Ueber die Bewegungen der Elektricität in körperlichen Leitern, insbesondere über elektrische Schwingungen in einer leitenden Kugel

von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Ges. d. Wiss. am 6. Mai 1876.

Dem Versuche in den Zusammenhang der Naturerscheinungen einzudringen bieten sich zwei verschiedene Wege dar; der eine derselben besteht in der Erforschung der inneren Constitution der Körper und Körperarten und der Grundkräfte, mit welchen die Körper auf einander wirken. In dieser Weise werden alle elektrodynamischen Erscheinungen, welche ihren Grund in der Existenz konstanter und ruhender Ströme haben, erklärt durch das von Ampère für die Wechselwirkung zweier Stromelemente aufgestellte Grundgesetz. Es kann aber dieses Grundgesetz kein wahres Grundgesetz der elektrischen Erscheinungen sein, da es dann auf alle möglichen Arten elektrischer Wirkungen Anwendung finden müsste, während doch die elektrostatischen und elektromotorischen Erscheinungen in demselben nicht enthalten sind. Um also zu einem alle elektrischen Erscheinungen umfassenden Grundgesetze zu gelangen, war es nothwendig, einmal über die Constitution der in einem Leiterelement in galvanischer Strömung befindlichen Elektricität eine bestimmte Vorstellung sich zu bilden, und dann die komplicirte Wirkung, deren Ausdruck das Ampère'sche Gesetz ist, zu zerlegen in ihre Componenten, d. h. in die zwischen den einzelnen elektrischen Theilchen wirkenden Grundkräfte. Es ist dies der Weg, auf welchem Wilhelm Weber zu seinem Grundgesetze der elektrischen Wechselwirkung gelangt ist, welches als ein wahres Grundgesetz auf alle elektrischen Erscheinungen, durch welche Bewegungen der Elektricität sie auch hervorgerufen sein mögen, Anwendung findet.

Ebenso werden die Bewegungserscheinungen der Weltkörper erklärt durch das Newton'sche Gesetz der Fernwirkung ponderabeler Körper; die Erscheinungen des Lichts durch die von Fresnel gemachte Annahme einer molekularen Constitution des Lichtäthers, des stabilen Gleichgewichts der Moleküle in ihrer isolirten Stellung und einer molekularen nur von der Entfernung abhängenden Wechselwirkung.

Dieser auf die wahre Constitution der Körper und die zwischen denselben wirkenden Grundkräfte gerichteten Forschung stellen wir gegenüber diejenige Methode, welche den Zusammenhang der Erscheinungen lediglich durch gewisse allgemeine Principien, in erster Linie das Princip der Erhaltung der Energie begründet, und eben durch die Anwendung jener allgemeinen Principien die Entwicklung bestimmter Vorstellungen über die innere Natur der Körper zu umgehen sucht. Als eine solche Theorie, welche von bestimmten Vorstellungen über die Constitution der Körper unabhängig auf Grund allgemeiner Principien sich entwickeln lässt, ist in erster Linie zu nennen die mechanische Theorie der Wärme; dieselbe Methode der Forschung ist indessen auch, insbesondere von Carl Neumann, auf die elektrischen Erscheinungen angewandt worden, und es hat sich in der That ergeben, dass durch das Princip der Erhaltung der Energie ein solcher Zusammenhang zwischen den einzelnen Gebieten der Elektricitätslehre hergestellt wird, dass die für das eine dieser Gebiete geltenden Elementargesetze aus demselben entwickelt werden können, sobald die für die anderen Gebiete geltenden Gesetze als bekannt angenommen werden. Es findet aber zwischen den Gesetzen, welche auf diesem Wege eruirt werden können, und zwischen den aus dem Weber'schen Grundgesetz sich ergebenden Gesetzen eine gewisse Differenz statt; es unterscheidet sich nemlich das von Neumann abgeleitete Induktionsgesetz von dem Weber'schen durch eine gewisse Zusatzkraft, welche ausgeht von solchen Stellen der leitenden Körper, in welchen Ansammlungen freier Elektricität stattfinden, und in einer im 20sten Bande der Abhandlungen der Kgl. Ges. d. Wiss. enthaltenen Arbeit habe ich den Nachweis geliefert, dass alle möglichen Gesetze welche auf Grund des durch das Princip der Erhaltung der Energie gegebenen Zusammenhangs für die elektrischen Elementarwirkungen aufgestellt werden können, sich von dem Ampère'schen und Weber'schen Gesetz immer nur durch solche von Sammelstellen freier Elektricität ausgehende Kräfte unterscheiden können.

Mit Bezug auf dieses Resultat schien eine genauere Erforschung solcher elektrischer Bewegungen von besonderem Interesse zu sein, bei welchen Ansammlungen freier Elektricität in Wirklichkeit eintreten, und diess ist der Fall bei der Bewegung der Elektricität in körperlichen Leitern. Die von Kirchhoff uud Weber aufgestellten, von Helmholtz später verallgemeinerten Gleichungen für die Bewegung der Elektricität in ruhenden körperlichen Leitern sind in der eingehendsten Weise untersucht in der ausgezeichneten Abhandlung von Lorberg: „Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in nicht linearen Leitern" im 71. Bande des Crelleschen Journals. Lorberg hat nicht nur jene allgemeinen Bewegungsgleichungen reducirt auf ein System verhältnissmässig einfacher Differentialgleichungen, sondern auch für den Fall der ruhenden Kugel die vollständige Lösung des Problems bei beliebig wirkenden äusseren Kräften elektrostatischen oder elektrodynamischen Ursprungs gegeben; in der speciellen Anwendung der allgemeinen Resultate beschränkt er sich auf den Fall von Kräften, welche gegen den Radius der Kugel senkrecht gerichtet sind, einen Fall, in welchem also Ansammlungen freier Elektricität von vornherein ausgeschlossen sind. Die folgende Abhandlung enthält in ihrem ersten Theile eine Wiederholung der Rechnungen, durch welche Lorberg zu der Lösung des Problems in seiner allgemeinsten Form gelangt ist; nur ist an Stelle des Weber'schen Induktionsgesetzes, welches den Untersuchungen von Lorberg zu Grunde liegt, das allgemeinere Helmholtz'sche Induktionsgesetz getreten und sind in den Reihenentwicklungen, welche bei der Integration der Differentialgleichungen Anwendung finden, gewisse Aenderungen vorgenommen, durch welche sich die Darstellung der resultirenden Integrale vereinfacht; gleichzeitig sind die zur Auflösung der Gleichungen nothwendigen Rechnungsoperationen, von welchen Lorberg kaum mehr als die Resultate mittheilt, in etwas ausführlicherer Form dargelegt, soweit diess zum Verständniss der Entwicklung wünschenswerth erschien. Der zweite Theil der Arbeit behandelt dann insbesondere diejenigen Bewegungen der Elektricität, welche in einer leitenden Kugel durch einen schwingenden Magnet hervorgerufen werden. Obwohl nun diese Bewegungen in Wirklichkeit mit Anhäufungen freier Elektricität verbunden sind, so war doch eine Entscheidung der zwischen den verschiedenen elektrischen Elementargesetzen bestehenden Alternative durch eine Untersuchung dieser Bewegungen von vornherein nicht zu erwarten, da einer von Helmholtz gemachten Bemerkung zu Folge die zwischen den verschiedenen Gesetzen vorhandenen Differenzen bei ruhenden Leitern der Beobachtung sich unter allen Umständen entziehen werden. Wenn trotzdem im Folgenden eine Untersuchung der in einer ruhenden leitenden Kugel auftretenden elektrischen Bewegungen ausgeführt ist, so geschah das aus doppeltem Grunde: einmal erschien es wünschenswerth, zunächst den von theoretischer und experimenteller Seite einfacheren Fall des ruhenden Leiters einer eingehenden Behandlung zu unterwerfen, gewissermassen als Vorarbeit für die komplicirteren Verhältnisse bei bewegtem Leiter. Dann aber scheint der Fall eines ruhenden Leiters auch an und für sich nicht ohne Interesse zu sein, so fern er Gelegenheit giebt zu einer einfachen quantitativen Prüfung der für die Elektricitätsbewegung in körperlichen Leitern aufgestellten Gesetze, an welcher es zur Zeit noch fehlen dürfte.

I. Die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung der Elektricität in körperlichen Leitern.

Bei Zugrundelegung der von Helmholtz gebrauchten Bezeichnungen sind diese Gleichungen

$$\begin{aligned}\lambda u + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A^2 \frac{dU}{dt} - X &= 0\\ \lambda v + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + A^2 \frac{dV}{dt} - Y &= 0\\ \lambda w + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + A^2 \frac{dW}{dt} - Z &= 0.\end{aligned} \tag{1.}$$

Hier sind u, v, w die an irgend einer Stelle x, y, z des Leiters vorhandenen Strömungskomponenten, φ ist das Potential der freien Elektricität; X, Y, Z sind die Componenten der gegebenen äusseren elektromotorischen Kräfte; die Grössen U, V, W sind gegeben durch folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \iiint \frac{u'}{r}\, dx'\, dy'\, dz'\\ V &= \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \iiint \frac{v'}{r}\, dx'\, dy'\, dz'\\ W &= \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \iiint \frac{w'}{r}\, dx'\, dy'\, dz'\end{aligned} \tag{2.}$$

wo

$$\Psi = \iiint \left\{ u' \frac{\partial r}{\partial x'} + v' \frac{\partial r}{\partial y'} + w' \frac{\partial r}{\partial z'} \right\} dx'\, dy'\, dz'$$

In diesen Integralen bezeichnet dx', dy', dz' das Volumen eines an der Stelle x', y', z' befindlichen Raumelements, u', v', w', die in demselben vorhandenen Strömungskomponenten und ist:

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Endlich bezeichnet in den für die Bewegung der Elektricität gegebenen Gleichungen λ den Leitungswiderstand und ist

$$A = \frac{\sqrt{2}}{c}$$

wo c die Constante des Weberschen Gesetzes.

Zu den vorhergehenden Gleichungen treten noch hinzu diejenigen Gleichungen, durch welche die Dichtigkeit der freien Elektricität gebunden ist an die Strömungskomponenten u, v, w; nemlich in irgend einem Punkte im Inneren des gegebenen leitenden Körpers die Gleichung

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d\Delta\varphi}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3}$$

und in irgend einem Punkt der Oberfläche die Gleichung

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d^2\varphi}{dt\,dn} - \frac{d^2\varphi_a}{dt\,dn}\right\} = u'\frac{dx'}{dn} + v'\frac{dy'}{dn} + w'\frac{dz'}{dn}. \tag{3a}$$

Hier bezeichnet n die innere Normale der Oberfläche in dem betrachteten Punkte x', y', z'; u', v', w' sind die in demselben vorhandenen Strömungskomponenten, φ der dem Inneren des Körpers entsprechende Werth des Potentiales der freien Elektricität, während die im umgebenden äusseren Raume geltenden Potentialwerthe durch φ_a bezeichnet sind.

Aus den vorhergehenden Gleichungen, durch welche das vorliegende Problem vollständig bestimmt ist, ergiebt sich zunächst in sehr einfacher Weise eine Differentialgleichung, welcher das Potential der freien Elektricität im Innern des leitenden Körpers genügen muss; differentiren wir die Gleichungen 1 nach x, y und z, so ergiebt sich durch Addition derselben mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -k\frac{d\varphi}{dt}$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} + \frac{4\pi}{\lambda}.\Delta\varphi - 4\pi\frac{A^2}{\lambda}k\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \qquad (I$$

Es ergiebt sich ferner durch Anwendung der Operation Δ auf die erste der Gleichungen 1

$$\lambda\Delta u + \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x} + A^2\frac{d\Delta U}{dt} = 0$$

oder wenn wir für ΔU seinen Werth aus der Gleichung

$$\Delta U = (1-k)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, dt} - 4\pi u$$

einsetzen und gleichzeitig mit $\frac{4\pi}{\lambda}$ multipliciren:

$$4\pi\Delta u + \frac{4\pi}{\lambda}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x} + (1-k)4\pi\frac{A^2}{\lambda}\frac{\partial^3\varphi}{dt^2\partial x} - 16\pi^2\frac{A^2}{\lambda}\frac{du}{dt} = 0.$$

Ziehen wir von dieser Gleichung ab die nach x differenzirte Gleichung I, so ergiebt sich:

$$4\pi\Delta u - \frac{\partial^2\Delta\varphi}{\partial x\, dt} + 4\pi\frac{A^2}{\lambda}\frac{\partial^3\varphi}{dt^2\partial x} - 16\pi^2\frac{A^2}{\lambda}\frac{du}{dt} = 0.$$

Setzen wir endlich

$$4\pi u = \chi_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, dt},$$

so geht die letztere Gleichung über in:

$$\Delta\chi_1 - 4\pi\frac{A^2}{\lambda}\frac{d\chi_1}{dt} = 0.$$

In ganz derselben Weise lassen sich die zweite und dritte der Gleichungen 1 behandeln, und wir gelangen dann zu dem Resultat:

Zerlegt man die Stromkomponenten u, v, w in je zwei Theile durch die Formeln:

$$
\begin{aligned}
4\pi u &= \chi_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, dt} \\
4\pi v &= \chi_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, dt} \qquad \text{(II} \\
4\pi w &= \chi_3 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, dt}
\end{aligned}
$$

so sind die Funktionen χ_1, χ_2, χ_3 partielle Lösungen einer und derselben Differentialgleichung

$$\varDelta\chi - 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \frac{d\chi}{dt} = 0. \qquad \text{(III}$$

Substituiren wir ferner die für u, v, w gegebenen Ausdrücke in der Gleichung 3, so ergiebt sich folgende Bedingung, welcher die Funktionen χ_1, χ_2 und χ_3 im Inneren des gegebenen leitenden Körpers zu genügen haben:

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z} = 0. \qquad \text{(IV}$$

Es stellen somit die Ausdrücke

$$\frac{1}{4\pi}\chi_1,\ \frac{1}{4\pi}\chi_2,\ \frac{1}{4\pi}\chi_3$$

Antheile der Strömungen dar, welche nicht von einer Abscheidung freier Elektricität begleitet sind.

Die Bedeutung der im Vorhergehenden gegebenen Differentialgleichungen I und III ist natürlich darauf beschränkt, dass durch diese Differentialgleichungen die Möglichkeit gewisser Reihenentwicklungen für die Grössen φ und χ eröffnet wird; überdiess wird durch die Gleichung IV eine Beziehung zwischen den Coëfficienten der für die Grössen χ_1, χ_2, χ_3 geltenden Entwicklungen gegeben, und dadurch eine Reduktion der Anzahl der unbekannten Coëfficienten bedingt; immer aber wird die wirkliche Bestimmung jener Coëfficienten nur möglich sein durch Zurückgehen auf die ursprünglichen Bedingungsgleichungen 1, in welchen allein diejenigen Grössen vollständig enthalten sind, durch welche das specielle Problem charakterisirt wird. Weingarten hat indess zuerst darauf hingewiesen, dass jene Gleichungen 1, welche im ganzen Inneren des betrachteten Körpers erfüllt sein müssen, sich ersetzen lassen durch andere nur für die Oberfläche des Körpers geltende Bedingungen; diese die Lösung des Problems wesentlich vereinfachenden Bedingungen sollen zunächst abgeleitet werden.

Wir gehen aus von der im Vorhergehenden entwickelten Gleichung

$$4\pi \Delta u - \frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial x\, dt} + 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \frac{\partial^3 \varphi}{dt^2 \partial x} - 16\pi^2 \frac{A^2}{\lambda} \frac{du}{dt} = 0.$$

Setzen wir hier

$$4\pi \Delta u = \Delta \chi_1 + \frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial x\, dt}$$

so ergiebt sich wenn wir gleichzeitig durch 4π dividiren:

$$\frac{1}{4\pi} \Delta \chi_1 - 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \frac{du}{dt} + \frac{A^2}{\lambda} \frac{\partial^3 \varphi}{dt^2 \partial x} = 0.$$

Wir denken uns diese Gleichung aufgestellt für einen beliebig im Inneren des Körpers gelegenen Punkt x', y', z'; ausser diesem im Inneren des Körpers als veränderlich betrachteten Punkt nehmen wir einen zweiten Punkt x, y, z, ebenfalls im Inneren des Körpers, dessen Lage aber im Folgenden als unveränderlich festgehalten werden soll; wir dividiren die für den Punkt $x'y'z'$ aufgestellte Gleichung durch die Entfernung r dieses Punktes von dem Punkt xyz, multipliciren mit dem Inhalte des an der Stelle $x'y'z'$ vorhandenen Volumelementes und integriren die so transformirte Gleichung über das ganze Innere des gegebenen Körpers. Wir erhalten die Gleichung

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta \chi_1'}{r}\, dx'\, dy'\, dz' - 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \frac{d}{dt}\int \frac{u'}{r}\, dx'\, dy'\, dz' + \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2}\int \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \frac{1}{r}\, dx'\, dy'\, dz' = 0.$$

Es handelt sich nun darum, die in dieser Gleichung enthaltenen

Raumintegrale in Integrale zu transformiren, welche sich nur über die Oberfläche des gegebenen Körpers hinerstrecken.

Diese Transformation ergiebt sich in sehr einfacher Weise für den ersten Term der vorhergehenden Gleichung; es ist nemlich:

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\varDelta\chi_1'}{r}\,dx'\,dy'\,dz' = -\chi_1 - \frac{1}{4\pi}\mathsf{S}\frac{do}{r^2}\frac{d(r\chi_1')}{dn}$$

wo n die innere Normale der gegebenen Oberfläche in dem Element do.

Mit Bezug auf das zweite Integral

$$4\pi\frac{A^2}{\lambda}\frac{d}{dt}\int\frac{u'}{r}\,dx'\,dy'\,dz'$$

bemerken wir dass nach dem Vorhergehenden, Gl. 2.,

$$\frac{d}{dt}\int\frac{u'}{r}\,dx'\,dy'\,dz', = \frac{dU}{dt} - \frac{1-k}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,dt}$$

Es ist ferner nach Gl. 2^a.

$$\Psi = \iiint\left(u'\frac{\partial r}{\partial x'} + v'\frac{\partial r}{\partial y'} + w'\frac{\partial r}{\partial z'}\right)dx'\,dy'\,dz'$$

oder

$$\Psi = -\mathsf{S}\,r\left(u'\frac{dx'}{dn} + v'\frac{dy'}{dn} + w'\frac{dz'}{dn}\right)do - \iiint r\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)dx'\,dy'\,dz'$$

wo n die innere Normale der Oberfläche in dem Elemente do.

Mit Beziehung auf die Gleichungen 3 und 3^a nimmt der Werth von Ψ die Form an:

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left\{\mathsf{S}\,r\left(\frac{d\varphi'}{dn} - \frac{d\varphi_a}{dn}\right)do + \int r\,\varDelta\varphi'\,dx'\,dy'\,dy'\right\}$$

Auf der anderen Seite ist nach dem Green'schen Satze:

$$\int(r\,\varDelta\varphi' - \varphi'\,\varDelta r)\,dx'\,dy'\,dz' = -\mathsf{S}\left(r\frac{d\varphi'}{dn} - \varphi'\frac{dr}{dn}\right)do$$

Ziehen wir diese Gleichung ab von der vorhergehenden, so erhalten wir:

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int\frac{\varphi'}{r}dx'\,dy'\,dz' - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\mathrm{S}\left(\varphi'\frac{dr}{dn} - r\frac{d\varphi_a}{dn}\right)do.$$

und

$$\frac{\partial^2\Psi}{dt\,\partial x} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\varphi'\,dx'\,dy'\,dz' - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^3}{dt^2\,\partial x}\mathrm{S}\left(\varphi'\frac{dr}{dn} - r\frac{d\varphi_a}{dn}\right)do.$$

Für das zweite der in der ursprünglichen Gleichung enthaltenen Integrale ergiebt sich somit der Werth:

$$4\pi\frac{A^2}{\lambda}\frac{d}{dt}\int\frac{u'}{r}dx'\,dy'\,dz'$$

$$= 4\pi\frac{A^2}{\lambda}\cdot\frac{dU}{dt} + (1-k)\frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{S}\frac{\varphi'}{r}\frac{dx'}{dn}do$$

$$+ (1-k)\frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\int\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}dx'\,dy'\,dz'$$

$$+ \frac{1-k}{2}\cdot\frac{A^2}{\lambda}\frac{\partial^3}{dt^2\,\partial x}\mathrm{S}\left(\varphi'\frac{dr}{dn} - r\frac{d\varphi_a}{dn}\right)do\,^{1)}.$$

---

1) An die vorhergehenden Rechnungen schliesst sich eine Bemerkung, welche sich auf eine besonders einfache von Helmholtz gegebene Darstellung von Ψ bezieht; beachtet man dass in dem ganzen von dem Leiter nicht eingenommenen Raum $\Delta\varphi = 0$, so ist

$$\mathrm{S}\left(\varphi'\frac{dr}{dn} - r\frac{d\varphi_a}{dn}\right)do = 2\int\frac{\varphi}{r}dx_a\,dy_a\,dz_a$$

wo n die innere Normale der Oberfläche des leitenden Körpers in dem Element do, $dx_a\,dy_a\,dz_a$ ein Element des den Körper umgebenden Raumes bezeichnet.

