Ueber die electrischen Elementargesetze

von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Ges. d. Wiss. am 3. Juli 1875.

I. Das Ampère'sche Gesetz.

1. Verschiedene Formen des Ampèreschen Elementargesetzes.

Die den folgenden Betrachtungen zu Grunde liegenden Annahmen sind im wesentlichen dieselben, welche C. Neumann bei den im fünften Abschnitte seines Werkes »die elektrischen Kräfte« ausgeführten Rechnungen benützt; gegeben sind zwei leitende Körper A und B welche durchflossen sind von irgend welchen galvanischen Strömen. Es soll die Wirkung, welche ein Element des Körpers B auf ein Element des Körpers A ausübt zuerst in der ursprünglichen Form des Ampère'schen Gesetzes aufgestellt und dann auf verschiedene andere Formen transformirt werden, welche für eine nähere Erforschung des Gesetzes von Bedeutung zu sein scheinen.

Ebenso wie bei Neumann seien die beiden Körper A und B begriffen in irgend welchen Bewegungen und werden mit Bezug hierauf folgende Bezeichnungen eingeführt:

Dv_0 und Dv_1 seien zwei Volumelemente der Körper A und B; r ihre Entfernung; x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 seien ihre Coordinaten mit Bezug auf ein im Raume absolut festes System.

$\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0, \mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ ihre Coordinaten mit Bezug auf zwei Systeme, deren eines in fester Verbindung gedacht wird mit dem Körper A, das andere fest verbunden ist mit dem Körper B.

i_0 und i_1 seien die Stärken der zu irgend einer Zeit t in den Elementen Dv_0 und Dv_1 vorhandenen Strömungen, s_0 und s_1 die Richtungen derselben.

$\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$ und $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ seien die Componenten von i_0 und i_1 genommen nach den mit den Körpern A und B fest verbundenen Axensystemen.

Die Zeit soll, sofern die räumliche Lage der Körper A und B von derselben abhängt, bezeichnet werden durch τ und zwar specieller durch τ_0, sofern sie als Argument in x_0, y_0, z_0, durch τ_1 sofern sie als Argument in x_1, y_1, z_1 auftritt. In so fern andererseits die Strömungen $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$ und $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ mit der Zeit sich ändern, werde dieselbe bezeichnet durch T, specieller durch T_0 und T_1 je nachdem sie sich auf die Aenderung von $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$ oder von $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ bezieht.

Die abstossende Wirkung, welche das Volumelement Dv_1 auf das Volumelement Dv_0 ausübt, lässt sich unter diesen Umständen dem Ampèreschen Gesetz entsprechen durch folgenden Ausdruck darstellen.

$$R = 8A^2 i_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial s_0\,\partial s_1} Dv_0 Dv_1$$

wo ψ die von C. Neumann eingeführte Funktion, welche für den Fall beträchtlicher Entfernungen übergeht in $\sqrt{r}$; für die X Componente dieser abstossenden Kraft ergiebt sich der Werth

$$\mathrm{X}_0 = 8A^2 i_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial s_1\,\partial s_0} \cdot Dv_0 Dv_1$$

ein Ausdruck der durch eine leichte Umgestaltung in folgenden übergeht

$$\begin{aligned} X_0 = & -4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial x_0}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right\} Dv_0 Dv_1 \\ & + 4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_0}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right\} Dv_0 Dv_1 \\ & + 4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\right\} Dv_0 Dv_1. \end{aligned}$$

Bei der weiteren Umformung des letzteren für die X Componente gegebenen Ausdrucks möge an der Vorstellung festgehalten werden, dass der Körper B eine im Raume unveränderliche Lage besitze, der Körper A hingegen allein verschiebbar sei in der Richtung der X Axe des im Raume festen Coordinatensystems; unter dieser Voraussetzung können dann x_0, $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ als die 4 unabhängigen Variabelen, durch welche die Lage des Elementes Dv_0 im Raume bestimmt ist, betrachtet werden.

Während nemlich im allgemeinen $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ und τ_0 die 4 Argumente sind, von welchen die räumliche Lage des Elements Dv_0 also auch die Entfernung r von dem Elemente Dv_1 abhängt, kann in dem Falle, dass y_0, z_0 bei der Verschiebung des Elementes Dv_0 konstant bleiben, τ_0 ersetzt werden durch x_0, so dass also $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$, und x_0 als die 4 unabhängigen Veränderlichen erscheinen.

Da

$$\frac{\partial\,.}{\partial s_0} = \frac{\partial\,.}{\partial \mathfrak{x}_0}\cdot\frac{d\mathfrak{x}_0}{ds_0} + \frac{\partial\,.}{\partial \mathfrak{y}_0}\cdot\frac{d\mathfrak{y}_0}{ds_0} + \frac{\partial\,.}{\partial \mathfrak{z}_0}\cdot\frac{d\mathfrak{z}_0}{ds_0}$$

und

$$\frac{d\mathfrak{x}_0}{ds_0} = \frac{\mathfrak{u}_0}{i_0},\quad \frac{d\mathfrak{y}_0}{ds_0} = \frac{\mathfrak{v}_0}{i_0},\quad \frac{d\mathfrak{z}_0}{ds} = \frac{\mathfrak{w}_0}{i_0}$$

so kann der zweite Term des für die X Componente gegebenen Ausdrucks in die Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} 4A^2\, i_0\, i_1 \frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) &= 4A^2\,\mathfrak{u}_0 \frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_0}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right\} \\ &+ 4A^2\,\mathfrak{v}_0 \frac{\partial}{\partial\mathfrak{y}_0}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right\} \\ &+ 4A^2\,\mathfrak{w}_0 \frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}_0}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 4A^2\, i_0\, i_1 \frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) &= 4A^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_0}\left(\mathfrak{u}_0\, i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial}{\partial\mathfrak{y}_0}\left(\mathfrak{v}_0\, i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}_0}\left(\mathfrak{w}_0\, i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) \end{aligned} \right\} \\ &- 4A^2\left(\frac{\partial\mathfrak{u}_0}{\partial\mathfrak{x}_0} + \frac{\partial\mathfrak{v}_0}{\partial\mathfrak{y}_0} + \frac{\partial\mathfrak{w}_0}{\partial\mathfrak{z}_0}\right) i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0} \end{aligned}$$

Wenn wir ganz dieselbe Transformation auch anwenden auf den dritten Term des für die X Componente gegebenen Ausdruckes, so ergiebt sich dann folgender Werth dieser Componente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_0 = &- \frac{\partial}{\partial x_0}\left\{4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_1} Dv_0 Dv_1\right\} \\
&- 4A^2 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot e_1 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot Dv_0 Dv_1 - 4A^2 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot e_0 \frac{\partial\psi}{\partial x_0} Dv_0 Dv_1 \\
\text{I.)} \quad &+ 4A^2 \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\left(\mathfrak{u}_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_1}\left(\mathfrak{v}_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1}\left(\mathfrak{w}_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right)\end{aligned}\right\} Dv_0 Dv_1 \\
&+ 4A^2 \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left(\mathfrak{u}_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\left(\mathfrak{v}_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}\left(\mathfrak{w}_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right)\end{aligned}\right\} Dv_0 Dv_1
\end{aligned}$$

hier haben e_1 und e_0 folgende Bedeutungen:

$$e_0 = \frac{\partial \mathfrak{u}_0}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0}{\partial \mathfrak{z}_0}; \; e_1 = \frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial \mathfrak{z}_1}$$

Es ist also, wenn mit ε_0 und ε_1, die Dichtigkeiten der freien Elektricitäten bezeichnet werden, welche sich in dem betrachteten Augenblick in den Elementen Dv_0 und Dv_1 befinden

$$e_0 = -\frac{d\varepsilon_0}{dt}, e = -\frac{d\varepsilon_1}{dt}$$

Die weiteren Transformationen beziehen sich auf den Ausdruck

$$\text{A)} \qquad P = 4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot Dv_0 Dv_1$$

welcher das electrodynamische Potential der beiden Elemente Dv_0 und Dv_1 repräsentirt, und beruht auf der Anwendung der Formeln:

$$4 i_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_1} = -4 i_0 i_1 \psi \frac{\partial^2\psi}{\partial s_0 \partial s_1} + 2 i_0 i_1 \frac{\partial^2(\psi^2)}{\partial s_0 \partial s_1}$$

und:

$$4 i_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial s_1} = - i_0 i_1 \frac{\cos\varepsilon}{r} - i_0 i_1 \frac{\partial^2(\psi^2)}{\partial s_0 \, \partial s_1}$$

wo ε der Winkel, welchen die Richtungen s_0 und s_1 mit einander einschliessen. Die erste Formel gilt für jedes beliebige ψ, die zweite nur für den speciellen Werth $\psi = \sqrt{r}$.

