\psi_1, \ldots \psi_{n'}$ kleiner als n ist, immer wenigstens noch ein neues ψ gefunden werden bis man $n-n'$ Functionen ψ gefunden hat, welche unter sich und mit $\varphi_{n''}, \ldots \varphi_1, \psi_1, \ldots \psi_{n''}, \psi_{n''+1}, \ldots \psi_{n'}$ die erforderlichen Differentialgleichungen [41] erfüllen, und welche von einander und von den Functionen $\psi_{n''+1} \ldots \psi_{n'}$ unabhängig sind.

Die gefundenen Functionen werden auch von $\varphi_{n''} \ldots \varphi_1, \psi_1 \ldots \psi_{n''}$ unabhängig, denn sonst müsste eine dieser letztern φ_μ oder ψ_ν eine Function der übrigen φ und ψ sein, wenn aber Φ_μ und Ψ_ν Functionen von den Grössen $\varphi_1, \ldots \varphi_{n''}, \psi_1, \ldots \psi_{n''}$ mit Ausschluss beziehungsweise des φ_μ und des ψ_ν und $\mathfrak{d}$ die nach jenen $2n''-1$ Grössen genommenen Differentiale bedeuten, so ist nach der Voraussetzung

$$\frac{\mathfrak{d}\Phi_\mu}{\mathfrak{d}\varphi_\mu} = 0, \quad \frac{\mathfrak{d}\Psi_\nu}{\mathfrak{d}\psi_\nu} = 0$$

und in Folge von [23] bis [26] daher auch

$$\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial\psi_\mu}{\partial q_l}\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial p_l}-\frac{\partial\psi_\mu}{\partial p_l}\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial q_l}\right)=$$

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\mathfrak{d}\Phi_\mu}{\mathfrak{d}\psi_h}\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial\psi_\mu}{\partial q_l}\frac{\partial\psi_h}{\partial p_l}-\frac{\partial\psi_\mu}{\partial p_l}\frac{\partial\psi_h}{\partial q_l}\right)+\sum_{k=1}^{k=n''}\frac{\mathfrak{d}\Phi_\mu}{\mathfrak{d}\varphi_k}\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial\psi_\mu}{\partial q_l}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_l}-\frac{\partial\psi_\mu}{\partial p_l}\frac{\partial\varphi_k}{\partial q_l}\right)=0$$

und ebenso:

$$\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial q_l}\frac{\partial\Psi_\nu}{\partial q_l}-\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial p_l}\frac{\partial\Psi_\nu}{\partial q_l}\right)=0$$

also würde der aus φ_μ und ψ_μ oder der aus ψ_ν und φ_ν gebildete Poisson-sche Differentialausdruck [25] den Werth 0 erhalten, während der durch die Voraussetzungen der Aufgabe bestimmte Werth ± 1 ist.

Enthalten die gegebenen Functionen der φ und ψ nicht die Zeit t, so lassen sich die hinzuzufügenden Functionen ψ auch als von t unabhängig bestimmen.

Die weitere Auflösung der Aufgabe behandelt der folgende Artikel.

V.

Bestimmung einer Substitution durch eine vollständig gegebene Reihe der eingeführten Veränderlichen.

Die Aufstellung einer Substitution, für welche sämmtliche Functionen $\psi_1, \ldots \psi_n$ gegeben sind, erscheint bei unserer Behandlungsweise nur als eine besondere Form von der Aufgabe, die sich darbietet, wenn ausser den sämmtlichen ψ Functionen auch noch einige der Functionen $E, \varphi_1, \ldots \varphi_{n''}$ gegeben sind.

Mit Hülfe des Satzes über die normale Form einer canonischen Substitution Artikel I. denken wir uns die Veränderlichen p und q so gewählt, dass alle Functionen durch Ausdrücke allein von $\psi_1, \ldots \psi_n, q_1, \ldots q_n, t$ dargestellt werden können, also entweder jedes p_h und q_h an seiner Stelle gelassen oder ein solches Paar, wenn es erforderlich war, in q_h und $-p_h$ umgesetzt ist.

Es sollen D und Δ zwei allgemeine von einander unabhängige Differentiationen bedeuten, es soll ferner die

∂ Differentiation auf die unabhängigen Veränderlichen $t, q_1, \cdot\cdot q_n, p_1, \cdot\cdot p_n$
δ Differentiation auf die unabhängigen Veränderlichen $t, q_1, \cdot\cdot q_n, \psi_1, \cdot\cdot \psi_n$

sich beziehen.

Zur Abkürzung der Formeln wollen wir noch folgende Bezeichnungen einführen

$$q_{+0} = E, \; q_{-0} = t, \; q_{-\mu} = p_\mu \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1$$

$$\psi_{+0} = E, \; \psi_{-0} = t, \; \psi_{-\mu} = \varphi_\mu \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1$$

$$[h] = +1 \text{ für } h \geqq \pm 0, \; [h] = -1 \text{ für } h \leqq -1$$

$$\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial \psi_{-k}}\right) = 1 \text{ für } h = -k$$

$$\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial \psi_{-k}}\right) = \frac{\partial \psi_h}{\partial t} \text{ für } k = +0$$

$$\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial \psi_{-k}}\right) = 0 \text{ wenn zugleich } k \text{ von } -h \text{ und } k \text{ von } +0 \text{ verschieden ist}$$

$$\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\right) = 1 \text{ für } h = l = +0$$

$$\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \psi_h}{\partial q_l} \text{ wenn } l \text{ von } +0 \text{ verschieden ist}$$

$$P_0 = E, \; P_\mu = p_\mu, \; P_{-\mu} = \varphi_\mu \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1$$

$$Q_0 = t, \; Q_\mu = q_\mu, \; Q_{-\mu} = \psi_\mu \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1$$

$$\left(\frac{\delta P_\mu}{\delta \psi_h}\right) = 1 \quad \text{für} \quad \mu = -h \leqq -1 \quad \text{und für} \quad \mu = h = +0$$

$$\left(\frac{\delta P_\mu}{\delta \psi_h}\right) = 0 \quad \text{für} \quad h \leqq -1 \text{ und zugleich } h \gtrless -\mu$$

$$\left(\frac{\delta P_\mu}{\delta \psi_h}\right) = 0 \quad \text{für} \quad \mu = 0, \; h \gtrless +0$$

$$\left(\frac{\delta P_\mu}{\delta \psi_h}\right) = \frac{\delta P_\mu}{\delta \psi_h} \quad \text{für} \quad h = -0 \text{ und } h \geqq 1$$

$$\left(\frac{\partial P_e}{\partial P_\mu}\right) = 1 \quad \text{für} \quad \mu = e$$

$$\left(\frac{\partial P_e}{\partial P_\mu}\right) = 0 \quad \text{für} \quad \mu \gtrless e \text{ und zugleich } \mu \leqq 0$$

$$\left(\frac{\partial P_e}{\partial P_\mu}\right) = \frac{\partial P_e}{\partial P_\mu} = \frac{\partial P_e}{\partial p_\mu} \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1$$

Es seien also nach den Voraussetzungen [23] bis [28] die Functionen

$$\varphi_{n''}, \varphi_{n''-1}, \dots \varphi_1, E, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_{n''}, \psi_{n''+1}, \dots \psi_n$$

oder nach der jetzt zu gebrauchenden Bezeichnung

$$\psi_{-n''}, \psi_{-(n''-1)}, \dots \psi_{-1}, \psi_{+0}, \psi_{+1}, \psi_2, \dots \psi_{n''}, \psi_{n''+1}, \dots \psi_n$$

bekannt und von der Beschaffenheit, dass die Poissonschen Differential-Ausdrücke

$$[k]\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial \psi_{-k}}\right) - \sum_l [-l]\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\right)\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial q_{-l}}\right) \qquad [41]$$

für alle aus der Reihe $-n'' \dots -1, +0, +1 \dots +n$ genommenen Werthe der Indices h und k identisch verschwinden ausser für $h = -k = -0$. Die Summation ist über $l = -n, -n-1 \dots -1, +0, +1, +2 \dots +n$ auszudehnen.