Substituiren wir diesen Werth in der oben entwickelten Gleichung:

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int\frac{\varphi'}{r}dx'\,dy'\,dz' - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\mathrm{S}\left(\varphi'\frac{dr}{dn} - r\frac{d\varphi_a}{dn}\right)do$$

Substituiren wir nun die gefundenen Ausdrücke in der ursprünglichen Gleichung:

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta\chi_1'}{r}\,dx'\,dy'\,dz' - 4\pi\frac{A^2}{\lambda}\frac{d}{dt}\int\frac{u'}{r}\,dx'\,dy'\,dz'$$

$$+\frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\int\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\frac{1}{r}\,dx'\,dy'\,dz' = 0$$

so ergiebt sich

$$\chi_1 + 4\pi\frac{A^2}{\lambda}\frac{dU}{dt} + \frac{1}{4\pi}\mathsf{S}\frac{do}{r^2}\frac{d(r\chi_1')}{dn} + \frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\mathsf{S}\frac{\varphi'}{r}\frac{dx'}{dn}\,do$$

$$+\frac{1-k}{2}\frac{A^2}{\lambda}\frac{\partial^3}{\partial x\,dt^2}\mathsf{S}\left(\varphi'\frac{dr}{dn} - r\frac{d\varphi_a}{dn}\right)do$$

$$-k\frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\left\{\int\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\,dx'\,dy'\,dz' + \mathsf{S}\frac{\varphi'}{r}\cdot\frac{dx'}{dn}\,do\right\}$$

$$= 0.$$

Diese Gleichung wird weiter vereinfacht durch die Umformung ihres letzten Termes. Es ist:

$$\int\varphi'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\,dx'\,dy'\,dz' = -\mathsf{S}\frac{\varphi'}{r}\cdot\frac{dx'}{dn}\,do - \int\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\,dx'\,dy'\,dz'$$

somit da

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}$$

$$\int\varphi'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dx'\,dy'\,dz' = \int\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\,dx'\,dy'\,dz' + \mathsf{S}\frac{\varphi'}{r}\frac{dx'}{dn}\,do.$$

---

so ergiebt sich

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int\frac{\varphi}{r}\,dx'\,dy'\,dz'$$

wo das Integral auszudehnen ist über den ganzen unendlichen Raum.

Für den letzten Term der vorhergehenden Gleichung ergiebt sich somit der Werth:

$$-k\frac{A^2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d^2}{dt^2}\int\frac{\varphi'}{r}\,dx'\,dy'\,dz'$$

Es ist aber nach Gl. I.

$$k\frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2\varphi'}{dt^2}=\frac{1}{4\pi}\frac{d\Delta\varphi'}{dt}+\frac{1}{\lambda}\Delta\varphi'.$$

Substituiren wir diesen Werth in dem vorhergehenden Integral, so geht dasselbe über in:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{d\Delta\varphi'}{dt}+\frac{1}{\lambda}\Delta\varphi'\right)dx'\,dy'\,dz'=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}+\frac{1}{\lambda}\right)\int\frac{\Delta\varphi'}{r}\,dx'\,dy'\,dz'$$

Es ist aber

$$\int\frac{\Delta\varphi'}{r}\,dx'\,dy'\,dz'=-4\pi\varphi-\mathsf{S}\frac{do}{r^2}\frac{d(r\varphi')}{dn}.$$

Somit erhalten wir schliesslich für den letzten Term unserer Gleichung den Ausdruck:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}+\frac{1}{\lambda}\right)\mathsf{S}\frac{do}{r^2}\frac{d(r\varphi')}{dn}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,dt}+\frac{4\pi}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

Wenn wir endlich diesen Werth in der ursprünglichen Form der Gleichung substituiren, so gelangt dieselbe auf die Form:

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\mathsf{S}\frac{do}{r^2}\frac{d(r\chi_1')}{dn}+\frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\mathsf{S}\frac{\varphi'}{r}\frac{dx'}{dn}\,do$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{array}{l}\frac{1-k}{2}\frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\mathsf{S}\left(\varphi'\frac{dr}{dn}-r\frac{d\varphi_a}{dn}\right)do\\ +\left(\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}+\frac{1}{\lambda}\right)\mathsf{S}\frac{do}{r^2}\frac{d(r\varphi')}{dn}\end{array}\right\}$$

$$+\chi_1+4\pi\frac{A^2}{\lambda}\frac{dU}{dt}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,dt}+\frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$=0.$$

Ziehen wir von dieser Gleichung die erste der mit $\frac{4\pi}{\lambda}$ multiplicirten Gleichungen 1 ab, so erhalten wir die dieser ersten Gleichung entsprechende Oberflächenbedingung:

$$\frac{1}{4\pi} S \frac{do}{r^2} \frac{d(r\chi_1')}{dn} + \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} S \frac{\varphi'}{r} \frac{dx'}{dn} do$$

$$+ \frac{4\pi}{\lambda} . X$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-k}{2} \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} S \left(\varphi' \frac{dr}{dn} - r \frac{d\varphi_a}{dn} \right) do \\ + \left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} + \frac{1}{\lambda} \right) S \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr\varphi'}{dn} do \end{array} \right\}$$

$$= 0.$$

Für den Fall, dass ein Theil der äusseren Kräfte herrührt von einer statischen Vertheilung elektrischer Massen an der Oberfläche irgend welcher Isolatoren können die dieser Vertheilung entsprechenden Kräfte dargestellt werden durch die negativen Differentialquotienten des jener Vertheilung entsprechenden Potentiales. Bezeichnen wir dieses Potential durch Q so können wir für diesen Fall die Bedingungsgleichung auf die Form bringen

$$\frac{1}{4\pi} S \frac{do}{r^2} \frac{d(r\chi_1')}{dn} + \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} S \frac{\varphi'}{r} \cdot \frac{dx'}{dn} do + \frac{4\pi}{\lambda} X$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-k}{2} \cdot \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} S \left(\varphi' \frac{dr}{dn} - r \frac{d\varphi_a}{dn} \right) do \\ + \left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} + \frac{1}{\lambda} \right) S \frac{do}{r} \cdot \frac{dr\varphi'}{dn} \\ - \frac{4\pi}{\lambda} Q \end{array} \right\}$$

$$= 0.$$

Ganz in derselben Weise lassen sich nun natürlich auch die beiden anderen der Gleichungen 1 ersetzen durch entsprechende Gleichungen in welchen die Integrationen sich nur auf die Oberfläche des gegebenen

Leiters beziehen. Um für die drei auf diese Weise hergestellten Bedingungsgleichungen einen einfachen Ausdruck zu erhalten führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$U_1 = \frac{1}{4\pi} S \frac{do}{r^2} \frac{d(r\chi_1')}{dn} + \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} S \frac{\varphi'}{r} \frac{dx'}{dn} do + \frac{4\pi}{\lambda} X$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi} S \frac{do}{r^2} \frac{d(r\chi_2')}{dn} + \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} S \frac{\varphi'}{r} \frac{dy'}{dn} do + \frac{4\pi}{\lambda} Y$$

$$U_3 = \frac{1}{4\pi} S \frac{do}{r^2} \frac{d(r\chi_3')}{dn} + \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} S \frac{\varphi'}{r} \frac{dz'}{dn} do + \frac{4\pi}{\lambda} Z. \qquad \text{V)}$$

$$V = \frac{1-k}{2} \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} S \left(\varphi' \frac{dr}{dn} - r \frac{d\varphi_a}{dn}\right) do$$

$$+ \left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} + \frac{1}{\lambda}\right) S \frac{do}{r^2} \frac{d(r\varphi')}{dn} - \frac{4\pi}{\lambda} Q.$$

Die Bedingungsgleichungen sind dann:

$$U_1 + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$U_2 + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad \text{V}^{\text{a}})$$

$$U_3 + \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Damit ist dann das System der Gleichungen

1, 1ª, 2, 2ª, 3, 3ª

von welchen ursprünglich das Problem abhing vollständig ersetzt durch die Gleichungen

I, II, III, IV, V und Vª.

II. Integration der für die Strömungskomponenten und für das Potential der freien Elektricität aufgestellten partiellen Differentialgleichungen für den Fall, dass der leitende Körper die Gestalt einer Kugel besitzt.

Zum Zweck der Auflösung der im Vorhergehenden gegebenen Gleichungen führen wir ein System von Kugelkoordinaten ein dessen Zusammenhang mit dem System der rechtwinkligen Coordinaten $x\,y\,z$ durch die folgenden Gleichungen bestimmt ist:

$$x = \varrho \cos \vartheta$$

$$y = \varrho \sin \vartheta \cos \psi$$

$$z = \varrho \sin \vartheta \sin \psi.$$

Wir führen ferner die Bezeichnungen ein:

$$\mathfrak{P}^n_m(\cos\vartheta) = \cos\vartheta^{n-m} - \frac{n-m\,.\,n-m-1}{2\,.\,2n-1}\cos\vartheta^{n-m-2}$$

$$+ \frac{n-m\,.\,n-m-1\,.\,n-m-2\,.\,n-m-3}{2\,.\,4\,.\,2n-1\,.\,2n-3}\cos\vartheta^{n-m-4}$$

$$-+ \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$C^n_m = \sin^m\vartheta\,\mathfrak{P}^n_m(\cos\vartheta)\cos m\psi$$

$$S^n_m = \sin^m\vartheta\,\mathfrak{P}^n_m(\cos\vartheta)\sin m\psi.$$

Die Funktionen $\varrho^n C_m^n$ und $\varrho^n S_m^n$, welche homogene Funktionen $n$ter Ordnung von $x\,y\,z$ sind, sollen bezeichnet werden als Kugelfunktionen $n$ter Ordnung.

Für die Grössen χ_1, χ_2 und χ_3, sowie für das Potential φ der freien Elektricität sollen nun folgende Entwicklungen angenommen werden:

$$
\left.
\begin{aligned}
\chi_1 &= e^{xt} \Sigma \varrho^n p_n \, \Sigma A_n^m S_m^n + A_n^m C_m^n \\
\chi_2 &= e^{xt} \Sigma \varrho^n p_n \, \Sigma B_n^m S_m^n + B_n^m C_m^n \\
\chi_3 &= e^{\;t} \Sigma \varrho^n p_n \, \Sigma C_n^m C_m^n - \Gamma_n^m S_m^n \\
\varphi &= e^{xt} \Sigma \varrho^n q_n \, \Sigma F_n^m S_m^n + \Phi_n^m C_m^n
\end{aligned}
\right\} \quad \text{VI)}
$$

Wir haben dann die allein von ϱ abhängenden Grössen p_n und q_n so zu bestimmen dass die Differentialgleichungen

$$
\Delta\chi - 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \frac{d\chi}{dt} = 0
$$

$$
\frac{d\Delta\varphi}{dt} + \frac{4\pi}{\lambda} \Delta\varphi - 4\pi \frac{A^2}{\lambda} k \frac{d\varphi}{dt} = 0
$$

durch die oben gemachten Annahmen befriedigt werden, und haben überdiess die Coefficienten der für χ_1, χ_2, χ_3 gegebenen Reihenentwicklungen so zu bestimmen, dass die Gleichung erfüllt wird:

$$
\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z} = 0.
$$

Mit Rücksicht auf die bekannte Gleichung:

$$
\Delta\chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial \chi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{cotg} \vartheta \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d^2 \chi}{\partial \psi^2} \right\}
$$

ergiebt sich zur Bestimmung von p_n die Differentialgleichung

$$\frac{d^2p_n}{d\varrho^2} + \frac{2n+2}{\varrho}\frac{dp_n}{d\varrho} - 4\pi\varkappa\frac{A^2}{\lambda}p_n = 0.$$

Um den auf der linken Seite der Gleichung stehenden Ausdruck zu vereinfachen und um gleichzeitig das Integral derselben in einer zweckmässigen Form zu erhalten, setzen wir:

$$4\pi\varkappa\frac{A^2}{\lambda} = \frac{g^2}{a^2}$$

wo durch a der Halbmesser der leitenden Kugel bezeichnet wird; die Gleichung kommt dann auf die Form:

$$\frac{d^2p_n}{d\varrho^2} + \frac{2n+2}{\varrho}\frac{dp_n}{d\varrho} - \frac{g^2}{a^2}p_n = 0.$$

Ebenso ergiebt sich zur Bestimmung der Funktion q_n die Gleichung

$$\frac{d^2q_n}{d\varrho^2} + \frac{2n+2}{\varrho}\frac{dq_n}{d\varrho} - \frac{c^2}{a^2}q_n = 0$$

wo

$$\frac{c^2}{a^2} = 4\pi k\frac{\varkappa^2}{\frac{4\pi}{\lambda}+\varkappa}\frac{A^2}{\lambda}.$$

Diese Gleichungen werden befriedigt durch die folgenden Reihenentwicklungen für p_n und q_n

$$p_n = \frac{2^n\,\Pi(n)}{1.3..2n+1}\left(1 + \frac{g^2}{2.2n+3}\frac{\varrho^2}{a^2} + \frac{g^4}{2.4.2n+3.2n+5}\frac{\varrho^4}{a^4} + \ldots\right)$$

$$q_n = \frac{2^n\,\Pi(n)}{1.3..2n+1}\left(1 + \frac{c^2}{2.2n+3}\frac{\varrho^2}{a^2} + \frac{c^4}{2.4.2n+3.2n+5}\frac{\varrho^4}{a^4} + \ldots\right)$$

Reihenentwicklungen, welche sich nach Lorberg mit Hülfe Bessel'scher Funktionen darstellen lassen.

Insbesondere ergeben sich für $n = -1$ und $n = 0$ die folgenden Werthe:

$$p_{-1} = 1 + \frac{g^2}{1.2}\frac{\varrho^2}{a^2} + \frac{g^4}{1.2.3.4}\frac{\varrho^4}{a^4} + \ldots.$$

$$p_0 = 1 + \frac{g^2}{2.3}\frac{\varrho^2}{a^2} + \frac{g^4}{2.4.3.5}\frac{\varrho^4}{a^4} + \ldots.$$

und ganz analoge Darstellungen natürlich auch für q_{-1} und q_0.

Zwischen Funktionen p von verschiedener Ordnung bestehen die folgenden bemerkenswerthen Beziehungen:

$$\varrho \frac{dp_n}{d\varrho} + (2n+1)p_n = 2np_{n-1}$$

$$\frac{dp_n}{d\varrho} = \frac{1}{2n+2}\frac{g^2}{a^2}\varrho \cdot p_{n+1}$$

Woraus

$$p_n = \frac{2n}{2n+1}p_{n-1} - \frac{1}{2n+1.2n+2}\frac{g^2}{a^2}\varrho^2 p_{n+1}.$$

Ganz dieselben Gleichungen gelten natürlich auch für die Funktionen q; nur haben wir in diesen g^2 zu ersetzen durch c^2.

Insbesondere sind noch die folgenden speciellen Fälle der vorhergehenden allgemeinen Formeln zu bemerken:

$$\varrho \frac{dp_0}{d\varrho} + p_0 = p_{-1}$$

$$\frac{dp_{-1}}{d\varrho} = \frac{g^2}{a^2}\varrho p_0$$

$$p_0 = p_{-1} - \frac{1}{2}\frac{g^2}{a^2}\varrho^2 p_1$$

Nachdem durch die vorhergehenden Sätze die allgemeine Form der für χ und φ geltenden Entwicklungen vollständig festgelegt ist, gehen wir über zu der Aufstellung derjenigen Bedingungen, welche zwischen den Coëfficienten von χ_1, χ_2 und χ_3 erfüllt sein müssen, wenn der Gleichung

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z} = 0$$

Genüge geleistet werden soll.

Wir machen dabei Gebrauch von folgenden Formeln, durch welche die Differentialquotienten der Funktionen

$$\varrho^n\, p_n\, \mathrm{S}^n_m \text{ und } \varrho^n\, p_n\, \mathrm{C}^n_m$$

nach x, y, z, dargestellt werden mit Hülfe ebensolcher Funktionen von anderer Ordnung; diese Formeln sind:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p_n \varrho^n \mathrm{S}^n_m\right) = \frac{2n\,.\,n+m\,.\,n-m}{2n+1\,.\,2n-1}\, p_{n-1}\, \varrho^{n-1}\, \mathrm{S}^{n-1}_m + \frac{1}{2n+2}\,\frac{g^2}{a^2}\, p_{n+1}\, \varrho^{n+1}\, \mathrm{S}^{n+1}_m$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p_n \varrho^n \mathrm{C}^n_m\right) = \frac{2n\,.\,n+m\,.\,n-m}{2n+1\,.\,2n-1}\, p_{n-1}\, \varrho^{n-1}\, \mathrm{C}^{n-1}_m + \frac{1}{2n+2}\,\frac{g^2}{a^2}\, p_{n+1}\, \varrho^{n+1}\, \mathrm{C}^{n+1}_m$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p_n \varrho^n \mathrm{S}^n_m\right) =$$

$$\frac{n}{2n+1\,.\,2n-1}\, p_{n-1}\, \varrho^{n-1}\left\{n+m\,.\,n+m-1\,.\,\mathrm{S}^{n-1}_{m-1} - n-m\,.\,n-m-1\,.\,\mathrm{S}^{n-1}_{m+1}\right\}$$

$$-\frac{1}{2\,.\,2n+2}\,\frac{g^2}{a^2}\, p_{n+1}\, \varrho^{n+1}\left\{\mathrm{S}^{n+1}_{m-1} - \mathrm{S}^{n+1}_{m+1}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p_n \varrho^n \mathrm{C}^n_m\right) =$$

$$\frac{n}{2n+1\,.\,2n-1}\, p_{n-1}\, \varrho^{n-1}\left\{n+m\,.\,n+m-1\,.\,\mathrm{C}^{n-1}_{m-1} - n-m\,.\,n-m-1\,.\,\mathrm{C}^{n-1}_{m+1}\right\}$$

$$-\frac{1}{2\,.\,2n+2}\,\frac{g^2}{a^2}\, p_{n+1}\, \varrho^{n+1}\left\{\mathrm{C}^{n+1}_{m-1} - \mathrm{C}^{n+1}_{m+1}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p_n \varrho^n S^n_m\right) =$$

$$\frac{n}{2n+1.2n-1} p_{n-1} \varrho^{n-1} \left\{n+m.n+m-1.C^{n-1}_{m-1} + n-m.n-m-1.C^{n-1}_{m+1}\right\}$$

$$-\frac{1}{2.2n+2}\frac{g^2}{a^2} p_{n+1} \varrho^{n+1} \left\{C^{n+1}_{m-1} + C^{n+1}_{m+1}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p_n \varrho^n C^n_m\right) =$$

$$-\frac{n}{2n+1.2n-1} p_{n-1} \varrho^{n-1} \left\{n+m.n+m-1.S^{n-1}_{m-1} + n-m.n-m-1.S^{n-1}_{m+1}\right\}$$

$$+\frac{1}{2.2n+2}\frac{g^2}{a^2} p_{n+1} \varrho^{n+1} \left\{S^{n+1}_{m-1} + S^{n+1}_{m+1}\right\}$$

Insbesondere ist für $m = 0$ S^n_m gleich Null und ebenso auch die Differentialquotienten von

$$p_n \varrho^n S^n_0$$

Dagegen ergeben sich für

$$p_n \varrho^n C^n_0$$

die Formeln:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p_n \varrho^n C^n_0\right) =$$

$$\frac{2n.n.n}{2n-1.2n+1} p_{n-1} \varrho^{n-1} C^{n-1}_0 + \frac{1}{2n+2}\frac{g^2}{a^2} p_{n+1} \varrho^{n+1} C^{n+1}_0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p_n \varrho^n C^n_0\right) =$$

$$-\frac{2n.n.n-1}{2n-1.2n+1} p_{n-1} \varrho^{n-1} C^{n-1}_1 + \frac{1}{2n+2}\frac{g^2}{a^2} p_{n+1} \varrho^{n+1} C^{n+1}_1$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p_n \varrho^n \mathrm{C}_0^n\right) =$$

$$-\frac{2n.n.n-1}{2n-1.2n+1} p_{n-1} \varrho^{n-1} \mathrm{S}_1^{n-1} + \frac{1}{2n+2} \frac{g^2}{a^2} p_{n+1} \varrho^{n+1} \mathrm{S}_1^{n+1}$$

Mit Hülfe der vorhergehenden Formeln lässt sich nun der Ausdruck

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z}$$

in welchem χ_1, χ_2, χ_3 durch die Gleichungen VI gegeben sind, wiederum darstellen durch eine nach den Funktionen

$$p_n \varrho^n \mathrm{S}_m^n \text{ und } p_n \varrho^n \mathrm{C}_m^n$$

fortschreitende Reihe.