Die Anwendung der ersten Formel führt zu folgendem Ausdrucke für das elektrodynamische Potential:

$$\begin{aligned}
P = & -4 A^2 i_0 i_1 \psi \frac{\partial^2\psi}{\partial s_0 \, \partial s_1} . Dv_0 \, Dv_1 \\
& + 2 A^2 . \psi^2 e_0 e_1 . Dv_0 Dv_1 \\
& - 2 A^2 e_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}(\mathfrak{u}_0 \psi^2) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}(\mathfrak{v}_0 \psi^2) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}(\mathfrak{w}_0 \psi^2) \right\} Dv_0 \, Dv_1 \\
& - 2 A^2 e_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}(\mathfrak{u}_1 \psi^2) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_1}(\mathfrak{v}_1 \psi^2) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1}(\mathfrak{w}_1 \psi^2) \right\} Dv_0 \, Dv_1 \\
\text{B)} \qquad & + A^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\left[\mathfrak{u}_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_0} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_1}\left[\mathfrak{v}_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_0} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1}\left[\mathfrak{w}_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_0} \right) \right] \end{aligned} \right\} \\
& + A^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left[\mathfrak{u}_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_1} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\left[\mathfrak{v}_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_1} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}\left[\mathfrak{w}_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_1} \right) \right] \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Die zweite Formel gibt folgende nur für $\psi = \sqrt{r}$ gültige Darstellung des Potentiales:

$$P = - A^2 i_0 i_1 \frac{\cos \varepsilon}{r} . Dv_0 Dv_1$$

$$+ A^2 e_0 e_1 \psi^2 Dv_0 Dv_1$$

$$+ A^2 e_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_1} \right) Dv_0 Dv_1$$

$$+ A^2 e_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_0} \right) Dv_0 Dv_1$$

C) $$- \tfrac{1}{2} A^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1} \left[\mathfrak{u}_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_0} \right) \right] \\ + & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_1} \left[\mathfrak{v}_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_0} \right) \right] \\ + & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1} \left[\mathfrak{w}_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_0} \right) \right] \end{aligned} \right\} Dv_0 Dv_1$$

$$- \tfrac{1}{2} A^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0} \left[\mathfrak{u}_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_1} \right) \right] \\ + & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0} \left[\mathfrak{v}_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_1} \right) \right] \\ + & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0} \left[\mathfrak{w}_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_1} \right) \right] \end{aligned} \right\} Dv_0 \; Dv_1$$

Eine Darstellung des Potentiales, welche die drei durch die Ausdrücke A, B, C gegebenen als specielle Fälle umfasst erhalten wir, wenn wir die in A gegebenen multipliciren mit $\frac{1-k}{2}$, die in C mit $\frac{1+k}{2}$ und die beiden Produkte addiren. Hier ist k eine willkürliche Constante und es ergiebt sich dann für $k = -1$ die Form A, für $k = +1$ die Form C und für $k = -5$ die Form B; diese allgemeinste Form des elektrodynamischen Potentiales der beiden Elemente Dv_0 und Dv_1 auf einander wird demnach:

$$P = -A^2 i_0 i_1 \left\{\frac{1+k}{2} \cdot \frac{\cos\varepsilon}{r} - \frac{1-k}{2} . 4 \frac{\partial\psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right\} Dv_0 Dv_1$$

$$- \frac{1+k}{2} A^2 \psi^2 e_0 e_1 Dv_0 Dv_1$$

$$+ \frac{1+k}{2} A^2 e_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_0}\right) Dv_0 Dv_1$$

$$+ \frac{1+k}{2} A^2 e_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_1}\right) Dv_0 Dv_1$$

II)
$$- \frac{1+k}{4} A^2 \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\left[\mathfrak{u}_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_0}\right)\right] \\ + & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_1}\left[\mathfrak{v}_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_0}\right)\right] \\ + & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1}\left[\mathfrak{w}_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_0}\right)\right] \end{aligned}\right\} Dv_0 Dv_1 .$$

$$- \frac{1+k}{4} A^2 \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left[\mathfrak{u}_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_1}\right)\right] \\ + & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\left[\mathfrak{v}_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_1}\right)\right] \\ + & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}\left[\mathfrak{w}_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{y}_1} + \frac{\partial \mathfrak{w}_1 \psi^2}{\partial \mathfrak{z}_1}\right)\right] \end{aligned}\right\} Dv_0 Dv_1$$

und für die von dem Element Dv_1 auf Dv_0 ausgeübte X Componente ergiebt sich dann mit Hülfe dieses Potentiales der allgemeinste Ausdruck in der Form:

$$X_0 = -\frac{\partial P}{\partial x_0} - 4 A^2 e_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0} \frac{\partial\psi}{\partial x_0} Dv_0 Dv_1 - 4 A^2 e_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0} Dv_0 Dv_1$$

III)
$$+ 4 A^2 \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\left(\mathfrak{u}_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_1}\left(\mathfrak{v}_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0} \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1}\left(\mathfrak{w}_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) \end{aligned}\right\} Dv_0 Dv_1$$

$$+ 4 A_1 \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left(\mathfrak{u}_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\left(\mathfrak{v}_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}\left(\mathfrak{w}_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) \end{aligned}\right\} Dv_0 Dv_1$$

die von dem Element Dv_1 auf das Element Dv_0 in der Richtung der Y und Z Axe ausgeübten Componenten ergeben sich aus dem vorhergehenden Ausdruck, indem wir überall an Stelle der Differentiation nach x_0 die Differentiation nach y_0 und z_0 setzen. Ist der Körper A und mit ihm das Element Dv_0 nicht verschiebbar in der Richtung einer der drei im Raume festliegenden Coordinatenaxen, sondern drehbar um eine im Raume feste Axe, so treten als die 4 unabhängigen Veränderlichen durch welche die Lage des Elementes Dv_0 bestimmt ist auf die Coordinaten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ und der Drehungswinkel φ_0 und es ergiebt sich demnach für das Drehungsmoment der Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
D_0 = & -\frac{\partial P}{\partial \varphi_0} - 4A^2 e_1 i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_0} Dv_0 Dv_1 \\
& - 4A^2 e_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_0} \cdot Dv_0 Dv_1 \\
& + 4A^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1} \left(\mathfrak{u}_1 i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_0} \right) + \ldots \right\} Dv_0 Dv_1 \\
& + 4A^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0} \left(\mathfrak{u}_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_0} \right) + \ldots \right\} Dv_0 Dv_1
\end{aligned}
$$

Wenn endlich das Element Dv_0 während einer kleinen Zeit dt irgend welche Verschiebung erleidet, so ergiebt sich die bei dieser Verschiebung von Dv_0 auf Dv_1 ausgeübte ponderomotorische Arbeit, wenn die Differentiation nach dx_0 in dem Ausdrucke III ersetzt wird durch die Differentiation nach τ_0 und der so gebildete Ausdruck noch multiplicirt wird mit dt. Diese letztere Arbeit wird demnach, wenn die Operation $\frac{\partial \cdot}{\partial \tau_0} \partial t$ bezeichnet wird durch ∂_0, gegeben durch folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
dT_0 = & - \partial_0 P \\
& - 4A^2 e_1 i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \partial_0 \psi \, Dv_0 Dv_1 \\
& - 4A^2 e_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \partial_0 \psi \, Dv_0 Dv_1 \\
& + 4A^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1} \left(\mathfrak{u}_1 i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \partial_0 \psi \right) + \ldots \right\} Dv_0 Dv_1 \\
& + 4A^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0} \left(\mathfrak{u}_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \partial_0 \psi \right) + \ldots \right\} Dv_0 Dv_1
\end{aligned}
$$

Vom mechanischen Standpunkte aus können wir den im Vorhergehenden befolgten Weg zur Transformirung des Ampèreschen Gesetzes bezeichnen als eine Zerlegung der von dem Element Dv_1 auf das Element Dv_0 ausgeübten Wirkung in eine immer grössere Zahl einzelner Componenten; es ist einleuchtend dass sich weitere Transformationen dadurch ergeben müssen, dass wir einzelne dieser Componenten in veränderter Combination wieder zu einer Resultanten vereinigen. Gehen wir hiebei aus von der unter III gegebenen Form der X Componente, so ist dieselbe hier dargestellt durch eine Summe von 5 Kräften; die erste derselben hängt ab von dem elektrodynamischen Potential P. Was die vier übrigen Kräfte anbelangt, so sieht man sofort dass eine gewisse Analogie besteht zwischen der zweiten und vierten einerseits, der dritten und fünften andererseits, sofern die zweite und vierte allein den Ausdruck $i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}$, die dritte und fünfte allein den Ausdruck $i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}$ enthalten und es liegt somit nahe entweder zu bilden die Resultante aus der ersten, dritten und fünften oder aus der ersten, zweiten und vierten Componente.

