Analytische Theorie der Determinanten

von

Ernst Schering.

Vorgelegt in der Sitzung d. Königl. Gesellsch. d. Wissensch. 1877 Aug. 15.

Die von Leibniz im Jahre 1693 zuerst untersuchten, von Cramer im Jahre 1750 neu entdeckten, nach der von Gauss im Jahre 1801 für besondere Fälle gebrauchten Benennung, jetzt als Determinanten bezeichneten, Ausdrücke bilden in ihrer Anwendung auf die Algebra, Geometrie, Zahlentheorie und Analysis ein so wichtiges und nützliches Hülfsmittel, dass eine weniger mittelbare Bestimmung derselben als wünschenswerth erscheint.

Cramer, Bézout, Vandermonde, Lagrange, Laplace, Gauss, Cauchy, Binet, Jacobi und die meisten der jetzt lebenden Geometer haben dazu beigetragen, dieses Gebiet der Mathematik in einer bemerkenswerthen Grösse nach verschiedenen Richtungen zu vervollständigen. Auch die gewählten Ausgangspunkte sind sehr mannigfaltig. Sie lassen sich im Wesentlichen etwa auf folgende fünf zurückführen. Entweder hat man für einen vorgegebenen bestimmten Grad, vorzugsweise für den zweiten und dritten Grad den Ausdruck vollständig aufgestellt, und diesen als Determinante der weiteren Untersuchung zu Grunde gelegt, oder man hat nach dem Vorbilde bestimmter sogenannter alternirender Functionen formal das Bildungsgesetz der Determinanten beliebig hohen Grades aufgestellt. Andere sind von dem Begriffe der geradzahligen und ungeradzahligen Inversionen oder Involutionen oder von der angenommenen Recursionsgleichung zwischen einer Determinante beliebig hohen Grades und den Determinanten niederen Grades ausgegangen. Hieneben mag die in den folgenden Blättern angewandte Definition ihren Platz finden. Sie beruht auf dem Begriff der gleichartigen und ungleichartigen Folge von Elementen, zwischen denen eine zweifache Reihung vorausgesetzt ist.

Bei der von Pfaff entdeckten (der Berliner Academie der Wissenschaften am 11. Mai 1815 vorgelegten) und von Gauss in den Göttinger gelehrten Anzeigen am 1. Juli 1815 (G. Werke B. III S. 231 bis 241) übersichtlich dargestellten Integrations-Methode treten lineare Gleichungen auf, welche in einer besonderen Beziehung zu einander stehen und deshalb im Allgemeinen nicht auflösbar sind, wenn die Anzahl der Gleichungen eine ungerade Zahl ist. Jacobi hat in seiner Abhandlung (vom 14. August 1827) „Über die Pfaff'sche Integrations-Methode (Crelle's Journal Bd. 2. Seite 355) einen Ausdruck gefunden, mit dessen Hülfe diese Gleichungen für den Fall einer geraden Anzahl in einfacherer Weise als mit Anwendung von Determinanten aufgelöst werden können. Wegen der vielen jetzt schon bekannten merkwürdigen Eigenschaften verdienen diese Ausdrücke mit dem Namen Jacobi'sche *Resolventen* bezeichnet zu werden. Herr Cayley in seiner Abhandlung „Sur les déterminants gauches" (Crelle's Journal Bd. 38. Seite 93 vom 1. April 1847) bemerkt und beweist, dass die Determinante der Factoren in einem solchen System von Gleichungen dem Quadrate jener Jacobi'schen Resolventen gleich wird.

Neben den so wichtigen Untersuchungen dieses Satzes von den Herrn Brioschi, Borchardt, Scheibner, Baltzer, Veltmann und Mertens dürfte der hier folgende Beweis nicht ganz überflüssig erscheinen. Gleiche Ansicht glaube ich hegen zu dürfen in Bezug auf den der Form nach neuen Beweis für den, von Leibniz in specieller Form gefundenen, von Vandermonde im Jahre 1771 und von Laplace verallgemeinerten, Lehrsatz über die Zerlegung; so wie für den von Binet und Cauchy im Jahre 1812 verallgemeinerten Lagrange'schen Lehrsatz über die Zusammensetzung oder Multiplication der Determinanten.

Artikel I.

Analytische Definition der Determinante.

Die Determinante eines Systems von n mal n Grössen enthält nicht nur die Werthe derselben sondern hängt auch von der Reihenfolge dieser ihrer Elemente ab. Das Gesetz der Bildung der Determinante lässt sich am einfachsten aussprechen, wenn man eine zweifache Reihung der Elemente gebildet denkt. Eine solche wird sehr übersichtlich durch die geometrische Anschauung, dass man die Elemente in n (etwa horizontale) Zeilen und n (etwa vertical stehende) Spalten einreiht.

Dieser Anordnung entsprechend wenden wir doppelte Indices an und versehen jeden Index noch mit einem Index zweiter Ordnung, um die analytischen Ausdrücke für die Determinante in der erforderlichen Allgemeinheit darstellen zu können.

Das System der Elemente soll also auf die Form

$$\begin{array}{cccc} E_{h_1 k_1} & E_{h_1 k_2} & \cdot\;\cdot & E_{h_1 k_n} \\ E_{h_2 k_1} & E_{h_2} & \cdot\;\cdot & E_{h_2 k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ E_{h_n k_1} & E_{h_n k_2} & \cdot\;\cdot & E_{h_n k_n} \end{array} \qquad [1]$$

gebracht sein. Die beiden Indices h_λ und k_μ wollen wir hier und in allen Fällen, wo kein Missverständniss befürchtet werden darf, nicht noch besonders durch ein Komma trennen. Die einzelne Zeile mag der Kürze halber nach ihrem sie bestimmenden Index h_λ und ebenso die einzelne Spalte nach ihrem sie bestimmenden Index k_μ benannt werden. In der Richtung, in welcher wir die Zeilen lesen, wollen wir den Fortschritt in der Reihenfolge der Spalten annehmen, so dass wir in diesem Sinne von Spalten sprechen, welche einer anderen vorangehen oder dieser folgen. Entsprechende Ausdrucksweise wenden wir auf die einzelnen Zeilen an, deren Reihenfolge wir von oben nach unten fortschreitend annehmen.

Bei den hier durchzuführenden Untersuchungen kommt es in Bezug auf zwei Elemente wesentlich darauf an, ob die Zeile des einen Elementes der Zeile des anderen Elementes vorangeht oder derselben folgt, und ob die Spalte des einen Elementes der Spalte des anderen Elementes vorangeht oder derselben folgt. Insbesondere ist der Umstand von Wichtigkeit ob solches Verhalten der Spalten zu einander mit dem Verhalten der Zeilen zu einander gleichartig oder ungleichartig ist. Wir werden dieses Kürze halber so ausdrücken, dass wir die Reihenfolge der Zeilen der beiden Elemente mit der Reihenfolge ihrer Spalten als gleichartig oder als ungleichartig benennen.

Von dem vorgegebenen System werden n Elemente entnommen und in einander multiplicirt. Zu dem so erhaltenen Producte fügen wir den Factor -1 *noch so oft hinzu, wie für irgend zwei dieser n Elemente die Reihenfolge ihrer Spalten mit der Reihenfolge ihrer Zeilen ungleichartig ist. Gehören zwei Elemente derselben Zeile oder derselben Spalte an, so tritt noch der Factor* 0 *hinzu.*

Ein nach diesem Gesetze hergestellter Ausdruck ist ein *Glied* der Determinante. Wir wollen es ein *eigentliches* nennen, wenn aus jeder Spalte und aus jeder Zeile Ein Element darin vorkommt. Ein *uneigentliches Glied* mag es heissen, wenn wenigstens zwei ihrer Elemente einer und derselben Zeile oder einer und derselben Spalte angehören.

Die Summe aller der, auf je n Elemente des vorgegebenen Systemes sich beziehenden nach der vorstehenden Regel gebildeten, verschiedenen Ausdrücke heisst die Determinante des Systemes und soll durch

$$\mathrm{E}(h_1,\ h_2,\ ..\ h_n \,|\, k_1,\ k_2,\ ..\ k_n)$$

bezeichnet werden.

Artikel II.

Geometrische Definition der Determinante.

Bei der so eben durchgeführten Untersuchung wurden weiter keine räumliche Begriffe vorausgesetzt als diejenigen, welche erforderlich sind, um zwei gleichzeitige Reihungen, nach Zeilen und nach Spalten, durchführen zu können. Da diese Begriffe durch ganz abstracte, wenn auch in einer weniger einfachen Ausdrucksweise, umgehbar sind, so dürfte die Bezeichnung als analytische Definition zulässig erscheinen.

Die Anschauung wird aber noch erleichtert, wenn man das geometrische Bild noch weiter beibehält. Besonders vortheilhaft ist es, wenn man die Richtung der Spalten nicht genau rechtwinklig zu der Richtung der Zeilen nimmt. Um uns in bestimmteren Worten ausdrücken zu können, wollen wir die Neigung der Spalten oben nach links und unten die Ausweichung der Spalten nach rechts gehen lassen, so dass wir ein System von der Form:

$$
\begin{array}{llllllllll}
E_{h_1 k_1} & E_{h_1 k_2} & \cdot & \cdot & E_{h_1 k_{n-1}} & E_{h_1 k_n} & & & & \\
& E_{h_2 k_1} & E_{h_2 k_2} & \cdot & \cdot & E_{h_2 k_{n-1}} & E_{h_2 k_n} & & & \\
& & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
& & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
& & & E_{h_{n-1} k_1} & E_{h_{n-1} k_2} & \cdot & \cdot & E_{h_{n-1} k_{n-1}} & E_{h_{n-1} k_n} & \\
& & & & E_{h_n k_1} & E_{h_n k_2} & \cdot & \cdot & E_{h_n k_{n-1}} & E_{h_n k_n}
\end{array}
\qquad [2]
$$

erhalten.

Die n Zeilen denken wir uns geometrisch durch n gerade zu einander parallele Linien und die n Spalten durch n gerade zu einander parallele Linien so dargestellt, dass diese beiden Systeme von Geraden einander in der zuvor angegebenen Weise unter spitzem Winkel schneiden. Die Durchschnittspunkte oder Knotenpunkte des hiedurch entstandenen rautenförmigen Netzes bezeichnen wir mit den auf den entsprechenden Stellen befindlichen $E_{h_\mu k_\nu}$, so dass diese Zeichen jetzt nicht nur bestimmte Werthe bedeuten, sondern auch noch bestimmte Orte angeben.

Aus je n Elementen des obigen Systemes wird das Product der Werthe gebildet und dieses so oft mit -1 multiplicirt, wie eine gerade Verbindungslinie irgend zweier in dem Producte vorkommender $E_{h_\alpha k_\beta}$ und $E_{h_\mu k_\nu}$ an ihren beiden Enden die Knotenpunkte im stumpfen Winkel trifft. Fällt eine jener Verbindungslinien auf eine der parallelen geraden Linie des rautenförmigen Netzes, so tritt noch der Factor Null hinzu.