In dem Ausdruck

$$\Sigma[h][k][-e][-\varepsilon]\left\{[k]\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial\psi_{-k}}\right) - \sum_l[-l]\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial q_l}\right)\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial q_{-l}}\right)\right\}\left(\frac{\partial P_\mu}{\partial\psi_h}\right)\left(\frac{\partial P_\nu}{\partial\psi_k}\right)\left(\frac{\partial P_e}{\partial P_\mu}\right)\left(\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial P_\nu}\right) DQ_e \Delta Q_\varepsilon \qquad [42]$$

soll die Summation in Bezug auf l sich über die Werthe $+0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n$ erstrecken, die andere Summe sich auf $h, k, \mu, \nu, e, \varepsilon$ beziehen aber nur über die Werthe $-n'', \dots -1, +0, +1 \dots +n$ sich erstrecken, dabei soll, wenn zugleich h und k von Null verschieden sind, μ mit h und ebenso ν mit k nur gleiche Vorzeichen annehmen. Es werden also μ und h nur dann ausser gleichen auch noch entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, wenn $k = 0$ ist; ebenso ν und k nur dann ausser gleichen auch noch entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, wenn $h = 0$ ist. Endlich soll noch das Werthsystem $h = -k = -0$ ausgeschlossen sein.

Unterscheidet man nun zunächst die neun Fälle nach den Vorzeichen und Nullwerthen der h und k, unterscheidet ferner für jeden dieser neun Fälle die im allgemeinen möglichen neuen Fälle nach den Vorzeichen und Nullwerthen der μ und ν und ersetzt dann die im ausnahmsweisen Sinne gebrauchten ∂ und δ Derivirten durch die zuvor angegebenen singulären Werthe, führt dann mit Hülfe der allgemeinen Formel

[43] $$\sum_\lambda \frac{\delta P}{\delta\psi_\lambda}\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial q_l} = \frac{\partial P}{\partial q_l} - \frac{\delta P}{\delta q_l}, \quad \sum_\lambda \frac{\delta P}{\delta\psi_\lambda}\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial p_l} = \frac{\partial P}{\partial p_l}, \quad \sum_\lambda \frac{\delta P}{\delta\psi_\lambda}\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad \lambda = 1, 2..n$$

die Summationen über h und k, hiernach mit Hülfe von

[44] $$\sum_\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial p_\lambda}\frac{\delta p_\lambda}{\delta q_l} = \frac{\delta\Phi}{\delta q_l} - \frac{\partial\Phi}{\partial q_l}, \quad \sum_\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial p_\lambda}\frac{\delta p_\lambda}{\delta\psi_\mu} = \frac{\delta\Phi}{\delta\psi_\mu}, \quad \sum_\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial p_\lambda}\frac{\delta p_\lambda}{\delta t} = \frac{\delta\Phi}{\delta t} - \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

die Summationen über μ und ν aus, zieht dann die partiellen Differentiale wie

[45] $$\sum_e \frac{\delta P}{\delta Q_e} \mathrm{D} Q_e = \sum_\lambda \frac{\delta P}{\delta q_\lambda}\mathrm{D} q_\lambda + \sum_\eta \frac{\delta P}{\delta\psi_\eta}\mathrm{D}\psi_\eta + \frac{\delta P}{\delta t}\mathrm{D} t = \mathrm{D} P$$

$$e = -n'', ..-1, +0, +1 ...+n, \quad \lambda = 1, 2..n, \quad \eta = 1, 2, ..n''$$

zusammen, wobei also

$$\mathrm{D}\psi_\zeta = \Delta\psi_\zeta = 0 \quad \text{für} \quad \zeta = n''+1, n''+2, ...n$$

vorausgesetzt wird, so erhält man für den Ausdruck [42] ohne irgend welche andere Rechnungsoperation vorzunehmen:

[46] $$-\sum_\varepsilon [-\varepsilon]\, \mathrm{D} P_\varepsilon \Delta Q_\varepsilon + \sum_e [-e]\, \Delta P_e \mathrm{D} Q_e$$

oder: [47]

$$\sum_\lambda \mathrm{D} p_\lambda . \Delta q_\lambda - \sum_\lambda \Delta p_\lambda . \mathrm{D} q_\lambda - \sum_\eta \mathrm{D}\varphi_\eta . \Delta\psi_\eta + \sum_\eta \Delta\varphi_\eta . \mathrm{D}\psi_\eta - \mathrm{D} E . \Delta t + \Delta E . \mathrm{D} t$$

$$\lambda = 1, 2, 3..n, \quad \eta = 1, 2, 3..n''$$

für $$\mathrm{D}\psi_\zeta = \Delta\psi_\zeta = 0, \quad \zeta = n''+1, n''+2, ..n$$

Der Ausdruck [42] und damit auch dieser Ausdruck [47] wird nun aber mit Rücksicht auf die zwischen den Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$, $\psi_1, \cdots \psi_n$, E bestehenden Gleichungen [41] zu Null, nach Artikel VIII der genannten Abhandlung ist daher

$$\sum_\lambda p_\lambda \mathrm{D} q_\lambda - \sum_\eta \varphi_\eta \mathrm{D}\psi_\eta - E\mathrm{D}t \qquad [48]$$

wenn die $p_1, p_2, \ldots p_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n''}, E$ als Functionen von den $q_1, q_2, \ldots q_n, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, t$ dargestellt und $\psi_{n''+1} \ldots \psi_n$ als unveränderlich betrachtet werden, ein vollständiges Differential $\mathrm{D}S$ einer Function S von den Grössen $q_1, q_2, \ldots q_n, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, t$. Bezeichnet man die nach diesen $2n+1$ Grössen genommenen Differentiale mit δ so ergeben sich die gesuchten φ_ζ für $\zeta = n''+1, n''+2, \ldots n''$ aus

$$\frac{\delta S}{\delta \psi_\zeta} = -\varphi_\zeta \qquad [49]$$

und es ist also S eine Substitutionsfunction für die als Functionen von den Veränderlichen $p_1, p_2 \ldots p_n, q_1, q_2 \ldots q_n, t$ gegebenen Grössen $\psi_1 \ldots \psi_n, E, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n''}$.