Soll nun jener Ausdruck verschwinden für jeden beliebigen im Inneren des leitenden Körpers gelegenen Punkt, d. h. für alle Werthe der Veränderlichen ϱ, ϑ und ψ, welche im Inneren jenes Körpers möglich sind, so müssen in der für

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z}$$

sich ergebenden Reihenentwicklung die Coefficienten aller

$$p_n \varrho^n \mathrm{S}_m^n \text{ und } p_n \varrho^n \mathrm{C}_m^n$$

für sich verschwinden.

Um die Reihenentwicklung selbst in möglichst einfacher Form darstellen zu können, mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_{n+1}^m = {} & 2\,.\,n+m+1\,.\,n-m+1\,.\,A_{n+1}^m \\
& + n+m+2\,.\,n+m+1\,.\left\{B_{n+1}^{m+1} - C_{n+1}^{m+1}\right\} \\
& - n-m+2\,.\,n-m+1\,.\left\{B_{n+1}^{m-1} + C_{n+1}^{m-1}\right\} \qquad \text{VII)}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{H}_{n-1}^m = 2A_{n-1}^m - \left\{B_{n-1}^{m+1} - C_{n-1}^{m+1}\right\} + \left\{B_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1}\right\}$$

Mit Hülfe dieser Bezeichnungen ergiebt sich:

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z} = e^{\varkappa t} \Sigma p_n \varrho^n \Sigma$$

$$\left\{ \frac{n+1}{2n+1 \,.\, 2n+3} \cdot \mathrm{K}^m_{n+1}(A, B, C) + \frac{1}{2 \,.\, 2n} \frac{g^2}{a^2} \mathrm{H}^m_{n-1}(A, B, C) \right\} \mathrm{S}^n_m$$

$$+ \left\{ \frac{n+1}{2n+1 \,.\, 2n+3} \cdot \mathrm{K}^m_{n+1}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Gamma}) + \frac{1}{2 \,.\, 2n} \frac{g^2}{a^2} \mathrm{H}^m_{n-1}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Gamma}) \right\} \mathrm{C}^n_m.$$

Damit also die Gleichung

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z} = 0$$

erfüllt werde, sind folgende Bedingungen durch die Coëfficienten A, B, C, beziehungsweise $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Gamma}$ zu befriedigen;

$$\frac{n+1}{2n+1 \,.\, 2n+3} \cdot \mathrm{K}^m_{n+1}(ABC) + \frac{1}{2 \,.\, 2n} \frac{g^2}{a^2} \mathrm{H}^m_{n-1}(ABC) = 0.$$

$$\frac{n+1}{2n+1 \,.\, 2n+3} \cdot \mathrm{K}^m_{n+1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}) + \frac{1}{2 \,.\, 2n} \frac{g^2}{a^2} \mathrm{H}^m_{n-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}) = 0. \qquad (\mathrm{VII^a}.$$

Was die Ausdrücke K und H anbetrifft, so sind noch die folgenden speciellen Werthe derselben zu bemerken:

$$\mathrm{K}^0_{n+1}(ABC) = 0.$$

$$\mathrm{K}^0_{n+1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}) = 2 \,.\, n+1 \,.\, n+1 \,.\, \boldsymbol{A}^0_{n+1} + n+1 \,.\, n+2 \,.\, \left(\boldsymbol{B}^1_{n+1} - \boldsymbol{\Gamma}^1_{n+1}\right)$$

$$\mathrm{K}^1_{n+1}(ABC) = 2n \,.\, n+2 \,.\, A^1_{n+1} + n+2 \,.\, n+3 \,.\, \left(B^2_{n+1} - C^2_{n+1}\right)$$
$$- \, 2n \,.\, n+1 \,.\, C^0_{n+1}$$

$$\mathrm{K}^1_{n+1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}) = 2n \,.\, n+2 \,.\, \boldsymbol{A}^1_{n+1} + n+2 \,.\, n+3 \,.\, \left(\boldsymbol{B}^2_{n+1} - \boldsymbol{\Gamma}^2_{n+1}\right)$$
$$- \, 2n \,.\, n+1 \,.\, \boldsymbol{B}^0_{n+1}$$

$$\mathrm{H}^0_{n-1}(ABC) = 0.$$

$$\mathrm{H}^0_{n-1}(AB\Gamma) = 2A^0_{n-1} - \left(B^1_{n-1} - \Gamma^1_{n-1}\right)$$

$$\mathrm{H}^1_{n-1}(ABC) = 2A^1_{n-1} - \left(B^2_{n-1} - C^2_{n-1}\right) + 2C^0_{n-1}$$

$$\mathrm{H}^1_{n-1}(AB\Gamma) = 2A^1_{n-1} - \left(B^2_{n-1} - \Gamma^2_{n-1}\right) + 2B^0_{n-1}$$

$$\mathrm{H}^n_{n-1}(ABC) = B^{n-1}_{n-1} + C^{n-1}_{n-1}$$

$$\mathrm{H}^{n-1}_{n-1}(ABC) = 2A^{n-1}_{n-1} + \left(B^{n-2}_{n-1} + C^{n-2}_{n-1}\right)$$

III. Entwicklung der Oberflächenbedingungen.

Während die in den vorhergehenden Abschnitten ausgeführten Rechnungen sich noch auf leitende Körper von beliebiger Form beziehen können, bildet natürlich für die weitere Ausführung der im I. Abschnitt aufgestellten Oberflächenbedingungen die Annahme der kugelförmigen Begrenzung die nothwendige Grundlage.

1. Wir berechnen zunächst die Integrale des durch die erste der Gleichungen V definirten Ausdruckes:

$$U_1 = \frac{1}{4\pi} \mathsf{S} \frac{do}{r^2} \frac{d(r\chi_1')}{dn} + \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} \mathsf{S} \frac{\varphi'}{r} \frac{dx'}{dn} do + \frac{4\pi}{\lambda} \mathrm{X}$$

Es ist, wenn wir an Stelle der Differentiation nach der inneren Normale n der Kugeloberfläche die Differentiation nach dem Radius ϱ' treten lassen:

$$\mathsf{S}\frac{do}{r^2}\frac{d(r\chi_1')}{dn} = -\mathsf{S}\frac{do}{r}\frac{d(\chi_1')}{d\varrho'} + \mathsf{S}\, do\,\chi_1'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\varrho'}$$

Setzen wir hier für χ'_1 und $\frac{1}{r}$ ihre Entwicklungen nach Kugelfunktionen, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{4\pi}\mathsf{S}\frac{do}{r^2}\frac{d(r\chi_1')}{dn} = -e^{\varkappa t}\Sigma\frac{2n}{2n+1}p^a_{n-1}\,\varrho^n\,\Sigma A^m_n S^n_m + A^m_n C^n_m$$

Hier bezeichnet p^a_{n-1} den Werth, welchen diese Funktion an der Oberfläche der Kugel d. h. für $\varrho = a$ annimmt.

Das Anfangsglied der gefundenen Reihenentwicklung hat den Werth

$$-p^a_{n-1}\,A^0_0\,C^0_0$$

Die Berechnung des zweiten Integrals:

$$\frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\mathsf{S}\frac{\varphi'}{r}\frac{dx'}{dn}do$$

gestaltet sich in folgender Weise. Wir setzen die Coordinaten des Oberflächenelementes do

$$x' = \varrho'\cos\vartheta',\quad y' = \varrho'\sin\vartheta'\cos\psi',\quad z' = \varrho'\sin\vartheta'\sin\psi'$$

und haben dann:

$$\frac{dx'}{dn} = -\cos\vartheta'$$

Substituiren wir ferner für den Werth φ' welchen das Potential der freien Elektricität an der Oberfläche der Kugel besitzt, seine Reihenentwicklung, so ergiebt sich:

$$\varphi'\frac{dx'}{dn} = -e^{\varkappa t}\,\Sigma a^n\,q^a_n\,\Sigma\left(F^m_n S'^n_m + \Phi^m_n C'^n_m\right).\cos\vartheta'.$$

Um dieses Produkt nach den Kugelfunktionen S' und C' zu entwickeln, haben wir die Produkte

$$S' \cos \vartheta' \text{ und } C' \cos \vartheta'$$

durch Kugelfunktionen auszudrücken. Es kann dazu die bekannte Formel benutzt werden:

$$2n+1 \, . \, x \, . \, \varrho^n \left(C^n_m + i \, S^n_m \right) =$$

$$\varrho^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varrho^n \left(C^n_m + i S^n_m \right) \right\} - \varrho^{2n+3} \, . \, \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\varrho^n}{\varrho^{2n+1}} \left(C^n_m + i S^n_m \right) \right\}$$

aus welcher durch Ausführung der Differentiationen die ganz allgemein geltende Formel hervorgeht:

$$\cos \vartheta \left(C^n_m + i \, S^n_m \right) = C^{n+1}_m + i S^{n+1}_m + \frac{n-m \, . \, n+m}{2n-1 \, . \, 2n+1} \left(C^{n-1}_m + i \, S^{n-1}_m \right)$$

Durch Einführung der hieraus sich ergebenden Werthe von $S' \cos \vartheta'$ und $C' \cos \vartheta'$, sowie der Entwicklung von $\frac{1}{r}$ ergiebt sich für das vorliegende Integral die Entwicklung:

$$\frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} \mathop{\mathrm{S}} \frac{\varphi'}{r} \frac{dx'}{dn} do = - 4 \pi \frac{A^2}{\lambda} \varkappa^2 e^{\varkappa t} \, \Sigma \frac{1}{2n+1} \, . \, \varrho^n \, \Sigma$$

$$\left\{ q^a_{n-1} F^m_{n-1} + \frac{n-m+1 \, . \, n+m+1}{2n+1 \, . \, 2n+3} a^2 \, q^a_{n+1} F^m_{n+1} \right\} S^n_m$$

$$+ \left\{ q^a_{n-1} \Phi^m_{n-1} + \frac{n-m+1 \, . \, n+m+1}{2n+1 \, . \, 2n+3} a^2 \, q^a_{n+1} \Phi^m_{n+1} \right\} C^n_m$$

Hiermit sind die beiden Integrale, welche in dem Werthe von U_1 enthalten sind nach Kugelfunktionen des im Inneren der leitenden Kugel willkürlich angenommenen Punktes x, y, z entwickelt, und es wird sich somit die Entwicklung von U_1 selbst sofort angeben lassen, wenn der Werth der XComponente der äusseren elektromotorischen Kraft in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe entwickelt ist.

2. Die Integrale des Ausdrucks U_2.

Ebenso wie bei U_1 ergiebt sich

$$\frac{1}{4\pi} \mathsf{S} \frac{do}{r^2} \frac{d(r\chi_2')}{dn} = -e^{xt} \Sigma \frac{2n}{2n+1} p^a_{n-1} \varrho^n \Sigma B^m_n S^n_m + B^m_n C^n_m$$

Die Berechnung des zweiten Integrales

$$\frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} \mathsf{S} \frac{\varphi'}{r} \frac{dy'}{dn} do$$

erfordert die Entwicklung des Produkts

$$\varphi' \frac{dy'}{dn}$$

nach Kugelfunktionen des Oberflächenpunktes $x' y' z'$; da

$$\frac{dy'}{dn} = -\sin\vartheta' \cos\psi'$$

so ist:

$$\varphi' \frac{dy'}{dn} = -e^{xt} \Sigma a^n q^a_n \Sigma \left(F^m_n S'^n_m + \Phi^m_n C'^n_m\right) \sin\vartheta' \cos\psi'.$$

Die in dieser Entwicklung auftretenden Produkte

$$S'^n_m \sin\vartheta' \cos\psi' \text{ und } C'^n_m \sin\vartheta' \cos\psi'$$

werden reducirt auf Kugelfunktionen durch die Formeln:

$$S^n_m \sin\vartheta \cos\psi = \frac{n+m \,.\, n+m-1}{2 \,.\, 2n-1 \,.\, 2n+1} S^{n-1}_{m-1} - \frac{n-m \,.\, n-m-1}{2 \,.\, 2n-1 \,.\, 2n+1} S^{n-1}_{m+1}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(S^{n+1}_{m+1} - S^{n+1}_{m-1}\right)$$

$$C^n_m \sin\vartheta \cos\psi = \frac{n+m \,.\, n+m-1}{2 \,.\, 2n+1 \,.\, 2n-1} C^{n-1}_{m-1} - \frac{n-m \,.\, n-m-1}{2 \,.\, 2n-1 \,.\, 2n+1} C^{n-1}_{m+1}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(C^{n+1}_{m+1} - C^{n+1}_{m-1}\right)$$

bei denen der folgende specielle Fall zu bemerken ist:

$$\mathrm{C}_0^n \sin\vartheta\cos\psi = -\frac{n.n-1}{2n-1.2n+1}\mathrm{C}_1^{n-1} + \mathrm{C}_1^{n+1}$$

Mit Hülfe dieser Formeln ergiebt sich:

$$\frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\mathsf{S}\frac{\varphi'}{r}\cdot\frac{dy'}{dn}.do = -4\pi\frac{A^2}{\lambda}.\varkappa^2 e^{\varkappa t}\Sigma\frac{1}{2n+1}\cdot\varrho^n.\Sigma$$

$$\left\{\begin{matrix} a^2 q_{n+1}^a\left(\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1.2n+3}F_{n+1}^{m+1} - \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1.2n+3}F_{n+1}^{m-1}\right) \\ +\frac{1}{2}q_{n-1}^a\left(F_{n-1}^{m-1} - F_{n-1}^{m+1}\right)\end{matrix}\right\}\mathrm{S}_m^n$$

$$+\left\{\begin{matrix} a^2 q_{n+1}^a\left(\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1.2n+3}\Phi_{n+1}^{m+1} - \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1.2n+3}\Phi_{n+1}^{m-1}\right) \\ +\frac{1}{2}q_{n-1}^a\left(\Phi_{n-1}^{m-1} - \Phi_{n-1}^{m+1}\right)\end{matrix}\right\}\mathrm{C}_m^n$$

3. Die Integrale des Ausdruckes U_3.

Für das erste Integral ergiebt sich:

$$\frac{1}{4\pi}\mathsf{S}\frac{do}{r^2}\frac{d(r\chi_3')}{dn} = -e^{\varkappa t}\Sigma\frac{2n}{2n+1}p_{n-1}^a\varrho^n\Sigma C_n^m\mathrm{C}_m^n - \Gamma_n^m\mathrm{S}_m^n$$

Bei der Entwicklung des zweiten Integrales

$$\frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\mathsf{S}\frac{\varphi'}{r}\cdot\frac{dz'}{dn}do$$

benutzen wir die Formeln

$$\mathrm{C}_m^n\sin\vartheta\sin\psi = -\frac{n+m.n+m-1}{2.2n-1.2n+1}\mathrm{S}_{m-1}^{n-1} - \frac{n-m.n-m-1}{2.2n-1.2n+1}\mathrm{S}_{m+1}^{n-1}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\mathrm{S}_{m+1}^{n+1} + \mathrm{S}_{m-1}^{n+1}\right)$$

$$S^n_m \sin\vartheta \sin\psi = \frac{n+m \,.\, n+m-1}{2 \,.\, 2n-1 \,.\, 2n+1} \,.\, C^{n-1}_{m-1} + \frac{n-m \,.\, n-m-1}{2 \,.\, 2n-1 \,.\, 2n+1} C^{n-1}_{m+1}$$

$$- \tfrac{1}{2}\left(C^{n+1}_{m+1} + C^{n+1}_{m-1}\right)$$

$$C^n_0 \sin\vartheta \sin\psi = - \frac{n \,.\, n-1}{2n-1 \,.\, 2n+1} S^{n-1}_1 + S^{n+1}_1$$

und erhalten:

$$\frac{A^2}{\lambda} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \int \frac{\varphi'}{r} \cdot \frac{dz'}{dn} \,.\, do = - 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \varkappa^2 e^{\varkappa t} \Sigma \frac{1}{2n+1} \varrho^n \,.\, \Sigma$$

$$\left\{\begin{matrix} a^2 q^a_{n+1} \left(\frac{n+m+2 \,.\, n+m+1}{2 \,.\, 2n+1 \,.\, 2n+3} F^{m+1}_{n+1} + \frac{n-m+2 \,.\, n-m+1}{2 \,.\, 2n+3 \,.\, 2n+1} F^{m-1}_{n+1}\right) \\ - \frac{1}{2} q^a_{n-1} \left(F^{m-1}_{n-1} + F^{m+1}_{n-1}\right) \end{matrix}\right\} C^n_m$$

$$- \left\{\begin{matrix} a^2 q^a_{n+1} \left(\frac{n+m+2 \,.\, n+m+1}{2 \,.\, 2n+1 \,.\, 2n+3} \Phi^{m+1}_{n+1} + \frac{n-m+2 \,.\, n-m+1}{2 \,.\, 2n+1 \,.\, 2n+3} \Phi^{m-1}_{n+1}\right) \\ - \frac{1}{2} q^a_{n-1} \left(\Phi^{m-1}_{n-1} + \Phi^{m+1}_{n-1}\right) \end{matrix}\right\} S^n_m$$

Mit Bezug auf die in U_2 und U_3 enthaltenen Integrale mag noch hinzugefügt werden, dass die für die ersteren dieser Integrale gegebenen Reihenentwicklungen beginnen mit den Termen:

$$- p^a_{-1} B^0_0 C^0_0 \text{ und } - p^a_{-1} C^0_0 C^0_0$$

dass in den für die zweiten jener Integrale geltenden Entwicklungen die Coefficienten F^0_{n+1} und F^0_{n-1} gleich Null zu setzen, die numerischen Faktoren von Φ^0_{n+1} und Φ^0_{n-1} dagegen zu verdoppeln sind.