Die Summe aller, auf solche Weise aus je n Elementen des vorgegebenen Systemes gebildeter, verschiedener Ausdrücke heisst die Determinante des Systemes.

Artikel III.

Analytischer Ausdruck für die Determinante.

Die eigentlichen Glieder der Determinante haben die Form:

$$\varepsilon E_{\eta_1 \varkappa_1} \; E_{\eta_2 \varkappa_2} \; E_{\eta_3 \varkappa_3} \; \ldots \; E_{\eta_n \varkappa_n}$$

worin die $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots \eta_n$ abgesehen von der Reihenfolge
mit $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n$

ebenso die $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots \varkappa_n$ abgesehen von der Reihenfolge
mit $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$

übereinstimmen.

Zur Ermittelung des Vorzeichens $\varepsilon = \pm 1$ ist die Stellung jedes Elementes dieses Productes zu jedem anderen Elemente des Productes in der doppelten Reihung aller Elemente des ganzen Systemes zu berücksichtigen.

Bezeichnen $E_{\eta_\mu \varkappa_\mu}$ und $E_{\eta_m \varkappa_m}$ zwei in diesem Producte vorkommende Elemente, so wird, wenn die $h_1, h_2, \ldots h_n$ gleichzeitig mit ihren unteren Indices $1, 2, \ldots n$ wachsende reelle Grössen darstellen, das Element $E_{\eta_\mu \varkappa_\mu}$ dem $E_{\eta_m \varkappa_m}$ in Bezug auf die Anordnung der Zeilen vorangehen oder nachfolgen, je nachdem $(\eta_m - \eta_\mu)$ positiv oder negativ ist.

Erfüllen die $h_1 \ldots h_n$ aber nicht die eben vorausgesetzte Bedingung, so kommen noch die Werthe h_a und h_α, mit welchen η_m und η_μ ohne

Rücksicht auf die Reihenfolge übereinstimmen, in Betracht. Entspricht nun dem grösseren der unteren Indices a und α auch der grössere der Werthe von h_a und h_α so ist $(h_a - h_\alpha)\,(a - \alpha)$ positiv, und die Zeile η_μ wird der Zeile η_m vorangehen oder nachfolgen je nachdem $(\eta_m - \eta_\mu)$ positiv oder negativ ist.

Entspricht aber umgekehrt dem grösseren der unteren Indices a und α der kleinere der Werthe von h_a und h_α so ist $(h_a - h_\alpha)\,(a - \alpha)$ negativ und die Zeile η_μ wird der Zeile η_m jetzt vorangehen oder nachfolgen je nachdem $(\eta_m - \eta_\mu)$ negativ oder positiv ist.

Beide Fälle lassen vereinigt sich so aussprechen, dass die Zeile η_μ der Zeile η_m vorangeht oder nachfolgt, je nachdem das Product

$$(\eta_m - \eta_\mu)\;(h_a - h_\alpha)\;(a - \alpha)$$

einen positiven oder negativen Werth hat.

Auf gleiche Weise ergibt sich, dass, wenn $\varkappa_m$ und $\varkappa_\mu$ ohne Rücksicht auf die Reihenfolge mit k_b und $k_\mathfrak{b}$ übereinstimmen, allgemein die Spalte $\varkappa_\mu$ der Spalte $\varkappa_m$ vorangeht oder nachfolgt, je nachdem

$$(\varkappa_m - \varkappa_\mu)\;(k_b - k_\mathfrak{b})\;(b - \mathfrak{b})$$

einen positiven oder negativen Werth hat.

Die Elemente $E_{\eta_\mu \varkappa_\mu}$ und $E_{\eta_m \varkappa_m}$ werden also in Bezug auf die beiden Reihungen, nach Zeilen und nach Spalten, gleichartige oder ungleichartige Stellung zu einander einnehmen, jenachdem

$$(\eta_m - \eta_\mu)\;(h_a - h_\alpha)\;(a - \alpha)\;(\varkappa_m - \varkappa_\mu)\;(k_b - k_\mathfrak{b})\;(b - \mathfrak{b})$$

positiv oder negativ ist. Im erstern Falle tritt der Factor $+1$ im andern Falle tritt der Factor -1 zu dem ursprünglichen Producte der n Elemente hinzu. Auf entsprechende Weise bedingt die gegenseitige Stellung je zweier Elemente des Productes das Hinzutreten der Factoren $+1$ oder -1. Würden für irgend zwei Elemente η_m und η_μ oder $\varkappa_m$ und $\varkappa_\mu$ einander gleich, so würde der Factor Null hinzukommen.

Um dieses in Formeln ausdrücken zu können, wollen wir das Functional-Zeichen $\mathfrak{Z}$ mit der Bedeutung gebrauchen, dass

$$\mathfrak{Z}(x) = +1 \quad \text{für} \quad x > 0$$
$$\mathfrak{Z}(x) = 0 \quad \text{für} \quad x = 0$$
$$\mathfrak{Z}(x) = -1 \quad \text{für} \quad x < 0$$

also

$$\mathfrak{Z}(xy) = \mathfrak{Z}(x) . \mathfrak{Z}(y)$$

wird.

Die beiden Elemente $E_{\eta_\mu \varkappa_\mu}$ und $E_{\eta_m \varkappa_m}$ bedingen nun durch ihre gegenseitige Stellung in einem Producte von n Elementen das Hinzutreten des Factors

$$\mathfrak{Z}\{(\eta_m - \eta_\mu)(h_a - h_\alpha)(a - \alpha)(\varkappa_m - \varkappa_\mu)(k_b - k_\mathfrak{b})(b - \mathfrak{b})\}$$

Ein Glied der Determinante kann demnach immer in der Form

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=n} E_{\eta_\nu \varkappa_\nu} \times \mathfrak{Z} \prod_{(m,\mu)} (\eta_m - \eta_\mu)(\varkappa_m - \varkappa_\mu) \times \mathfrak{Z} \prod_{(a,\alpha)} (h_a - h_\alpha)(a - \alpha) \times \mathfrak{Z} \prod_{(b,\mathfrak{b})} (k_b - k_\mathfrak{b})(b - \mathfrak{b})$$

dargestellt werden. Die Bezeichnung des Productes Π und ebenso des Vorzeichens $\mathfrak{Z}$ soll sich immer auf alle darnach folgende bis zum nächsten grossen Multiplications-Zeichen $\times$ auftretende Factoren beziehen.

In diesem Ausdrucke haben alle η_λ mit gleichem unterem Index λ denselben beliebig bestimmten Werth aus der Reihe $h_1, h_2 \ldots h_n$. Ebenso bedeuten alle $\varkappa_\lambda$ mit gemeinsamem unterem Index λ dasselbe beliebig bestimmte k_1 oder k_2 oder $\ldots k_n$.

Für ein eigentliches Glied der Determinante machen die $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ die ganze Reihe $h_1, h_2 \ldots h_n$ in irgend einer Anordnung aus, ebenso die $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ die ganze Reihe $k_1, k_2 \ldots k_n$ in irgend einer Ordnung.

Für ein uneigentliches Glied werden wenigstens zwei der $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ oder zwei der $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_n$ einander gleich, also enthält das Product

$$\prod_{(m,\mu)} (\eta_m - \eta_\mu)(\varkappa_m - \varkappa_\mu)$$

welches sich über alle $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungen von zwei einander nicht gleichen der Zahlen $1, 2, 3 \ldots n$ als Werthe der m und μ erstreckt, den Factor Null. In den uneigentlichen Gliedern können wir die übrigen Factoren daher beliebig wählen, der Einfachheit wollen wir sie ebenso bestimmen, wie in den eigentlichen Gliedern. Ursprünglich standen die Werthe der a und α, b und β mit den Werthen m und μ in der besondern Beziehung $\eta_m = h_a$, $\eta_\mu = h_\alpha$ oder $\eta_m = h_\alpha$, $\eta_\mu = h_a$ ferner $\varkappa_m = k_b$, $\varkappa_\mu = k_\beta$ oder $\varkappa_m = k_\beta$, $\varkappa_\mu = k_b$. In Folge des Umstandes, dass eine Umtauschung von m mit μ oder a mit α oder b mit β keinen Einfluss auf den Werth des Ausdrucks hat und in einem eigentlichen Gliede die

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$$

abgesehen von der Reihenfolge mit

$$h_1, h_2, \ldots h_n$$

ebenso die

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$$

abgesehen von der Reihenfolge mit

$$k_1, k_2, \ldots k_n$$

übereinstimmen, fallen in den Producten jene Beziehungen ganz fort. In einem eigentlichen Gliede ist also das Product

$$\prod_{(a,\alpha)} (h_a - h_\alpha)(a - \alpha)$$

über alle $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungen von zwei einander nicht gleichen der Zahlen $1, 2, 3 \ldots n$ als Werthe der a und α ebenso

$$\prod_{(b,\beta)} (k_b - k_\beta)(b - \beta)$$

über alle $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungen von zwei einander nicht gleichen der Zahlen $1, 2, 3 \ldots n$ als Werthe der b und β zu erstrecken. Nehmen wir immer $a = b$, $\alpha = \beta$, so wird:

$$\prod_{(a,\alpha)} (a - \alpha) = \prod_{(b,\beta)} (b - \beta)$$

also

$$\mathfrak{Z} \prod_{(a,\alpha)} (a - \alpha) \times \mathfrak{Z} \prod_{(b,\beta)} (b - \beta) = +1$$

und wenn wir die Ordnung der Factoren geeignet wählen, erhalten wir das Glied der Determinante allgemein in der Form . . . . [3]

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=n} \mathrm{E}_{\eta_\nu \varkappa_\nu} \times 3 \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\eta_m - \eta_\mu)(\varkappa_m - \varkappa_\mu) \times 3 \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (h_b - h_{\mathfrak{b}})(k_b - k_{\mathfrak{b}})$$

Die Determinante ist nach der Definition die Summe aller der nach der vorstehenden Form gebildeten algebraisch verschiedenen Ausdrücke für

$$h_1,\ h_2\ .\ .\ .\ h_n$$

als Werthe jedes

$$\eta_1,\ \eta_2\ .\ .\ .\ \eta_n$$

und für

$$k_1,\ k_2\ .\ .\ .\ k_n$$

als Werthe jedes

$$\varkappa_1,\ \varkappa_2\ .\ .\ .\ \varkappa_n$$

Die algebraisch verschiedenen Glieder können nach mancherlei Regeln ausgewählt werden. Drei der übersichtlichsten sind wol diejenigen, welche für *die Determinante je eine der drei Darstellungen ergeben:*

[4] $$\mathrm{E}(h_1, h_2, .\, h_n | k_1, k_2, .\, k_n)$$

$$= 3 \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (h_b - h_{\mathfrak{b}})(k_b - k_{\mathfrak{b}})(\varkappa_b - \varkappa_{\mathfrak{b}}) \times \sum_{\eta=h_1}^{\eta=h_{n(n)}} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} \mathrm{E}_{\eta_\nu \varkappa_\nu} \times 3 \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\eta_m - \eta_\mu)$$

worin die $\varkappa_1, \varkappa_2, .\,.\, \varkappa_n$ *mit den* $k_1, k_2, .\,.\, k_n$ *abgesehen von der Reihenfolge übereinstimmen müssen.*