Nehmen wir die erste der beiden Combinationen und setzen wir die Summe der ersten, dritten und fünften der in der Richtung der X Axe wirkenden Einzelkomponenten gleich Ξ_0, so haben wir für Ξ_0 zunächst den Werth:

$$\Xi_0 = -\frac{\partial P}{\partial x_0} - 4A^2 e_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0} \cdot Dv_0\, Dv_1$$

$$+ 4A^2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left(\mathfrak{u}_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\left(\mathfrak{v}_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) \\ + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}\left(\mathfrak{w}_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) \end{array} \right\} Dv_0\, Dv_1$$

Substituiren wir für P den in A gegebenen Werth, so wird

$$\Xi_0 = -4A^2 \frac{\partial}{\partial x_0}\left\{i_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right\} . Dv_0\, Dv_1 + 4A^2 \mathfrak{u}_0 \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left\{i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right\} Dv_0\, Dv_1$$

$$+ 4A^2 \mathfrak{v}_0 \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\left\{i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right\} . Dv_0\, Dv_1 + 4A^2 \mathfrak{w}_0 \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}\left\{i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right\} Dv_0\, Dv_1$$

oder

$$\Xi_0 = -4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x_0\,\partial s_1} Dv_0\, Dv_1$$

$$-4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial s_0\,\partial s_1} Dv_0\, Dv_1$$

oder endlich wenn wir an Stelle der gesammten Strömung i_0 wieder die Componenten $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$ einführen:

$$\Xi_0 = 4A^2\mathfrak{u}_0\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{x}_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\} Dv_0\, Dv_1$$

$$+ 4A^2\mathfrak{v}_0\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathfrak{y}_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{y}_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\} Dv_0\, Dv_1$$

$$+ 4A^2\mathfrak{w}_0\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{z}_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{z}_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\} Dv_0\, Dv_1$$

Für die gesammte in der Richtung der X Axe wirkende Kraft ergiebt sich somit der Ausdruck:

$$X_0 = 4A^2\mathfrak{u}_0 . Dv_0\, Dv_1\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{x}_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\}$$

$$+ 4A^2\mathfrak{v}_0 . Dv_0\, Dv_1\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial\mathfrak{y}_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{y}_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\}$$

$$+ 4A^2\mathfrak{w}_0 . Dv_0\, Dv_1\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{z}_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\}$$

$$- 4A^2 e_1 i_0\frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot Dv_0\, Dv_1$$

$$+ 4A^2\left\{\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_1}\left(\mathfrak{u}_1 i_0\frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) + \cdot\,\cdot\,\right\} Dv_0\, Dv_1$$

woraus durch Vertauschung von x_0 mit y_0 und z_0 die entsprechenden Ausdrücke für die Componenten Y_0 und Z_0. Schreiben wir diese Gleichungen in der Form:

$$X_0 = \Xi_0 - 4A^2 e_1 i_0 \frac{\partial\psi}{d s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0} Dv_0 Dv_1$$

$$+ 4A^2 \left\{\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\left(\mathfrak{u}_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) + \ldots\right\} Dv_0 Dv_1$$

$$Y_0 = H_0 - 4A^2 e_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y_0} Dv_0 Dv_1$$

$$+ 4A^2 \left\{\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\left(\mathfrak{u}_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\right) + \ldots\right\} Dv_0 Dv_1$$

$$Z_0 = Z_0 - 4A^2 e_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z_0} Dv_0 Dv_1$$

$$+ 4A^2 \left\{\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\left(\mathfrak{u}_1 i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z_0}\right) + \ldots\right\} Dv_0 Dv_1$$

wodie Werthe von H_0, Z_0 sich unmittelbar aus dem für Ξ_0 gegebenen Werthe ergeben, so können wir die drei Componenten Ξ_0, H_0, Z_0 vereinigen zu einer Resultante und es lässt sich dann leicht zeigen, dass diese Resultante senkrecht steht gegen die Richtung der Strömung s_0. Lassen wir nemlich die Coordinatensysteme x_0, y_0, z_0 und $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0, \mathfrak{z}_0$ zusammenfallen, so ergeben sich für jene Componenten Ξ_0, H_0, Z_0 folgende Werthe:

$$\Xi_0 = 4A^2 v_0 \left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial}{\partial y_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial y_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\}\cdot Dv_0 Dv_1$$

$$+ 4A^2 w_0 \left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial}{\partial z_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial z_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\}\cdot Dv_0 Dv_1$$

$$H_0 = 4A^2 u_0 \left\{\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial y_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\} Dv_0 Dv_1$$

$$+ 4A^2 w_0 \left\{\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial}{\partial z_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial z_0}\cdot\frac{\partial}{\partial y_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\} Dv_0 Dv_1$$

$$Z_0 = 4A^2 u_0 \left\{\frac{\partial\psi}{\partial z_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial}{\partial z_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\} Dv_0 Dv_1$$

$$+ 4A^2 w_0 \left\{\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial y_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial}{\partial z_0}\left(i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\} Dv_0 Dv_1$$

wo u_0, v_0, w_0 die Strömungskomponenten nach den Axen X, Y, Z; somit

$$\Xi_0 u_0 + H_0 v_0 + Z_0 w_0 = o.$$

Ebenso würde sich natürlich eine gegen die Richtung der Strömung s_1 senkrecht gerichtete Kraft von ganz analogem Baue ergeben haben, wenn wir zu der Umformung des in Gleichung III gegebenen Werthes der X Componente die zweite der angeführten Combinationen, d. h. die Combination der ersten, zweiten und vierten Componente benutzt haben würden.

---

2. Gesammtwirkung des Körpers B auf ein Volumelement des Körpers A.

Für die X Componente der Wirkung, welche der ganze Körper B auf das Element Dv_0 des Körpers A ausübt ergiebt sich unter Zugrundelegung derselben Vorstellungen wie im Vorhergegenden der Werth

$$
\text{V)}\quad
\begin{aligned}
X_0 = &-\frac{\partial P}{\partial x_0}\cdot -4A^2 e_0 Dv_0 \int_B i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot Dv_1 \\
&+4A^2 Dv_0 \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left(\mathfrak{u}_0 \int_B i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0} Dv_1\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\left(\mathfrak{v}_0 \int_B i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_0} Dv_1\right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}\left(\mathfrak{w}_0 \int_B i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0} Dv_1\right) \end{aligned} \right\} \\
&-4A^2 Dv_0 \int_B e_1 \cdot i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot Dv_1 \\
&-4A^2 Dv_0 \mathop{\mathrm{S}}_B f_1\, i_0 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot Do_1 .
\end{aligned}
$$

Hier ist:

$$f_1 = \mathfrak{u}_1 \cos(n_1 \mathfrak{x}_1) + \mathfrak{v}_1 \cos(n_1 \mathfrak{y}_1) + \mathfrak{w}_1 \cos(n_1 \mathfrak{z}_1)$$

Do_1 ein Element der Oberfläche des Körpers B und n_1 die in demselben errichtete innere Normale.

P ist das elektrodynamische Potential des Körpers B auf das Element Dv_0 und kann durch folgenden Ausdruck in allgemeinster Weise dargestellt werden

$$P = - A^2 i_0 Dv_0 \int_B i_1 \left\{ \frac{1+k}{2} \frac{\cos \varepsilon}{r} - \frac{1-k}{2} 4 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \right\} Dv_1$$

$$- \frac{1+k}{2} A^2 e_0 Dv_0 \int_B e_1 \psi^2 Dv_1 - \frac{1+k}{2} A^2 e_0 Dv_0 \underset{B}{\mathrm{S}} f_1 \psi^2 Do_1$$

$$+ \frac{1+k}{2} A^2 Dv_0 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left(\mathfrak{u}_0 \int_B e_1 \psi^2 Dv_1\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\left(\mathfrak{v}_0 \int_B e_1 \psi^2 Dv_1\right) \\ + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}\left(\mathfrak{w}_0 \int_B e_1 \psi^2 Dv_1\right) \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{1+k}{2} A^2 Dv_0 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left(\mathfrak{u}_0 \underset{B}{\mathrm{S}} f_1 \psi^2 Do_1\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\left(\mathfrak{v}_0 \underset{B}{\mathrm{S}} f_1 \psi^2 Do_1\right) \\ + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0} \cdot \left(\mathfrak{w}_0 \underset{B}{\mathrm{S}} f_1 \psi^2 Do^1\right) \end{array} \right\}$$

oder, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\int e_1 \psi^2 Dv_1 + \mathrm{S} f_1 \psi^2 Do_1 = E_0$$

$$P = - A^2 i_0 Dv_0 \int_B i_1 \left\{ \frac{1+k}{2} \frac{\cos \varepsilon}{r} - \frac{1-k}{2} 4 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \right\} Dv_1$$

$$- \frac{1+k}{2} A^2 e_0 Dv_0 E_0$$

$$+ \frac{1+k}{2} A^2 Dv_0 \left\{ \frac{\partial \mathfrak{u}_0 E_0}{\partial \mathfrak{x}_0} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 E_0}{\partial \mathfrak{y}_0} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0 E_0}{\partial \mathfrak{z}_0} \right\}$$