Bei der Anwendung dieses Endresultats auf die im Artikel II. behandelte Aufgabe würde man also, wenn zwischen einzelnen Paaren der φ und ψ Umstellungen vorgenommen sind und zwar für die zum Theil gegebenen Functionen $\psi_\mu^*, \psi_\mu^{**}, \varphi_\nu^*, \varphi_\nu^{**}$

$$\varphi_\mu = \varphi_\mu^*, \ \psi_\mu = \psi_\mu^*, \ \varphi_\nu = -\psi_\nu^{**}, \ \psi_\nu = +\varphi_\nu^{**}$$

gesetzt ist, wenn ferner, wie in diesem Artikel, um die normale Form der Substitution zu erhalten, statt der in den gegebenen Functionen vorkommenden Grössen $q_h^*, p_h^*, q_k^{**}, p_k^{**}$ die

$$p_h = p_h^*, \ q_h = q_h^*, \ p_k = -q_k^{**}, \ q_k = +p_k^{**}$$

eingeführt sind, noch $\Sigma p_k^{**} q_k^{**} - \Sigma \varphi_\nu^{**} \psi_\nu^{**}$ zu S hinzuzufügen haben, sodass erst

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}(S + \Sigma p_k^{**} q_k^{**} - \Sigma \varphi_\nu^{**} \psi_\nu^{**}) \\ &\quad = \Sigma p_h^* \mathrm{D} q_h^* + \Sigma p_k^{**} \mathrm{D} q_k^{**} - \Sigma \varphi_\mu^* \mathrm{D}\psi_\mu^* - \Sigma \varphi_\nu^{**} \mathrm{D}\psi_\nu^{**} - E\mathrm{D}t \qquad [50]\end{aligned}$$

worin h und k vereinigt die ganze Reihe der Zahlen $1, 2, 3 \ldots n$ und ebenso μ und ν vereinigt die ganze Reihe der Zahlen $1, 2, 3 \ldots n$ ausfüllen, die Fundamentalgleichung für die in der Aufgabe geforderte Form der Substitution darstellt.

Sind keine der Functionen φ oder ist E nicht gegeben, so würde die vorstehende Untersuchung anwendbar bleiben, man hätte nur $\mathrm{D}Q_e = \Delta Q_e = 0$ für $e \leqq -1$ oder für $e = 0$ zu setzen, wodurch dann in dem obigen Ausdrucke [48] die auf φ oder t bezüglichen Glieder ganz verschwinden würden. Enthalten dann die gegebenen Functionen die Grösse t, so verschwindet E nicht, sondern wird $= -\frac{\partial S}{\partial t}$.

VI.

Der Poisson-Jacobische Satz und ein analoger einfacher Lehrsatz.

In der Abhandlung über die Hamilton-Jacobi'sche Theorie Artikel IX. [14] habe ich die Jacobi'schen Gleichungen durch folgende $2n$ ergänzt:

[51]
$$\begin{aligned} \frac{\vartheta q_1}{\vartheta t} &= +\frac{\partial E}{\partial p_1}, \;\ldots\; \frac{\vartheta q_l}{\vartheta t} = +\frac{\partial E}{\partial p_l}, \;\ldots\; \frac{\vartheta q_n}{\vartheta t} = +\frac{\partial E}{\partial p_n} \\ \frac{\vartheta p_1}{\vartheta t} &= -\frac{\partial E}{\partial q_1}, \;\ldots\; \frac{\vartheta p_l}{\vartheta t} = -\frac{\partial E}{\partial q_l}, \;\ldots\; \frac{\vartheta p_n}{\vartheta t} = -\frac{\partial E}{\partial q_n} \end{aligned}$$

Hierin bezieht sich die ϑ Differentiation auf die Unabhängigen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n, t$ und die ∂ Differentiation auf die Unabhängigen $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n, t$. Es sind also die in q, p, t dargestellten Functionen

$$\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \text{ Constanten gleich gesetzt}$$

ein vollständiges System von Integralen der obigen $2n$ Differentialgleichungen [51].

Aus der dort auch mit angegebenen Gleichung

[52]
$$\frac{\vartheta E}{\vartheta t} = \frac{\partial E}{\partial t}$$

geht dann hervor, dass, wenn E, als Function von $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n, t$ dargestellt, die Grösse t nicht explicite enthält

$$E = \text{const.}$$

selbst ein Integral jener Differentialgleichungen [51] ist, dann folgt aber weiter aus den $2n$ dort abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_h} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial t}, \quad \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_h} = -\frac{\partial \psi_h}{\partial t} \tag{53}$$

dass die partiellen nach t genommenen Derivirten der Functionen $\psi_1, \ldots \psi_h, \ldots \psi_n, \varphi_1, \ldots \varphi_h, \ldots \varphi_n$ auch wieder Integrale jener Differentialgleichungen [51] sind. Das Gleiche gilt von jedem Integral, denn es wird, wenn C irgend eine Function von $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n, t$ bedeutet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\vartheta C}{\vartheta t} + \sum_l \left(\frac{\vartheta C}{\vartheta \psi_l} \frac{\partial \psi_l}{\partial t} + \frac{\vartheta C}{\vartheta \varphi_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\vartheta C}{\vartheta t} + \sum_l \left(\frac{\vartheta C}{\vartheta \varphi_l} \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_l} - \frac{\vartheta C}{\vartheta \psi_l} \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_l} \right) \\ & (l = 1, 2, 3, \ldots n) \end{aligned} \tag{54}$$

und für den Fall, dass C ein Integral, also allein durch $\psi_1 \ldots \psi_n, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ ohne t ausdrückbar das heisst $\frac{\vartheta C}{\vartheta t} = 0$ ist, $\frac{\partial C}{\partial t} = \text{funct.}\,(\psi, \varphi) = \text{const.}$ Lassen wir nun E die Hamilton'sche Function $+H$ Artikel I. [5] bei einem mechanischen Problem bedeuten, dessen Differentialgleichungen die obigen [51] oder in gebräuchlicher Form

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots \frac{dq_l}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p_l}, \ldots \frac{dq_n}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{dH}{dq_1}, \ldots \frac{dp_l}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_l}, \ldots \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \end{aligned} \tag{55}$$

sind, so wird das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft durch die Gleichung $H =$ const. dargestellt, und wir erhalten den Satz:

Gilt in einem mechanischen Problem [55] *das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft*

$$\begin{aligned} &\text{Function}\,(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = \\ &\text{Function}\,(q_1, q_2, \ldots q_n, q'_1, q'_2 \ldots q'_n) = H = \text{const.} \end{aligned}$$

so ist von jedem durch canonische Variable oder durch Coordinaten und Geschwindigkeiten dargestellten Integrale

$$\text{funct}(q_1,\ldots q_n,\ p_1,\ldots p_n,\ t) = \text{const}$$

oder

$$\text{funct}(q_1,\ldots q_n,\ q'_1,\ldots q'_n,\ t) = \text{const.}$$

die nach der Zeit t genommene partielle Derivirte wieder ein Integral des Problems.

Dieses Theorem ist dadurch um so merkwürdiger, dass es Integrale gibt, von denen jedes einzelne durch wiederholte partielle Differentiation nach t ein vollständiges System von Integralen hervorbringt.