[5] $$\mathrm{E}(h_1, h_2\, .\,.\, h_n | k_1, k_2\, .\,.\, k_n)$$

$$= 3 \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (h_b - h_{\mathfrak{b}})(k_b - k_{\mathfrak{b}})(\eta_b - \eta_{\mathfrak{b}}) \times \sum_{\varkappa=k_1}^{\varkappa=k_{n(n)}} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} \mathrm{E}_{\eta_\nu \varkappa_\nu} \times 3 \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\varkappa_m - \varkappa_\mu)$$

worin die $\eta_1, \eta_2, .\,.\, \eta_n$ *mit den* $h_1, h_2, .\,.\, h_n$ *abgesehen von der Reihenfolge übereinstimmen müssen.*

[6] $$\mathrm{E}(h_1, h_2\, .\,.\,.\, h_n | k_1, k_2, .\,.\, k_n)$$

$$= 3 \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (h_b - h_{\mathfrak{b}})(k_b - k_{\mathfrak{b}}) \times \frac{1}{\Pi(n)} \sum_{\eta=h_1}^{\eta=h_{n(n)}} \sum_{\varkappa=k_1}^{\varkappa=k_{n(n)}} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} \mathrm{E}_{\eta_\nu \varkappa_\nu} \times 3 \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\eta_m - \eta_\mu)(\varkappa_m - \varkappa_\mu)$$

Hier bedeutet $\sum\limits_{\eta=h_1}^{\eta=h_{n}}{}^{(n)}$ *die n fache Summation, in welcher jedes* $\eta_1, \eta_2, .. \eta_n$, *alle Werthe* $h_1, h_2, .. h_n$ *durchläuft, ebenso* $\sum\limits_{\varkappa=k_1}^{\varkappa=k_{n}}{}^{(n)}$ *die n fache Summation, in welcher jedes* $\varkappa_1, \varkappa_2, .. \varkappa_n$ *alle Werthe* $k_1, k_2, .. k_n$ *durchläuft.*

Der erste Ausdruck enthält n^n Summations-Glieder, diese verschwinden aber bis auf die

$$1.2.3\,..\,n = \Pi(n)$$

eigentlichen Glieder, für welche die $\eta_1, \eta_2 .. \eta_n$ den sämmtlichen $h_1, h_2 .. h_n$ gleich werden. Das entsprechende gilt vom zweiten Ausdruck.

Der dritte Ausdruck enthält n^{2n} Summations-Glieder, welche bis auf

$$\Pi(n).\Pi(n)$$

eigentliche mit dem Divisor $\Pi(n)$ versehene Glieder verschwinden. Für die letztern werden die $\eta_1, \eta_2 .. \eta_n$ den sämmtlichen $h_1, h_2 .. h_n$, und die $\varkappa_1, \varkappa_2 .. \varkappa_n$ den sämmtlichen $k_1, k_2 .. k_n$ gleich. Von diesen bestehen bleibenden Gliedern sind immer diejenigen $\Pi(n)$ einander gleich, welche dieselben Factoren

$$E_{\eta_1 \varkappa_1}\, E_{\eta_2 \varkappa_2}\, ..\, E_{\eta_\nu \varkappa_\nu}$$

aber in verschiedener Reihenfolge enthalten.

Die Definition der Determinante berücksichtigt die Reihung der Elemente nach Zeilen in gleicher Weise wie die nach Spalten.

Die Determinante bleibt also ungeändert wenn für ein System von Elementen die Reihung nach Zeilen mit der Reihung nach Spalten umgetauscht wird oder die Determinante

$$\begin{matrix} E_{h_1 k_1} & . & . & E_{h_1 k_n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ E_{h_n k_1} & . & . & E_{h_n k_n} \end{matrix}$$

ist identisch mit der Determinante

$$\begin{matrix} E_{h_1 k_1} & . & . & E_{h_n k_1} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ E_{h_1 k_n} & . & . & E_{h_n k_n} \end{matrix}$$

was auch unmittelbar an den obigen analytischen Ausdrücken hervortritt. In der Bezeichnungsweise

$$E(h_1, h_2, \ldots h_n \mid k_1, k_2, \ldots k_n)$$

unterscheiden wir deshalb im allgemeinen Falle jene beiden Formen nicht. Um aber den Ausdruck eine bestimmtere Vorstellung hervorrufen zu lassen, legen wir, wenn nicht das Gegentheil besonders hervorgehoben wird, die erstere Form zu Grunde.

Betrachten wir in einer Determinante zwei eigentliche Glieder, welche dadurch aus einander hervorgehen, dass man nur die ersten Indices zweier zu beliebig bestimmten Spalten k_q, k_ψ gehörender Elemente mit einander umtauscht, so ist aus der Definition zunächst unmittelbar klar, dass man bei fest gewählten k_q und k_ψ eine bestimmte vollständig paarweise Anordnung aller eigentlicher Glieder der Determinante erhält. Die beiden zu einem Paare gehörenden durch Umtauschung zum Beispiel der beiden ersteren Indices h_p, h_φ aus einander ableitbaren Glieder erhalten durch die Vorzeichenbestimmung entgegengesetzte Vorzeichen. In der That sind in den beiden Gliedern alle Elemente dieselben bis auf $E_{h_p k_q}$ $E_{h_\varphi k_\psi}$, welche in dem einen, und $E_{h_\varphi k_q}$ $E_{h_p k_\psi}$, welche in dem anderen Gliede vorkommen. Jedes andere in den Gliedern vorkommende Element gehört nun entweder erstens zu einer den beiden Zeilen h_p und h_φ vorangehenden Zeile oder zweitens zu einer zwischenliegenden Zeile oder endlich drittens zu einer beiden Zeilen h_p und h_φ nachfolgenden Zeile. Im ersten und dritten Falle hat das Element zu $E_{h_p k_q}$ und $E_{h_\varphi k_q}$ gleichnamige Stellung, ebenso zu $E_{h_p k_\psi}$ und $E_{h_\varphi k_\psi}$ gleichnamige Stellung. Im zweiten Fall hat das Element zu $E_{h_p k_q}$ und $E_{h_\varphi k_q}$ ungleichnamige Stellungen, ebenso zu $E_{h_p k_\psi}$ und $E_{h_\varphi k_\psi}$ ungleichnamige Stellungen. Das dem ersten oder dem dritten

Falle angehörende Element liefert also in beiden Gliedern eines Paares gleich viele Factoren -1. Jedes dem zweiten Falle angehörende Element liefert den Factor -1 in ungleicher aber sich nur um eine gerade Zahl unterscheidender Anzahl für die beiden Glieder. Es bleibt daher nur noch die Stellung von $E_{h_p k_q}$ zu $E_{h_\varphi k_\psi}$ und die von $E_{h_\varphi k_q}$ zu $E_{h_p k_\psi}$ in Betracht zu ziehen, diese beiden sind aber einander entgegengesetzt und daher liefert die Vorzeichenbestimmung für die beiden Glieder eines Paares das einander Entgegengesetzte.

Ist nun für zwei beliebig bestimmte q und ψ und für jedes $p = 1, 2, 3, .n$ immer

$$E_{h_p k_q} = E_{h_p k_\psi}$$

so annulirt sich jedes zuvor angegebene Gliederpaar. Die Determinante verschwindet also, wenn die entsprechenden Elemente zweier Spalten einander gleich werden, ebenso wenn die entsprechenden Elemente zweier Zeilen einander gleich werden. Wir können dieses auch in dem Satze aussprechen:

Die Ausdrücke auf den zweiten Seiten der obigen Gleichungen [4], [5], [6] *stellen den richtigen Werth der Determinante auch dann dar, wenn unter den Indices $h_1, h_2 \,.\,.\, h_n$ sich gleiche befinden, ebenso wenn einige der $k_1, k_2 \,.\,.\, k_n$ einander gleich werden.*

Oder in Formel ausgedrückt: Es wird

$$E(h_1, h_2, \,.\,.\, h_n \,|\, k_1, k_2, \,.\,.\, k_n) = 0 \qquad [7]$$

sowohl wenn in der Reihe der $h_1, h_2, \,.\,.\, h_n$ oder in der Reihe der $k_1, k_2, \,.\,.\, k_n$ gleiche Werthe auftreten, als auch wenn für zwei beliebig bestimmte p und φ

$$E_{h_p k_q} = E_{h_\varphi k_q}, \quad \textit{für} \ q = 1, 2, \,.\,.\, n,$$

oder wenn für zwei beliebig bestimmte q und ψ

$$E_{h_p k_q} = E_{h_p k_\psi}, \quad \textit{für} \ p = 1, 2, \,.\,.\, n, \quad \textit{ist.}$$

Mit Hülfe der Gleichungen [4], [5], [6] kann man, wenn man statt der beiden Werthensysteme $h_1, h_2, \,.\,.\, h_n$ und $k_1, k_2, \,.\,.\, k_n$ zwei andere von jenen aber nur durch die Reihefolge verschiedene Werthensysteme $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{h}_n$ und $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots \mathfrak{k}_n$ anwendet, unmittelbar die Beziehung zwischen Determinanten, welche sich nur durch die Reihenfolge der Indices unterscheiden, in der Form

$$[8] \qquad \mathrm{E}(\mathfrak{h}_1, \ldots \mathfrak{h}_n \,|\, \mathfrak{k}_1, \ldots \mathfrak{k}_n) = \mathrm{E}(h_1, \ldots h_n \,|\, k_1, \ldots k_n)\, \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\mathfrak{h}_m - \mathfrak{h}_\mu)(\mathfrak{k}_m - \mathfrak{k}_\mu)(h_m - h_\mu)(k_m - k_\mu)$$

aufstellen. Mit Hinzuziehung des gefundenen Satzes über das Verschwinden von Determinanten ergibt sich, dass die Gleichung [8] auch richtig bleibt, wenn mehrere der $\mathfrak{h}$ oder mehrere der $\mathfrak{k}$ gleiche Werthe annehmen.

Die Gleichung [8] *gilt demnach unter der Voraussetzung*, *dass die*

$$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{h}_n$$

keine andere Werthe haben als solche, *welche in der Reihe*

$$h_1, h_2, \ldots h_n$$

vorkommen und ebenso dass

$$\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots \mathfrak{k}_n$$

keine andere Werthe haben als solche, *welche in der Reihe*

$$k_1, k_2, \ldots k_n$$

vorkommen.