Der in Gleichung V gegebene Werth der X Componente erscheint als eine Summe von 5 einzelnen Kräften, von welchen nur die ersten drei abhängig sind von den in dem Körper B ablaufenden galvanischen Strömungen, die beiden letzten von den im Inneren und an der Oberfläche des Körpers B stattfindenden Anhäufungen freier Elektricität; eine andere Darstellung der ersten drei Kräfte ergiebt sich durch Benutzung der Formeln IV oder IV[1] und dem entsprechend folgende Form der X Componente:

$$
\begin{aligned}
X_0 = {} & 4A^2\,\mathfrak{u}_0\,Dv_0\left\{\int\limits_B \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_0}\left(i_1\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)Dv_1 - \int\limits_B \frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{x}_0}\,\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)Dv_1\right\}\\
& + 4A^2\,\mathfrak{v}_0\,Dv_0\left\{\int\limits_B \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathfrak{y}_0}\left(i_1\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)Dv_1 - \int\limits_B \frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{y}_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)Dv_1\right\}\\
\text{VI)}\quad & + 4A^2\,\mathfrak{w}_0\,Dv_0\left\{\int\limits_B \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}_0}\left(i_1\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)Dv_1 - \int\limits_B \frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{z}_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}\left(i_1\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)Dv_1\right\}\\
& - 4A^2\,Dv_0\int\limits_B e_1\,i_0\,\frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\cdot Dv_1\\
& - 4A^2\,Dv_0\,\underset{B}{S}\,f_1\,i_0\,\frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\,Do_1
\end{aligned}
$$

Die drei ersten Terme dieser Componente und die analogen Terme der Componenten Y_0 und Z_0 geben ebenso wie die Elementarwirkungen selber eine gegen die Stromrichtung s_0 senkrechte Resultante.

Ist der Körper A und mit ihm auch das Volumelement Dv_0 drehbar um irgend eine Axe, so ergiebt sich für das Drehungsmoment, welches von dem Körper B auf Dv_0 ausgeübt wird der Werth:

$$
\begin{aligned}
\Delta_0 = {} & -\frac{\partial P}{\partial\varphi_0} - 4A^2\,e_0\,Dv_0\int\limits_B i_1\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_0}\,Dv_1\\
\text{VII)}\quad & + 4A^2\,Dv_0\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_0}\left(\mathfrak{u}_0\int\limits_B i_1\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_0}\,Dv_1\right) + \frac{\partial}{\partial\mathfrak{y}_0}\left(\mathfrak{v}_0\int\limits_B i_1\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_0}\,Dv_1\right)\\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}_0}\left(\mathfrak{w}_0\int\limits_B i_1\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_0}\,Dv_1\right)\end{aligned}\right\}\\
& - 4A^2\,Dv_0\int\limits_B e_1\,i_0\,\frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_0}\,Dv_1 - 4A^2\,Dv_0\,\underset{B}{S}\,f_1\,i_0\,\frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_0}\,Do_1
\end{aligned}
$$

wo φ_0 der Drehungswinkel.

Eine ganz analoge Formel giebt schliesslich noch die ponderomotorische Arbeit welche von dem Körper B auf das Element Dv_0 bei irgend einer kleinen Verschiebung des Körpers A geleistet wird.

Wie sich aus den Formeln V, VI, VII ergiebt, kann die Gesammtwirkung, welche der Körper B nach dem Ampèreschen Gesetze auf das Element Dv_0 des Körpers A ausübt, zerlegt werden in drei Componenten von wesentlich verschiedenem Charakter; die erste derselben erscheint allein als abhängig von den galvanischen Strömungen, welche in den Volumelementen des Körpers B vorhanden sind; die zweite Componente erscheint als abhängig von den Abscheidungen freier Elektricität, welche in jenen Volumelementen stattfindet; die dritte Componente endlich ist dargestellt durch ein über die Oberfläche des Körpers B hinerstrecktes Integral; es ist also bei dieser Componente die von den einzelnen Volumelementen des Körpers B herrührende Wirkung ersetzt durch eine scheinbare Wirkung der Oberflächenelemente, und zwar hängt diese scheinbare Wirkung ab von den in den Oberflächenelementen stattfindenden Anhäufungen freier Elektricität. Gehen wir zurück auf die Einzelwirkungen der Volumelemente, aus welchen die dritte Componente zusammengesetzt ist, so sehen wir, dass diese Einzelwirkungen abhängen von den Ansammlungen freier Elektricität, welche an den Grenzen der Volumelente stattfinden würden, falls diese Elemente durch isolirende Schichten von einander getrennt wären.

Diejenige Wirkung, welche herrührt von den galvanischen Strömungen des Körpers B und welche gegen die Richtung s_0 der in dem Element Dv_0 vorhandenen Strömung senkrecht gerichtet ist, kann noch in anderer Weise dargestellt werden; lassen wir zunächst die Coordinatensysteme $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0, \mathfrak{z}_0)$, $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1)$ und (x, y, z) zusammenfallen, und bezeichnen wir mit Ξ_0, H_0, Z_0 die Componenten der in Rede stehenden Wirkung nach den Axen x, y, z, so ergiebt sich aus Formel VI

$$\Xi_0 =$$

$$4A^2 v_0 Dv_0 . \int_B \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\psi}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial}{\partial y_0} \left\{ u_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial\psi}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial\psi}{\partial z_1} \right\} \\ - \frac{\partial\psi}{\partial y_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ u_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial\psi}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial\psi}{\partial z_1} \right\} \end{array} \right\} . Dv_1$$

$$+ 4A^2 w_0 Dv_0 . \int_B \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\psi}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \left\{ u_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial\psi}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \right\} \\ - \frac{\partial\psi}{\partial z_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ u_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial\psi}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \right\} \end{array} \right\} Dv_1 \quad .$$

wo u_0, v_0, w_0 und u_1, v_1, w_1 die Stromkomponenten in Dv_0 und Dv_1 nach den Coordinatenaxen x, y, z; wenn wir hier für ψ den Werth $\sqrt{r}$ einführen, so ergiebt sich durch Ausführung der Differentiationen.

$$\Xi_0 = A^2 v_0 Dv_0 \int_B \left(u_1 \frac{y_0 - y_1}{r^3} - v_1 \frac{x_0 - x_1}{r^3} \right) Dv_1$$

$$+ A^2 w_0 Dv_0 \int_B \left(u_1 \frac{z_0 - z_1}{r^3} - w_1 \frac{x_0 - x_1}{r^3} \right) Dv_1$$

oder wenn wir die von Helmholtz eingeführten Bezeichnungen benützen:

$$U_0' = \int_B \frac{u_1}{r} Dv_1, \quad V_0' = \int_B \frac{v_1}{r} . Dv_1, \quad W_0' = \int_B \frac{w_1}{r} Dv_1$$

$$\Xi_0 = - A^2 v_0 Dv_0 \left\{ \frac{\partial U'_0}{\partial y_0} - \frac{\partial V'_0}{\partial x_0} \right\} + A^2 w_0 Dv_0 \left\{ \frac{\partial W'_0}{\partial x_0} - \frac{U'_0}{\partial z_0} \right\}$$

wodurch die Componenten der zur Stromrichtung s_0 senkrechten Wirkung auf die von Helmholtz gegebene Form gebracht sind.