In der That, nimmt man das Integral $E =$ const. für das ψ_1 eines canonischen Systems von Integralen, was nach dem Lehrsatze in Artikel IV, weil die dazu allein erforderliche Gleichung

$$\sum_l \left(\frac{\partial E}{\partial q_l}\frac{\partial \psi_1}{\partial p_l} - \frac{\partial E}{\partial p_l}\frac{\partial \psi_1}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \psi_1}{\partial t}$$

identisch für $\psi_1 = E$ erfüllt wird, gestattet ist, so ergeben die Gleichungen [23] bis [28] für die übrigen nach den Artikeln IV und V hiezu gefundenen Functionen $\psi_2, \psi_3, \ldots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ noch

$$\sum_l \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial q_l}\frac{\partial \psi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial \psi_1}{\partial p_l}\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\right) = 0$$

$$\sum_l \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial q_l}\frac{\partial \varphi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial \psi_1}{\partial p_l}\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_l}\right) \begin{matrix} = 0 & \text{für } h > 1 \\ = 1 & \text{für } h = 1 \end{matrix}$$

$$\sum_l \left(\frac{\partial E}{\partial q_l}\frac{\partial \psi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial E}{\partial p_l}\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \psi_h}{\partial t}$$

$$\sum_l \left(\frac{\partial E}{\partial q_l}\frac{\partial \varphi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial E}{\partial p_l}\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \varphi_h}{\partial t}$$

$$(l = 1, 2, 3, \ldots n)$$

also wird

$$[56]\quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \ldots = \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 1$$

und, wie die Ausführung der Differentiationen höherer Ordnung unmittelbar zeigt,

stellt das Integral

$$C = \psi_1 + \varphi_2\psi_1 + \psi_3\varphi_1\varphi_1 + \psi_4\varphi_1^3 + \cdots + \psi_n\varphi_1^{n-1} \\ + \varphi_2\varphi_1^n + \varphi_3\varphi_1^{n+1} + \varphi_4\varphi_1^{n+2} + \cdots + \varphi_n\varphi_1^{2n-2} + \varphi_1^{2n} \qquad [57]$$

mit seinen $2n-1$ *partiellen Derivirten nach* t *für* $\psi_1 = H$ *ein vollständiges System von* $2n$ *Integralen des durch die Differentialgleichungen*

$$\frac{dq_1}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p_2}, \ldots \frac{dq_n}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p_n}$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \ldots \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_n}$$

gegebenen mechanischen Problems dar, wenn H *nur von* $q_1, q_2, \cdots q_n, p_1, p_2, \cdots p_n$ *und nicht unmittelbar von* t *abhängt.*

Dieser Lehrsatz besitzt einige Analogie mit dem berühmten Poisson-Jacobischen Lehrsatze, der zur bessern Vergleichung hier auch aufgestellt werden mag.

Aus der identischen Gleichung

$$\mathrm{D}A.\Delta B - \Delta A.\mathrm{D}B = \sum_{h=1}^{h=\nu}\sum_{k=1}^{k=\nu} \frac{\partial A}{\partial \zeta_h}\frac{\partial B}{\partial \zeta_k}(\mathrm{D}\zeta_h\Delta\zeta_k - \Delta\zeta_h\mathrm{D}\zeta_k)$$
$$= \sum^{(h,k)} \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta_h}\frac{\partial B}{\partial \zeta_k} - \frac{\partial B}{\partial \zeta_h}\frac{\partial A}{\partial \zeta_k}\right)(\mathrm{D}\zeta_h\Delta\zeta_k - \Delta\zeta_h\mathrm{D}\zeta_k)$$

worin A und B als Functionen von $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_\nu$ betrachtet werden und die letzte Summation nur über die Combinationen der aus der Reihe $1, 2, 3 \ldots \nu$ genommenen Indices h und k zu erstrecken ist, ergibt sich, wenn wir die D und Δ Differentiationen auf die unabhängigen Veränderlichen $q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n$ beziehen und bei D allein q_l bei Δ allein p_l sich ändern lassen und auf beiden Seiten den gemeinsamen Factor $\mathrm{D}q_l\Delta p_l$ aufheben,

$$\frac{\partial A}{\partial q_l}\frac{\partial B}{\partial p_l} - \frac{\partial A}{\partial p_l}\frac{\partial B}{\partial q_l} = \sum^{(h,k)}\left(\frac{\partial A}{\partial \zeta_h}\frac{\partial B}{\partial \zeta_k} - \frac{\partial B}{\partial \zeta_h}\frac{\partial A}{\partial \zeta_k}\right)\left(\frac{\partial \zeta_h}{\partial q_l}\frac{\partial \zeta_k}{\partial p_l} - \frac{\partial \zeta_h}{\partial p_l}\frac{\partial \zeta_k}{\partial q_l}\right) \qquad [58]$$

ersetzen wir hierin die $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_\nu$ durch die Grössen $\psi_1 \cdots \psi_n, \varphi_1 \cdots \varphi_n$, summiren dann über $l = 1, 2, 3 \ldots n$ und ziehen die für die Poissonschen Differentialausdrücke bei einer canonischen Substitution geltenden Gleichungen [23] bis [28] zu Hülfe, so entsteht

[59] $$\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_l}\frac{\partial B}{\partial p_l}-\frac{\partial B}{\partial q_l}\frac{\partial A}{\partial p_l}\right)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\vartheta A}{\vartheta\psi_\lambda}\frac{\vartheta B}{\vartheta\varphi_\lambda}-\frac{\vartheta B}{\vartheta\psi_\lambda}\frac{\vartheta A}{\vartheta\varphi_\lambda}\right)$$

Sind nun A, B Integrale derselben Differentialgleichungen, für welche die $\psi_1\ldots\psi_n$, $\varphi_1\ldots\varphi_n$ ein vollständiges System canonischer Integrale bedeuten, so werden A und B als Functionen von den ψ und φ ohne t darstellbar sein, und dasselbe wird für die zweite Seite der letzten Gleichung gelten, also der Ausdruck auf der ersten Seite in Gleichung [59] eine Constante sein müssen, wie Poisson auf einem anderen Wege gefunden hat. Darauf, dass die Gleichung

[60] $$\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_l}\frac{\partial B}{\partial p_l}-\frac{\partial B}{\partial q_l}\frac{\partial A}{\partial p_l}\right)=\text{const.}$$

ein Integral der Differentialgleichungen [55] darstellt, legte Jacobi deshalb grosses Gewicht, weil diese Gleichung nicht immer identisch erfüllt wird, auch von den Gleichungen $A=\text{const.}$, $B=\text{const.}$ unabhängig sein und also ein neues Integral geben kann.