In den Gleichungen [4], [5], [6] kann man die Vorzeichen-Factoren

$$\mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{c}=1}^{\mathfrak{c}=\mathfrak{b}-1} (h_\mathfrak{b} - h_\mathfrak{c})(k_\mathfrak{b} - k_\mathfrak{c})(\varkappa_\mathfrak{b} - \varkappa_\mathfrak{c})$$

$$\mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{c}=1}^{\mathfrak{c}=\mathfrak{b}-1} (h_\mathfrak{b} - h_\mathfrak{c})(k_\mathfrak{b} - k_\mathfrak{c})(\eta_\mathfrak{b} - \eta_\mathfrak{c})$$

$$\mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{c}=1}^{\mathfrak{c}=\mathfrak{b}-1} (h_\mathfrak{b} - h_\mathfrak{c})(k_\mathfrak{b} - k_\mathfrak{c})$$

wenn $h_1, h_2, \ldots h_n$ unter sich verschieden und auch $k_1, k_2, \ldots k_n$ unter sich verschieden sind, durch die mit denselben beziehungsweise ausgeführte Multiplication von der zweiten auf die erste Seite bringen. Wendet man dann auf die so gebildeten ersten Seiten der aus [4], [5], [6] entstandenen Gleichungen die Formel [8] an, so werden diese ersten Seiten der Reihe nach

$$\mathrm{E}(h_1, h_2, .. h_n \mid \varkappa_1, \varkappa_2, .. \varkappa_n)\, \mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{d}=1}^{\mathfrak{d}=\mathfrak{b}-1} (h_\mathfrak{b} - h_\mathfrak{d})$$

$$\mathrm{E}(\eta_1, \eta_2, .. \eta_n \mid k_1, k_2, .. k_n)\, \mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{d}=1}^{\mathfrak{d}=\mathfrak{b}-1} (k_\mathfrak{b} - k_\mathfrak{d})$$

$$\mathrm{E}(h_1, h_2, .. h_n \mid k_1, k_2, .. k_n)\, \mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{d}=1}^{\mathfrak{d}=\mathfrak{b}-1} (h_\mathfrak{b} - h_\mathfrak{d})(k_\mathfrak{b} - k_\mathfrak{d})$$

Untersucht man hierfür die oben bei Gleichung [7] betrachteten Fälle des Verschwindens von Determinanten, so erhält man den Lehrsatz:

Die Gleichung [4] *gilt, wenn* $\varkappa_1, \varkappa_2, .. \varkappa_n$ *abgesehen von der Reihenfolge mit* $k_1, k_2, .. k_n$ *gleiche Werthe haben. Nimmt man aber von der zweiten Seite der Gleichung* [4] *den Factor*

$$\mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{d}=1}^{\mathfrak{d}=\mathfrak{b}-1} (h_\mathfrak{b} - h_\mathfrak{d})(k_\mathfrak{b} - k_\mathfrak{d})(\varkappa_\mathfrak{b} - \varkappa_\mathfrak{d})$$

fort und fügt ihn auf der ersten Seite hinzu, so entsteht eine Gleichung [4*], *welche immer dann gilt, wenn* $\varkappa_1, \varkappa_2, .. \varkappa_n$ *keine andere als die in der Reihe* $k_1, k_2, .. k_n$ *vorkommenden Werthe haben; es sind also auch gleiche Werthe in der Reihe* $\varkappa_1, \varkappa_2, .. \varkappa_n$ *zulässig, selbst wenn* $k_1, k_2, .. k_n$ *sich alle von einander unterscheiden.*

Die Gleichung [5] *gilt, wenn* $\eta_1, \eta_2, .. \eta_n$ *abgesehen von der Reihenfolge mit* $h_1, h_2, .. h_n$ *gleiche Werthe haben. Nimmt man aber von der zweiten Seite der Gleichung* [5] *den Factor*

$$\mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{d}=1}^{\mathfrak{d}=\mathfrak{b}-1} (h_\mathfrak{b} - h_\mathfrak{d})(k_\mathfrak{b} - k_\mathfrak{d})(\eta_\mathfrak{b} - \eta_\mathfrak{d})$$

fort und fügt ihn auf der ersten Seite hinzu, so entsteht eine Gleichung [5*], *welche immer dann gilt, wenn* $\eta_1, \eta_2, .. \eta_n$ *keine andere als die in der Reihe*

$h_1, h_2, .. h_n$ vorkommenden Werthe haben; es sind also auch gleiche Werthe in der Reihe $\eta_1, \eta_2, .. \eta_n$ zulässig, selbst wenn $h_1, h_2, .. h$ sich alle von einander unterscheiden.

Aus der Gleichung [6] entsteht eine richtige Gleichung [6], wenn man den Factor*

$$\mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{d}=1}^{\mathfrak{d}=b-1} (h_b - h_\mathfrak{d})(k_b - k_\mathfrak{d})$$

von der zweiten Seite fortnimmt und ihn auf der ersten Seite hinzufügt.

Alle Gleichungen [4], [5], [6], [4], [5*], [6*] behalten ihre Gültigkeit, wenn in der Reihe $h_1, h_2, .. h_n$ gleiche Werthe vorkommen, ebenso wenn in der Reihe $k_1, k_2, .. k_n$ gleiche Werthe auftreten.*

Artikel IV.

Zerlegung der Determinante in Unterdeterminanten.

Hat man eine n fache Summation, welche sich auf die reihenden Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, .. \varkappa_n$ jede mit den sämmtlichen Werthen $k_1, k_2, .. k_n$ beziehen, so kann man die Summation zunächst über einen Theil $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, .. \mathfrak{k}_\nu$ der Grössen $k_1, k_2, .. k_n$ als Werthe für jedes $\varkappa_1, \varkappa_2, .. \varkappa_\nu$ und zugleich ebenfalls über einen Theil $\mathfrak{k}_{\nu+1}, \mathfrak{k}_{\nu+2}, .. \mathfrak{k}_n$ der Grössen $k_1, k_2, .. k_n$ als Werthe für jedes $\varkappa_{\nu+1}, \varkappa_{\nu+2}, .. \varkappa_n$ ausführen. Es bleiben dann nur noch zwei Summationen übrig. Die eine Summation bezieht sich auf die $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, .. \mathfrak{k}_\nu$, welche alle Verbindungen von je ν verschiedenen und gleichen, der Reihe der Grössen $k_1, k_2, .. k_n$ entnommenen und nach einem beliebig gewählten Gesetze, zum Beispiel nach der Grösse geordneten, Werthen durchlaufen. Die andere Summation bezieht sich auf die $\mathfrak{k}_{\nu+1}, \mathfrak{k}_{\nu+2}, .. \mathfrak{k}_n$, welche alle Verbindungen von je $n-\nu$ verschiedenen und gleichen, der Reihe der Grössen $k_1, k_2, .. k_n$ entnommenen und nach einem beliebig gewählten Gesetze geordneten, Werthen durchlaufen.

In dem vorliegenden Falle verschwinden alle Summations-Glieder, für welche zwei oder mehr der $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, .. \mathfrak{k}_\nu$ einander gleich werden, es kann daher die vorletzte Summation über die nach beliebig gewähltem Gesetze geordneten $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, .. \mathfrak{k}_\nu$, durch ν von einander unabhängige über alle $k_1, k_2, .. k_n$ als Werthe für jedes $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, .. \mathfrak{k}_\nu$ sich erstreckende Summationen ersetzt werden, wenn man dabei in Rechnung bringt, dass jedes zuvor Ein mal auftretende Glied jetzt $\Pi(\nu)$ mal vorkommt.

Die entsprechende Umformung verwandelt die Summation, welche sich auf die mit einander verbundenen $\mathfrak{k}_{\nu+1}, .. \mathfrak{k}_n$ bezieht, in $n-\nu$ von einander unabhängige über alle $k_1, k_2, .. k_n$ als Werthe für jedes $\mathfrak{k}_{\nu+1}, .. \mathfrak{k}_n$ auszudehnende Summationen, wenn man noch den Divisor $\Pi(n-\nu)$ hinzufügt. Auf diese Weise kann man in unserem zweiten Ausdrucke [5] für die Determinante

[9] $$\mathrm{E}(h_1, h_2, .. h_n \mid k_1, k_2, .. k_n)$$
$$= \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (h_b - h_\mathfrak{b})(k_b - k_\mathfrak{b})(\eta_b - \eta_\mathfrak{b}) \times \sum_{\varkappa=k_1}^{\varkappa=k_n \, (n)} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=n} \mathrm{E}_{\eta_\lambda \varkappa_\lambda} \times \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\varkappa_m - \varkappa_\mu)$$

die n fache Summation

$$\sum_{\varkappa=k_1}^{\varkappa=k_n \, (n)}$$

durch

$$\sum_{(\mathfrak{k}_1 .. \mathfrak{k}_\nu)} \; \sum_{(\mathfrak{k}_{\nu+1}, .. \mathfrak{k}_n)} \; \sum_{\varkappa_c=\mathfrak{k}_1}^{\varkappa_c=\mathfrak{k}_\nu \, (\nu)} \; \sum_{\varkappa_e=\mathfrak{k}_{\nu+1}}^{\varkappa_e=\mathfrak{k}_n \, (n-\nu)}$$

oder, mit erforderlicher gleichzeitiger Hinzufügung des auf jedes Summationsglied sich beziehenden Factors $\frac{1}{\Pi(\nu)\,\Pi(n-\nu)}$, auch durch

$$\frac{1}{\Pi(\nu)\,\Pi(n-\nu)} \sum_{\mathfrak{k}=k_1}^{\mathfrak{k}=k_n \, (n)} \; \sum_{\varkappa_c=\mathfrak{k}_1}^{\varkappa_c=\mathfrak{k}_\nu \, (\nu)} \; \sum_{\varkappa_e=\mathfrak{k}_{\nu+1}}^{\varkappa_e=\mathfrak{k}_n \, (n-\nu)}$$

für $\qquad c = 1, 2, .. \nu, \qquad e = \nu+1, \nu+2, .. n$

ersetzen.

Um in den einzelnen Gliedern die Factoren, welche sich auf $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, .. \mathfrak{k}_\nu$ beziehen, von den auf $\mathfrak{k}_{\nu+1}, .. \mathfrak{k}_n$ bezüglichen zu trennen, bemerken wir, dass . . . . [10]

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=n} \mathrm{E}_{\eta_\lambda \varkappa_\lambda} = \prod_{\gamma=1}^{\gamma=\nu} \mathrm{E}_{\eta_\gamma \varkappa_\gamma} \times \prod_{\varepsilon=\nu+1}^{\varepsilon=n} \mathrm{E}_{\eta_\varepsilon \varkappa_\varepsilon}$$

$$\prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\varkappa_m - \varkappa_\mu) = \prod_{p=2}^{p=\nu} \prod_{\varphi=1}^{\varphi=p-1} (\varkappa_p - \varkappa_\varphi) \times \prod_{q=\nu+2}^{q=n} \prod_{\psi=\nu+1}^{\psi=q-1} (\varkappa_q - \varkappa_\psi) \times \prod_{u=\nu+1}^{u=n} \prod_{\upsilon=1}^{\upsilon=\nu} (\varkappa_u - \varkappa_\upsilon)$$

ist. Im letzten zweifachen Producte durchlaufen u und υ ihre Werthe ganz unabhängig von einander, diese können also beliebig geordnet werden und es ist auch

$$[11] \qquad \prod_{u=\nu+1}^{u=n} \prod_{\upsilon=1}^{\upsilon=\nu} (\varkappa_u - \varkappa_\upsilon) = \prod_{u=\nu+1}^{u=n} \prod_{\upsilon=1}^{\upsilon=\nu} (\mathfrak{k}_u - \mathfrak{k}_\upsilon)$$