3. Die von dem Körper B auf den ganzen Körper A ausgeübte ponderomotorische Wirkung.

Denken wir uns den Körper A allein verschiebbar in der Richtung der X Axe und verstehen wir unter x_0 etwa die dem Schwerpunkte desselben angehörige x Coordinate, so ergiebt sich für die gesammte Kraft mit welcher der Körper B den Körper A in der Richtung der X Axe zu verschieben sucht der Werth

$$X_0 = -\frac{\partial P}{\partial x_0} - 4A^2 \int_A\int_B \left(e_0\, i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} + e_1\, i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x_0} Dv_0\, Dv_1$$

VIII)
$$- 4A^2 \mathop{\mathrm{S}}_A \int_B f_0\, i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} Do_0\, Dv_1$$

$$- 4A^2 \int_A \mathop{\mathrm{S}}_B i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} f_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_0} Dv_0\, Do_1.$$

Hier hat f_0 mit Bezug auf den Körper A ganz dieselbe Bedeutung wie f_1 für B; P ist das elektrodynamische Potential der beiden Körper auf einander und ist gegeben durch folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$P = -A^2 \int_A\int_B \left\{\frac{1+k}{2} \cdot \frac{\cos \varepsilon}{r} - \frac{1-k}{2} 4 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right\} i_0\, i_1\, Dv_0\, Dv_1$$

$$- \frac{1+k}{2} \cdot A^2 \int_A\int_B e_0\, e_1\, \psi^2\, Dv_0\, Dv_1$$

VIII′
$$- \frac{1+k}{2} \cdot A^2 \int_A \mathop{\mathrm{S}}_B e_0\, f_1\, \psi^2\, Dv_0\, Do_1$$

$$- \frac{1+k}{2} A^2 \mathop{\mathrm{S}}_A \int_B f_0\, e_1\, \psi^2\, Do_0\, Dv_1$$

$$- \frac{1+k}{2} A^2 \mathop{\mathrm{S}}_A \mathop{\mathrm{S}}_B f_0\, f_1\, \psi^2\, Do_0\, Do_1.$$

Die von dem Körper B auf den Körper A bei irgend einer Verschiebung des letzteren ausgeübte ponderomotorische Arbeit stellt sich, wenn wir entsprechend den zu Anfang gemachten Festsetzungen die

Zeit sofern die räumliche Lage des Körpers A von ihr abhängt durch τ_0 und gleichzeitig die Operation $\frac{\partial}{\partial \tau_0} d\tau_0$ durch ∂_0 bezeichnen, dar durch den Ausdruck:

$$\underset{A}{dT} = -\partial_0 P$$

$$-4A^2 \int\limits_A \int\limits_B \left(e_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} + e_1 i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\right) \partial_0 \psi \, Dv_0 \, Dv_1$$

$$-4A^2 \underset{A}{S} \int\limits_B f_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \partial_0 \psi \, Do_0 \, Dv_1$$

$$-4A^2 \int\limits_A \underset{B}{S} i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot f_1 \partial_0 \psi \, Dv_0 \, Do_1$$

Das zwischen den beiden Körpern A und B vorhandene Potential setzt sich zusammen aus sehr verschiedenartigen Elementen. In dem durch Gleichung VIII′ gegebenen Ausdruck desselben ist nur der erste Term abhängig von den in den Körpern A und B vorhandenen Strömungen, alle übrigen dagegen abhängig von den Ansammlungen freier Elektricität, welche im Innern und an an der Oberfläche der Körper A und B stattfinden. Bezeichnen wir diese beiden Theile des Potentiales durch W und F, so dass also

$$P = W + F.$$

So ist W identisch mit dem von . Helmholtz gegebenen Ausdruck des elektrodynamischen Potentials. Mit Bezug auf den Potentialantheil F mag bemerkt werden, dass er sich sehr leicht darstellen lässt mit Hülfe der von Helmholtz eingeführten Funktion Ψ; es ist nemlich

$$\Psi_0 = -\int\limits_B r e_1 \, Dv_1 - \underset{B}{S} r f_1 \, Do_1$$

und

$$F = \frac{1+k}{2} A^2 \left\{ \int\limits_A e_0 \Psi_0 \, Dv_0 + \underset{A}{S} f_0 \Psi_0 \, Do_0 \right\}$$

4. Beziehungen zu den experimentellen Thatsachen.

In den vorhergehenden Abschnitten wurde das Ampèresche Gesetz aufgelöst in eine Reihe von einzelnen Componenten, und es ergiebt sich somit, dass zu dem Nachweis dass das Ampère'sche Gesetz wirklich als der mathematische Ausdruck der zwischen zwei Stromelementen wirksamen Kräfte zu betrachten ist, zwei verschiedene Untersuchungen erfordert werden. Es wird sich einmal fragen, ob allen jenen Einzel-Componenten messbare Wirkungen entsprechen, ob also alle jene Componenten wirklich von einem Stromelement auf ein anderes ausgeübt werden; und zweitens wird der Nachweis erfordert werden, dass jene in dem Ampèreschen Gesetze enthaltenen Componenten die einzigen Kräfte sind, welche zwischen zwei Stromelementen thätig sind, dass also das Ampèresche Gesetz auch der vollständige Ausdruck der zwischen zwei Stromelementen vorhandenen Wirkung ist. Es möge noch untersucht werden, in wie weit die zur Zeit vorhandenen experimentellen Thatsachen zur Entscheidung dieser Fragen beizutragen geeignet sind.

Diese Thatsachen können in drei Gruppen gesondert werden; die erste Gruppe bezieht sich auf die Wechselwirkungen zweier geschlossener Ströme von unveränderlicher Gestalt, und es sind daher die hieher gehörigen Thatsachen in erster Linie repräsentirt durch die von Weber in den Massbestimmungen I. Abhandlung beschriebenen Versuche.

Die zweite Gruppe wird gebildet durch die Versuche über Rotationen starrer Leiter unter der Wirkung geschlossener Ströme, die dritte durch Versuche über Biegung leicht beweglicher und dehnbarer Leiter unter der Einwirkung geschlossener Ströme; in dieser dritten Gruppe sind also insbesondere anzuführen die Plückerschen Versuche über die Einwirkung des Magnetes auf die positive Entladung in Geisslerschen Röhren. Die von Zöllner neuerdings ausgeführten Versuche können als eine Combination der Versuche der zweiten und dritten Gruppe betrachtet werden.

Die Versuche der ersten Gruppe entsprechen den Formeln VIII, da aber diese Versuche sich nur beziehen auf die Wechselwirkung geschlossener und gleichförmiger Ströme, so ist durch dieselben nur die Existenz des von den Strömungen abhängenden Potentialantheiles W bewiesen. Darüber ob der Potentialantheil F existirt oder nicht geben diese Versuche keinen Aufschluss, und dasselbe gilt natürlich auch mit Bezug auf die Elementarwirkungen selbst, welche in den beiden Potentialantheilen enthalten sind. Ebenso wenig geben diese Versuche darüber Aufschluss, ob die übrigen nicht von einem Potentiale abhängenden Wirkungen vorhanden sind, oder nicht, Wirkungen welche in Formel VIII dargestellt sind durch zwei Doppelintegrale, die sich über die Volumina der beiden Körper A und B hinerstrecken und durch zwei Integrale, welche je über das Volumen des einen und die Oberfläche des anderen Körpers auszudehnen sind. Die beiden ersten Integrale hängen ab von den Abscheidungen freier Elektricität, welche in den Volumelementen der Körper A und B stattfinden; die beiden letzteren Integrale hängen ab von den in den Oberflächenelementen von A und B abgeschiedenen Elektricitätsmengen. Die in den letzteren Integralen enthaltenen Elementarwirkungen eines Volumelementes von A auf ein Volumelement von B sind also von der Art, dass sie sich in ihrer Gesamtheit ersetzen lassen durch scheinbare Wirkungen welche von den Oberflächenelementen des einen Körpers, beziehungsweise den in diesen Elementen angehäuften freien Elektricitäten ausgeübt werden auf die Volumelemente des anderen Körpers.

Bei den Versuchen der zweiten Gruppe handelt es sich um die Wirkung eines geschlossenen gleichförmigen Stromes auf ein bewegliches aber starres Stück eines anderen Stromes; die in Anwendung kommende Formel ist gegeben in VII. Dieselbe reducirt sich aber, wenn sich das Potential bei der Drehung nicht ändert, und wenn der Strom in dem rotirenden Leiter ebenfalls ein gleichförmiger ist, auf:

$$\varDelta_0 = 4A^2 Dv_0 \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\Big(\mathfrak{u}_0 \int_B i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_0} Dv_1\Big) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\Big(\mathfrak{v}_0 \int_B i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_0} Dv_1\Big) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}\Big(\mathfrak{w}_0 \int_B i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_0} Dv_1\Big) \end{aligned} \right\}$$

Da indessen die Rotationsversuche bis jetzt auf Untersuchung der qualitativen Verhältnisse sich beschränkt haben, so dürfte aus denselben auch nur auf die Möglichkeit geschlossen werden, dass die in dem obigen Ausdruck enthaltenen Elementarwirkungen vorhanden sind; ob dieselben in Wirklichkeit existiren, bleibt unentschieden.

Das Resultat der Versuche der dritten Gruppe lässt sich vielleicht in folgender Form darstellen.

Es ist gegeben ein geschlossener von einem gleichförmigen Strome durchflossener Kreis A, in welchen an irgend einer Stelle ein absolut biegsamer und dehnbarer Faden eingeschaltet ist; ausserdem ist gegeben ein geschlossener gleichförmiger Strom B. Wenn unter diesen Umständen die Endpunkte jenes Fadens auf einer magnetischen Kraftlinie des Stromes B liegen, so folgt derselbe dieser zwischen seinen beiden Endpunkten verlaufenden Linie.