Bezeichnen wir allgemein

[61] $$\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_l}\frac{\partial f}{\partial p_l}-\frac{\partial A}{\partial p_l}\frac{\partial f}{\partial q_l}\right)\quad\text{mit}\quad \mathrm{A}(f)$$

ferner diesen Ausdruck, wenn darin $\mathrm{A}(f)$ statt f gesetzt ist, mit $\mathrm{A}(\mathrm{A}(f))$ oder kürzer mit $\mathrm{A}^2(f)$ und allgemein $\mathrm{A}(\mathrm{A}^m(f))$ mit $\mathrm{A}^{m+1}(f)$, so wird mit Rücksicht auf obige Gleichung [59] auch

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(f)&=+\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\vartheta f}{\vartheta\psi_h}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\vartheta A}{\vartheta\psi_\lambda}\frac{\vartheta\psi_h}{\vartheta\varphi_\lambda}-\frac{\vartheta A}{\vartheta\varphi_\lambda}\frac{\vartheta\psi_h}{\vartheta\psi_\lambda}\right)\\&\quad+\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\vartheta f}{\vartheta\varphi_h}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\vartheta A}{\vartheta\psi_\lambda}\frac{\vartheta\varphi_h}{\vartheta\varphi_\lambda}-\frac{\vartheta A}{\vartheta\varphi_\lambda}\frac{\vartheta\varphi_h}{\vartheta\psi_\lambda}\right)\\ [62]\qquad&=+\sum_{h=1}^{h=n}\left\{\frac{\vartheta f}{\vartheta\psi_h}\mathrm{A}(\psi_h)+\frac{\vartheta f}{\vartheta\varphi_h}\mathrm{A}(\varphi_h)\right\}\end{aligned}$$

also, wenn wir das canonische Integral ψ_1 gleich dem gegebenen A genommen haben, was nach Artikel IV in Folge der Gleichung

$$\sum_l \left(\frac{\partial E}{\partial q_l}\frac{\partial A}{\partial p_l} - \frac{\partial E}{\partial p_l}\frac{\partial A}{\partial q_l}\right) - \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0$$

möglich ist, wird

$$\mathrm{A}(f) = \frac{\vartheta f}{\vartheta \varphi_1} \text{ und ebenso } \mathrm{A}^m(f) = \frac{\vartheta^m f}{\vartheta \varphi_1{}^m} \qquad [63]$$

weil $\mathrm{A}(\psi_h) = 0$, $A(\varphi_1) = 1$ und $\mathrm{A}(\varphi_k) = 0$ für $k > 1$ ist.

Setzt man, nachdem die zu einem Integral $A = \psi_1 = \text{const}$ *zugehörigen canonischen Integrale* $\psi_2, \psi_3 \ldots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ *bestimmt sind,*

$$\begin{aligned} B = \psi_2 + \psi_3 \cdot \varphi_1 + \psi_4 \cdot \varphi_1{}^2 + \ldots + \psi_n \cdot \varphi_1{}^{n-2} \\ + \varphi_2 \cdot \varphi_1{}^{n-1} + \varphi_3 \cdot \varphi_1{}^n + \ldots + \varphi_n \cdot \varphi_1{}^{2n-3} + \varphi_1{}^{2n-1} \end{aligned} \qquad [64]$$

so werden

$$A,\ B,\ \frac{\vartheta B}{\vartheta \varphi_1},\ \frac{\vartheta^2 B}{\vartheta \varphi_1{}^2},\ \ldots \frac{\vartheta^{2n-2} B}{\vartheta \varphi_1{}^{2n-2}} \qquad [65]$$

$2n$ *von einander unabhängige Functionen von den* ψ, φ *also auch von den* q, p, t *sein, daher bilden für die Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} &= +\frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} &= +\frac{\partial H}{\partial p_2}, & \ldots \frac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}t} &= +\frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}, & \ldots \frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_n} \end{aligned}$$

die gleich Constanten gesetzten $2n$ *Functionen*

$$A,\ B,\ \mathrm{A}(B),\ \mathrm{A}^2(B) \ldots \mathrm{A}^{2n-3}(B),\ \mathrm{A}^{2n-2}(B) \qquad [66]$$

worin allgemein

$$\sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_l}\frac{\partial f}{\partial p_l} - \frac{\partial A}{\partial p_l}\frac{\partial f}{\partial q_l}\right) \textit{ durch } \mathrm{A}(f)$$

bezeichnet ist, ein vollständiges System von Integralen.

VII.

Jacobi's Störungsformeln verallgemeinert.

Im Artikel IX. der Abhandlung über die Hamilton-Jacobische Theorie habe ich aus der Fundamentalgleichung [14] für die canonische Substitution das vervollständigte System der Jacobischen Gleichungen:

[67]
$$\frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h}, \quad \frac{\vartheta q_h}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\partial \psi_k}{\partial p_h}, \quad \frac{\vartheta q_h}{\vartheta t} = \frac{\partial E}{\partial p_h}$$
$$\frac{\vartheta p_h}{\vartheta \psi_k} = -\frac{\vartheta \varphi_k}{\vartheta q_h}, \quad \frac{\vartheta p_h}{\vartheta \varphi_k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial q_h}, \quad \frac{\vartheta p_h}{\vartheta t} = -\frac{\vartheta E}{\vartheta q_h}$$
$$\frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\vartheta t}, \quad \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\partial \psi_k}{\partial t}, \quad \frac{\vartheta E}{\vartheta t} = \frac{\partial E}{\partial t}$$

für $h = 1, 2, 3, \ldots n$ und $k = 1, 2, 3, \ldots n$

abgeleitet. Dabei ist ausser der Gleichung [3] nur vorausgesetzt, dass $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n, E$ als Functionen von den Grössen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, t$ und umgekehrt auch $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, E$ als Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n, t$ betrachtet werden können. Es ist also ohne Einfluss auf die Gültigkeit der obigen Gleichungen, ob die Substitution die normale Form hat, oder ob sie solche nicht hat. Dasselbe gilt auch von den hier aus jenen Gleichungen abzuleitenden Lehrsätzen. Die ϑ Differentiation bezieht sich auf die Unabhängigen ψ, φ, t, während die ∂ Differentiation als Unabhängige die q, p, t voraussetzt.

Die obigen neun verschiedenen Formen für $(2n+1)^2$ Gleichungen können, wenn man für eine positive Zahl m

[68]
$$q_{-m} = -p_m, \quad p_{-m} = +q_m, \quad q_0 = +t, \quad p_0 = -E$$
$$\psi_{-m} = -\varphi_m, \quad \varphi_{-m} = +\psi_m, \quad \psi_0 = +t, \quad \varphi_0 = +E$$

setzt, auch in der gemeinsamen Form

[69]
$$\frac{\vartheta p_h}{\vartheta \psi_k} = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h}$$

für $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n$ und $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n$

dargestellt werden.

Es bleibt, wie leicht zu sehen, auch die Gleichung

$$\frac{\vartheta q_h}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\partial \psi_k}{\partial p_h}$$

für $h = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n$ und $k = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n$

richtig, aber diese letztere umfasst nicht alle Fälle.

Die Verallgemeinerung der Jacobi'schen Störungsformeln besteht in Relationen zwischen Functionaldeterminanten. Eine Functionaldeterminante wollen wir nun, zur Erleichterung des Druckes, wenn $u_{h_1}, u_{h_2}, \dots u_{h_\nu}$ die Functionen und $v_{k_1}, v_{k_2}, \dots v_{k_\nu}$ die unabhängigen Veränderlichen sind, auf welche sich das Differentiationszeichen ∂ bezieht, durch

$$\frac{\partial(u \mid h_1, h_2, \dots h_\nu)}{\partial(v \mid k_1, k_2, \dots k_\nu)} \qquad [70]$$

darstellen.