Wendet man diese Umformungen auf den obigen Ausdruck [9] der Determinante an und zieht bei den einzelnen Summationen die für dieselben gemeinsamen Factoren aus den Gliedern heraus, so entsteht:

$$[12] \qquad \mathrm{E}(h_1, \ldots h_n \,|\, k_1, \ldots k_n)$$

$$= \mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{g}=1}^{\mathfrak{g}=\mathfrak{b}-1} (h_\mathfrak{b} - h_\mathfrak{g})(k_\mathfrak{b} - k_\mathfrak{g})(\eta_\mathfrak{b} - \eta_\mathfrak{g}) \times \frac{1}{\Pi(\nu)} \frac{1}{\Pi(n-\nu)} \sum_{\mathfrak{k}=k_1}^{\mathfrak{k}=k_{n(n)}} \mathfrak{Z} \prod_{u=\nu+1}^{u=n} \prod_{\upsilon=1}^{\upsilon=\nu} (\mathfrak{k}_u - \mathfrak{k}_\upsilon) \times$$

$$\times \sum_{\varkappa_c=\mathfrak{k}_1}^{\varkappa_c=\mathfrak{k}_{\nu(\nu)}} \prod_{\gamma=1}^{\gamma=\nu} \mathrm{E}_{\eta_\gamma \varkappa_\gamma} \times \mathfrak{Z} \prod_{p=2}^{p=\nu} \prod_{\varphi=1}^{\varphi=p-1} (\varkappa_p - \varkappa_\varphi) \times$$

$$\times \sum_{\varkappa_e=\mathfrak{k}_{\nu+1}}^{\varkappa_e=\mathfrak{k}_{n(n-\nu)}} \prod_{\varepsilon=\nu+1}^{\varepsilon=n} \mathrm{E}_{\eta_\varepsilon \varkappa_\varepsilon} \times \mathfrak{Z} \prod_{q=\nu+2}^{q=n} \prod_{\psi=\nu+1}^{\psi=q-1} (\varkappa_q - \varkappa_\psi)$$

Die letzten beiden hier auftretenden Summen, die ν fache für $\varkappa_1, \ldots \varkappa_c, \ldots \varkappa_\nu$ und die $n-\nu$ fache für $\varkappa_{\nu+1}, \ldots \varkappa_e, \ldots \varkappa_n$ sind, wie leicht zu sehen, zufolge unseres zweiten Ausdruckes [5*] für die Determinante beziehungsweise gleich

$$\mathrm{E}(\eta_1, \ldots \eta_\nu \,|\, \mathfrak{k}_1, \ldots \mathfrak{k}_\nu)\ \mathfrak{Z} \prod_{p=2}^{p=\nu} \prod_{\varphi=1}^{\varphi=p-1} (\mathfrak{k}_p - \mathfrak{k}_\varphi)$$

und

$$\mathrm{E}(\eta_{\nu+1}, \ldots \eta_n \,|\, \mathfrak{k}_{\nu+1}, \ldots \mathfrak{k}_n)\ \mathfrak{Z} \prod_{q=\nu+2}^{q=n} \prod_{\psi=\nu+1}^{\psi=q-1} (\mathfrak{k}_q - \mathfrak{k}_\psi)$$

Führt man diese sogenannten *Unterdeterminanten* in obigen Ausdruck [12] ein und zieht alle Factoren von der Form $(\mathfrak{k}_m - \mathfrak{k}_\mu)$ zusammen, so erhält man:

[13] $$\mathrm{E}(h_1, \ldots h_n \mid k_1, \ldots k_n)$$
$$= \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (h_b - h_\mathfrak{b})(k_b - k_\mathfrak{b})(\eta_b - \eta_\mathfrak{b}) \times \frac{1}{\Pi(\nu)} \cdot \frac{1}{\Pi(n-\nu)} \times$$
$$\times \sum_{\mathfrak{k}=k_1}^{\mathfrak{k}=k_n (n)} \mathrm{E}(\eta_1, \ldots \eta_\nu \mid \mathfrak{k}_1, \ldots \mathfrak{k}_\nu) \cdot \mathrm{E}(\eta_{\nu+1}, \ldots \eta_n \mid \mathfrak{k}_{\nu+1}, \ldots \mathfrak{k}_n) \cdot \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\mathfrak{k}_m - \mathfrak{k}_\mu)$$

für solche Werthe der η, welche abgesehen von der Reihenfolge mit den h übereinstimmen, was wir kürzer durch

$$|\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n| = |h_1, h_2, \ldots h_n|$$

ausdrücken wollen.

Die $n$fache Summation ergibt hier formal n^n Glieder, von diesen bleiben in Folge des Verschwindens des letzten Vorzeichen-Productes für gleiche $\mathfrak{k}_m$ und $\mathfrak{k}_\mu$ nur $\Pi(n)$ bestehen, von diesen sind wieder je $\Pi(\nu)$ Glieder, welche sich nur durch die Reihenfolge in den Werthen der $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots \mathfrak{k}_\nu$ unterscheiden, und ferner wieder je $\Pi(n-\nu)$ Glieder, welche sich nur durch die Reihenfolge in den Werthen der $\mathfrak{k}_{\nu+1}, \mathfrak{k}_{\nu+2}, \ldots \mathfrak{k}_n$ unterscheiden, einander gleich. Reducirt man diese einander gleichen Glieder mit Hülfe des Divisors $\Pi(\nu) . \Pi(n-\nu)$ so bleiben $\frac{\Pi(n)}{\Pi(\nu)\,\Pi(n-\nu)}$ Glieder.

Die letztern können auch für sich dargestellt werden, wenn man in

[14] $$\mathrm{E}(h_1, \ldots h_n \mid k_1, \ldots k_n)$$
$$= \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (h_b - h_\mathfrak{b})(k_b - k_\mathfrak{b})(\eta_b - \eta_\mathfrak{b}) \times$$
$$\times \sum_{\mathfrak{k}} \mathrm{E}(\eta_1, \ldots \eta_\nu \mid \mathfrak{k}_1, \ldots \mathfrak{k}_\nu) \cdot \mathrm{E}(\eta_{\nu+1}, \ldots \eta_n \mid \mathfrak{k}_{\nu+1}, \ldots \mathfrak{k}_n) \cdot \mathfrak{Z} \prod_{m=\nu+1}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=\nu} (\mathfrak{k}_m - \mathfrak{k}_\mu)$$

$$|\eta_1, \ldots \eta_\nu, \ldots \eta_n| = |h_1, \ldots h_\nu, \ldots h_n|, \quad |\mathfrak{k}_1, \ldots \mathfrak{k}_\nu, \ldots \mathfrak{k}_n| = |k_1, \ldots k_\nu, \ldots k_n|$$
$$\mathfrak{k}_1 < \mathfrak{k}_2 < \cdots < \mathfrak{k}_\nu, \quad \mathfrak{k}_{\nu+1} < \mathfrak{k}_{\nu+2} < \cdots < \mathfrak{k}_n$$

die Summation über alle die mit den vorstehenden Bedingungen verträglichen Werthe $k_1, \ldots k_n$ für die $\mathfrak{k}_1, \ldots \mathfrak{k}_n$ ausdehnt.

Die entsprechende Behandlung des ersten Ausdrucks [4] für die Determinante würde die Form

$$
\begin{aligned}
[15] \qquad & \mathrm{E}(h_1, \ldots h_n | k_1, \ldots k_n) \\
&= \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\beta=1}^{\beta=b-1} (h_b - h_\beta)(k_b - k_\beta)(\varkappa_b - \varkappa_\beta) \times \frac{1}{\Pi(\nu)} \cdot \frac{1}{\Pi(n-\nu)} \times \\
&\times \sum_{\mathfrak{h}=h_1}^{\mathfrak{h}=h_{n}(n)} \mathrm{E}(\mathfrak{h}_1, \ldots \mathfrak{h}_\nu | \varkappa_1, \ldots \varkappa_\nu) \,.\, \mathrm{E}(\mathfrak{h}_{\nu+1}, \ldots \mathfrak{h}_n | \varkappa_{\nu+1}, \ldots \varkappa_n)\, \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\mathfrak{h}_m - \mathfrak{h}_\mu)
\end{aligned}
$$

$$
|\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n| = |k_1, k_2, \ldots k_n|
$$

ergeben haben, zu welcher die reducirte auch leicht aufgestellt werden kann.

Die hier durchgeführte Zerlegung einer Determinante in eine Summe von Gliedern, welche die Producte von zwei zusammengehörigen Unterdeterminanten sind, lässt sich fortsetzen auf die einzelnen Unterdeterminanten, hätte sich aber ebenso leicht unmittelbar hierauf erstrecken können.

Um die allgemeine Form zu erkennen, wird es genügen, den Fall der Zerlegung in Producte von drei Unterdeterminanten der Ordnungen ν, $\lambda - \nu$ *und* $n - \lambda$ *anzugeben:*

$$
\begin{aligned}
[16] \qquad & \mathrm{E}(h_1, \ldots h_n | k_1, \ldots k_n) \\
&= \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\beta=1}^{\beta=b-1} (h_b - h_\beta)(k_b - k_\beta)(\varkappa_b - \varkappa_\beta) \times \\
&\times \sum_{\mathfrak{h}} \mathrm{E}(\mathfrak{h}_1, \ldots \mathfrak{h}_\nu | \varkappa_1, \ldots \varkappa_\nu) \cdot \mathrm{E}(\mathfrak{h}_{\nu+1}, \ldots \mathfrak{h}_\lambda | \varkappa_\nu, \ldots \varkappa_\lambda) \cdot \mathrm{E}(\mathfrak{h}_{\lambda+1}, \ldots \mathfrak{h}_n | \varkappa_{n+1}, \ldots \varkappa_n) \times \\
&\qquad\qquad \times \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\mathfrak{h}_m - \mathfrak{h}_\mu)
\end{aligned}
$$

$$
|\varkappa_1, \ldots \varkappa_\nu, \ldots \varkappa_\lambda, \ldots \varkappa_n| = |k_1, \ldots k_\nu, \ldots k_\lambda, \ldots k_n|
$$

$$
|\mathfrak{h}_1, \ldots \mathfrak{h}_\nu, \ldots \mathfrak{h}_\lambda, \ldots \mathfrak{h}_n| = |h_1, \ldots h_\nu, \ldots h_\lambda, \ldots h_n|
$$

$$\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2 < \cdot \cdot < \mathfrak{h}_{\nu-1} < \mathfrak{h}_\nu$$
$$\mathfrak{h}_{\nu+1} < \mathfrak{h}_{\nu+2} < \cdot \cdot < \mathfrak{h}_{\lambda-1} < \mathfrak{h}_\lambda$$
$$\mathfrak{h}_{\lambda+1} < \mathfrak{h}_{\lambda+2} < \cdot \cdot < \mathfrak{h}_{n-1} < \mathfrak{h}_n$$

Die Summation erstreckt sich über alle mit den letzten Bedingungen verträgliche Werthe $h_1, h_2, \, . \, . \, h_\nu, \, . \, . \, h_\lambda, \, . \, . \, h_n$ für die reihenden Grössen $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \, . \, . \, \mathfrak{h}_\nu, \, . \, . \, \mathfrak{h}_\lambda, \, . \, . \, \mathfrak{h}_n$.