Es steht dieser Satz in vollkommenem Einklang mit dem in Gleichung VI gegebenen Ausdruck für die von dem Körper B auf ein Element des Körpers A ausgeübten Componenten, wenn wir beachten dass e_1 und $f_1 = o$ sind also die beiden letzten Terme jenes Ausdruckes wegfallen; unbestimmt bleibt nur der Werth der Constanten A^2, da die in Rede stehenden Versuche nur die Richtung nicht die Grösse der auf ein Element Dv_0 des Körpers A ausgeübten Kraft bestimmen. Die in Gleichung VI gegebene Gesammtwirkung erscheint aber in Formel V wieder aufgelöst in ihre einzelnen Componenten, und diese Formel kann mit dem durch die Versuche der ersten Gruppe bestimmten Werth des Potentiales W nur dann zusammenbestehen, wenn die Constante A^2 denselben Werth besitzt wie in W. Durch die Versuche der dritten Gruppe wird also bewiesen, dass die ersten drei der durch die rechte Seite der Formel V gegebenen Componenten existiren, also auch die denselben entsprechenden Elementarwirkungen. Gehen wir somit zurück auf die in Gleichung III gegebene allgemeinste Form der von einem Elemente Dv_1 auf ein Element Dv_0 ausgeübten Wirkung

$$
\begin{aligned}
X_0 = & - \frac{\partial P}{\partial x_0} - 4A^2 e_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_0} Dv_0\, Dv_1 \\
& + 4A^2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left(\mathfrak{u}_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\left(\mathfrak{v}_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_0}\right) \\ + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}\left(\mathfrak{w}_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_0}\right) \end{array} \right\} Dv_0\, Dv_1 \\
& - 4A^2 \left\{ e_1 i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right\} . Dv_0\, Dv_1 \\
& + 4A^2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\left(\mathfrak{u}_1 i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_1}\left(\mathfrak{v}_1 i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \frac{\partial \psi}{\partial x_0}\right) \\ + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1}\left(\mathfrak{w}_1 i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_0}\right) \end{array} \right\} Dv_0\, Dv_1
\end{aligned}
$$

so ist durch die Versuche der dritten Gruppe in Verbindung mit denen der ersten bewiesen, dass von den Componenten in welche die Gesammtwirkung in der Richtung der X Axe durch die rechte Seite der obigen Gleichung aufgelöst ist, die drei ersten existiren; dann verlangt aber das Gesetz der Gleichheit von Aktion und Reaktion auch die Existenz der beiden letzten Componenten, d. h. des ganzen auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Ausdrucks. Da aber dieser Ausdruck nichts anderes ist, als eine Transformation des Ampèreschen Gesetzes, so leuchtet ein, dass durch die Experimente der dritten Gruppe nachgewiesen ist, dass das Ampèresche Gesetz in der That als Ausdruck der zwischen zwei Elementen Dv_0 und Dv_1 wirkenden Kraft zu betrachten ist. Es bleibt dann noch die Alternative, ob wir das Ampèresche Gesetz als ein nicht weiter zu reducirendes Elementargesetz betrachten wollen, oder ob wir es zerlegen wollen in einzelne Componenten, welche dann möglicherweise ganz verschiedenen Ursachen ihre Existenz verdanken können; eine solche Zerlegung würde in allgemeinster Weise gegeben sein durch die Formeln II und III; mit Bezug auf welche noch hinzugefügt werden muss, dass der Werth der Constante k vorläufig als völlig unbestimmt zu betrachten sein würde.

Wenn sich aus dem vorhergehenden ergeben hat, dass das Ampèresche Gesetz als der thatsächliche Ausdruck der zwischen zwei Elementen Dv_0 und Dv_1 vorhandenen Wirkung zu betrachten ist, so fragt sich nun ob nicht ausser den Ampère'schen noch andere Wirkungen zwischen zwei Elementen Dv_0 und Dv_1 existiren, ob also die ersteren auch als der vollständige Ausdruck der beobachtbaren Wirkungen zu betrachten sind. Mit Bezug hierauf können wir bemerken, dass schon im Ampèreschen Gesetz selbst scheinbar Wirkungen enthalten sind, welche zwischen Ansammlungen freier Elektricität einerseits und galvanischen Strömungen andererseits oder zwischen Sammelstellen freier Elektricität unter sich stattfinden. Da über die Wirkung ungleichförmiger und ungeschlossener Ströme keine experimentellen Thatsachen vorliegen, so bleibt vollständig unentschieden, ob nicht in Wirklichkeit besondere Kräfte noch zu den Ampèreschen hinzutreten, welche von Sammelstellen freier Elektricität ausgeübt werden entweder auf Stromkomponenten oder auf andere ebensolche Stellen. Soweit sich also das Helmholtzsche Gesetz wenigstens in der ihm neuerdings gegebenen Gestalt von dem Ampèreschen nur durch Hinzufügung solcher Kräfte unterscheidet, sind von experimentellem Standpunkte aus keine Einwände gegen dasselbe zu machen.

Was die Versuche der zweiten Gruppe anbelangt, so würden diese Versuche für sich allein unentschieden lassen, ob die hierher gehörigen Erscheinungen herrühren von den Ampèreschen auf die einzelnen Elemente des rotirenden Leiters wirkenden Kräften oder von einer einzelnen Kraft, welche ihren Ursprung der Gleitstelle verdankte; aber wenn auch durch die übrigen Versuche die Existenz jener Ampèreschen Kräfte bewiesen wird, so ist doch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen dass zu den Ampèreschen Kräften noch besondere Wirkungen hinzutreten, ausgehend von solchen Punkten, in welchen plötzliche Geschwindigkeitsänderungen der strömenden Elektricität stattfinden.

Endlich dürfte auch mit Bezug auf die Versuche der dritten Gruppe noch genauer zu untersuchen sein, in wie weit durch dieselben die wirkenden Kräfte in eindeutiger Weise bestimmt sind. Die Existenz longitudinaler Kräfte wenigstens ist durch dieselben nicht ausgeschlossen und eine vierte Gruppe von Versuchen, welche sich auf diese longitudinalen Wirkungen bezieht dürfte vorläufig noch nicht den wünschenswerthen Grad von Genauigkeit besitzen, um sichere Schlüsse auf dieselbe gründen zu können.

II. Das electromotorische Elementargesetz und das Gesetz der Erhaltung der Energie.

Die Vorstellungen, welche den Betrachtungen dieses zweiten Abschnittes zu Grunde liegen, sind im wesentlichen dieselben wie im ersten Abschnitte. Das elektromotorische Elementargesetz wird in demselben zuerst in einer etwas allgemeineren Form aufgestellt, und es wird sodann untersucht werden, welche näheren Bestimmungen nothwendig oder genügend sind, wenn dasselbe in Verbindung mit dem Ampèreschen ponderomotorischen Gesetz dem Princip der Erhaltung der Energie genügen soll.

Die nach der Richtung s_0 genommene Componente derjenigen elektromotorischen Kraft, welche in dem Element Dv_0 hervorgerufen wird durch seine relative Bewegung gegen Dv_1 kann dem Weber'schen Gesetz entsprechend dargestellt werden durch den Ausdruck:

$$S_0 = 8A^2 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial s_1\, \partial\tau} Dv_0\, Dv_1$$

wo τ die Zeit bezeichnet, sofern die räumliche Lage der beiden Elemente Dv_0 und Dv_1 von derselben abhängt.

Eine einfache Transformation vollkommen analog der in I, 1 ausgeführten giebt:

$$\begin{aligned} S_0 &= 4A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right\} Dv_0\, Dv_1 \\ &- 4A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial s_0}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right\} Dv_0\, Dv_1 \\ &+ 4A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\right\} Dv_0\, Dv_1. \end{aligned}$$

Andererseits ist dieselbe elektromotorische Kraft nach dem F. Neumannschen Gesetze gegeben durch

$$S_0 = -8A^2 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial s_0 \partial s_1} Dv_0 Dv_1$$

oder durch

$$\begin{aligned} S_0 = {} & 4A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right\} Dv_0 Dv_1 \\ & - 4A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial s_0}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right\} Dv_0 Dv_1 \\ & - 4A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\right\} Dv_0 Dv_1 . \end{aligned}$$

Wir kombiniren beide Gesetze durch Multiplikation mit $\frac{1+k'}{2}$ und $\frac{1-k'}{2}$ und Addition und erhalten dann:

$$\begin{aligned} S_0 = {} & 4A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right\} Dv_0 Dv_1 \\ & - 4A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial s_0}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right\} Dv_0 Dv_1 \\ & + 4k' A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\right\} Dv_0 Dv_1 \end{aligned}$$

Ganz analoge Formeln ergeben sich natürlich für die elektromotorische Kraft, welche umgekehrt von dem Element Dv_0 durch die in demselben vorhandene Strömung i_0 hervorgerufen wird in Dv_1.