4. Die in dem Ausdrucke V auftretenden Integrale und deren Differentialquotienten.

Wir betrachten zuerst das Integral

$$\frac{1-k}{2}\frac{A^2}{\lambda}\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{S}\left(\varphi'\frac{dr}{dn}-r\frac{d\varphi_a}{dn}\right)do.$$

Die Ausführung des Integrales erfordert einige vorbereitende Rechnungen; es ist zunächst nothwendig die Entfernung r des betrachteten Oberflächenelementes von dem im Innern der Kugel angenommenen Punkt zu entwickeln nach Kugelfunktionen, und es ist ausserdem der Werth zu ermitteln, welcher das Potential φ der freien Elektricität in einem ausserhalb der Kugel gelegenen Punkte besitzt.

Was den ersten Punkt anbetrifft, so ist:

$$r^2 = a^2 - 2a\varrho\xi + \varrho^2$$

wo a der Halbmesser der Kugel und

$$\xi = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\psi-\psi')$$

Wir erhalten dann:

$$r = a\frac{1-2\alpha\xi+\alpha^2}{(1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} = a(1-2\alpha\xi+\alpha^2).\,\Sigma\alpha^n\,\mathrm{P}^n(\xi)$$

wo

$$\alpha = \frac{\varrho}{a}$$

Ordnen wir nach Potenzen von α, so ergiebt sich mit Hülfe der bekannten Relation:

$$(2n-1)\,\xi\,\mathrm{P}^{n-1}(\xi) = (n-1)\,\mathrm{P}^{n-2}(\xi) + n\,\mathrm{P}^n(\xi)$$

$$r = a\Sigma\alpha^n\left(\frac{\alpha^2}{2n+3}-\frac{1}{2n-1}\right)\mathrm{P}^n(\xi)$$

oder wenn wir für α und ξ ihre Werthe setzen:

$$r = \Sigma\frac{\varrho^n}{a^{n+1}}\left(\frac{\varrho^2}{2n+3}-\frac{a^2}{2n-1}\right)\Sigma\,\mathfrak{a}^n_m\left(\mathrm{S}^n_m\,\mathrm{S}'^n_m + \mathrm{C}^n_m\,\mathrm{C}'^n_m\right)$$

Hier ist:

$$\mathfrak{a}^n_m = 2 \cdot \frac{(1.3\ldots 2n-1)^2}{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}$$
$$\mathfrak{a}^n_0 = \frac{(1.3\ldots 2n-1)^2}{\Pi(n).\Pi(n)}$$
$$\mathfrak{a}^n_n = 2\,\frac{(1.3\ldots 2n-1)^2}{\Pi(2n)}$$
$$\mathfrak{a}^0_0 = 1.$$

Was die zweite Aufgabe anbelangt, die Ermittlung des Potentiales φ_a für einen ausserhalb der Kugel gelegenen Punkt, so kann man dabei ausgehen von der bekannten Gleichung

$$\varphi_a = \frac{\varrho_a^2 - a^2}{4\pi a} S \frac{\varphi'}{r_a^3}\, do$$

wo φ' den Werth des Potentiales in dem Oberflächenelement do, ϱ_a den Radius Vector des betrachteten äusseren Punktes, r_a seine Entfernung von do bezeichnet.

Setzen wir:

$$\alpha = \frac{a}{\varrho_a}$$

$$\xi = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\psi - \psi')$$
$$T = (1 - 2\alpha\xi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

so wird

$$\frac{1}{r_a^3} = \frac{1}{\varrho^3} \cdot T^3$$

ferner

$$(1-\alpha^2)\,T^3 = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha\frac{\partial T}{\partial \alpha}$$

Mit Hülfe dieser Formeln ergiebt sich

$$\frac{1}{r_a^3} = \frac{1}{\varrho_a(\varrho_a^2 - a^2)} \Sigma(2n+1)\frac{a^n}{\varrho_a^n} \cdot \Sigma\,\mathfrak{a}^n_m \left(\mathrm{S}^n_m \mathrm{S}'^n_m + \mathrm{C}^n_m \mathrm{C}'^n_m\right)$$

und

$$\varphi_a = e^{\varkappa t} \Sigma \frac{a^{n+1}}{\varrho_a^{n+1}} a^n q_n^a \Sigma F_n^m S_m^n + \Phi_n^m C_m^n$$

Substituiren wir die gefundenen Werthe von r und φ^a in dem zu berechnenden Integral, so ergiebt sich:

$$\frac{1-k}{2} \cdot \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} \mathrm{S} \left(\varphi' \frac{dr}{dn} - r \frac{d\varphi_a}{dn}\right) do$$

$$= \frac{1-k}{2} \frac{A^2}{\lambda} \varkappa^2 e^{\varkappa t} \Sigma \frac{8\pi a^2 q_n^a}{2n+1 . 2n-1} . \varrho^n . \Sigma F_n^m S_m^n + \Phi_n^m C_m^n$$

Ferner erhalten wir für die Differentialquotienten des Integrals die Werthe:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1-k}{2} \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} \mathrm{S} \left(\varphi' \frac{dr}{dn} - r \frac{d\varphi_a}{dn}\right) do\right\}$$

$$= 8\pi \frac{1-k}{2} \frac{A^2}{\lambda} \varkappa^2 e^{\varkappa t} \Sigma \frac{a^2 q_{n+1}^a}{2n+3 . 2n+1} . \varrho^n$$

$$. \Sigma \frac{n-m+1 . n+m+1}{2n+1} F_{n+1}^m S_m^n + \frac{n-m+1 . n+m+1}{2n+1} \Phi_{n+1}^m C_m^n$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1-k}{2} \cdot \frac{A^2}{\lambda} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \mathrm{S} \left(\varphi' \frac{dr}{dn} - r \frac{d\varphi_a}{dn}\right) do\right\}$$

$$= 8\pi \frac{1-k}{2} \frac{A^2}{\lambda} \varkappa^2 e^{\varkappa t} \Sigma \frac{a^2 q_{n+1}^a}{2n+3 . 2n+1} . \varrho^n . \Sigma$$

$$\left\{\frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} F_{n+1}^{m+1} - \frac{n-m+2 . n-m+1}{2 . 2n+1} F_{n+1}^{m-1}\right\} S_m^n$$

$$+ \left\{\frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} \Phi_{n+1}^{m+1} - \frac{n-m+2 . n-m+1}{2 . 2n+1} \Phi_{n+1}^{m-1}\right\} C_m^n$$

$$\frac{\partial}{dz}\left\{\frac{1-k}{2} \frac{A^2}{\lambda} \frac{d^2}{dt^2} \mathrm{S} \left(\varphi' \frac{dr}{dn} - r \frac{d\varphi_a}{dn}\right) do\right\}$$

$$= 8\pi \frac{1-k}{2} \frac{A^2}{\lambda} \varkappa^2 e^{\varkappa t} \Sigma \frac{a^2 q^a_{n+1}}{2n+3 . 2n+1} \varrho^n . \Sigma$$

$$\left\{\frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} F^{m+1}_{n+1} + \frac{n-m+2 . n-m+1}{2 . 2n+1} F^{m-1}_{n+1}\right\} C^n_m$$

$$- \left\{\frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} \Phi^{m+1}_{n+1} + \frac{n-m+2 . n-m+1}{2 . 2n+1} \Phi^{m-1}_{n+1}\right\} S^n_m$$

Mit Bezug auf diese Formeln ist nur zu bemerken, dass die Coefficienten F^0_{n+1} gleich Null, dass die numerischen Coefficienten von Φ^0_{n+1} zu verdoppeln sind, so dass die betreffenden Terme lauten:

$$- \frac{n+1 . n}{2n+1} . \Phi^0_{n+1}$$

Für das zweite in V enthaltene Integral und dessen Differentialquotienten ergeben sich die Werthe:

$$\left(\frac{1}{4\pi} . \frac{d}{dt} + \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{S} \frac{do}{r^2} \frac{d(r\varphi')}{dn} =$$

$$- \left(\varkappa + \frac{4\pi}{\lambda}\right) e^{\varkappa t} \Sigma \frac{2n}{2n+1} . q^a_{n-1} \varrho^n . \Sigma F^m_n S^n_m + \Phi^m_n C^n_m$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{\left(\frac{1}{4\pi} . \frac{d}{dt} + \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{S} \frac{do}{r^2} \frac{d(r\varphi')}{dn}\right\} =$$

$$- \left(\varkappa + \frac{4\pi}{\lambda}\right) e^{\varkappa t} \Sigma \frac{2n+2}{2n+3} q^a_n \varrho^n . \Sigma \frac{n-m+1 . n+m+1}{2n+1} \left\{F^m_{n+1} S^n_m + \Phi^m_{n+1} C^n_m\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{\left(\frac{1}{4\pi} . \frac{d}{dt} + \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{S} \frac{do}{r^2} \frac{d(r\varphi')}{dn}\right\} = - \left(\varkappa + \frac{4\pi}{\lambda}\right) e^{\varkappa t} \Sigma \frac{2n+2}{2n+3} q^a_n \varrho^n . \Sigma$$

$$\left\{\frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} F^{m+1}_{n+1} - \frac{n-m+2 . n-m+1}{2 . 2n+1} F^{m-1}_{n+1}\right\} S^n_m$$

$$+ \left\{\frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} \Phi^{m+1}_{n+1} - \frac{n-m+2 . n-m+1}{2 . 2n+1} \Phi^{m-1}_{n+1}\right\} C^n_m$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}+\frac{1}{\lambda}\right)S\frac{do}{r^2}\frac{d(r\varphi')}{dn}\right\} = -\left(\varkappa+\frac{4\pi}{\lambda}\right)e^{\varkappa t}\Sigma\frac{2n+2}{2n+3}\cdot q_n^a\varrho^n\cdot\Sigma$$

$$\left\{\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1}F_{n+1}^{m+1}+\frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1}F_{n+1}^{m-1}\right\}C_m^n$$

$$-\left\{\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1}\Phi_{n+1}^{m+1}+\frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1}\Phi_{n+1}^{m-1}\right\}S_m^n$$

Hiebei ist ebenso wie in den früheren Formeln $F_{n+1}^0 = 0$ und sind die numerischen Faktoren von Φ_{n+1}^0 gleich $-\frac{n+1.n}{2n+1}$ oder $+\frac{n+1.n}{2n+1}$

Hiemit sind nun sämmtliche in den Gleichungen V^a enthaltenen Grössen entwickelt nach Kugelfunktionen des im Inneren willkürlich angenommenen Punktes xyz mit Ausnahme der Componenten der äusseren elektromotorischen Kräfte, d. h. mit Ausnahme der Grössen X, Y, Z und $-\frac{\partial Q}{\partial x}, -\frac{\partial Q}{\partial y}, -\frac{\partial Q}{\partial z}$

Für diese letzteren sollen nun die folgenden Entwicklungen als gegeben betrachtet werden

$$X = e^{\varkappa t}\Sigma\varrho^n\Sigma a_n^m S_m^n + \alpha_n^m C_m^n$$

$$Y = e^{\varkappa t}\Sigma\varrho^n\Sigma b_n^m S_m^n + \beta_n^m C_m^n$$

$$Z = e^{\varkappa t}\Sigma\varrho^n\Sigma c_n^m C_m^n - \gamma_n^m S_m^n$$

$$Q = e^{\varkappa t}\Sigma\varrho^n\Sigma f_n^m S_m^n + \varphi_n^m C_n^m$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{\varkappa t}\Sigma\varrho^n\Sigma\frac{n-m+1.n+m+1}{2n+1}\left\{f_{n+1}^m S_m^n+\varphi_{n+1}^m C_m^n\right\}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = e^{\varkappa t}\Sigma\varrho^n.\Sigma\left\{\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1}f_{n+1}^{m+1}-\frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1}f_{n+1}^{m-1}\right\}.S_m^n$$

$$+\left\{\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1}\varphi_{n+1}^{m+1}-\frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1}\varphi_{n+1}^{m-1}\right\}.C_m^n$$

$$\frac{\partial Q}{dz} = e^{\varkappa t}\Sigma\varrho^n.\Sigma\left\{\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1}f_{n+1}^{m+1}+\frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1}f_{n+1}^{m-1}\right\}C_m^n$$

$$-\left\{\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1}\varphi_{n+1}^{m+1}+\frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1}\varphi_{n+1}^{m-1}\right\}S_m^n$$

Substituiren wir die im Vorhergehenden aufgestellten Werthe in den Gleichungen

$$U_1 + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad U_2 + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad U_3 + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

so ergeben sich die folgenden 3 Bedingungsgleichungen zwischen den gesuchten Coefficienten der für χ und φ angenommenen Reihenentwicklungen und den gegebenen Coefficienten von X, Y, Z und Q.

$$\frac{2n}{2n+1} \overset{a}{p}_{n-1} \overset{m}{A}_n = \frac{4\pi}{\lambda} \overset{m}{a}_n - \frac{4\pi}{\lambda} \frac{n-m+1.n+m+1}{2n+1} \overset{m}{f}_{n+1}$$

$$- 4\pi . \frac{A^2}{\lambda} \varkappa^2 \frac{1}{2n+1} \overset{a}{q}_{n-1} \overset{m}{F}_{n-1}$$

$$- \left(\varkappa + \frac{4\pi}{\lambda}\right) \frac{2n.2n+2}{2n+1.2n+3} . \frac{n-m+1.n+m+1}{2n+1} \overset{a}{q}_{n-1} \overset{m}{F}_{n+1}$$

$$\frac{2n}{2n+1} \overset{a}{p}_{n-1} \overset{m}{B}_n = \frac{4\pi}{\lambda} . \overset{m}{b}_n - \frac{4\pi}{\lambda} \left\{ \frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1} \overset{m+1}{f}_{n+1} - \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1} \overset{m-1}{f}_{n+1} \right\}$$

$$- 4\pi . \frac{A^2}{\lambda} \varkappa^2 \frac{1}{2.2n+1} . \overset{a}{q}_{n-1} \left\{ \overset{m-1}{F}_{n-1} - \overset{m+1}{F}_{n-1} \right\} \qquad \text{(VIII.}$$

$$- \left(\varkappa + \frac{4\pi}{\lambda}\right) \frac{2n.2n+2}{2n+1.2n+3} \overset{a}{q}_{n-1} \left\{ \frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1} \overset{m+1}{F}_{n+1} - \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1} . \overset{m-1}{F}_{n+1} \right\}$$

$$\frac{2n}{2n+1} \overset{a}{p}_{n-1} \overset{m}{C}_n = \frac{4\pi}{\lambda} . \overset{m}{c}_n - \frac{4\pi}{\lambda} \left\{ \frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1} \overset{m+1}{f}_{n+1} + \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1} \overset{m-1}{f}_{n+1} \right\}$$

$$+ 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \varkappa^2 \frac{1}{2.2n+1} \overset{a}{q}_{n-1} \left\{ \overset{m-1}{F}_{n-1} + \overset{m+1}{F}_{n-1} \right\}$$

$$- \left(\varkappa + \frac{4\pi}{\lambda}\right) \frac{2n.2n+2}{2n+1.2n+3} \overset{a}{q}_{n-1} \left\{ \frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1} \overset{m+1}{F}_{n+1} + \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1} \overset{m-1}{F}_{n+1} \right\}$$

Drei weitere Gleichungen für die Coefficienten $\overset{m}{A}_n$, $\overset{m}{B}_n$, $\overset{m}{\Gamma}_n$ ergeben sich aus diesen durch Vertauschung des lateinischen Buchstaben mit den entsprechenden griechischen.

Als specielle Fälle der vorhergehenden Gleichungen sind zu bemerken

$$\overset{a}{p}_{-1} A_0^0 = \frac{4\pi}{\lambda} \alpha_0^0 - \frac{4\pi}{\lambda} \varphi_1^0 - \left(\varkappa + \frac{4\pi}{\lambda}\right) \frac{2}{3} \overset{a}{q}_{-1} \Phi_1^0$$

$$\overset{a}{p}_{-1} B_0 = \frac{4\pi}{\lambda} \beta_0^0 - \frac{4\pi}{\lambda} \varphi_1^1 - \left(\varkappa + \frac{4\pi}{\lambda}\right) \frac{2}{3} \overset{a}{q}_{-1} \Phi_1^1$$

$$\overset{a}{p}_{-1} C_0^0 = \frac{4\pi}{\lambda} c_0^0 - \frac{4\pi}{\lambda} f_1^1 - \left(\varkappa + \frac{4\pi}{\lambda}\right) \frac{2}{3} \overset{a}{q}_{-1} F_1^1$$

Ferner ist zu beachten, dass in den Gleichungen für B_n^1, C_n^1, B_n^1 und Γ_n^1 die Coefficienten F_{n-1}^0 und F_{n+1}^0 gleich Null zu setzen, die numerischen Faktoren von Φ_{n-1}^0 und Φ_{n+1}^0 dagegen zu verdoppeln sind

---

IV. Berechnung der Coëfficienten, mit welchen die für das Potential der freien Elektricität und für die Strömungscomponenten gegebenen Reihen behaftet sind.

In den beiden vorhergehenden Abschnitten haben wir zwei Systeme von Gleichungen aufgestellt, VII[a] und VIII, welchen die Coefficienten F und Φ, A, B, C und $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ genügen müssen, aus welchen dieselben zu berechnen sind als Funktionen der als gegeben zu betrachtenden Coefficienten f und φ, a, b, c und α, β, γ. Zu diesem Zwecke können wir zunächst mit Hülfe der Gleichungen VIII die Coefficienten A, B, C eliminiren aus den durch die Gleichungen VII definirten Ausdrücken $\mathrm{K}\,(A,B,C)$ und $\mathrm{H}\,(A,B,C)$. Wir erhalten:

$$\mathrm{K}_{n+1}^m\,(A,B,C) = -4\pi \frac{A^2}{\lambda} \varkappa^2 \,(2n+3) \frac{\overset{a}{q}_n}{\overset{a}{p}_n} F_n^m$$

$$\mathrm{H}_{n-1}^m\,(A,B,C) = \frac{2n-1}{2n-2} \frac{1}{\overset{a}{p}_{n-2}} \cdot \frac{4\pi}{\lambda} \left\{ H_{n-1}^m\,(abc) - 2n f_n^m \right\}$$

$$- \left(\varkappa + \frac{4\pi}{\lambda}\right) \frac{4n^2}{2n+1} \frac{\overset{a}{q}_{n-2}}{\overset{a}{p}_{n-2}} F_n^m$$

und zwei ebensolche Gleichungen mit

$$A,\ B,\ \Gamma,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \Phi \text{ und } \varphi.$$

Insbesondere ist:

$$\mathrm{H}_0^0(AB\Gamma) = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{\overset{a}{p}_{-1}}\left\{H_0^0(\alpha\beta\gamma)-2\varphi_1^0\right\}$$

$$-\left(\varkappa+\frac{4\pi}{\lambda}\right)\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\frac{\overset{a}{q}_{-1}}{\overset{a}{p}_{-1}}\Phi_1^0$$

$$\mathrm{H}_0^1(ABC) = \frac{1}{\overset{a}{p}_{-1}}\frac{4\pi}{\lambda}\left\{H_0^1(a,\ b\ c)-2f_1^1\right\}$$

$$-\left(\varkappa+\frac{4\pi}{\lambda}\right)\tfrac{4}{3}\frac{\overset{a}{q}_{-1}}{\overset{a}{p}_{-1}}F_1^1$$

$$\mathrm{H}_0^1(AB\Gamma) = \frac{1}{\overset{a}{p}_{-1}}\cdot\frac{4\pi}{\lambda}\left\{H_0^1(\alpha\beta\gamma)-2\varphi_1^1\right\}$$

$$-\left(\varkappa+\frac{4\pi}{\lambda}\right)\tfrac{4}{3}\frac{\overset{a}{q}_{-1}}{\overset{a}{p}_{-1}}\Phi_1^1$$

Substituiren wir diese Werthe in den Gleichungen VII[a], so ergeben sich zunächst die Werthe der Coefficienten F und Φ; dann aber auch mit Hülfe der Gleichungen VIII die Werthe von A, B, C und A, B, Γ.