Aus dem Bildungsgesetz der Determinanten ergibt sich mit Hülfe der Gleichung [69] unmittelbar

als Verallgemeinerung der Jacobi'schen Störungsformeln:

$$\frac{\vartheta(p \mid h_1, h_2, h_3, \dots h_\nu)}{\vartheta(\psi \mid k_1, k_2, k_3, \dots k_\nu)} = (-1)^\nu \frac{\partial(\varphi \mid k_1, k_2, k_3, \dots k_\nu)}{\partial(q \mid h_1, h_2, h_3, \dots h_\nu)} \qquad [71]$$

worin die $h_1, h_2, \dots h_\nu$ und $k_1, k_2, \dots k_\nu$ irgend welche 2ν der Indices

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm n$$

sein können.

Für den speciellen Fall, dass die $h_1, h_2, \dots h_\nu$ sowol wie auch die $k_1, k_2, \dots k_\nu$ die ganze Reihe jener Zahlen mit Ausschluss der Null ausfüllen, geht jene Gleichung, wenn man die q, p, ψ, φ wieder nach ihrer ursprünglichen Bedeutung einführt, in

$$\frac{\vartheta(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n)}{\vartheta(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)} = \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{\partial(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n)} \qquad [72]$$

über. Verbindet man hiemit den Fundamentalsatz von Jacobi über reciproke vollständige Functionaldeterminanten, nemlich

$$\frac{\vartheta(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n)}{\vartheta(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)} \cdot \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{\partial(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n)} = 1 \qquad [73]$$

so ergibt sich:

$$\frac{\vartheta(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n)}{\vartheta(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)} = \frac{\partial(\psi_2, \psi_2, \dots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{\partial(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n)} = \pm 1 \qquad [74]$$

In dieser Form, mit der Unbestimmtheit des Vorzeichens, ist dieses Theorem von Jacobi gefunden und Seite 499 in seiner »Dynamik« veröffentlicht. Die Bestimmung des Vorzeichens ist mir gelungen und zwar auf verschiedenen Wegen, zuerst und am einfachsten mit Hülfe der Differentialdeterminanten. Da die Theorie derselben mit mehren neuen Untersuchungen in engem Zusammenhange steht, so will ich darauf bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen und hier nur denjenigen Beweis geben, der diesen Satz als einen speciellen Fall der Verallgemeinerung der Poissonschen Störungsformeln erscheinen lässt.

VIII.

Poisson's Störungsformeln verallgemeinert.

In Artikel X. der Abhandlung über die Hamilton-Jacobi'sche Theorie habe ich aus den Jacobi'schen Störungsformeln und aus allgemeinen Sätzen über Differentiation die Poisson'schen Störungsformeln abgeleitet und zu dem System von Gleichungen:

$$[75] \qquad \sum_l \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\frac{\partial \psi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial \psi_h}{\partial p_l}\frac{\partial \psi_k}{\partial q_l}\right) = 0$$

$$\begin{matrix}[76] \\ [77]\end{matrix} \qquad \sum_l \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} - \frac{\partial \psi_h}{\partial p_l}\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l}\right) \begin{matrix} = 0 \quad \text{für} \quad h \lessgtr k \\ = 1 \quad \text{für} \quad h = k \end{matrix}$$

$$[78] \qquad \sum_l \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_l}\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} - \frac{\partial \varphi_h}{\partial p_l}\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l}\right) = 0$$

$$[79] \qquad \sum_l \left(\frac{\partial E}{\partial q_l}\frac{\partial \psi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial E}{\partial p_l}\frac{\partial \psi_h}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \psi_h}{\partial t}$$

$$[80] \qquad \sum_l \left(\frac{\partial E}{\partial q_l}\frac{\partial \varphi_h}{\partial p_l} - \frac{\partial E}{\partial p_l}\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \varphi_h}{\partial t}$$

vervollständigt, worin h und k irgend welche der Indices $1, 2, 3 \ldots n$ sein können und worin die Summationen in Bezug auf l sich über deren Werthe $1, 2, 3 \ldots n$ erstrecken.

Diese sechs Formen von $n(2n+1)$ Gleichungen können bei Benutzung des abgekürzten Zeichens für eine Functionaldeterminante und, wenn man unter Annahme einer positiven Zahl m

$$q_{-m} = -p_m,\ p_{-m} = q_m$$

$$\psi_{-m} = -\varphi_m,\ \varphi_{-m} = \psi_m,\ \psi_0 = t,\ \varphi_0 = E$$

$$\left\{\frac{\partial \varphi_k}{\partial \psi_h}\right\} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \quad \text{für } h = 0$$

$$\left\{\frac{\partial \varphi_k}{\partial \psi_h}\right\} = -1 \quad \text{für } h = -k \text{ und zugleich } h > 0 \qquad [81]$$

$$\left\{\frac{\partial \varphi_k}{\partial \psi_h}\right\} = +1 \quad \text{für } h = -k \text{ und zugleich } h < 0$$

$$\left\{\frac{\partial \varphi_k}{\partial \psi_h}\right\} = 0 \ \text{für alle von 0 und } -k \text{ verschiedenen Werthe des } h \text{ setzt,}$$

in die gemeinsame Form

$$\sum_{l=1}^{l=n} \frac{\partial(\varphi_h, \varphi_k)}{\partial(q_{-l}, q_{+l})} = \left\{\frac{\partial \varphi_k}{\partial \psi_h}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{für } h \text{ gleich } 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm n \\ \text{und } k \text{ gleich } \quad \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm n \end{array} \qquad [82]$$

gebracht werden.

Zur Erweiterung der Poisson'schen Störungsformeln auf höhere Grade dient der verallgemeinerte nach Laplace benannte auf Functionaldeterminanten angewandte Satz und zwar, unter Benutzung der oben [70] festgesetzten Bezeichnung, in der Form der identischen Gleichung:

$$\sum_{\varkappa} \frac{\partial(\varphi \mid \varkappa_1, \varkappa_2)}{\partial(q \mid -l_1, +l_1)} \cdot \frac{\partial(\varphi \mid \varkappa_3, \varkappa_4)}{\partial(q \mid -l_2, +l_2)} \cdots \frac{\partial(\varphi \mid \varkappa_{2m-1}, \varkappa_{2m})}{\partial(q \mid -l_m, +l_m)} \cdot \frac{\partial(\varphi \mid \varkappa_{2m+1}, \varkappa_{2m+2}, \ldots \varkappa_\lambda)}{\partial(q \mid h_{2m+1}, h_{2m+2}, \ldots h_\lambda)} \prod_{(\mu,\nu)} [\varkappa_\mu - \varkappa_\nu]$$

$$= \frac{\partial(\varphi \mid k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots k_{2m-1}, k_{2m}, k_{2m+1}, k_{2m+1}, \ldots k_\lambda)}{\partial(q \mid -l_1, +l_1, -l_2, +l_2, \ldots -l_m, +l_m, h_{2m+1}, h_{2m+2}, \ldots h_\lambda)} \prod_{(\mu,\nu)} [k_\mu - k_\nu] \qquad [83]$$

wenn in der Summation Σ jedes der $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots \varkappa_{2m}, \ldots \varkappa_\lambda$ alle Werthe $k_1, k_2, k_3, \ldots k_{2m}, \ldots k_\lambda$ unter der Einschränkung

$$\varkappa_2, \varkappa_4, \varkappa_6, \ldots \varkappa_{2m} \text{ von 0 verschieden}$$

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 \text{ oder } \varkappa_1 = 0,\ \varkappa_3 < \varkappa_4 \text{ oder } \varkappa_3 = 0, \ldots, \varkappa_{2m-1} < \varkappa_{2m} \text{ oder } \varkappa_{2m-1} = 0 \qquad [84]$$

$$\varkappa_{2m+1} < \varkappa_{2m+2} < \cdots < \varkappa_\lambda$$

annimmt, wenn ferner in jedem Gliede der Summation auf der ersten Seite und in dem einzelnen Gliede der zweiten Seite das Product Π sich über alle Werthe $1, 2, 3, \ldots \lambda$ für μ und ν unter der Voraussetzung $\nu \leqq \mu$ erstreckt, und wenn endlich

$$\begin{aligned} [k] &= +1 \text{ für } k > 0 \\ [k] &= -1 \text{ für } k < 0 \\ [k] &= \ \ 0 \text{ für } k = 0 \end{aligned} \qquad [85]$$

bedeutet.