Ausser den durch die relative Bewegung der beiden Elemente inducirten elektromotorischen Kräften kommen auch die durch Aenderung der Stromintensitäten hervorgerufenen Kräfte in Betracht. Wenn wir die Zeit, sofern dieselbe Argument der in Dv_1 und Dv_0 vorhandenen Strömungen ist bezeichnen durch T_1 und T_0, so ergiebt sich für die von dem Element Dv_1 in dem Element Dv_0 nach der Richtung s_0 inducirte Kraft nach dem Weberschen Gesetze der Werth:

$$S'_0 = 4A^2 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial i_1}{\partial T_1} Dv_0 Dv_1 .$$

D*

Fügen wir zu dieser Kraft noch den Ausdruck $q A^2 \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial s_0 \, \partial s_1} Dv_0 \, Dv_1$ so erhalten wir eine allgemeinere Darstellung der Componente S'_0

$$S'_0 = 4 A^2 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{di_1}{dT_1} \cdot Dv_0 \, Dv_1$$

$$+ q A^2 \frac{\partial^3(\psi^2)}{\partial s_0 \partial s_1} \cdot \frac{di_1}{dT_1} Dv_0 \, Dv_1$$

welche für $q = 1$ in die zweite von F. Neumann gegebene Form des elektromotorischen Elementargesetzes übergeht. Durch eine ganz analoge Formel wird umgekehrt die durch die Stromschwankung in Dv_0 in dem Element Dv_1 inducirte elektromotorische Kraft gegeben.

Für die gesammte elektromotorische Wirkung welche von dem Ele- Dv_1 auf das Element Dv_0 nach der Richtung s_0 ausgeübt wird, ergiebt sich somit der Werth:

$$S_0 = 4 A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \right\} Dv_0 \, Dv_1 - 4 A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial s_0} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \right\} Dv_0 \, Dv_1$$

$$+ 4 k' A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \right\} Dv_0 \, Dv_1$$

$$+ 4 A^2 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{di_1}{dT_1} Dv_0 \, Dv_1 + q A^2 \cdot \frac{\partial^2(\psi^2)}{\partial s_0 \partial s_1} \cdot \frac{di_1}{dT_1} Dv_0 \, Dv_1$$

Sind, wie diess schon im Vorhergehenden stillschweigend angenommen war, s_0 und s_1 die Richtungen, in welchen die Strömungen i_0 und i_1 in den beiden Elementen Dv_0 und Dv_1 in Wirklichkeit stattfinden, so ist die von sämmtlichen Kräften S_0 und S_1 während eines kleinen Zeitelementes *dt* geleistete elektromotorische Arbeit bezogen auf die Einheit der Zeit gegeben durch

$$
\begin{aligned}
S_0 i_0 + S_1 i_1 = {} & 8 A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right\} D v_0 D v_1 \\
& - 4 A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_0}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right\} D v_0 D v_1 \\
& - 4 A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_0}\right\} D v_0 D v_1 \\
& + 4 k' A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_0}\right\} D v_0 D v_1 \\
& + 4 k' A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_0}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right\} D v_0 D v_1 \\
& + 4 A^2 \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1} i_0 \frac{d i_1}{d \mathrm{T}_1} D v_0 D v_1 \\
& + 4 A^2 \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1} i_1 \frac{d i_0}{d \mathrm{T}_0} D v_0 D v_1 \\
& + q A^2 \frac{\partial^2 (\psi^2)}{\partial s_0 \partial s_1}\cdot i_0 \frac{d i_1}{d \mathrm{T}_1} D v_0 D v_1 \\
& + q A^2 \frac{\partial^2 (\psi^2)}{\partial s_0 \partial s_1}\cdot i_1 \frac{d i_0}{d \mathrm{T}_0} D v_0 D v_1 .
\end{aligned}
$$

Beachten wir dass die vollständige Differentiation nach der Zeit t, sich zusammensetzt aus den 3 partiellen Differentiationen nach τ, T_0, T_1 so dass:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{T}_0} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{T}_1}$$

so kann die obige Gleichung auf die Form gebracht werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} = {} & \frac{d}{dt}\left\{4 A^2 i_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1} D v_0 D v_1\right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{4 A^2 i_0 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1} D v_0 D v_1\right\} \\
& - 4 A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_0}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right\} D v_0 D v_1 \\
& - 4 A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right\} D v_0 D v_1 \\
& + 4 k' A^2 i_0 i_1 \left\{\frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right) + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_0}\right)\right\} D v_0 D v_1 \\
& + q A^2 \frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\left\{i_0 i_1 \frac{\partial^2 (\psi^2)}{\partial s_0 \partial s_1}\right\} D v_0 D v_1 .
\end{aligned}
$$

Hier ist dQ die von den elektromotorischen Kräften in der Zeit dt geleistete Arbeit, d. h. die in dieser Zeit erzeugte Wärmeenergie.

Die von dem Elemente Dv_1 auf das Element Dv_0 ausgeübte ponderomotorische Arbeit ist auf der anderen Seite gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{dT_0}{dt} = &- \frac{\partial}{\partial\tau_0}\left\{4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_1} Dv_0\, Dv_1\right\}\\ &+ 4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_0}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\tau_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right\} Dv_0\, Dv_1\\ &+ 4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\tau_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_0}\right\} Dv_0\, Dv_1\end{aligned}$$

wobei als hypothetischer Ausdruck der vollständigen zwischen den Elementen Dv_0 und Dv_1 vorhandenen ponderomotorischen Wirkung das Ampèresche Gesetz zu Grunde gelegt ist.

Die Formel für die entsprechende von Dv_0 auf Dv_1 ausgeübte ponderomotorische Arbeit ist:

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} = &- \frac{\partial}{\partial\tau_1}\left\{4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_1} Dv_0\, Dv_1\right\}\\ &+ 4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_0}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\tau_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right\} Dv_0\, Dv_1\\ &+ 4A^2 i_0 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\tau_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_0}\right\} Dv_0\, Dv_1;\end{aligned}$$

in diesen Gleichungen bezeichnet τ_0 und τ_1 die Zeit, sofern die räumliche Lage der Elemente Dv_0 und Dv_1 von derselben abhängt und ist demnach

$$\frac{\partial\,.}{\partial\tau} = \frac{\partial\,.}{\partial\tau_0} + \frac{\partial\,.}{\partial\tau_1}.$$

Für die Summe der von den elektromotorischen und ponderomotorischen Kräften bei der Bewegung der beiden Elemente geleisteten Arbeiten ergiebt sich somit:

$$\begin{aligned}dQ + dT = dP\\ + 4k' A^2 i_0 i_1 \left\{\frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\,\frac{\partial\psi}{\partial s_0}\right)\right\} Dv_0\, Dv_1\,.\,dt\\ + qA^2 \frac{d}{\partial T}\left\{i_0\, i_1 \frac{\partial^2(\psi^2)}{\partial s_0\,\partial s_1} Dv_0\, Dv_1\right\} dt\end{aligned}$$

Der von C. Neumann in seinem Werke »die elektrischen Kräfte« ausgeführten Untersuchung zufolge muss aber in jedem sich selber überlassenen Systeme die Summe der ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten elektrodynamischen Ursprungs für sich allein gleich einem vollständigen Differentiale sein; diese aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft fliessende Forderung kann aber durch den oben gegebenen Werth von $dQ + dT$ offenbar nur erfüllt werden, wenn die Constanten k' und q beide gleich Null sind, und wir werden somit zu folgendem Ausdrucke des elektromotorischen Elementargesetzes hingedrängt:

$$S_0 = 4A^2 i_1 \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right)\right\} Dv_0\, Dv_1$$
$$+ 4A^2 \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\cdot\frac{di_1}{d\mathrm{T}_1} Dv_0\, Dv_1.$$

Ein Gesetz welches auch in die Form gebracht werden kann:

$$S_0 = 8A^2 i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial s_1\, \partial r} Dv_0\, Dv_1$$
$$+ 4A^2 \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\cdot\frac{di_1}{d\mathrm{T}_1} Dv_0\, Dv_1$$
$$- 4A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_0}\right\} Dv_0\, Dv_1$$

in welcher seine Beziehung zum Weberschen Gesetze unmittelbar zu Tage tritt.