Wir erhalten:

$$F_n^m = \frac{2n-1\,.\,2n+1}{2n\,.\,n-1}\cdot\frac{1}{\overset{a}{p}_{n-2}\left\{(n+1)\varkappa\dfrac{\overset{a}{q}_n}{\overset{a}{p}_n}+n\left(\varkappa+\dfrac{4\pi}{\lambda}\right)\dfrac{\overset{a}{q}_{n-2}}{\overset{a}{p}_{n-2}}\right\}}\cdot\frac{\pi}{\lambda} \qquad \text{(IX}$$

$$.\left\{\mathrm{H}_{n-1}^m(a\,b\,c)-2nf_n^m\right\}$$

Ebenso

$$\Phi^m_n = \frac{2n-1 \,.\, 2n+1}{2n \,.\, n-1} \; \frac{1}{p^a_{n-2}\left\{(n+1)\varkappa \dfrac{q^a_n}{p^a_n} + n\left(\varkappa + \dfrac{4\pi}{\lambda}\right)\dfrac{q^a_{n-2}}{p^a_{n-2}}\right\}} \cdot \frac{\pi}{\lambda}$$

$$\left\{\mathrm{H}^m_{n-1}(\alpha\beta\gamma) - 2n\,\varphi^m_n\right\}$$

Insbesondere wird:

$$\Phi^0_0 = 0.$$

$$\Phi^0_1 = 3 \,.\, \frac{1}{p^a_{-1}\left\{2\varkappa \dfrac{q^a_1}{p^a_1} + \left(\varkappa + \dfrac{4\pi}{\lambda}\right)\dfrac{q^a_{-1}}{p^a_{-1}}\right\}} \cdot \frac{\pi}{\lambda}\left\{\mathrm{H}^0_0(\alpha\beta\gamma) - 2\varphi^0_1\right\}$$

$$F^1_1 = 3 \; \frac{1}{p^a_{-1}\left\{2\varkappa \dfrac{q^a_1}{p^a_1} + \left(\varkappa + \dfrac{4\pi}{\lambda}\right)\dfrac{q^a_{-1}}{p^a_{-1}}\right\}} \cdot \frac{\pi}{\lambda}\left\{\mathrm{H}^1_0(a\,b\,c) - 2f^1_1\right\}$$

$$\Phi^1_1 = 3 \,.\, \frac{1}{p^a_{-1}\left\{2\varkappa \dfrac{q^a_1}{p^a_1} + \left(\varkappa + \dfrac{4\pi}{\lambda}\right)\dfrac{q^a_{-1}}{p^a_{-1}}\right\}} \cdot \frac{\pi}{\lambda}\left\{\mathrm{H}^1_0(\alpha\beta\gamma) - 2\varphi^1_1\right\}$$

Durch die Gleichungen IX sind die in dem Potential der freien Elektricität auftretenden Coëfficienten unmittelbar gegeben; substituiren wir die gefundenen Werthe von F^m_n und Φ^m_n in den Gleichungen VIII, so sind auch die Coefficienten von χ_1, χ_2 und χ_3 bestimmt, und wir können damit die Aufgabe das Potential der freien Elektricität und die Componenten der inducirten Strömungen zu ermitteln, principiell als gelösst betrachten.

Es mögen zunächst einige Vereinfachungen der gefundenen Ausdrücke gegeben werden, und zwar durch Entwicklung nach Petenzen von $\varkappa$.

Gehen wir nur bis zu den ersten Potenzen von $\varkappa$ so ist:

$$p_n = \frac{2^n \Pi(n)}{1.3\ldots 2n+1}\left(1 + \frac{1}{2.2n+3}.4\pi\frac{A^2}{\lambda}\varkappa.\varrho^2\right)$$

$$q_n = \frac{2^n \Pi(n)}{1.3\ldots 2n+1}$$

Bis zu welchem Grade der Annäherung die höheren Potenzen von $\varkappa$ vernachlässig werden können, hängt wesentlich ab von den numerischen Werthen der Constanten A und λ einerseits, der Grösse des Halbmessers a der leitenden Kugel andererseits; es ist aber

$$A = \frac{1}{310740.10^6}$$

$$A^2 = \frac{1}{965594.10^{17}}$$

Ferner ist für das best leitende Kupfer:

$$\lambda = \frac{1}{513144.10^{12}}$$

und somit

$$\frac{A^2}{\lambda} = \frac{1}{188172}$$

Mit Rücksicht auf diese Werthe ergiebt sich:

$$F^m_n = \frac{1}{2n.q_n}\left\{1 - \frac{2n+1}{4n}\frac{\lambda}{\pi}\varkappa\right\}\left\{H^m_{n-1}(abc) - -2nf^m_n\right\}$$

IXª

$$\Phi^m_u = \frac{1}{2n.q_n}\left\{1 - \frac{2n+1}{4n}\frac{\lambda}{\pi}\varkappa\right\}\left\{H^m_{n-1}(\alpha\beta\gamma) - 2n\varphi^m_n\right\}$$

Insbesondere wird:

$$\Phi_0^0 = 0$$

$$\Phi_1^0 = \frac{1}{2q_1}\left\{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{\lambda}{\pi}\cdot\varkappa\right\}\left\{H_0^0(\alpha\beta\gamma) - 2\varphi_1^0\right\}$$

Für den Fall, dass die vorhergehenden einfacheren Formeln anwendbar sind, möge nun schliesslich das Problem vollständig, bis zu der Aufstellung der Strömungskomponenten u, v, w durchgeführt werden. Wir werden dabei zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden haben, welche eine gesonderte Behandlung erfordern.

1. Die äusseren elektromotorischen Kräfte sind theils elektrodynamischen theils elektrostatischen Ursprungs.

2. Die gegebenen äusseren Kräfte sind rein elektrostatischen Ursprungs.

Im ersten Falle ergiebt sich wenn wir λ vernachlässigen gegen $\frac{A^2}{\lambda}a^2$:

$$A_n^m = \frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}\cdot a^2\varkappa\right)\left\{a_n^m - \frac{n-m+1.n+m+1}{2n+1.2n+2}\mathrm{H}_n^m(abc)\right\}$$

$$B_n^m = \frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\cdot\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)\left\{b_n^m - \left(\begin{array}{l}\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1.2n+2}\cdot\mathrm{H}_n^{m+1}(abc)\\ -\frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1.2n+2}\mathrm{H}_n^{m-1}(abc)\end{array}\right)\right\}$$

$$C_n^m = \frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)\left\{c_n^m - \left(\begin{array}{l}\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1.2n+2}\cdot\mathrm{H}_n^{m+1}(abc)\\ +\frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1.2n+2}\mathrm{H}_n^{m-1}(abc)\end{array}\right)\right\}$$

Drei ganz analoge Gleichungen ergeben sich natürlich für die Coëfficienten A^m_n, B^m_n und Γ^m_n; es ist ferner noch zu beachten, dass in den Formeln für $B^1{}_n$, $C^1{}_n$ und $B^1{}_n$ und $\Gamma^1{}_n$ die Ausdrücke $H^0_n\,(abc) = 0$ zu setzen, die numerischen Faktoren von $H^0_n\,(\alpha\beta\gamma)$ zu verdoppeln sind.

Die Strömungskomponenten ergeben sich durch die Gleichungen:

$$u = \frac{1}{4\pi}\chi_1 + \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}$$

$$v = \frac{1}{4\pi}\chi_2 + \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}$$

$$w = \frac{1}{4\pi}\chi_3 + \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}.$$

Vernachlässigen wir wiederum λ gegenüber von $\frac{A^2}{\lambda}\,.\,a^2$, so reduciren sich die rechten Seiten der vorhergehenden Gleichungen auf ihre ersten Terme, d. h. wir können dann die von dem Potential der freien Elektricität abhängenden Antheile der Strömungen vernachlässigen und erhalten:

$$u = \frac{1}{\lambda}\,.\,e^{\varkappa t}\,\Sigma\varrho^n\left\{1 - 2\pi\frac{A^2}{\lambda}\left(\frac{a^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3}\right)\varkappa\right\}.\,\Sigma \qquad \text{(X.}$$

$$\left\{a^m_n - \frac{n-m+1\,.\,n+m+1}{2n+1\,.\,2n+2}\,H^m_n\,(abc)\right\}.\,S^n_m + \left\{\alpha^m_n - \frac{n-m+1\,.\,n+m+1}{2n+1\,.\,2n+2}\,H^m_n\,(\alpha\beta\gamma)\right\}C^n_m$$

$$v = \frac{1}{\lambda}e^{\varkappa t}\,\Sigma\varrho^n\left\{1 - 2\pi\frac{A^2}{\lambda}\left(\frac{a^2}{2n+1}\,. - \frac{\varrho^2}{2n+3}\right)\varkappa\right\}.\,\Sigma$$

$$\left\{b^m_n - \left(\frac{n+m+2\,.\,n+m+1}{2\,.\,2n+1\,.\,2n+2}\,H^{m+1}_n\,(abc) - \frac{n-m+2\,.\,n-m+1}{2\,.\,2n+1\,.\,2n+2}\,H^{m-1}_n\,(abc)\right)\right\}S^n_m$$

$$+\left\{\beta^m_n - \left(\frac{n+m+2\,.\,n+m+1}{2\,.\,2n+1\,.\,2n+2}\,H^{m+1}_n\,(\alpha\beta\gamma) - \frac{n-m+2\,.\,n-m+1}{2\,.\,2n+1\,.\,2n+2}\,H^{m-1}_n\,(\alpha\beta\gamma)\right)\right\}C^n_m$$

$$w = \frac{1}{\lambda} e^{\varkappa t} \Sigma \varrho^n \left\{1 - 2\pi \frac{A^2}{\lambda}\left(\frac{a^2}{2n+1} \cdot - \frac{\varrho^2}{2n+3}\right)\varkappa\right\} \cdot \Sigma$$

$$\left\{c_n^m - \left(\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1.2n+2} \mathrm{H}_n^{m+1}(a\,b\,c) + \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1.2n+2} \mathrm{H}_n^{m-1}(a\,b\,c)\right)\right\} \mathrm{C}_m^n$$

$$- \left\{\gamma_n^m - \left(\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1.2n+2} \mathrm{H}_n^{m+1}(\alpha\beta\gamma) + \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1.2n+2} \mathrm{H}_n^{m-1}(\alpha\beta\gamma)\right)\right\} \mathrm{S}_m^n$$

In dem zweiten Falle in welchem alle äusseren elektromotorischen Kräfte herrühren von wechselnder Vertheilung elektrischer Ladungen, sind die Coëfficienten a, b, c, α, β, γ sämmtlich gleich Null zu setzen und es ergiebt sich daher:

$$F_n^m = -\frac{1}{q_n} f_n^m + \frac{2n+1}{4n} \frac{1}{q_n} \frac{\lambda}{\pi} \varkappa \cdot f_n^m$$

$$\Phi_n^m = -\frac{1}{q_n} \varphi_n^m + \frac{2n+1}{4\pi} \frac{1}{q_n} \frac{\lambda}{\pi} \varkappa \cdot \varphi_n^m$$

Für das Potential der freien Elektricität ergiebt sich somit

$$\varphi = -Q + \varkappa e^{\varkappa t} \Sigma \frac{2n+1}{4\pi} \frac{\lambda}{\pi} \varrho^n \Sigma f_n^m \mathrm{S}_m^n + \varphi_n^m \mathrm{C}_m^n$$

Ferner wird:

$$A_n^m = -\varkappa \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n-m+1.n+m+1}{2n+1} \cdot \frac{1}{q_n} f_{n+1}^m$$

$$B_n^m = -\varkappa \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{q_n} \left\{\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1} f_{n+1}^{m+1} - \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2+1} f_{n+1}^{m-1}\right\}$$

$$C_n^m = -\varkappa \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{q_n} \left\{\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1} f_{n+1}^{m+1} + \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1} f_{n+1}^{m-1}\right\}$$

und ganz analoge Formeln ergeben sich für die Coëfficienten A_n^m, B_n^m und Γ_n^m.

Für die Strömungskomponenten ergeben sich schliesslich die Werthe:

$$u = -\varkappa e^{\varkappa t} \Sigma \frac{1}{4\pi} \frac{n+2}{n+1} \varrho^n$$

$$. \Sigma \frac{n-m+1 . n+m+1}{2n+1} \left(f_{n+1}^m \mathrm{S}_m^n + \varphi_{n+1}^m \mathrm{C}_m^n \right) - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x \, \partial t}$$

oder

$$u = -\varkappa e^{\varkappa t} \Sigma \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2n+3}{n+1} \varrho^n$$

$$. \Sigma \frac{n-m+1 . n+m+1}{2n+1} \left(f_{n+1}^m \mathrm{S}_m^n + \varphi_{n+1}^m \mathrm{C}_m^n \right)$$

$$v = -\varkappa e^{\varkappa t} \Sigma \frac{1}{4\pi} \frac{2n+3}{n+1} \varrho^n$$

$$. \Sigma \left\{ \frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} f_{n+1}^{m+1} - \frac{n-m+2 . n-m+1}{2 . 2n+1} f_{n+1}^{m-1} \right\} \mathrm{S}_m^n$$

$$+ \left\{ \frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} \varphi_{n+1}^{m+1} - \frac{n-m+2 . n-m+1}{2 . 2n+1} \varphi_{n+1}^{m-1} \right\} \mathrm{C}_m^n$$

$$w = -\varkappa e^{\varkappa t} \Sigma \frac{1}{4\pi} \frac{2n+3}{n+1} \varrho^n$$

$$\Sigma \left\{ \frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} f_{n+1}^{m+1} + \frac{n-m+2 . n-m+1}{2 . 2n+1} f_{n+1}^{m-1} \right\} \mathrm{C}_m^n$$

$$- \left\{ \frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} \varphi_{n+1}^{m+1} + \frac{n-m+2 . n-m+1}{2 . 2n+1} \varphi_{n+1}^{m-1} \right\} \mathrm{S}_m^n$$

V. Entwickelung der von einem schwingenden Magnet ausgeübten elektromotorischen Kräfte.

Mit Rücksicht auf die folgenden Entwickelungen erscheint es zweckmässig dem Coordinatensystem, über dessen Lage bisher keine speciellen Annahmen gemacht worden sind, eine bestimmte Stellung zu ertheilen.

Wir werden die X Axe desselben mit der Richtung der horizontalen Componente des Erdmagnetismus zusammenfallen lassen; die y Axe nehmen wir vertikal nach oben, die z Axe nach Osten gerichtet. Der Magnet, durch dessen Schwingungen die äusseren elektromotorischen Kräfte hervorgerufen werden, sei an einem vertikalen Drathe aufgehängt, so dass die Schwingungen desselben in einer der xz Ebene parallelen Ebene erfolgen, für sämmtliche Punkte desselben die der y Axe parallelen Geschwindigkeitskomponenten gleich Null sind; die magnetische Axe des schwingenden Stabes sei horizontal, so dass wir denselben in seiner Wirkung ersetzen können durch zwei von einer Horizontalen Linie getragene Pole $+\mu$ und $-\mu$ in gleicher Entfernung von der vertikalen Drehungsaxe.

Die Entwicklung der elektromotorischen Kräfte werden wir weiter vereinfachen durch die Annahme, dass die Weite der von dem Magnet ausgeführten Schwingungen so klein sei, dass wir die während der Schwingung eintretende Aenderung der Coordinaten der beiden Pole vernachlässigen können; die elektromotorischen Kräfte werden dann lediglich abhängen von den Geschwindigkeiten, welche die beiden Pole den verschiedenen Phasen der Schwingung entsprechend besitzen, während ihre Lage als unveränderlich betrachtet wird. Gleichzeitig ergiebt sich dann, dass wir die in Wirklichkeit kreisförmige Bahn der beiden Pole ersetzen können durch eine geradlinige; da aber die magnetische Axe in der Ruhelage der X Axe des Coordinatensystems parallel ist, so sind die beiden geraden Linien,in welcher die Pole des Magnets ihre schwingende Bewegung ausführen, parallel der z Axe, und es sind somit die der x und y Axe parallelen Geschwindigkeitskomponenten gleich Null zu setzen.

Betrachten wir nun zunächst die von dem Nordpol ausgeübten elektromotorischen Kräfte; die Coordinaten desselben seien a_1, b_1, c_1 seine Geschwindigkeit in der Richtung der z Axe sei $\mathfrak{w}_1$.

Die Coordinaten des Punktes für welchen die elektromotorische Kraft bestimmt werden soll, seien x, y, z; für die Entfernung der beiden Punkte ergiebt sich dann;

$$r_1^2 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2$$

Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir für die Componenten der in dem Punkt x, y, z inducirten elektromotorischen Kraft die Werthe:

$$X_1 = -\mathrm{A}\,\mu\,\mathfrak{w}_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_1}\right)$$

$$Y_1 = \mathrm{A}\,\mu\,\mathfrak{w}_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_1}\right)$$

$$Z_1 = 0.$$

Bezeichnen wir den Abstand der beiden Pole von der Drehungsaxe durch δ, den Drehungswinkel gerechnet von der der x Axe parallelen Ruhelage an durch φ, so ist

$$\mathfrak{w}_1 = \delta \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Für $\frac{d\varphi}{dt}$ machen wir den Ansatz

$$\frac{d\varphi}{dt} = D\varkappa e^{\varkappa t}$$

und erhalten dann:

$$X_1 = - e^{\varkappa t} A \mu \delta D \varkappa \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_1}\right)$$

$$Y_1 = e^{\varkappa t} A \mu \delta D \varkappa \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{t_1}\right).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Südpols durch a_2, b_2, c_2, seine Entfernung von dem Punkt x, y, z durch r_2, so erhalten wir die von demselben ausgeübten elektromotorischen Kräfte, wenn wir in den vorhergehenden Ausdrücken an Stelle von μ und $\mathfrak{w}_1$ stubstituiren $-\mu$ und $-\mathfrak{w}_1$, an Stelle wie r_1 die neue Entfernung r_2; es ergiebt sich somit:

$$X_2 = - e^{\varkappa t} A \mu \delta D \varkappa \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_2}\right)$$

$$Y_2 = e^{\varkappa t} A \mu \delta D \varkappa \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_2}\right)$$

Für die früher durch X, Y, Z bezeichneten Gesammtkomponenten der äusseren elektromotorischen Kraft haben wir dann:

$$X = X_1 + X_2,\ Y = Y_1 + Y_2$$

$$Z = 0.$$

Um nun mit Hülfe der in den früheren Abschnitten entwickelten Formeln die durch die Schwingung des Magnets im Inneren einer leitenden Kugel hervorgerufenen Strömungen der Elektricität zu bestimmen, haben wir die obigen Ausdrücke zu entwickeln nach Kugelfunktionen der im Innern der Kugel gelegenen Punkte x, y, z. Führen wir zu diesem Zweck Kugelkoordinaten ein mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned} a_1 &= d_1 \cos\alpha_1 & a_2 &= d_2 \cos\alpha_2 \\ b_1 &= d_1 \sin\alpha_1 \cos\beta_1 & b_2 &= d_2 \sin\alpha_2 \cos\beta_2 \\ c_1 &= d_1 \sin\alpha_1 \sin\beta_1 & c_2 &= d_2 \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \end{aligned}$$

$$x = \varrho \cos \vartheta$$

$$y = \varrho \sin \vartheta \cos \psi$$

$$z = \varrho \sin \vartheta \sin \psi$$

so ergeben sich die gesuchten Entwicklungen mit Hülfe der Gleichungen:

$$\frac{1}{r_1} = \Sigma \frac{\varrho^n}{d_1^{n+1}} \Sigma \mathfrak{a}^n_m \left(\Sigma^n_{1m} \mathrm{S}^n_m + \Gamma^n_{1m} \mathrm{C}^n_m\right)$$

$$\frac{1}{r_2} = \Sigma \frac{\varrho^n}{d_2^{n+1}} \Sigma \mathfrak{a}^n_m \left(\Sigma^n_{2m} \mathrm{S}^n_m + \Gamma^n_{2m} \mathrm{C}^n_m\right)$$

wo

$$\Sigma^n_{1m} = \sin^m \alpha_1 \mathfrak{P}^n_m (\cos \alpha_1) \sin m \beta_1$$

$$\Gamma^n_{1m} = \sin^m \alpha_1 \mathfrak{P}^n_m (\cos \alpha_1) \cos m \beta_1$$

$$\Sigma^n_{2m} = \sin^m \alpha_2 \mathfrak{P}^n_m (\cos \alpha_2) \sin m \beta_2$$

$$\Gamma^n_{2m} = \sin^m \alpha_2 \mathfrak{P}^n_m (\cos \alpha_2) \cos m \beta_2 .$$