Nimmt man in der Gleichung [15] für ν die 2, ersetzt die Determinanten zweiten Grades durch ihre Ausdrücke und reducirt die zweite Seite der Gleichung auf die geringste Anzahl bestehen bleibender Glieder, so erhält man:

[17] $$\mathrm{E}(h_1, \, . \, . \, h_n \mid k_1, \, . \, . \, k_n)$$
$$= \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\beta=1}^{\beta=b-1} (h_b - h_\beta)(k_b - k_\beta)(\varkappa_b - \varkappa_\beta) \times \sum_{\mathfrak{h}} (\mathrm{E}_{\mathfrak{h}_1 \varkappa_1} \mathrm{E}_{\mathfrak{h}_2 \varkappa_2} - \mathrm{E}_{\mathfrak{h}_1 \varkappa_2} \mathrm{E}_{\mathfrak{h}_2 \varkappa_1}) \times$$
$$\times \mathrm{E}(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_4, \, . \, . \, \mathfrak{h}_n \mid \varkappa_3, \varkappa_4, \, . \, . \, \varkappa_n) \, \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\mathfrak{h}_m - \mathfrak{h}_\mu)$$

worin $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4 \, . \, . \, \varkappa_n$ abgesehen von der Reihenfolge mit den Werthen $k_1, k_2, k_3, k_4 \, . \, . \, k_n$ übereinstimmen und worin die Summation sich über alle diejenigen Werthensysteme für $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_4, \, . \, . \, \mathfrak{h}_n$ erstreckt, welche abgesehen von der Reihenfolge mit $h_1, h_2, h_3, h_4, \, . \, . \, h_n$ übereinstimmen und zum Beispiel die Bedingungen

$$\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2$$
$$\mathfrak{h}_3 < \mathfrak{h}_4 < \cdot \cdot \cdot < \mathfrak{h}_{n-1} < \mathfrak{h}_n$$

erfüllen.

Die Formel [17] bildet die Ausführung der zu Ende des Artikel III angegebenen paarweisen Zusammenstellung der eigentlichen Glieder der Determinante. Es folgt aus ihr, wie auch dort schon gefunden, dass die Determinante verschwindet, wenn für jedes $h_1, h_2, \, . \, . \, h_n$ als Werth des $\mathfrak{h}$ die Gleichung

$$\mathrm{E}_{\mathfrak{h}\varkappa_1} = \mathrm{E}_{\mathfrak{h}\varkappa_2}$$

erfüllt ist, worin also $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ zwei beliebig bestimmte der $k_1, k_2 \,..\, k_n$ bedeuten. Auf gleiche Weise, wie man hier das Nullwerden der Determinante bei der Gleichheit der in zwei Spalten auftretenden einander entsprechenden Elemente erkennt, schliesst man auch aus der für $\nu = 2$ durchgeführten Entwickelung der Formel [14], dass die Determinante verschwindet, wenn die entsprechenden Elemente zweier Zeilen einander gleich werden.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man ebenso, wie es in Artikel III mit den Gleichungen [4], [5], [6] ausgeführt ist, die verallgemeinerten Umkehrungen der Formeln [13] bis [16] aufstellen, und erhält den Lehrsatz:

Nimmt man in den Gleichungen [13] *und* [14] *den Factor*

$$\mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{c}=1}^{\mathfrak{c}=\mathfrak{b}-1} (h_\mathfrak{b} - h_\mathfrak{c})\,(k_\mathfrak{b} - k_\mathfrak{c})\,(\eta_\mathfrak{b} - \eta_\mathfrak{c})$$

von der zweiten Seite fort und fügt ihn auf der ersten Seite hinzu, so erhält man zwei Gleichungen [13*] *und* [14*], *deren Gültigkeit nicht, wie* [13] *und* [14] *die Bedingung, dass die Werthe der* $\eta_1, \eta_2, \,..\, \eta_n$ *abgesehen von der Reihenfolge mit* $h_1, h_2, \,..\, h_n$ *übereinstimmen, erfordert, sondern nur voraussetzt, dass* $\eta_1, \eta_2, \,..\, \eta_n$ *keine andere Werthe haben als solche, welche in der Reihe* $h_1, h_2, \,..\, h_n$ *vorkommen, dass also auch beliebig viele der* $\eta_1, \,..\, \eta_n$ *einander gleich sein können.*

Nimmt man in den Gleichungen [15], [16], [17] *den Factor*

$$\mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{c}=1}^{\mathfrak{c}=\mathfrak{b}-1} (h_\mathfrak{b} - h_\mathfrak{c})\,(k_\mathfrak{b} - k_\mathfrak{c})\,(\varkappa_\mathfrak{b} - \varkappa_\mathfrak{c})$$

von der zweiten Seite fort und fügt ihn auf der ersten Seite hinzu, so erhält man drei Gleichungen [15*], [16*], [17*], *deren Gültigkeit nicht, wie* [15], [16], [17], *die Bedingung, dass die Werthe der* $\varkappa_1, \varkappa_2, \,..\, \varkappa_n$ *abgesehen von der Reihenfolge mit* $k_1, k_2, \,..\, k_n$ *übereinstimmen, erfordert, sondern nur voraussetzt, dass* $\varkappa_1, \varkappa_2, \,..\, \varkappa_n$ *keine andere Werthe haben als solche, welche in der Reihe* $k_1, k_2, \,..\, k_n$ *vorkommen, dass also auch beliebig viele der* $\varkappa_1, \varkappa_2, \,..\, \varkappa_n$ *einander gleich sein können.*

Die Gleichungen [13] *bis* [17] *und* [13*] *bis* [17*] *sind auch auf die Fälle theilweise einander gleicher* $h_1, h_2, .. h_n$ *oder theilweise einander gleicher* $k_1, k_2, .. k_n$ *anwendbar.*

Die Ableitung der Formeln [13] bis [16] und [13*] bis [16*] zeigt, dass diese für $\nu = 1$ richtig bleiben, wenn man unter der *Determinante Eines Elementes das Element selbst* versteht. Die Gleichung [15] ergibt auf solche Weise, wenn man sie, wie bei dem Übergange von der Gleichung [13] zu [14], auch noch auf die geringste Zahl von Gliedern zurückführt:

[18] $$\mathrm{E}(h_1, .. h_n \,|\, k_1, .. k_n)$$
$$= \mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{g}=1}^{\mathfrak{g}=\mathfrak{b}-1} (h_{\mathfrak{b}} - h_{\mathfrak{g}})(k_{\mathfrak{b}} - k_{\mathfrak{g}})(\varkappa_{\mathfrak{b}} - \varkappa_{\mathfrak{g}}) \times$$
$$\times \sum_{\mathfrak{h}_1=h_1}^{\mathfrak{h}_1=h_n} \mathrm{E}_{\mathfrak{h}_1 \varkappa_1} . \mathrm{E}(\mathfrak{h}_2, .. \mathfrak{h}_n \,|\, \varkappa_2, .. \varkappa_n) . \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} (\mathfrak{h}_m - \mathfrak{h}_1)$$

und diese wieder durch die schon mehrfach behandelte Umkehrung:

[18*] $$\mathrm{E}(h_1, .. h_n \,|\, k_1, .. k_n) . \mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{b}=2}^{\mathfrak{b}=n} \prod_{\mathfrak{g}=1}^{\mathfrak{g}=\mathfrak{b}-1} (h_{\mathfrak{b}} - h_{\mathfrak{g}})(k_{\mathfrak{b}} - k_{\mathfrak{g}})(\varkappa_{\mathfrak{b}} - \varkappa_{\mathfrak{g}}) =$$
$$= \sum_{\mathfrak{h}_1=h_1}^{\mathfrak{h}_1=h_n} \mathrm{E}_{\mathfrak{h}_1 \varkappa_1} . \mathrm{E}(\mathfrak{h}_2, .. \mathfrak{h}_n \,|\, \varkappa_2, .. \varkappa_n) . \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} (\mathfrak{h}_m - \mathfrak{h}_1)$$

Die Gleichungen [18] und [18*] setzen

$$|\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, .. \mathfrak{h}_n| = |h_1, \ h_2, .. h_n|, \ \mathfrak{h}_2 < \mathfrak{h}_3 < .. < \mathfrak{h}_n$$

voraus, ferner muss für [18] auch

$$|\varkappa_1, \varkappa_2, .. \varkappa_n| = |k_1, k_2, .. k_n|$$

sein, während für [18*] genügt, dass $\varkappa_1, \varkappa_2, .. \varkappa_n$ keine andere Werthe haben als solche, welche in der Reihe $k_1, k_2, .. k_n$ vorkommen. Nimmt man nun $\varkappa_1 = \varkappa_\lambda$, $2 \leqq \lambda \leqq n$, so geht [18*] in

[18**] $$0 = \sum_{\mathfrak{h}_1=h_1}^{\mathfrak{h}_1=h_n} \mathrm{E}_{\mathfrak{h}_1 \varkappa_\lambda} . \mathrm{E}(\mathfrak{h}_2, .. \mathfrak{h}_n \,|\, \varkappa_2, .. \varkappa_n) . \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} (\mathfrak{h}_m - \mathfrak{h}_1) \quad \text{für } 2 \leqq \lambda \leqq n$$

über.

Aus den Gleichungen [18*] und [18**] ergibt sich unmittelbar die bekannte Anwendung der Determinanten zur Auflösung von n linearen Gleichungen, deren μ^{te} als Factor der ν^{ten} Unbekannten die Grösse $\mathrm{E}_{h_\mu k_\nu}$ enthält.

Multiplicirt man die Gleichung [18] mit f_1, jede der $n-1$ Gleichungen [18**] mit f_λ und mit einem geeigneten Vorzeichen-Factor, addirt dann die entstandenen Gleichungen, so erhält man:

$$[19] \qquad \mathrm{E}(h_1, \ldots h_n \,|\, k_1, \ldots k_n) \cdot f_1$$
$$= \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (h_b - h_{\mathfrak{b}})(k_b - k_{\mathfrak{b}})(\varkappa_b - \varkappa_{\mathfrak{b}}) \times$$
$$\times \sum_{\mathfrak{h}_1=h_1}^{\mathfrak{h}_1=h_n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} f_\lambda \cdot \mathrm{E}_{\mathfrak{h}_1 \varkappa_\lambda} \cdot \mathrm{E}(\mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{h}_n \,|\, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n) \cdot \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} (\mathfrak{h}_m - \mathfrak{h}_1)$$

für

$$\mathfrak{h}_2 < \mathfrak{h}_3 < \ldots < \mathfrak{h}_n$$
$$|\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{h}_n| = |h_1, h_2, \ldots h_n|$$
$$|\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n| = |k_1, k_2, \ldots k_n|$$

Diese Gleichung [19] stellt für $f_1 = 1$ den Satz dar, dass der Werth einer Determinante ungeändert bleibt, wenn man zu den Elementen in einer Spalte $\varkappa_1$ die mit einem gemeinsamen Factor multiplicirten entsprechenden Elemente in einer andern Spalte $\varkappa_\lambda$, für $\lambda > 1$, hinzufügt.