Summirt man die Gleichung [83] in Bezug auf jedes der $l_1, l_2, l_3, \ldots l_m$ über alle Werthe $1, 2, 3, \ldots n$, wendet dabei die vervollständigten Poisson'schen Störungsformeln [82] an und beachtet, dass diejenigen auf der zweiten Seite der Gleichung [83] stehenden Ausdrücke, welche sich nur durch die Reihenfolge der Werthe der $l_1, l_2, \ldots l_m$ von einander unterscheiden, gleich gross sind, so erhält man: [86]

$$\sum_{\varkappa} \left\{\frac{\partial \varphi_{\varkappa_2}}{\partial \psi_{\varkappa_1}}\right\} \cdot \left\{\frac{\partial \varphi_{\varkappa_4}}{\partial \psi_{\varkappa_3}}\right\} \cdots \left\{\frac{\partial \varphi_{\varkappa_{2m}}}{\partial \psi_{\varkappa_{2m-1}}}\right\} \frac{\partial(\varphi \mid \varkappa_{2m+1}, \varkappa_{2m+2}, \ldots \varkappa_\lambda)}{\partial(q \mid h_{2m+1}, h_{2m+2}, \ldots h_\lambda)} \prod_{(\mu,\nu)} [\varkappa_\mu - \varkappa_\nu] =$$

$$1.2.3\ldots m \sum_{(l)} \frac{\partial(\varphi \mid k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots k_{2m-1}, k_{2m}, k_{2m+1}, k_{2m+2}, \ldots k_\lambda)}{\partial(q \mid -l_1, +l_1, -l_2, +l_2, \ldots -l_m, +l_m, h_{2m+1}, h_{2m+2}, \ldots k_\lambda)} \prod_{(\mu,\nu)} [k_\mu - k_\nu]$$

worin unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnung wie bei Gleichung [83] die Summation in Bezug auf die l sich über die sämmtlichen Werthe $1, 2, 3, \ldots n$ für jedes der $l_1, l_2, l_3, \ldots l_m$ unter der Einschränkung $l_1 < l_2 < l_3 < \cdots < l_m$ erstreckt.

Beträgt die Anzahl der in der Reihe der absoluten Werthe der Zahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots k_\lambda$ *vorkommenden von* 0 *und von einander verschiedenen Werthe mehr als* $\lambda - m$, *so verschwindet offenbar die erste Seite der Gleichung* [86] *und das Nullwerden der zweiten Seite der Gleichung* [86] *gibt die Verallgemeinerung der Poisson'schen Gleichungen von der Form* [75], [76] *und* [78].

Ist: $k_1 = -k_2$, $k_3 = -k_4, \ldots, k_{2m-1} = -k_{2m}$, sind $k_2, k_4, \ldots k_{2m}$ positiv, und sind die absoluten Werthe der $k_2, k_4, \ldots k_{2m}, k_{2m+1}, k_{2m+2}, \ldots k_\lambda$ alle von einander und von 0 verschieden, so vereinfacht sich [86] zu:

$$[87] \qquad \sum_{(l)} \frac{\partial(\varphi \mid -k_2, +k_2, -k_4, +k_4, \ldots -h_{2m}, +k_{2m}, k_{2m+1}, k_{2m+2}, \ldots k_\lambda)}{\partial(q \mid -l_1, +l_1, -l_2, +l_2, \ldots -l_m, +l_m, h_{2m+1}, h_{2m+2}, \ldots h_\lambda)}$$

$$= \frac{\partial(\varphi \mid k_{2m+1}, k_{2m+2}, \ldots k_n)}{\partial(q \mid h_{2m+1}, h_{2m+2}, \ldots h_n)}$$

und specieller für $\lambda = 2m$

$$\sum_{(l)} \frac{\partial(\varphi \mid -k_2, +k_2, -k_4, +k_4, \ldots -k_{2m}, +k_{2m})}{\partial(q \mid -l_1, +l_1, -l_2, +l_2, \ldots -l_m, +l_m)} = 1 \qquad [88]$$

endlich für $\lambda = 2m = 2n$

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)}{\partial(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n)} = +1 \qquad [89]$$

welche die genauere Bestimmung für den von Jacobi gefundenen im vorigen Artikel bewiesenen Lehrsatz enthält.

Ist

$$k_1 = -k_2, \; k_3 = -k_4, \ldots k_{2m-3} = -k_{2m-2}, \; k_{2m-1} = 0$$

sind $k_2, k_4, \ldots k_{2m-2}$ positiv, und sind die absoluten Werthe der $k_2, k_4, \ldots k_{2m-2}, k_{2m}, \ldots k_\lambda$ alle von einander und von 0 verschieden, so wird

$$\sum_{(l)} \frac{\partial(\varphi \mid -k_2, +k_2, -k_4, +k_4, \ldots -k_{2m-2}, +k_{2m-2}, k_{2m-1}, k_{2m}, k_{2m+1}, \ldots k_\lambda)}{\partial(q \mid -l_1, +l_1, -l_2, +l_2, \ldots -l_{m-1}, +l_{m-1}, -l_m, +l_m, h_{2m+1}, \ldots h_\lambda)}$$
$$= \sum_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\varkappa_{2m}}}{\partial t} \cdot \frac{\partial(\varphi \mid \varkappa_{2m+1}, \varkappa_{2m+2}, \ldots \varkappa_\lambda)}{\partial(q \mid h_{2m+1}, h_{2m+2}, \ldots h_\lambda)} \prod_{(\mu,\nu)} [\varkappa_\mu - \varkappa_\nu] \qquad [90]$$

worin unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen die Summation in Bezug auf $\varkappa$ sich über alle Werthe $k_{2m}, k_{2m+1}, k_{2m+2}, \ldots k_\lambda$ für jedes $\varkappa_{2m}, \varkappa_{2m+1}, \varkappa_{2m+2}, \ldots \varkappa_\lambda$ mit der Beschränkung

$$\varkappa_{2m+1} < \varkappa_{2m+2} < \varkappa_{2m+3} < \cdots < \varkappa_\lambda$$

und unter der gestatteten Voraussetzung

$$k_{2m} < k_{2m+1} < k_{2m+2} < \cdots < k_\lambda$$

erstreckt, während in dem Producte der Zeiger ν immer kleiner als μ ist, und jeder der beiden alle die dann noch zulässigen Werthe $2m, 2m+1, 2m+2, \ldots \lambda$ annimmt.