Um die Rechnung nicht unnöthig zu verwickeln, möge dieselbe für eine ganz beliebige Lage des schwingenden Magnets nicht weiter verfolgt werden; wir gehen vielmehr sofort über zu der Betrachtung gewisser einfacherer Fälle, wie sie den besonders ausgezeichneten Stellungen des schwingenden Magnets entsprechen. Mit Rücksicht auf die besondere Wahl des Coordinatensystems ergeben sich leicht zwei solche Stellungen:

I. Der Mittelpunkt des schwingenden Magnets liegt in der yz Ebene.

II. Der Mittelpunkt des schwingenden Magnets liegt in der x Axe.

Im ersten Falle, welchen wir zuerst weiter verfolgen wollen ist

$$d_2 = d_1.$$

$$\alpha_2 = 180 - \alpha_1.$$

$$\beta_2 = \beta_1.$$

Wir setzen

$$\Sigma^n_m = \Sigma^n_{1m} + \Sigma^n_{2m}$$

$$= \sin^m \alpha \Big(\mathfrak{P}^n_m (\cos \alpha) + \mathfrak{P}^n_m (-\cos \alpha)\Big) \sin m \beta$$

$$\Gamma^n_m = \Gamma^n_{1m} + \Gamma^n_{2m}$$

$$= \sin^m \alpha \Big(\mathfrak{P}^n_m (\cos \alpha) + \mathfrak{P}^n_m (-\cos \alpha)\Big) \cos m \beta$$

und erhalten dann:

$$X = - e^{\varkappa t} \Sigma \varrho^n \Sigma$$

$$\frac{A \mu \delta D \varkappa}{d^{n+2}} \left\{ \frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} \mathfrak{a}^{n+1}_{m+1} \Sigma^{n+1}_{m+1} - \frac{n-m+2 . n-m+1}{2 . 2n+1} \mathfrak{a}^{n+1}_{m-1} \Sigma^{n+1}_{m-1} \right\} . \mathfrak{S}^n_m$$

$$+ \frac{A \mu \delta D \varkappa}{d^{n+2}} \left\{ \frac{n+m+2 . n+m+1}{2 . 2n+1} \mathfrak{a}^{n+1}_{m+1} \Gamma^{n+1}_{m+1} - \frac{n-m+2+n-m+1}{2 . 2n+1} \mathfrak{a}^{n+1}_{m-1} \Gamma^{n+1}_{m-1} \right\} \mathfrak{C}^n_m$$

$$Y = e^{\varkappa t} \Sigma \varrho^n \Sigma$$

$$\frac{A \mu \delta D \varkappa}{d^{n+2}} . \frac{n-m+1 . n+m+1}{2n+1} \mathfrak{a}^{n+1}_m \Sigma^{n+1}_m \mathfrak{S}^n_m$$

$$+ \frac{A \mu \delta D \varkappa}{d^{n+2}} . \frac{n-m+1 . n+m+1}{2n+1} \mathfrak{a}^{n+1}_m \Gamma^{n+1}_m \mathfrak{C}^n_m$$

Vergleichen wir diese Ausdrücke mit den früher für die Componenten der äusseren elektromotorischen Kraft gegebenen Entwicklungen

$$X = e^{xt}\,\Sigma\varrho^n\,\Sigma a^m_n\,\mathrm{S}^n_m + \alpha^m_n\,\mathrm{C}^n_m$$

$$Y = e^{xt}\,\Sigma\varrho^n\,\Sigma b^m_n\,\mathrm{S}^n_m + \beta^m_n\,\mathrm{C}^n_m$$

so erhalten wir für den betrachteten Fall, in welchem diese Componenten von den Schwingungen eines an einem vertikalen Drathe aufgehängten Magnets herrühren, die folgenden Werthe für die Coëfficienten a, α, und b, β:

$$a^m_n = -\frac{A\mu\delta Dx}{d^{n+2}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{n+m+2\,.\,n+m+1}{2\,.\,2n+1}\,\mathfrak{a}^{n+1}_{m+1}\,\Sigma^{n+1}_{m+1}\\ -\dfrac{n-m+2\,.\,n-m+1}{2\,.\,2n+1}\,\mathfrak{a}^{n+1}_{m-1}\,\Sigma^{n+1}_{m-1}\end{array}\right\}$$

$$\alpha^m_n = -\frac{A\mu\delta Dx}{d^{n+2}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{n+m+2\,.\,n+m+1}{2\,.\,2n+1}\,\mathfrak{a}^{n+1}_{m+1}\,\Gamma^{n+1}_{m+1}\\ -\dfrac{n-m+2\,.\,n-m+1}{2\,.\,2n+1}\,\mathfrak{a}^{n+1}_{m-1}\,\Gamma^{n+1}_{m-1}\end{array}\right\}$$

$$b^m_n = \frac{A\mu\delta Dx}{d^{n+2}}\cdot\frac{n-m+1\,.\,n+m+1}{2n+1}\,\mathfrak{a}^{n+1}_m\,\Sigma^{n+1}_m$$

$$\beta^m_n = \frac{A\mu\delta Dx}{d^{n+2}}\cdot\frac{n-m+1\,.\,n+m+1}{2n+1}\,\mathfrak{a}^{n+1}_m\,\Gamma^{n+1}_m$$

Ebenso wie bei früheren in ähnlicher Weise gebildeten Ausdrücken sind die in a^1_n und b^0_n auftretenden Grössen

$$\Sigma^{n+1}_0 = 0$$

zu setzen, die numerischen Faktoren von

$$\Gamma^{n+1}_0$$

in den Ausdrücken für α^1_n zu verdoppeln.

Wir werden nun den Fall, dass der Mittelpunkt des schwingenden Magnets in der $y\,z$ Ebene gelegen ist, wiederum nicht in seiner ganzen Allgemeinheit behandeln, sondern werden die vollständige Lösung des Problems wieder nur in zwei besonders einfachen Unterfällen durchführen, nemlich

I^{a}. Für den Fall, dass der Mittelpunkt des schwingenden Magnets in der y Axe liegt.

I^{b} für den Fall, dass dieser Mittelpunkt auf der z Axe gelegen ist.

In dem Falle I^{a} ist $\beta = 0$, somit auch

$$\Sigma_m^n = 0$$

dagegen

$$\Gamma_m^n = \sin^m \alpha \left(\mathfrak{P}_m^n(\cos\alpha) + \mathfrak{P}_m^n(-\cos\alpha)\right)$$

Somit auch $\Gamma_m^n = 0$ wenn $n - m$ ungerade. Es ergiebt sich hieraus, dass in dem Falle I^{a} alle Coëfficienten a verschwinden, und dass ebenso alle Coëfficienten α_n^m gleich Null sind für welche $n - m$ ungerad ist. Aus demselben Grunde sind auch alle Coëfficienten b gleich Null, während von den Coëfficienten β_n^m diejenigen verschwinden, für welche $n - m$ eine gerade Zahl ist.

In dem Fall I^{b}, in welchen der Mittelpunkt des schwingenden Magnets in der z Axe liegt ist.

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

somit:

$$\Sigma^n_m = \sin^m \alpha \left(\mathfrak{P}^n_m \cos \alpha + \mathfrak{P}^n_m (-\cos \alpha)\right) \sin \frac{m\pi}{2}$$

$$\Gamma^n_m = \sin^m \alpha \left(\mathfrak{P}^n_m \cos \alpha + \mathfrak{P}^n_m (-\cos \alpha)\right) \cos \frac{m\pi}{2}$$

Es ist somit

Σ^n_m gleich Null für $m = 0, 2, 4 \;.\;.$
und für $n = 0, 2, 4 \;.\;.$

Γ^n_m gleich Null für $m = 1, 3, 5 \;.\;.$
und für $n = 1, 3, 5 \;.\;.$

Es ergiebt sich hieraus mit Rücksicht auf die allgemeinen Formeln dass die Coëfficienten a^m_n gleich Null sind für $n = 1, 3, 5 \;.\;.\;.$; die Coëfficienten α^m_n gleich Null für $n = 0, 2, 4 \;.\;.\;.$ Ausserdem sind aber die Coëfficienten a^m_n auch gleich Null für $m = 1, 3, 5 \;.\;.$ die Coëfficienten α^m_n für $m = 0, 2, 4 \;.\;.$ Die Coëfficienten b^m_n sind gleich Null für $n = 1, 3, 5 \;.\;.\;.$ und für $m = 0, 2, 4 \;.\;.\;.$, die Coëfficienten β^m_n für $n = 0, 2, 4 \;.\;.\;.$, und für $m = 1, 3, 5 \;.\;.\;.$

Wir gehen über zu dem Hauptfall II, in welchem der Mittelpunkt des schwingender Magnets auf der X Axe gelegen ist.

Betrachten wir wieder zuerst die von dem Nordpol des schwingender Magnets ausgeübte elektromotorische Wirkung so haben wir in den früher gegebenen Ausdrücken den Winkel α_1 gleich Null zu setzen; es reduciren sich dann die von der Bewegung des Nordpols herrührenden Componenten auf die einfachen Werthe:

$$X_1 = e^{\varkappa t} \Sigma \varrho^n n. \frac{1 . 3 \ldots 2n-1}{1 . 2 . 3 \ldots n} \frac{A \mu \delta D \varkappa}{d_1^{n+2}} C_1^n$$

$$Y_1 = e^{\varkappa t} \Sigma \varrho^n n+1. \frac{1 . 3 \ldots 2n-1}{1 . 2 . 3 \ldots n} \frac{A \mu \delta D \varkappa}{d_1^{n+2}} C_0^n$$

Was die von dem Südpol ausgeübten Componenten anbelangt, so werden dieselben sich verschieden gestalten, je nachdem der Südpol auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite der x Axe liegt wie der Nordpol. Wir werden dem entsprechend auch den II. Hauptfall wieder zerlegen in zwei besonders zu behandelnde Unterfälle.

II^a, der Südpol des Magnets liegt auf derselben Seite der x Axe wie der Nordpol.

II^b. Der Südpol des Magnets liegt auf der entgegengesetzten Seite der x Axe wie der Nordpol, aber in gleichem Abstand vom Mittelpunkt des Coordinatensystems.

In dem Falle II^a erhalten wir die von dem Südpol ausgeübten Componenten einfach durch Vertauschung von d_1 mit dem Abstand d_2, welchen der Südpol von dem Mittelpunkt des Coordinatensystems besitzt, für die Componenten der von beiden Polen zusammengenommen ausgeübten Wirkung ergeben sich demnach die Werthe:

$$X = e^{\varkappa t} \Sigma \varrho^n . n . \frac{1 . 3 \ldots 2n-1}{1 . 2 . 3 \ldots n} A \mu \delta D \varkappa \left(\frac{1}{d_1^{n+2}} + \frac{1}{d_2^{n+2}}\right) C_1^n$$

$$Y = e^{\varkappa t} \Sigma \varrho^n n+1 .. \frac{1 . 3 \ldots 2n-1}{1 . 2 . 3 . n} A \mu \delta D \varkappa \left(\frac{1}{d_1^{n+2}} + \frac{1}{d_2^{n+2}}\right) C_0^n.$$

Die für X und Y früher angenommenen Reihenentwicklungen reduciren sich demnach auf:

$$X = e^{xt} \Sigma \varrho^n \alpha_n^1 C_1^n$$

$$Y = e^{xt} \Sigma \varrho^n \beta_n^0 C_0^n$$

und es ist:

$$\alpha_n^1 = \quad n \cdot \frac{1 \cdot 3 \,.\,.\, 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \,.\,.\, n} A \mu \delta D \varkappa \left(\frac{1}{d_1^{n+2}} + \frac{1}{d_2^{n+2}}\right)$$

$$\beta_n^0 = n+1 \cdot \frac{1 \cdot 3 \,.\,.\, 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \,.\,.\, n} A \mu \delta D \varkappa \left(\frac{1}{d_1^{n+2}} + \frac{1}{d_2^{n+2}}\right)$$

$$\beta_0^0 = A \mu \delta D \varkappa \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2}\right)$$

In dem Falle II[b], in welchem die beiden Pole auf entgegengesetzten Seiten der X Axe in gleichem Abstande vom Mittelpunkt liegen, ist:

$$d_1 = d_2$$

$$\alpha_2 = 180^{\circ}.$$

Für die Componenten der vom Südpol ausgeübten elektromotorischen Kraft ergiebt sich somit:

$$X_2 = e^{xt} \Sigma \varrho^n (-1)^{n+1} . n . \frac{1 . 3 . . 2n-1}{1 . 2 . 3 . . n} \frac{A \mu \delta D \varkappa}{d^{n+2}} . C_1^n$$

$$Y_2 = e^{xt} \Sigma \varrho^n (-1)^{n+1} . n + 1 . \frac{1 . 3 . . 2n-1}{1 . 2 . 3 . . n} \frac{A \mu \delta D \varkappa}{d^{n+2}} . C_0^n .$$

Die Componenten der Gesammtwirkung werden:

$$X = e^{xt} \Sigma \varrho^n \left(1^{n+1} + (-1)^{n+1}\right) n . \frac{1 . 3 . . 2n-1}{1 . 2 . 3 . . n} \frac{A \mu \delta D \varkappa}{d^{n+2}} . C_1^n$$

$$Y = e^{xt} \Sigma \varrho^n \left(1^{n+1} + (-1)^{n+1}\right) n + 1 . \frac{1 . 3 . . 2n-1}{1 . 2 . 3 . . n} \frac{A \mu \delta D \varkappa}{d^{n+2}} . C_0^n$$

Setzen wir wieder

$$X = e^{xt} \Sigma \varrho^n \alpha_n^1 C_1^n$$

$$Y = e^{xt} \Sigma \varrho^n \beta_n^0 C_0^n$$

so haben die Coefficienten α und β die Werthe

$$\alpha_n^1 = \left(1^{n+1} + (-1)^{n+1}\right) n . \frac{1 . 3 . . 2n-1}{1 . 2 . 3 \ldots n} . \frac{A \mu \delta D \varkappa}{d^{n+2}}$$

$$\beta_n^0 = \left(1^{n+1} + (-1)^{n+1}\right) n + 1 . \frac{1 . 3 . . 2n-1}{1 . 2 . 3 . . n} \frac{A \mu \delta D \varkappa}{d^{n+2}}$$

es verschwinden also alle Coefficienten mit geradem n.

VI. Allgemeiner Ausdruck für das Drehungsmoment welches von irgend welchen in der Kugel vorhandenen Strömungen auf den schwingenden Magnet ausgeübt wird.

Wenn, wie wir diess auch im Vorhergehenden angenommen haben die Bewegung des Magnets nur in einer äusserst kleinen Schwingung um die der X Axe parallele Ruhelage besteht, so werden wir von den Kräften, mit welchen die in der leitenden Kugel erregten Schwingungen der Elektricität auf den Magnet zurückwirken, nur die der Z Axe parallelen Componenten zu berücksichtigten haben. Bezeichnen wir die Z Componenten der auf den Nord und Südpol des Magnets ausgeübten Wirkung durch Z_1 und Z_2, so ist dann das auf den Magnet ausgeübte Drehungsmoment $\varDelta$ gegeben durch:

$$\varDelta = \lambda\,(Z_1 + Z_2).$$

Wir betrachten zuerst die Componente der auf den Nordpol ausgeübten Wirkung. Bezeichnen wir wie früher die rechtwinkligen Coordinaten des Nordpols durch a_1, b_1, c_1, die Coordinaten eines beliebig im Inneren der Kugel angenommenen Punktes durch x, y, z, die Componenten der in demselben vorhandenen Strömung durch u, v, w, so ist die Z Componente der auf den betrachteten Pol ausgeübten Kraft gegeben durch:

$$\mu A \left(u \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} - v \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} \right) dx\, dy\, dz$$

oder, wenn wir für u und v die früheren Werthe substituiren:

$$\frac{\mu A}{4\pi}\left(\chi_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} - \chi_2 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}\right) dx\, dy\, dz$$

die von allen in der Kugel vorhandenen Strömungen zusammengenommen ausgeübte Z Componente erhalten wir, wenn wir den vorhergehenden Ausdruck über das ganze Volumen der Kugel hin integriren; wir erhalten somit:

$$Z_1 = \mu \frac{A}{4\pi} \int \chi_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} dx\, dy\, dz - \mu \frac{A}{4\pi} \int \chi_2 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

Um die Integrationen auszuführen, setzen wir an Stelle der in den Integralen enthaltenen Ausdrücke ihre Entwicklungen nach Kugelfunktionen:

$$\chi_1 = e^{xt} \Sigma \varrho^n p \; \Sigma A_n \mathrm{S}^n_m + A^m_n \mathrm{C}^n_m$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} = \Sigma \varrho^n \frac{1}{d_1^{n+2}} \cdot \Sigma$$

$$\left\{\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1} \mathfrak{a}^{n+1}_{m+1} \Sigma^{n+1}_{1m+1} - \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1} \mathfrak{a}^{n+1}_{m-1} \Sigma^{n+1}_{1m-1}\right\} \mathrm{S}^n_m$$

$$+ \left\{\frac{n+m+2.n+m+1}{2.2n+1} \mathfrak{a}^{n+1}_{m+1} \Gamma^{n+1}_{1m+1} - \frac{n-m+2.n-m+1}{2.2n+1} \mathfrak{a}^{n+1}_{m-1} \Gamma^{n+1}_{1m-1}\right\} \mathrm{C}^n_m$$

$$\chi_2 = e^{xt} \Sigma \varrho^n p \; \Sigma B^m_n \mathrm{S}^n_m + B^m_n \mathrm{C}^n_m$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} = \Sigma \varrho^n \frac{1}{d_1^{n+2}} \cdot \Sigma \frac{n-m+1.n+m+1}{2n+1} \mathfrak{a}^{n+1}_m \left\{\Sigma^{n+1}_{1m} \mathrm{S}^n_m + \Gamma^{n+1}_{1m} \mathrm{C}^n_m\right\}$$

Hier sind die Ausdrücke Σ^n_{1m} und Γ^n_{1m} ganz ebenso wie früher zur Abkürzung gesetzt für

$$\sin^m \alpha_1 \mathfrak{P}^n_m (\cos \alpha_1) \sin m \beta_1 \text{ und } \sin^m \alpha_1 \mathfrak{P}^n_m (\cos \alpha_1) \cos m \beta_1 .$$

Endlich haben wir in den Integralen auch noch für das Volumelement seinen Ausdruck in Kugelkoordinaten zu substituiren:

$$\varrho^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\psi \, d\varrho .$$

Wir erhalten:

$$\int \chi_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} dx \, dy \, dz =$$

$$e^{xt} \Sigma \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{d_1^{n+2}} \int_0^a \varrho^{2n+2} p_n \, d\varrho \, . \, \Sigma$$

$$A^m_n \left\{ \frac{n+m+2 \, . \, n+m+1}{2 \, . \, 2n+1} \frac{\mathfrak{a}^{n+1}_{m+1}}{\mathfrak{a}^n_m} \Sigma^{n+1}_{1m+1} - \frac{n-m+2 \, . \, n-m+1}{2 \, . \, 2n+1} \frac{\mathfrak{a}^{n+1}_{m-1}}{\mathfrak{a}^n_m} \Sigma^{n+1}_{1m-1} \right\}$$

$$+ \quad A^m_n \left\{ \frac{n+m+2 \, . \, n+m+1}{2 \, . \, 2n+1} \frac{\mathfrak{a}^{n+1}_{m+1}}{\mathfrak{a}^n_m} \Gamma^{n+1}_{1m+1} - \frac{n-m+2 \, . \, n-m+1}{2 \, . \, 2n+1} \frac{\mathfrak{a}^{n+1}_{m-1}}{\mathfrak{a}^n_m} \Gamma^{n+1}_{1m-1} \right\}$$

Die Werthe der Grössen $\mathfrak{a}^n_m$ sind schon früher angegeben. Die Werthe von Σ^{n+1}_0 sind Null, die numerischen Faktoren von Γ^{n+1}_0 sind zu verdoppeln.