Besteht für die in je einer der Zeilen

$$\mathfrak{h} = h_1, h_2, \ldots h_n$$

vorkommenden Elemente eine gemeinsame homogene lineare Gleichung

$$[20] \qquad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} f_\lambda : \mathrm{E}_{\mathfrak{h} k_\lambda} = 0,$$

so ergibt die Formel [19], weil $\varkappa_1$ einen beliebigen der Werthe $k_1, k_2, \ldots k_n$ bedeuten kann, den Satz, dass die Determinante des ganzen Systems der n mal n Elemente für diesen Fall zu Null wird.

Ebenso erhält man die entsprechenden Sätze, welche sich auf Zeilen und Spalten an den Stellen, wo hier Spalten und Zeilen in Betracht kommen, beziehen.

Der dem letzteren Satze entsprechende würde derjenige sein, der die Determinante eines Systems linearer Gleichung, welche von einander linear abhängen, zu Null werden lässt.

Artikel V.

Zusammensetzung der Determinanten.

Bei verschiedenen Anwendungen von Determinanten, namentlich bei Zusammensetzung von linearen Transformationen, treten Determinanten von Elementen $G_{h,k}$ auf, welche für jeden Werth $1, 2, 3 \,.\,.\, n$ des h und des k in der Form

[21] $$G_{h,k} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} E_{h,\lambda} F_{\lambda,k}$$

dargestellt werden können.

Unser dritter Determinanten-Ausdruck [6] ergibt für die aus den Elementen $G_{h,k}$ gebildete Determinante:

[22] $$G(1, 2, \,.\,.\, n \,|\, 1, 2, \,.\,.\, n)$$
$$= \frac{1}{\Pi(n)} \sum_{\eta=1}^{\eta=n} {}^{(n)} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} {}^{(n)} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} G_{\eta_\nu \varkappa_\nu} \times \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\beta=1}^{\beta=b-1} (\eta_b - \eta_\beta)(\varkappa_b - \varkappa_\beta)$$

worin die eine n fache Summation sich auf alle Zahlen $1, 2, \,.\,.\, n$ als Werthe für jedes $\eta_1, \eta_2, \,.\,.\, \eta_n$ und die andere n fache Summation sich auf alle Zahlen $1, 2, \,.\,.\, n$ als Werthe für jedes $\varkappa_1, \varkappa_2, \,.\,.\, \varkappa_n$ bezieht.

Nach Einsetzung der obigen Summen [21], welche je einen besonderen reihenden Buchstaben λ_ν erhalten sollen, wird:

[23] $$G(1, 2, \,.\,.\, n \,|\, 1, 2, \,.\,.\, n)$$
$$= \frac{1}{\Pi(n)} \sum_{\eta=1}^{\eta=n} {}^{(n)} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} {}^{(n)} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} {}^{(n)} E_{\eta_\nu \lambda_\nu} F_{\lambda_\nu \varkappa_\nu} \right\} \times \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\beta=1}^{\beta=b-1} (\eta_b - \eta_\beta)(\varkappa_b - \varkappa_\beta)$$

Führt man die n fache auf jedes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ mit den Werthen $1, 2, \ldots m$ sich beziehende Summation zuletzt aus und trennt die Factoren auf geeignete Weise von einander, so erhält man

$$[24] \qquad G(1, 2, \ldots n \,|\, 1, 2, \ldots n)$$

$$= \frac{1}{\Pi(n)} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} {}^{(n)} \sum_{\eta=1}^{\eta=n} {}^{(n)} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} E_{\eta_\nu \lambda_\nu} \times \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (\eta_b - \eta_{\mathfrak{b}}) \times$$

$$\times \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} {}^{(n)} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} F_{\lambda_\nu \varkappa_\nu} \times \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (\varkappa_b - \varkappa_{\mathfrak{b}})$$

Hierin ist zufolge unserer beiden ersten Ausdrücke [4], [5] für die Determinante

$$\sum_{\eta=1}^{\eta=n} {}^{(n)} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} E_{\eta_\nu \lambda_\nu} \times \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (\eta_b - \eta_{\mathfrak{b}}) = E(1, 2, \ldots n \,|\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} {}^{(n)} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} F_{\lambda_\nu \varkappa_\nu} \times \mathfrak{Z} \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1} (\varkappa_b - \varkappa_{\mathfrak{b}}) = F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \,|\, 1, 2, \ldots n)$$

wenn wir die aus den Elementen F_{hk} gebildete Determinante auf analoge Weise bezeichnen, wie die aus den Elementen E_{hk} gebildete Determinante. Diese Determinanten sind nur dann eigentliche, wenn m nicht kleiner als n ist; wird aber m kleiner als n, so sind die Seiten dieser beiden Gleichungen identisch Null.

Die obige Gleichung [24] lässt sich also in der Form

$$[25] \qquad G(1, 2, \ldots n \,|\, 1, 2, \ldots n)$$

$$= \frac{1}{\Pi(n)} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} {}^{(n)} E(1, 2, \ldots n \,|\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)\, F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \,|\, 1, 2, \ldots n)$$

darstellen, worin wie zuvor die n fache Summation sich über die sämmtlichen ganzzahligen Werthe $1, 2, \ldots m$ für jedes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ erstreckt.

Gehen die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ von einem Werthensystem zu einem anderen über, welches sich von dem ersteren nur in der Reihenfolge der Werthe unterscheiden, so können

$$E(1, 2, \ldots n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) \text{ und } F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \mid 1, 2, \ldots n)$$

nur ihre Vorzeichen ändern und nur beide gleichzeitig, so dass also das Product aus beiden Determinanten ungeändert bleibt.

Werden zwei oder mehrere der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ einander gleich, so verschwinden jene Determinanten. In der n fachen Summe der Gleichung [25] werden also immer $\Pi(n)$ solche Glieder einander gleich, welche sich nur durch die Reihenfolge der Werthe der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ von einander unterscheiden. Durch Ausführung der angedeuteten Division mit $\Pi(n)$ ergibt sich also *für die Zusammensetzung von Determinanten:*

[26] $$G(1, 2, \ldots n \mid 1, 2, \ldots n) = \sum_{(\lambda)} E(1, 2, \ldots n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \mid 1, 2, \ldots n)$$

worin die Summation sich auf die von einander verschiedenen Verbindungen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$ als Werthe für die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ beziehen, wobei also verschiedene Reihenfolge nicht als verschiedene Verbindung gerechnet wird. Zum Beispiel kann man, wenn n nicht grösser als m ist, immer $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ voraussetzen.

Für $m = n$ vereinfacht sich diese Gleichung zu

[27] $$G(1, 2, \ldots n \mid 1, 2, \ldots n) = E(1, 2, \ldots n \mid 1, 2, \ldots n) F(1, 2, \ldots n \mid 1, 2, \ldots n)$$

Hätte man statt [21] die Gleichungen von der Form

[28] $$A_{h,k} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} E_{\lambda,h} F_{\lambda,k}$$

[29] $$B_{h,k} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} E_{h,\lambda} F_{k,\lambda}$$

[30] $$C_{h,k} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} E_{\lambda,h} F_{k,\lambda}$$

zum Ausgangspunkt gewählt, so würde man statt [26] die in demselben Sinne zu verstehenden Gleichungen

[31] $$A(1, \ldots n \mid 1, \ldots n) = \sum_{(\lambda)} E(\lambda_1, \ldots \lambda_n \mid 1, \ldots n) F(\lambda_1, \ldots \lambda_n \mid 1, \ldots n)$$

[32] $$B(1,..n\,|\,1,..n) = \sum_{(\lambda)} E(1,..n\,|\,\lambda_1,..\lambda_n)\,F(1,\delta,..n\,|\,\lambda_1,..\lambda_n)$$

[33] $$C(1,..n\,|\,1,..n) = \sum_{(\lambda)} E(\lambda_1,..\lambda_n\,|\,1,...n)\,F(1,...n\,|\,\lambda_1,..\lambda_n)$$

für die drei aus den A, aus den B und aus den C als Elementen gebildeten Determinanten erhalten haben. Für $m = n$ werden diese auch mit der aus den Elementen G gebildeten Determinante [27] gleichen Werth annehmen.

Artikel VI.

Umkehrung der Indices-Paare.

Durchlaufen in einem System von $n.n$ Elementen $E_{h_\mu k_\nu}$ für $\mu = 1, 2, ..n$ und $\nu = 1, 2, ..n$ die ersten Indices $h_1, h_2, .. h_n$ der Reihe nach dieselben Werthe wie die zweiten Indices $k_1, k_2, .. k_n$ ist also

[34] $$h_\lambda = k_\lambda \quad \text{für} \quad \lambda = 1, 2, ... n$$

so bestehen zwischen den Producten, durch welche die Vorzeichen der einzelnen Glieder in der aus den gegebenen Elementen gebildeten Determinante bestimmt werden, mehrere sehr einfach erkennbare Identitäten.

Den sich selbst erledigenden Fall, dass in der Reihe der h und also auch in der Reihe der k unter sich Gleiche vorkommen, schliessen wir hier von der Untersuchung aus.

Das oben aufgestellte allgemeine Determinantenglied [3]

$$\mathfrak{Z}\prod_{b=2}^{b=n}\prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=b-1}(h_b - h_\mathfrak{b})\,(k_b - k_\mathfrak{b}) \times \prod_{\rho=1}^{\rho=n} E_{\eta_\rho \varkappa_\rho} \times \mathfrak{Z}\prod_{m=2}^{m=n}\prod_{\mu=1}^{\mu=m-1}(\eta_m - \eta_\mu)\,(\varkappa_m - \varkappa_\mu)$$

vereinfacht sich bei der jetzt gemachten Annahme, weil das von der Reihenfolge der Werthe des h und k abhängige Vorzeichen-Product der positiven Einheit gleich wird, zu der Form:

[35] $$\prod_{\rho=1}^{\rho=n} E_{\eta_\rho \varkappa_\rho} \times \mathfrak{Z}\prod_{m=2}^{m=n}\prod_{\mu=1}^{\mu=m-1}(\eta_m - \eta_\mu)\,(\varkappa_m - \varkappa_\mu)$$

Für nicht zu Null werdende Vorzeichen-Producte sind die $\eta_1, \ldots \eta_n$ abgesehen von der Reihenfolge gleich den $h_1, \ldots h_n$ ebenso die $\varkappa_1, \ldots \varkappa_n$ abgesehen von der Reihenfolge gleich den $k_1, \ldots k_n$, also nach der Voraussetzung der Gleichungen [34] werden die $\eta_1, \ldots \eta_n$ abgesehen von der Reihenfolge den $\varkappa_1, \ldots \varkappa_n$ gleich. Mit Benutzung der oben bei Gleichung [13] angewandten Bezeichnung können wir dies auch durch . . . [36]

$$|\eta_1, \ldots \eta_n| = |h_1, \ldots h_n|, \ |\varkappa_1, \ldots \varkappa_n| = |k_1, \ldots k_n|, \ |\eta_1, \ldots \eta_n| = |\varkappa_1, \ldots \varkappa_n|$$

darstellen.