Als specieller Fall folgt aus der letzten Gleichung [90] noch:

$$\sum_{(l)} \frac{\partial(\varphi \mid -k_2, +k_2, -k_4, +k_4, \ldots -k_{2m-2}, +k_{2m-2}, k_{2m-1}, k_{2m})}{\partial(q \mid -l_1, +l_1, -l_2, +l_2, \ldots -l_{m-1}, +l_{m-1}, -l_m, +l_m)} = \frac{\partial \varphi_{k_{2m}}}{\partial t} \qquad [91]$$

wenn $k_2, k_4, \ldots k_{2m-2}$ alle positiv und von einander so wie von dem absoluten Werthe des k_{2m} verschieden sind und $k_{2m-1} = 0$ ist. Für $m = n$ wird hieraus:

$$[92] \quad \frac{\partial(\psi_1, \varphi_1, \psi_2, \varphi_2, \ldots \psi_{k-1}, \varphi_{k-1}, E, \varphi_k, \psi_{k+1}, \varphi_{k+1}, \ldots \psi_n, \varphi_n)}{\partial(q_1, p_1, q_2, p_2, \ldots q_{k-1}, p_{k-1}, q_k, p_k, q_{k+1}, p_{k+1}, \ldots q_n, p_n)} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}$$

$$[93] \quad \frac{\partial(\psi_1, \varphi_1, \psi_2, \varphi_2, \ldots \psi_{k-1}, \varphi_{k-1}, E, \psi_k, \psi_{k+1}, \varphi_{k+1}, \ldots \psi_n, \varphi_n)}{\partial(q_1, p_1, q_2, p_2, \ldots q_{k-1}, p_{k-1}, q_k, p_k, q_{k+1}, p_{k+1}, \ldots q_n, p_n)} = \frac{\partial \psi_k}{\partial t}$$

worin k eine positive Zahl bedeutet.

Aus der obigen Fundamental-Gleichung [86] folgt für den Fall,

$$\begin{array}{llll} \lambda = 2m+1, & k_{2m+1} = 0, & h_{2m+1} = 0 & \\ k_1 = -k_2, & k_3 = -k_4, \ldots & k_{2m-1} = -k_{2m} & \\ k_2, & k_4, & k_6, \ldots k_{2m} & \text{alle positiv,} \end{array}$$

auch:

$$[94] \quad \sum_{(l)} \frac{\partial(\varphi \mid -k_2, +k_2, \ldots -k_{2m}, +k_{2m}, 0)}{\partial(q \mid -l_1 \;\; +l_1, \ldots -l_m, \;\; +l_m, \;\; 0)} = \frac{\partial E}{\partial t}$$

weil nemlich in der auf die Indices $\varkappa$ sich beziehenden Summe je zwei Glieder, welche sich nur in den Factoren

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial \varphi_{\varkappa_{2\varepsilon}}}{\partial \psi_{\varkappa_{2\varepsilon-1}}} \end{matrix}\right\} \frac{\partial \psi_{\varkappa_{2m+1}}}{\partial q_0} \prod_{(\mu,\nu)} [\varkappa_\mu - \varkappa_\nu]$$

für $\varkappa_{2\varepsilon} = -\varkappa_{2m+1}$, $\varkappa_{2\varepsilon-1} = 0$ und zwar durch wechselseitige Umtauschung der Werthe der Indices $\varkappa_{2\varepsilon}$ und $\varkappa_{2m+1}$ von einander unterscheiden, gleiche absolute Werthe aber entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Wird $m = n$ so entsteht

$$[95] \quad \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, E)}{\partial(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n, t)} = \frac{\partial E}{\partial t}$$

eine Gleichung, die an Einfachheit der obigen [89] entspricht.

Die Poisson'schen Gleichungen und ihre Verallgemeinerungen sind allein aus der Fundamentalgleichung für die canonische Substitution nemlich

$$\mathrm{D}S = -E\mathrm{D}t + \Sigma p_l \mathrm{D} q_l - \Sigma \varphi_l \mathrm{D} \psi_l$$

abgeleitet, diese bleibt aber ungeändert, wenn man die Grössen

$$+S, +E, t, q_1, q_2, \cdots q_n, p_1, p_2, \cdots p_n, \psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$$

der Reihe nach mit

$$-S, -E, t, \psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n, q_1, q_2, \cdots q_n, p_1, p_2, \cdots p_n$$

und dem entsprechend die ∂ Differentiation mit der ϑ Differentiation umtauscht. Es lassen sich also aus den hier aufgestellten Gleichungen unmittelbar entsprechende ableiten, welche sich auf die Unabhängigen

$$t, \psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$$

mit der ϑ Differentiation beziehen. Unter diesen Gleichungen zeichnen sich die vier

$$\frac{\vartheta(q_1, q_2, \cdots q_n, p_1, p_2, \cdots p_n)}{\vartheta(\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n)} = 1 \tag{96}$$

$$\frac{\vartheta(q_1, q_2, \cdots q_n, p_1, p_2, \cdots p_n, E)}{\vartheta(\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n, \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n, t)} = \frac{\vartheta E}{\vartheta t} \tag{97}$$

$$\frac{\vartheta(q_1, p_1, \cdots q_{k-1}, p_{k-1}, q_k, E, q_{k+1}, p_{k+1}, \cdots q_n, p_n)}{\vartheta(\psi_1, \varphi_1, \cdots \psi_{k-1}, \varphi_{k-1}, \psi_k, \varphi_k, \psi_{k+1}, \varphi_{k+1}, \cdots \psi_n, \varphi_n)} = \frac{\vartheta q_k}{\vartheta t} \tag{98}$$

$$\frac{\vartheta(q_1, p_1 \cdots q_{k-1}, p_{k-1}, p_k, E, q_{k+1}, p_{k+1}, \cdots q_n, p_n)}{\vartheta(\psi_1, \varphi_1, \cdots \psi_{k-1}, \varphi_{k-1}, \psi_k, \varphi_k, \psi_{k+1}, \varphi_{k+1}, \cdots \psi_n, \varphi_n)} = \frac{\vartheta p_k}{\vartheta t} \tag{99}$$

durch ihre Einfachheit aus.

Die hier zwischen Functionaldeterminanten aufgestellten Beziehungen bilden die Verallgemeinerung derjenigen Differentialgleichungen, welche Poisson bei seinen Untersuchungen in der Theorie der planetarischen Störungen zuerst gefunden hat und zwar die Verallgemeinerung in derjenigen Form, die sich durch die Anwendung der canonischen Integrale ergibt. Die Ausdehnung der verallgemeinerten Sätze auf irgend welche Integrale ist nach dem der Gleichung [83] zu Grunde liegenden Gedanken und mit Zuhülfenahme von Gleichung [59] leicht durchzuführen.

INHALT

der Abhandlung:

Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhängt.

Band XVIII der Abhandlungen.

der Abhandlung:

Verallgemeinerung der Poisson-Jacobischen Störungsformeln.

Band XIX der Abhandlungen.