Für das zweite Integral ergiebt sich:

$$\int \chi_2 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} dx\, dy\, dz = e^{xt} \Sigma \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{a_1^{n+2}} \int_0^a \varrho^{2n+2} p_n d\varrho$$

$$. \Sigma B_n^m \frac{n-m+1 . n+m+1}{2n+1} \frac{\mathfrak{a}_m^{n+1}}{\mathfrak{a}_m^n} \Sigma_{1m}^{n+1} + B_n^m \frac{n-m+1 . n+m+1}{2n+1} \frac{\mathfrak{a}_m^{n+1}}{\mathfrak{a}_n^n} \Gamma_{1m}^{n+1}$$

Mit Bezug auf die weitere Ausführung der Integration können wir bemerken, dass nach einer früher entwickelten Formel

$$\varrho^{2n+2} p_n d\varrho = \frac{a^2}{g^2} \left\{ \varrho^{2n+2} \frac{d^2 p_n}{d\varrho^2} + (2n+2) \varrho^{2n+1} \frac{dp_n}{d\varrho} \right\}$$

$$= \frac{a^2}{g^2} \frac{d}{d\varrho} \left\{ \varrho^{2n+2} \frac{dp_n}{d\varrho} \right\}.$$

Somit

$$\int \varrho^{2n+2} dp_n \varrho = \frac{a^2}{g^2} \varrho^{2n+2} \frac{dp_n}{d\varrho} = \frac{1}{2n+2} \varrho^{2n+3} p_{n+1}.$$

Es ist ferner

$$\frac{\mathfrak{a}_{m+1}^{n+1}}{\mathfrak{a}_m^n} = \frac{2n+1 . 2n+1}{n+m+1 . m+m+2}, \quad \frac{\mathfrak{a}_{m-1}^{n+1}}{\mathfrak{a}_m^n} = \frac{2n+1 . 2n+1}{n-m+1 . n-m+2}$$

$$\frac{\mathfrak{a}_m^{n+1}}{\mathfrak{a}_m^n} = \frac{2n+1 . 2n+1}{n+m+1 . n-m+1}$$

$$\frac{\mathfrak{a}_1^{n+1}}{\mathfrak{a}_0^n} = 2 . \frac{2n+1 . 2n+1}{n+1 . n+2}, \quad \frac{\mathfrak{a}_0^{n+1}}{\mathfrak{a}_1^n} = \frac{1}{2} . \frac{2n+1 . 2n+1}{n . n+1}$$

Mit Hülfe dieser Formeln ergiebt sich:

$$\frac{A}{4\pi}\int \chi_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = A e^{xt} \Sigma \frac{1}{2n+2} \frac{a^{2n+3}}{d_1^{n+2}} P_{n+1}^{a}$$

$$\cdot \Sigma \tfrac{1}{2}\left\{ \Sigma_{1m+1}^{n+1} - \Sigma_{1m-1}^{n+1} \right\} A_n^m + \tfrac{1}{2}\left\{ \Gamma_{1m+1}^{n+1} - \Gamma_{1m-1}^{n+1} \right\} A_n^m$$

$$\frac{A}{4\pi}\int \chi_2 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}\, dx\, dy\, dz =$$

$$A e^{xt} \Sigma \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{a^{2n+3}}{d_1^{n+2}} P_{n+1}^{a} \Sigma B_n^m \Sigma_{1m}^{n+1} + B_n^m \Gamma_{1m}^{n+1}$$

Zu bemerken ist bei diesen Gleichungen, dass der Faktor von A_n^0 zu verdoppeln ist; im Uebrigen besitzen die obigen Formeln unbeschränkte Gültigkeit, insbesondere findet also keine Verdopplung des numerischen Faktors von Γ_{10}^{n+1} statt.

Die Z Componente der auf den Nordpol des schwingenden Magnets ausgeübten Wirkung ist gleich der Differenz der beiden im Vorhergehenden berechneten Integrale multiplicirt mit dem Magnetismus desselben; multipliciren wir noch mit dem Abstand des Nordpols von der Drehungsaxe, so erhalten wir das auf denselben ausgeübte Drehungsmoment:

$$\Delta_1 = A \mu \delta e^{xt} \Sigma \frac{1}{2n+2} \frac{a^{2n+3}}{d_1^{n+2}} P_{n+1}^{a} \cdot \Sigma$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{ \Sigma_{1m+1}^{n+1} - \Sigma_{1m-1}^{n+1} \right\} A_n^m - \Sigma_{1m}^{n+1} B_n^m$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left\{ \Gamma_{1m+1}^{n+1} - \Gamma_{1m-1}^{n+1} \right\} A_n^m - \Gamma_{1m}^{n+1} B_n^m$$

Durch eine mit dieser vollständig analoge Formel wird natürlich auch das auf den Südpol der Magnetnadel ausgeübte Drehungsmoment gegeben sein, und wir werden dann durch Addition den einer ganz beliebigen Lage des Magnets entsprechenden Ausdruck des gesammten Drehungsmoments erhalten. Wir werden indess ebensowenig wie im vorhergehenden Abschnitt auf die Berechnung der diesem allgemeinen Fall entsprechenden Formel eingehen, sondern werden die weitere Durchführung der Rechnung beschränken auf dieselben speciellen Fälle, welche im vorhergehenden Abschnitt näher betrachtet worden sind.

Im ersten Falle, in welchem der Mittelpunkt des schwingenden Magnets in der yz Ebene gelegen ist, ergiebt sich für das gesammte Drehungsmoment der Ausdruck:

$$\varDelta = A \mu \delta e^{\varkappa t} \Sigma \frac{1}{2n+2} \frac{a^{2n+3}}{d_1^{n+2}} p_{n+1}^{a} \cdot \Sigma$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\Sigma_{m+1}^{n+1} - \Sigma_{m-1}^{n+1}\right\} A_m^m - \Sigma_m^{n+1} B_n^m + \tfrac{1}{2}\left\{\Gamma_{m+1}^{n+1} - \Gamma_{m+1}^{n+1}\right\} A_n^m - \Gamma_m^{n+1} B_n^m$$

Hier ist ebenso wie im vorhergehenden Abschnitt:

$$\Sigma_m^n = \sin^m \alpha \left\{\mathfrak{P}_m^n \cos\alpha + \mathfrak{P}_m^n(-\cos\alpha)\right\} \sin m\beta$$

$$\Gamma_m^n = \sin^m \alpha \left\{\mathfrak{P}_m^n \cos\alpha + \mathfrak{P}_m^n(-\cos\alpha)\right\} \cos m\beta$$

Der erste Hauptfall, auf welchen sich diese Formeln beziehen, wird dann wieder als besondere Fälle diejenigen in sich schliessen, bei welchen $\beta = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$ d. h. bei welchen der Mittelpunkt des schwingenden Magnets auf der y oder z Axe gelegen ist. Die diesen beiden Fällen I^a und I^b entsprechenden besonderen Werthe von Σ und Γ sind schon im vorhergehenden Abschnitt angegeben worden.

Als zweiten Hauptfall bezeichnen wir wieder denjenigen, in welchem die beiden Pole des schwingenden Magnets auf der x Axe gelegen sind. Betrachten wir auch in diesem Fall zunächst die auf den Nordpol ausgeübte Wirkung, so haben wir für die Coordinaten desselben zu setzen:

$$d = d_1, \alpha_1 = 0,$$

Gleichzeitig ergiebt sich, dass die Werthe von Σ_m^n alle verschwinden und ebenso die Werthe von Γ_m^n mit einziger Ausnahme von Γ_0^n; für diesen Ausdruck ergiebt sich:

$$\Gamma_{10}^n = \mathfrak{P}_0^n(1) = \frac{1.2.3\ldots n}{1.3\ldots 2n-1}$$

Für das Drehungsmoment, welches von den inducirten Strömungen auf den Nordpol des Magnets ausgeübt wird, erhalten wir den Werth:

$$\Delta_1 = -A\mu\delta e^{xt}\Sigma\frac{1}{2n+2}\frac{a^{2n+3}}{d_1^{n+2}}p_{n+1}^a \cdot \left\{\Gamma_{10}^{n+1}B_n^0 + \tfrac{1}{2}\Gamma_{10}^{n+1}A_n^1\right\}$$

Bei der Berechnung des gesammten Drehungsmomentes unterscheiden wir wieder die beiden Fälle, in welchen die Pole des Magnets auf derselben Seite der x Axe, oder auf entgegengesetzten Seiten symmetrisch zum Mittelpunkt gelegen sind.

II[a]. In dem ersteren Falle ergiebt sich für das gesammte Drehungsmoment der Ausdruck:

$$\varDelta = -A\mu\delta e^{xt}\Sigma\frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{d_1^{n+2}}+\frac{1}{d_2^{n+2}}\right)a^{2n+3}\overset{a}{p}_{n+1}$$

$$\cdot\left\{\Gamma_0^{n+1}B_n^0+\tfrac{1}{2}\Gamma_0^{n+1}A_n^1\right\}.$$

II[b]. Wenn der Südpol in derselben Entfernung vom Mittelpunkt auf der anderen Seite der x Axe gelegen ist, wie der Nordpol so ist:

$$\alpha_2 = 180^\circ.$$

Also

$$\Gamma_{20}^n = \mathfrak{P}_0^n(-1) = (-1)^n\Gamma_{10}^n$$

Für das Drehungsmoment ergiebt sich der Werth:

$$\varDelta = -A\mu\delta e^{xt}\Sigma\frac{1}{2n+2}\cdot\frac{a^{2n+3}}{d^{n+2}}\overset{a}{p}_{n+1}$$

$$\left(1+(-1)^{n+1}\right)\left\{\Gamma_0^{n+1}B_n^0+\tfrac{1}{2}\Gamma_0^{n+1}A_n^1\right\}.$$

VII. Berechnung der Componenten der inducirten Strömungen für den Fall, dass die elektromotorischen Kräfte durch die Schwingungen eines Magnets hervorgerufen werden.

Die Componenten der in unserer leitenden Kugel inducirten Strömungen werden vollständig gegeben sein, sobald wir die Coëfficienten A, B, C und A, B, Γ der für jene Componenten angenommen Entwicklungen ausdrücken durch die Coëfficienten a, b, c und α, β, γ deren Werthe in dem Abschnitte V gegeben worden sind. Ebenso wie wir dort die Werthe der Coëfficienten a, b, c und α, β, γ nur für gewisse specielle Fälle berechnet haben, so werden wir natürlich auch jetzt die ihnen entsprechenden Werthe der Coëfficienten A, B, C und A, B, Γ nur für dieselben Fälle anzugeben im Stande sein. Wir betrachten zunächst den

Fall I, in welchem der Mittelpunkt des schwingenden Magnets in der yz Ebene gelegen ist.

Die Werthe der Coefficienten A, B, C, A, B, Γ welche diesem Falle entsprechen ergeben sich, wenn wir die im Abschnitt V gegebenen Werthe von a, b, c, α, β, γ substituiren in den Gleichungen, welche im Abschnitt IV für jene ersteren Grössen entwickelt wurden.

Zunächst erhalten wir:

$$\mathrm{H}_n^m(a,b,c) = -\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}\left\{\begin{array}{l} (n+m+2)\,\mathfrak{a}_{m+1}^{n+1}\,\Sigma_{m+1}^{n+1} \\ -(n-m+2)\,\mathfrak{a}_{m-1}^{n+1}\,\Sigma_{m-1}^{n+1} \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{H}_n^m(\alpha\beta\gamma) = -\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}\left\{\begin{array}{l} (n+m+2)\,\mathfrak{a}_{m+1}^{n+1}\,\Gamma_{m+1}^{n+1} \\ -(n-m+2)\,\mathfrak{a}_{m-1}^{n+1}\,\Gamma_{m-1}^{n+1} \end{array}\right\}$$

In dem Ausdrucke für $\mathrm{H}^1_n(\alpha\beta\gamma)$ ist der numerische Faktor von Γ^{n+1}_0 zu verdoppeln.

Mit Hülfe der vorhergehenden Gleichungen ergiebt sich:

$$A^m_n = -\frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{q_n}\left(1-\frac{4\pi}{2.2n+1}\cdot\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}$$

$$\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\mathfrak{a}^n_m m\left(\Sigma^{n+1}_{m+1}+\Sigma^{n+1}_{m-1}\right)$$

und ebenso

$$A^m_n = -\frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{q_n}\left(1-\frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}$$

$$\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\mathfrak{a}^n_m m\left(\Gamma^{n+1}_{m+1}+\Gamma^{n+1}_{m-1}\right)$$

Gleichungen, welche für alle möglichen Werthe von m und n gelten.

$$B^m_n = \frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{qn}\left(1-\frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}$$

$$\frac{2n+1}{2.2n+2}\mathfrak{a}^n_m\left\{(n-m)\Sigma^{n+1}_{m+2}+2n\Sigma^{n+1}_m+(n+m)\Sigma^{n+1}_{m-2}\right\}$$

$$B^m_n = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{q_n}\left(1-\frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}$$

$$\frac{2n+1}{2.2n+2}\mathfrak{a}^n_m\left\{(n-m)\Gamma^{n+1}_{m+2}+2n\Gamma^{n+1}_m+(n+m)\Gamma^{n+1}_{m-2}\right\}$$

Insbesondere wird:

$$B_n^0 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2 \varkappa\right)\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \mathfrak{a}_0^n \cdot n\left(\Gamma_2^{n+1} + \Gamma_0^{n+1}\right)$$

$$B_n^1 = \frac{4\pi}{\lambda}\,\frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2 \varkappa\right)\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}$$

$$\frac{2n+1}{2.2n+2}\mathfrak{a}_1^n\left\{(n-1)\,\Sigma_3^{n+1} + (3n+1)\,\Sigma_1^{n+1}\right\}$$

$$B_n^1 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2 \varkappa\right)\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}$$

$$\frac{2n+1}{2.2n+2}\mathfrak{a}_1^n\left\{(n-1)\,\Gamma_3^{n+1} + (n-1)\,\Gamma_1^{n+1}\right\}$$

$$B_n^2 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2 \varkappa\right)\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}$$

$$\cdot\,\frac{2n+1}{2.2n+2}\mathfrak{a}_2^n\left\{(n-2)\,\Sigma_4^{n+1} + 2n\,\Sigma_2^{n+1}\right\}$$

$$B_n^2 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2 \varkappa\right)\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}$$

$$\frac{2n+1}{2.2n+2}\mathfrak{a}_2^n\left\{(n-2)\,\Gamma_4^{n+1} + 2n\,\Gamma_2^{n+1} + (n+2)\,\Gamma_0^{n+1}\right\}$$

u. s. w.

Für die Componenten der Strömungen in der Richtung der Z Axe ergeben sich folgende Werthe der Coefficienten:

$$C_n^m = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{q_n^c}\left(1-\frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2\,\varkappa\right)\frac{A\mu\delta D\varkappa}{d^{n+2}}$$

$$\cdot\frac{2n+1}{2.2n+2}\mathfrak{a}_m^n\left\{(n-m)\Sigma_{m+2}^{n+1}-2m\Sigma_m^{n+1}-(n+m)\Sigma_{m-2}^{n+1}\right\}$$

und ganz analoge Ausdrücke für die Coefficienten Γ_n^m.

Wir gehen über zu der Berechnung der Strömungskomponenten für die beiden andern Fälle, in welcher die Pole des schwingenden Magnets auf der X Axe gelegen sind.

Fall II[a]. Beide Pole des schwingenden Magnets liegen auf derselben Seite der X Axe.

In diesem Falle wird:

$$H_n^1(\alpha\beta\gamma) = 2.2n+1.\frac{1.3\,.\,.\,2n-1}{1.2.3\,.\,.\,.\,n}A\mu\delta D\varkappa\left(\frac{1}{d_1^{n+2}}+\frac{1}{d_2^{n+2}}\right)$$

$$H_0^1(\alpha\beta\gamma) = 2A\mu\delta D\varkappa\left(\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}\right).$$

Für alle übrigen Werthe von m und n sind die Funktionen H_n^m gleich Null.

Es ergiebt sich hieraus:

$$A_n^1 = -\frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{q_n}\left(1-\frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)A\mu\delta D\varkappa\left(\frac{1}{d_1^{n+2}}+\frac{1}{d_2^{n+2}}\right)$$

$$\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,.\,.\,2n-1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n}$$

$$B_n^0 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda} a^2 x\right) A \mu \delta D x \left(\frac{1}{d_1^{n+2}} + \frac{1}{d_2^{n+2}}\right)$$

$$\cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{1.3\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}$$

$$B_0^0 = 0.$$

$$B_n^2 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda} a^2 x\right) \cdot A \mu \delta D x \left(\frac{1}{d_1^{n+2}} + \frac{1}{d_2^{n+2}}\right)$$

$$\cdot \frac{n.n-1}{2n+2} \cdot \frac{1.3\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}$$

$$\Gamma_n^0 = -\frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda} a^2 x\right) A \mu \delta D x \left(\frac{1}{d_1^{n+2}} + \frac{1}{d_2^{n+2}}\right)$$

$$\cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{1.3\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}$$

$$\Gamma_n^2 = -\frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda} a^2 x\right) A \mu \delta D x \left(\frac{1}{d_1^{n+2}} + \frac{1}{d_2^{n+2}}\right)$$

$$\cdot \frac{n.n-1}{2n+2} \cdot \frac{1.3\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}$$

Fall II[b]. Die beiden Pole auf entgegengesetzten Seiten der XAxe in gleichem Abstand von Mittelpunkt.

Es wird

$$\mathrm{H}_n^1(\alpha\beta\gamma) = \left(1^{n+1} + (-1)^{n+1}\right) 2.2n+1 \cdot \frac{1.3\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}\frac{A\mu\delta D x}{d^{n+2}}$$

$$A_n^1 = -\left(1^{n+1} + (-1)^{n+1}\right)\frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda} a^2 x\right)\frac{A\mu\delta D x}{d^{n+2}}$$

$$\cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1.3\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}$$

$$B_n^0 = +\left(1^{n+1} + (-1)^{n+1}\right)\frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{4\pi}{2.2n+1}\frac{A^2}{\lambda}a^2 x\right)\frac{A\mu\delta D x}{d^{n+2}}$$

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{1 \,.\, 3 \ldots 2n-1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}$$

u. s. w.