Dass das Gesetz zu welchem wir hier gelangt sind, identisch ist mit demjenigen zu welchem C. Neumann durch seine umfassende und scharfsinnige Analyse geführt worden ist, ergiebt sich unmittelbar, wenn wir die Componenten der elektromotorischen Kraft S_0, welche von dem Element Dv_1 in dem Element Dv_0 inducirt wird, nach den Axen $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ des mit dem Körper A fest verbundenen Coordinatensystems berechnen. Es ergiebt sich, wenn wir diese Componenten bezeichnen durch $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$:

$$\mathfrak{X}_0 = 4A^2 i_1 \left\{\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{x}_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right)\right\} Dv_0\, Dv_1$$

$$+ 4A^2 \frac{\partial \psi}{\partial s_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\cdot\frac{di_1}{dT_1} Dv_0\, Dv_1$$

oder da

$$i_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{x}_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{x}_0}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\cdot\frac{di_1}{dT_1} = \frac{d}{dt}\left(i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{x}_0}\right)$$

$$\mathfrak{X}_0\, dt = 4A^2\left[d\left(i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{x}_0}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_0}\left(i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\cdot \partial \psi\right)\right] Dv_0\, Dv_1$$

$$\mathfrak{Y}_0\, dt = 4A^2\left[d\left(i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{y}_0}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_0}\left(i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\cdot \partial \psi\right)\right] Dv_0\, Dv_1$$

$$\mathfrak{Z}_0\, dt = 4A^2\left[d\left(i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{z}_0}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_0}\left(i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1}\cdot \partial \psi\right)\right] Dv_0\, Dv_1$$

wo

$$\partial \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\cdot dt.$$

Die letzteren Formeln sind aber im Wesentlichen identisch mit denjenigen, welche C. Neumann auf Seite 205 seines Werkes »die elektrischen Kräfte» gegeben hat. Gegenüber der von C. Neumann durchgeführten Untersuchung haben die im vorhergehenden mitgetheilten Rechnungen lediglich den Zweck, zu dem von ihm eruirten elektromotorischen Elementargesetze auf einem möglichst einfachen Wege hinzugelangen und andererseits die Beziehung desselben zu den Gesetzen von Weber und F. Neumann hervortreten zu lassen. Dass jenes Gesetz das einzige ist, welches mit dem Princip der Erhaltung der Energie sich im Einklange befindet, wenigstens so lange, als das Ampèresche Gesetz als der vollständige Ausdruck der zwischen zwei Stromelementen vorhandenen ponderomotorischen Wirkung betrachtet wird, ist das Resultat der von C. Neumann von den allgemeinsten Grundlagen aus durchgeführten mühevollen Untersuchung.

Wenn also

1. Das Ampèresche Gesetz als vollständiger Ausdruck der ponderomotorischen Wechselwirkung zweier Stromelemente betrachtet wird, und

2. die Anforderung gestellt wird, dass das Princip der Erhaltung der Energie für je zwei Elemente der Körper A und B gewahrt bleiben soll, so wird man mit Nothwendigkeit hingeführt zu dem von Carl Neumann aufgestellten elektromotorischen Elementargesetze.

In Betreff der Berechtigung der ersten Hypothese kann hingewiesen werden auf die Bemerkungen, welche wir am Schlusse des ersten Theiles der vorliegenden Untersuchung gemacht haben. Es bleibt daher nur übrig auch die zweite Forderung einer näheren Untersuchung zu unterwerfen. Es sind mit Bezug auf dieselbe zwei Alternativen möglich; man kann entweder verlangen, dass das Princip der Erhaltung der Energie für zwei von galvanischen Strömen durchflossene Leiterelemente Dv_0 und Dv_1 unter allen Umständen gelten soll, also auch dann, wenn die beiden Elemente zwei grösseren leitenden Körpern A und B angehören, oder aber kann man sagen: das Princip der Energie braucht für ein Elementenpaar Dv_0 und Dv_1 nur dann erfüllt zu sein wenn dasselbe isolirt ist, d. h. jedes Element rings umgeben von einem nichtleitenden Körper. Im erstern Falle würde das C. Neumannsche Gesetz in der That die zwischen irgend zwei Elementen stattfindende elektromotorische Gesammtwirkung repräsentiren; im zweiten Falle dagegen können wir folgendes bemerken, wenn zwei Leiterelemente rings umgeben sind von nichtleitender Substanz, so ist eine galvanische Strömung der Elektricität in denselben nicht denkbar ohne gleichzeitige elektrostatische Ladungen, welche durch die Strömung an der Oberfläche und im Innern erzeugt werden. In diesem Fall kann also die elektromotorische Kraft, welche von dem einen Element auf das andere ausgeübt wird herrühren einmal von der in Strömung befindlichen Elektricität, dann aber auch von den entstehenden oder verschwindenden statischen Ladungen. Nun lässt sich die nach dem C. Neumann'schen Gesetze stattfindende gesammte elektromotorische Wirkung zerlegen in zwei Componenten; die erste derselben ist identisch mit der Weberschen Kraft, die zweite hat den Werth

$$\Sigma_0 = -4A^2 i_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_0}\right\} Dv_0\, Dv_1$$

Diese Zusatzkraft zu der Weberschen elektromotorischen Kraft kann auf Grund der im ersten Abschnitt eingeführten Bezeichnungen auf die Form gebracht werden:

$$\Sigma_0 = -4A^2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\left(\mathfrak{u}_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_1}\left(\mathfrak{v}_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right) \\ + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1}\left(\mathfrak{w}_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right) \end{array} \right\} Dv_0 \, Dv_1$$

$$+ 4A^2 e_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \cdot Dv_0 \, Dv_1$$

oder wenn wir eine Integration über die Oberfläche des Elementes Dv_1 in den ersten drei Termen ausführen:

$$\Sigma_0 = 4A^2 \left\{ \mathrm{S} f_1 Do_1 + e_1 Dv_1 \right\} \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} Dv_0 .$$

Wir sehen also dass diese Neumann'sche Zusatzkraft in der That nur abhängt von den freien Elektricitäten, welche sich in dem Element Dv_1 ansammeln. Wenn also das Princip der Erhaltung der Energie nur für zwei physisch isolirte Leiterelemente gelten soll, so kann das C. Neumannsche Elementargesetz auch ersetzt werden durch ein anderes Gesetz, welchem zufolge die von einem Körper B, welcher Träger irgend welcher elektrischer Strömungen ist, auf einen Punkt eines leitenden Körpers A ausgeübten elektromotorischen Wirkungen zwei ganz verschiedenen Ursachen ihr Dasein verdanken; nemlich erstens den in B vorhandenen galvanischen Strömungen, zweitens den in B stattfindenden Ansammlungen freier Elektricität. Die von den galvanischen Strömen herrührenden elektromotorischen Kräfte bestimmen sich dann nach dem Weberschen Gesetz. Wenn aber ausserdem eine Stelle des Körpers B ein Sammelpunkt freier Elektricität ist, so wird von derselben auf irgend einen Punkt des Leiters A eine weitere elektromotorische Kraft ausgeübt, deren Componente nach der Richtung s_0 gegeben ist durch:

$$\Sigma_0 = -4A^2 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \cdot Dv_0$$

wo ε_1 die ganze Menge freier Elektricität bezeichnet, welche an der betrachteten Stelle zur Zeit t koncentrirt zu denken ist.

Es wird also, wenn wir diese Auffassung adoptiren, bei Zugrundelegung des Ampèreschen ponderomotorischen Gesetzes das Princip der Energie dadurch gewahrt, dass zu dem Weber'schen elektromotorischen Elementargesetz noch eine Zusatzkraft gefügt wird, ausgehend von den Stellen, welche Sammelpunkte freier Elektricität bilden. Es leuchtet ein, dass man auch umgekehrt das Ampèresche Gesetz als vollständigen Ausdruck der ponderomotorischen Wirkungen fallen lassen, das Webersche Gesetz als den vollständigen Ausdruck der elektromotorischen Wirkungen adoptiren könnte; das Princip der Energie würde dann gewahrt werden durch eine Zusatzkraft zu dem Ampèreschen Gesetz, welche ihren Ursprung ebenfalls in den Sammelstellen freier Elektricität haben würde; eine genauere Betrachtung zeigt, dass diese Zusatzkraft zu dem Ampèreschen Gesetze aus zwei Componenten bestehen würde, von welchen die eine entspräche einer Wirkung der im Elemente Dv_1 stattfindenden Ansammlungen freier Elektricität auf die Strömung im Elemente Dv_0, die andere umgekehrt einer Wirkung der Strömung des Elementes Dv_1 auf die Ansammlung freier Elektricität in Dv_0.

Bezeichnen wir durch ε_1 die ganze Menge freier Elektricität, welche sich zur Zeit t im Inneren oder auf der Oberfläche des Elementes Dv_1 befindet, durch ε_0 ebenso die freie Elektricität des Elementes Dv_0, so ergiebt sich für die Componente der Zusatzkraft zu dem Ampèreschen Gesetz nach der X Axe des im Raume festen Coordinatensystemes der Werth

$$- 4A^2 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \cdot Dv_0$$

$$- 4A^2 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} i_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \cdot Dv_0$$

und zwar ist diess die X Componente der von dem Elemente Dv_1 auf Dv_0 ausgeübten Wirkung.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1875

Band/Volume: 20

Autor(en)/Author(s): Riecke Eduard

Artikel/Article: Ueber die electrischen Elementargesetze 3-35