VIII. Das von den inducirten Strömungen rückwärts auf den Magnet ausgeübte Drehungsmoment.

Fall I: Der Mittelpunkt des schwingenden Magnets liegt in der $y\,z$ Ebene. Substituiren wir die in dem vorhergehenden Abschnitt gegebenen Werthe der Coëfficienten A, B und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in den Formeln des Abschnittes VII, so ergiebt sich für das Drehungsmoment der Ausdruck:

$$\varDelta = -4\pi\frac{A^2}{\lambda}\mu^2\delta^2 D\varkappa e^{\varkappa t} \,.\, \Sigma$$

$$\frac{2n+1}{2.2n+2.2n+3} \cdot \frac{a^{2n+3}}{d^{2n+4}}\left(1 - \frac{8\pi}{2n+1.2n+5}\frac{A^2}{\lambda}a^2 x\right) . \Sigma$$

$$\mathfrak{a}_m^n \begin{Bmatrix} m\left(\Sigma_{m+1}^{n+1^2} - \Sigma_{m-1}^{n+1^2}\right) + (n-m)\Sigma_{m+2}^{n+1}\Sigma_m^{n+1} \\ + 2n\Sigma_m^{n+1^2} + (n+m)\Sigma_{m-2}^{n+1}\Sigma_m^{n+1} \end{Bmatrix}$$

$$+ \mathfrak{a}_m^n \begin{Bmatrix} m\left(\Gamma_{m+1}^{n+1^2} - \Gamma_{m-1}^{n+1^2}\right) + (n-m)\Gamma_{m+2}^{n+1}\Gamma_m^{n+1} \\ + 2n\Gamma_m^{n+1^2} + (n+m)\Gamma_{m-2}^{n+1}\Gamma_m^{n+1} \end{Bmatrix}$$

Entsprechend den einzelnen Werthpaaren von n und m können wir das ganze Drehungsmoment entwickeln in eine Reihe von der Form:

$$\varDelta = \varDelta_0^0 + \varDelta_0^1 + \varDelta_1^1 + \varDelta_0^2 + \ldots$$

und erhalten dann für die einzelnen Terme die folgenden speciellen Werthe:

$$\varDelta_0^0 = 0.$$

$$\varDelta_0^1 = -4\pi \frac{A^2}{\lambda} \mu^2 \delta^2 D \varkappa e^{\varkappa t} . \frac{3}{4.5} \frac{a^5}{d^6} \left(1 - \frac{8\pi}{3.7} \frac{A^2}{\lambda} a^2 \varkappa\right)$$
$$. \mathfrak{a}_0^1 \, \Gamma_0^2 \left(\Gamma_2^2 + \Gamma_0^2\right)$$

$$\varDelta_1^1 = -4\pi \frac{A^2}{\lambda} \mu^2 \delta^2 D \varkappa e^{\varkappa t} \frac{3}{2.4.5} \frac{a^5}{d^6} \left(1 - \frac{8\pi}{3.7} \frac{A^2}{\lambda} a^2 \varkappa\right)$$
$$\left\{\mathfrak{a}_1^1 \left(\Sigma_2^2 \Sigma_2^2 + 4 \Sigma_1^2 \Sigma_1^2\right) + \mathfrak{a}_1^1 \left(\Gamma_2^2 \Gamma_2^2 - \Gamma_0^2 \Gamma_0^2\right)\right\}$$

$$\varDelta_0^2 = -4\pi \frac{A^2}{\lambda} \mu^2 \delta^2 D \varkappa e^{\varkappa t} \frac{5}{6.7} \frac{a^7}{d^8} \left(1 - \frac{8\pi}{5.9} \frac{A^2}{\lambda} a^2 \varkappa\right)$$
$$\mathfrak{a}_2^0 . 2 \left(\Gamma_2^3 + \Gamma_0^3\right) \Gamma_0^3$$

$$\varDelta_1^2 = -4\pi \frac{A^2}{\lambda} \mu^2 \delta^2 D \varkappa e^{\varkappa t} \frac{5}{2.6.7} \frac{a^7}{d^8} \left(1 - \frac{8\pi}{5.9} \frac{A^2}{\lambda} a^2 \varkappa\right)$$
$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{a}_1^2 \left(\Sigma_2^3 \Sigma_2^3 + \Sigma_3^3 \Sigma_1^3 + 7 \Sigma_1^3 \Sigma_1^3\right) \\ + \mathfrak{a}_1^2 \left(\Gamma_2^3 \Gamma_2^3 - \Gamma_0^3 \Gamma_0^3 + \Gamma_3^3 \Gamma_1^3 + \Gamma_1^3 \Gamma_1^3\right) \end{array}\right\}$$

$$\varDelta_2^2 = -4\pi \frac{A^2}{\lambda} \mu^2 \delta^2 D \varkappa e^{\varkappa t} \frac{5}{2.6.7} \frac{a^7}{d^8} \left(1 - \frac{8\pi}{5.9} \frac{A^2}{\lambda} a^2 \varkappa\right)$$
$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{a}_2^2 \left[2 \left(\Sigma_3^3 \Sigma_3^3 - \Sigma_1^3 \Sigma_1^3\right) + 4 \Sigma_2^3 \Sigma_2^3\right] \\ + \mathfrak{a}_2^2 \left[2 \left(\Gamma_3^3 \Gamma_3^3 - \Gamma_1^3 \Gamma_1^3\right) + 4 \left(\Gamma_2^3 + \Gamma_0^3\right) \Gamma_2^3\right] \end{array}\right\}$$

$$\varDelta_0^3 = -4\pi\frac{A^2}{\lambda}\mu^2\delta^2 D\varkappa e^{\varkappa t}\frac{7}{8.9}\frac{a^9}{d^{10}}\left(1-\frac{8\pi}{7.11}\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)$$

$$.\,\mathfrak{a}_0^3 . \, 3\left(\Gamma_2^4+\Gamma_0^4\right)\Gamma_0^4$$

$$\varDelta_1^3 = -4\pi\frac{A^2}{\lambda}\mu^2\delta^2 D\varkappa e^{\varkappa t}\frac{7}{2.8.9}\frac{a^9}{d^{10}}\left(1-\frac{8\pi}{7.11}\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)$$

$$.\,\mathfrak{a}_1^3\begin{Bmatrix}\Sigma_2^4\Sigma_2^4+\left(2\,\Sigma_3^4+10\,\Sigma_1^4\right)\Sigma_1^4 \\ +\Gamma_2^4\Gamma_2^4-\Gamma_0^4\Gamma_0^4+2\left(\Gamma_3^4+\Gamma_1^4\right)\Gamma_1^4\end{Bmatrix}$$

$$\varDelta_2^3 = -4\pi\frac{A^2}{\lambda}\mu^2\delta^2 D\varkappa e^{\varkappa t}\frac{7}{2.8.9}\frac{a^9}{d^{10}}\left(1-\frac{8\pi}{7.11}\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)$$

$$\mathfrak{a}_2^3\begin{Bmatrix}2\left(\Sigma_3^4\Sigma_3^4-\Sigma_1^4\Sigma_1^4\right)+\left(\Sigma_4^4+6\,\Sigma_2^4\right)\Sigma_2^4 \\ +2\left(\Gamma_3^4\Gamma_3^4-\Gamma_1^4\Gamma_1^4\right)+\left(\Gamma_4^4+6\,\Gamma_2^4+5\,\Gamma_0^4\right)\Gamma_2^4\end{Bmatrix}$$

$$\varDelta_3^3 = -4\pi\frac{A^2}{\lambda}\mu^2\delta^2 D\varkappa e^{\varkappa t}.\frac{7}{2.8.9}\frac{a^9}{d^{10}}\left(1-\frac{8\pi}{7.11}\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)$$

$$\mathfrak{a}_3^3\begin{Bmatrix}3\left(\Sigma_4^4\Sigma_4^4-\Sigma_2^4\Sigma_2^4\right)+6\left(\Sigma_3^4+\Sigma_1^4\right)\Sigma_3^4 \\ +3\left(\Gamma_4^4\Gamma_4^4-\Gamma_2^4\Gamma_2^4\right)+6\left(\Gamma_3^4+\Gamma_1^4\right)\Gamma_3^4\end{Bmatrix}$$

Allgemein wird:

$$\varDelta_0^n = -4\pi\frac{A^2}{\lambda}\mu^2\delta^2 D\varkappa e^{\varkappa t}\frac{2n+1}{2n+2.2n+3}\frac{a^{2n+2}}{d^{2n+4}}\left(1-\frac{8\pi}{2n+1.2n+5}\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)$$

$$\mathfrak{a}_0^n\, n\left(\Gamma_2^{n+1}+\Gamma_0^{n+1}\right)\Gamma_0^{n+1}$$

$$\varDelta_1^n = -4\pi\frac{A^2}{\lambda}\mu^2\delta^2 D\varkappa e^{\varkappa t}\frac{2n+1}{2.2n+2.2n+3}\frac{a^{2n+3}}{d^{2n+4}}.\left(1-\frac{8\pi}{2n+1.2n+5}\frac{A^2}{\lambda}a^2\varkappa\right)$$

$$\mathfrak{a}_1^n\begin{Bmatrix}\Sigma_2^{n+1}\Sigma_2^{n+1}+\left((n-1)\,\Sigma_3^{n+1}+(3n+1)\,\Sigma_1^{n+1}\right)\Sigma_1^{n+1} \\ +\Gamma_2^{n+1}\Gamma_2^{n+1}-\Gamma_0^{n+1}\Gamma_0^{n+1}+(n-1)\left(\Gamma_3^{n+1}+\Gamma_1^{n+1}\right)\Gamma_1^{n+1}\end{Bmatrix}$$

Die übrigen $\varDelta^n_m$ werden durch das allgemeine Glied des zu Anfang für $\varDelta$ aufgestellten Ausdruckes gegeben.

Die den specielleren Fällen Ia und Ib entsprechenden Werthe der $\varDelta^n_m$ ergeben sich durch Substitution der im Abschnitt V gegebenen Werthe von Σ^n_m und Γ^n_m.

Fall IIa. Beide Pole des Magnets liegen auf derselben Seite der X Axe.

Wir erhalten:

$$\varDelta = -4\pi \frac{A^2}{\lambda} \mu^2 \delta^2 D \varkappa e^{\varkappa t}$$
$$\Sigma \frac{n \,.\, n}{2\,.\,2n+1\,.\,2n+3} a^{2n+3} \left(\frac{1}{d_1^{n+2}} + \frac{1}{d_2^{n+2}}\right)^2 . \left(1 - \frac{8\pi}{2n+1\,.\,2n+5} \frac{A^2}{\lambda} a^2 \varkappa\right)$$

Fall IIb. Beide Pole auf der X Axe symmetrisch in gleichem Abstande vom Anfangspunkt.

Es ergiebt sich:

$$\varDelta = -4\pi \frac{A^2}{\lambda} \mu^2 \delta^2 D \varkappa e^{\varkappa t}$$
$$\Sigma \left(1 + (-1)^{n+1}\right) \frac{n \,.\, n}{2n+1\,.\,2n+3} . \frac{a^{2n+3}}{d^{2n+4}} \left(1 - \frac{8\pi}{2n+1\,.\,2n+5} \frac{A^2}{\lambda} a^2 \varkappa\right)$$

IX. Die Bewegungsgleichung des schwingenden Magnets.

Die Schwingung der Magnets wird bestimmt einmal durch die auf denselben wirkende Directionskraft, welche theils von der horizontalen Componente des Erdmagnetismus, theils von der Torsion des Aufhängungsdrahtes herrührt, und welche bezeichnet werden möge durch T; andererseits wird die Bewegung gedämpft durch die Rückwirkung der in der leitenden Kugel inducirten Strömungen; das von diesen letzteren herrührende Dehungsmoment können wir uns entwickelt denken in eine Reihe, welche nach den aufeinander folgenden Differentialquotienten des Drehungswinkels nach der Zeit fortschreitet. Wenn wir von dieser Entwickelung nur die beiden ersten Glieder berücksichtigen, so können wir dieses Drehungsmoment darstellen durch den Ausdruck

$$-P\frac{d\varphi}{dt}+Q\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

und wir erhalten dann für die Bewegung des Magnets die Gleichung

$$(K-Q)\frac{d^2\varphi}{dt^2}+P\frac{d\varphi}{dt}+T.\varphi=0$$

wenn K das Trägheitsmoment des schwingenden Magnets bezeichnet. Es ist die Gleichung der Form nach vollkommen identisch mit der bekannten Gleichung der gedämpften Schwingung; und es übertragen sich somit auf die Bewegung unseres Magnets die bekannten Beziehungen:

$$\frac{P}{K-Q}=2\frac{\lambda}{\tau};\quad \frac{T}{K-Q}=\frac{\pi^2+\lambda^2}{\tau^2}$$

wenn λ das logarithmische Dekrement, τ die Schwingungsdauer des gedämpften Magnets.

Es bleibt schliesslich noch übrig die Bestimmung der Grossen P und Q entsprechend den Bedingungen des von uns behandelten Problemes. Mit Bezug auf diese letzte Aufgabe müssen wir zunächst eine gewisse Inkongruenz hervorheben, welche zwischen den von uns früher über die Bewegung des schwingenden Magnets gemachten Voraussetzungen und der in Wirklichkeit stattfindenden Bewegung desselben besteht. Es ergiebt sich nemlich durch Integration der Bewegungsgleichung

$$\varphi = D\left(e^{\varkappa_1 t} - e^{\varkappa_2 t}\right)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = D\varkappa_1 e^{\varkappa_1 t} - D\varkappa_2 e^{\varkappa_2 t}$$

es ist also φ und ebenso $\frac{d\varphi}{dt}$ gleich der Differenz zweier Exponentialausdrücke. Dagegen haben wir bei der ganzen von uns durchgeführten Untersuchung uns mit der einfacheren Annahme begnügt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = D\varkappa e^{\varkappa t}$$

Wenn nun die Winkelgeschwindigkeit anstatt durch einen einzigen durch ein Aggregat zweier Exponentialausdrücke dargestellt wird, so ist zunächst einleuchtend, dass die elektromotorischen Kräfte sich ganz entsprechend in zwei Glieder zerlegen werden, welche sich dadurch unterscheiden, dass in dem einen die Werthe D und $\varkappa_1$ in dem anderen $-D$ und $\varkappa_2$ auftreten. Die ganze Lösung des Problems wird sich dann aber in vollkommen entsprechender Weise so gestalten, dass wir auch die Componenten der inducirten Strömungen zerlegen in zwei Terme welche lediglich durch die Werthe von D und $\varkappa$ sich unterscheiden werden; mit anderen Worten, wir werden die inducirten Strömungen zu bestimmen haben, welche den beiden Termen der elektromotorischen Kräfte einzeln genommen entsprechen und werden diese Strömungen dann superponiren. Wir erhalten somit die Componenten der inducirten

Strömungen und die denselben entsprechenden rückwirkenden Drehungsmomente, wenn wir in den im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücken an Stelle von D und $\varkappa$ des einemal setzen D und $\varkappa_1$, das anderemal $-D$ und $\varkappa_2$ und die so entstehenden Ausdrücke addiren. Für die Bestimmung der Grössen P und Q, welche hier allein von Interesse ist, wird sich die Ausführung jener Operation folgendermassen gestalten. Wir können setzen:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\varphi = D e^{\varkappa_1 t} - D e^{\varkappa_2 t}$$

Dann wird:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \frac{d^2\varphi_2}{dt^2}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = D\varkappa_1 e^{\varkappa_1 t}; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = D\varkappa_2 e^{\varkappa_2 t}$$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = D\varkappa_1^2 e^{\varkappa_1 t}; \quad \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = D\varkappa_2^2 e^{\varkappa_2 t}$$

Substituiren wir in den früher für das Drehungsmoment gegebenen Ausdrücken an Stelle von $\varkappa$ den Werth $\varkappa_1$ so erhalten wir den Theil des Drehungsmomentes, welcher dem ersten Exponentialausdruck $De^{\varkappa_1 t}$ entspricht, wir können diesen Theil des Drehungsmomentes zerlegen in zwei Terme, welche beziehungsweise multeplicirt sind mit

$$D\varkappa_1 e^{\varkappa_1 t} \text{ und } D\varkappa_1^2 e^{\varkappa_1 t}$$

d. h. mit

$$\frac{d\varphi_1}{dt} \text{ und } \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$$

d. h. wir können jenen Theil des Drehungsmomentes darstellen in der Form

$$- P \frac{d\varphi_1}{dt} + Q \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$$

Ebenso können wir den der zweiten Exponentialgrösse $De^{\varkappa_2 t}$ entsprechenden Theil des Drehungsmomentes darstellen durch

$$- P \frac{d\varphi_2}{dt} + Q \frac{d^2\varphi_2}{dt_2}$$

wo P und Q genau durch dieselben Ausdrücke dargestellt sind wie zuvor; das ganze Drehungsmoment wird demnach gegeben durch

$$- P \left(\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) + Q \left(\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} \right)$$

$$= - P \frac{d\varphi}{dt} + Q \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

und die Werthe von P und Q in diesem Ausdruck ergeben sich unmittelbar aus den im vorhergehenden Abschnitt gegebenen Werthen des Drehungsmoments. Es werden demnach die Grössen P und Q in den einzelnen von uns betrachteten Fällen gegeben durch folgende Gleichungen.

I. Fall.

$$P = + 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \mu^2 \delta^2 \Sigma \frac{2n+1}{2.2n+2.2n+3} \cdot \frac{a^{2n+3}}{d^{2n+4}} \cdot \Sigma$$

$$\mathfrak{a}_m^n \left\{ \begin{array}{c} m \left(\Sigma_{m+1}^{n+1} \Sigma_{m+1}^{n+1} - \Sigma_{m-1}^{n+1} \Sigma_{m-1}^{n+1} \right) \\ + \left[(n-m) \Sigma_{m+2}^{n+1} + 2n \Sigma_m^{n+1} + (n+m) \Sigma_{m-2}^{n+1} \right] \Sigma_m^{n+1} \end{array} \right\}$$

$$+ \mathfrak{a}_m^n \left\{ \begin{array}{c} m \left[\Gamma_{m+1}^{n+1} \Gamma_{m+1}^{n+1} - \Gamma_{m-1}^{n+1} \Gamma_{m-1}^{n+1} \right] \\ + \left[(n-m) \Gamma_{m+1}^{n+1} + 2n \Gamma_m^{n+1} + (n+m) \Gamma_{m-2}^{n+1} \right] \Gamma_m^{n+1} \end{array} \right\}$$

$$Q = 32\pi^2 \frac{A^4}{\lambda^2} \mu^2 \delta^2 \Sigma \frac{1}{2.2n+2.2n+3.2n+5} \cdot \frac{a^{2n+5}}{d^{2n+4}} \Sigma$$

$$a_m^n \left\{ \begin{array}{c} m\left(\Sigma_{m+1}^{n+1}\Sigma_{m+1}^{n+1} - \Sigma_{m-1}^{n+1}\Sigma_{m-1}^{n+1}\right) \\ + \left[(n-m)\Sigma_{m+2}^{n+1} + 2n\,\Sigma_m^{n+1} + (n+m)\Sigma_{m-2}^{n+1}\right]\Sigma_m^{n+1} \end{array} \right\}$$

$$+ a_m^n \left\{ \begin{array}{c} m\left(\Gamma_{m+1}^{n+1}\Gamma_{m+1}^{n+1} - \Gamma_{m-1}^{n+1}\Gamma_{m-1}^{n+1}\right) \\ + \left[(n-m)\Gamma_{m+2}^{n+1} + 2n\Gamma_m^{n+1} + (n+m)\Gamma_{m-2}^{n+1}\right]\Gamma_m^{n+1} \end{array} \right\}$$

Mit Bezug auf die speciellen Werthe der Anfangsglieder dieser Entwicklungen können wir auf die Formeln des vorhergehenden Abschnitts verweisen.

Fall II a.

$$P = 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \mu^2 \delta^2 \Sigma \frac{n \,.\, n}{2.2n+1.2n+3} \cdot a^{2n+3} \left(\frac{1}{d_1^{n+2}} + \frac{1}{d_2^{n+2}}\right)^2$$

$$Q = 32\pi^2 \frac{A^4}{\lambda^2} \mu^2 \delta^2 \Sigma \frac{n \,.\, n}{2.2n+1.2n+1.2n+3.2n+5} \cdot a^{2n+5} \left(\frac{1}{d_1^{n+2}} + \frac{1}{d_2^{n+2}}\right)^2$$

Fall II b.

$$P = 4\pi \frac{A^2}{\lambda} \mu^2 \delta^2 \Sigma (1+(-1)^n) \frac{n \,.\, n}{2n+1.2n+3} \frac{a^{2n+3}}{d^{2n+4}}$$

$$Q = 32\pi^2 \frac{A^4}{\lambda^2} \mu^2 \delta^2 \Sigma (1+(-1)^n) \frac{n \,.\, n}{2n+1.2n+1.2n+3.2n+5} \frac{a^{2n+5}}{d^{2n+4}}$$

Inhaltsangabe.