Steht nun zu dem obigen Ausdrucke [35] der nach derselben Vorschrift gebildete Ausdruck

[37] $$\prod_{\nu=1}^{\nu=n} E_{\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{k}_\nu} \times \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\mathfrak{h}_m - \mathfrak{h}_\mu)(\mathfrak{k}_m - \mathfrak{k}_\mu)$$

in der Beziehung, dass

[38] $$\mathfrak{h}_\lambda = \varkappa_\lambda, \quad \mathfrak{k}_\lambda = \eta_\lambda. \quad \text{für} \quad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

wird, so haben offenbar die Vorzeichen-Producte in den beiden Ausdrücken [35] und [37] einander gleiche Werthe.

Die beiden Ausdrücke werden aber nur dann algebraisch einander gleich, stellen also nur dann ein einziges eigentliches Glied der Determinante dar, wenn es zu jedem Indices-Paare $(\eta_\lambda, \varkappa_\lambda)$ ein ihm gleiches Indices-Paar $(\mathfrak{h}_\mu, \mathfrak{k}_\mu)$ gibt.

Mit Rücksicht auf die Voraussetzung [38] müsste es dann also zu jedem Indices-Paare $(\eta_\lambda, \varkappa_\lambda)$ ein solches $(\eta_\mu, \varkappa_\mu)$ geben, so dass $\eta_\lambda = \varkappa_\mu$ und $\varkappa_\lambda = \eta_\mu$ ist.

Ein solcher Umstand bildet einen besonderen Fall zu dem allgemeineren, dass eine Reihe von Werthen-Paaren

[39] $$(\eta_{\lambda_1}, \varkappa_{\lambda_1})(\eta_{\lambda_2}, \varkappa_{\lambda_2}) \ldots (\eta_{\lambda_{p-1}}, \varkappa_{\lambda_{p-1}})(\eta_{\lambda_p}, \varkappa_{\lambda_p})$$

welche die Gleichungen

[40] $$\varkappa_{\lambda_1} = \eta_{\lambda_2}, \ \varkappa_{\lambda_2} = \eta_{\lambda_3}, \ldots \varkappa_{\lambda_{p-1}} = \eta_{\lambda_p}, \ \varkappa_{\lambda_p} = \eta_{\lambda_1}$$

erfüllen, auftritt.

Eine Reihe mit dieser Eigenschaft wollen wir einen Cyclus von Werthen- oder Indices-Paaren nennen.

Ist in jener Reihe p die kleinste Zahl, welche das zugehörige $\varkappa_{\lambda_p}$ gleich einem η_{λ_φ} für $\varphi \leqq p$ werden lässt, so mag der Cyclus ein *einfacher* heissen im Gegensatze zu einem zusammengesetzten.

Die Zahl p gibt an, aus wie viel Werthen-Paaren der Cyclus besteht und wird zur Abkürzung die *Ordnungs-Zahl* des Cyclus genannt werden.

Den Fall, dass $\eta_\lambda = \varkappa_\lambda$ in $(\eta_\lambda, \varkappa_\lambda)$ wird, können wir als hierin begriffen denken und wollen solches $(\eta_\lambda, \varkappa_\lambda)$ als einen eingliedrigen Cyclus oder als einen Cyclus von der Ordnung 1 ansehen. Unter Voraussetzung dieser Bezeichnungsweise ergibt sich leicht der Lehrsatz:

Ein System von Werthen-Paaren

[41] $$(\eta_1, \varkappa_1)(\eta_2, \varkappa_2) \ldots (\eta_n, \varkappa_n)$$

worin die $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ *unter sich verschieden und abgesehen von der Reihenfolge den* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ *gleich sind, bildet entweder einen einzigen einfachen Cyclus oder besteht aus mehreren einfachen Cyclen.*

Die Summe der Ordnungszahlen aller Cyclen des Systems [41] *ist* $= n$.

Jedes Werthen-Paar gehört Einem einfachen Cyclus an.

Betrachtet man die Reihenfolge in den Werthen-Paaren als unwesentlich, so kann man auch sagen: *Das System* [41] *kann wesentlich nur auf Eine Weise in einfache Cyclen zerlegt werden.*

Zwei Indices-Paare

[42] $$(\eta_\lambda, \varkappa_\lambda) \text{ und } (\mathfrak{h}_\lambda, \mathfrak{k}_\lambda) \quad \text{für welche} \quad \mathfrak{h}_\lambda = \varkappa_\lambda,\ \mathfrak{k}_\lambda = \eta_\lambda$$

ist, bilden einen Cyclus zweiter Ordnung. Das eine dieser beiden Indices-Paare wollen wir *die Umkehrung* des anderen nennen.

Das zuvor für die beiden Ausdrücke [35] und [37] mit der Voraussetzung [38] gewonnene Resultat lässt sich hiernach auch so aussprechen:

Werden in dem Determinanten-Gliede

[43] $$\prod_{\nu=1}^{\nu=n} \mathrm{E}_{\eta_\nu \varkappa_\nu} \times \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\eta_m - \eta_\mu)(\varkappa_m - \varkappa_\mu)$$

die n Indices-Paare

[44] $$(\eta_1, \varkappa_1)\ (\eta_2, \varkappa_2)\ .\ .\ (\eta_n, \varkappa_n)$$

umgekehrt, so entsteht nur dann ein jenem Gliede algebraisch gleicher Ausdruck also wieder dasselbe Determinanten-Glied, wenn keiner der in der Reihe der Indices-Paare [44] *vorkommenden Cyclen eine die* 2 *übertreffende Ordnung hat.*

Es entsteht aber ein von jenem Gliede [43] *algebraisch verschiedener Ausdruck also ein anderes Determinanten-Glied, wenn wenigstens eine jener Ordnungszahlen grösser als* 2 *ist.*

Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich die Glieder einer Determinante, deren $n.n$ Elemente für jedes λ und $\varkappa$ die Bedingung

[45] $$E_{\lambda,\varkappa} + E_{\varkappa,\lambda} = 0 \quad \text{also} \quad E_{\lambda\lambda} = 0$$

erfüllen, erheblich zusammenziehen.

Jedes Glied, welches in der Reihe seiner Indices-Paare einen einfachen Cyclus erster Ordnung enthält, verschwindet in Folge der Voraussetzung $E_{\lambda,\lambda} = 0$.

Ist n ungerade so heben sich die übrigen Determinanten-Glieder paarweise auf, nemlich immer zwei solche eigentliche Glieder, von denen das eine aus dem anderen durch Umkehrung der Indices-Paare entsteht. In der That haben die Vorzeichen-Producte in zwei solchen Gliedern gleiche Werthe und nach Absonderung derselben als eines gemeinsamen Factors, bleibt

[46] $$E_{\lambda_1\varkappa_1}\ .\ .\ .\ E_{\lambda_n\varkappa_n} + E_{\varkappa_1\lambda_1}\ .\ .\ .\ E_{\varkappa_n\lambda_n}$$

worin die beiden Theile, weil n ungerade ist, sich gegenseitig in Folge der Voraussetzung [45] annulliren.

Ist n gerade, so entsteht durch die angegebene Umkehrung wieder dasselbe Determinanten-Glied, wenn die Cyclen für dessen n Indices-Paare [44] alle von der Ordnung 2 sind. Mit Hülfe der Gleichungen [44] lässt sich ein solches Glied als vollständiges Quadrat darstellen.

Besteht aber für das Determinanten-Glied ein Cyclus von höherer als der zweiten Ordnung, so ergibt jene Umkehrung ein neues Determinanten-Glied, welches mit dem ursprünglichen nach Anwendung der zwischen den Elementen vorausgesetzten Beziehung [45] gleichen absoluten Werth erhält.

Artikel VII.

Umkehrung einzelner Cyclen.

Werden nicht die sämmtlichen n Indices-Paare [44] umgekehrt, sondern nur *einige* derselben $(\eta, \varkappa)$ in $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ und soll das hierdurch aus dem Determinanten-Gliede [35] gebildete neue [37] wieder ein *eigentliches Determinanten-Glied* sein, so dürfen keine der ersten Indices $\mathfrak{h}$ unter sich und keine der zweiten Indices $\mathfrak{k}$ unter sich gleich werden. Dieses wird aber, weil die Werthe der η mit den Werthen der $\varkappa$ abgesehen von der Reihenfolge übereinstimmen [36], immer und nur dann erreicht, wenn die Indices-Paare *eines oder mehrerer ganzer Cyclen umgekehrt* worden sind.

Um hierbei das Verhalten des Vorzeichenproductes in [35] zu untersuchen, zerlegen wir das ursprüngliche Product

erstens in diejenigen Factoren-Paare $(\eta_a - \eta_\alpha)(\varkappa_a - \varkappa_\alpha)$, für welche die entsprechenden Indices-Paare $(\eta_a, \varkappa_a)$ und $(\eta_\alpha, \varkappa_\alpha)$ beide umgekehrt worden sind,

zweitens in diejenigen Factoren-Paare $(\eta_b - \eta_c)(\varkappa_b - \varkappa_c)$, deren je ein Indices-Paar $(\eta_b, \varkappa_b)$ umgekehrt worden ist, während das andere $(\eta_c, \varkappa_c)$ ungeändert blieb,

drittens in diejenigen Factoren-Paare $(\eta_e - \eta_\varepsilon)(\varkappa_e - \varkappa_\varepsilon)$ für welche beide Indices-Paare $(\eta_e, \varkappa_e)$ und $(\eta_\varepsilon, \varkappa_\varepsilon)$ ungeändert geblieben sind.

Durch die Umkehrung wechseln die beiden Factoren der ersten Art nur ihre Plätze mit einander. In den Factoren der zweiten Art stimmt die Reihe der η_b mit der Reihe der $\varkappa_b$ abgesehen von der Anordnung zufolge der Voraussetzung überein, ebenso auch η_c und die $\varkappa_c$ weil die η_b mit den η_c ebenso wie die $\varkappa_b$ mit den $\varkappa_c$ die ganze Reihe der h darstellen. Die

Factoren der dritten Art bleiben ganz ungeändert. Jeder der drei Theile des *Vorzeichen-Productes behält also seinen Werth bei.*

Dieser Satz ist auch als besonderer Fall in dem Lehrsatze enthalten, welcher das Vorzeichen allein durch die Anzahl der Elemente und durch die Anzahl der einfachen Cyclen bestimmt.

Der hier bewiesene Satz zeigt, dass für eine Determinante, deren $n.n$ Elemente die Gleichungen [45] erfüllen, im allgemeinen, auch wenn n gerade ist, gegenseitig sich aufhebende Glieder vorkommen.

In der That bildet ein solches Determinanten-Glied [35], dessen n Indices-Paare u Cyclen mit ungeraden die Einheit übertreffenden Ordnungs-Zahlen und ferner g Cyclen mit geraden die Zahl 2 übersteigenden Ordnungs-Zahlen enthält, in Vereinigung mit denjenigen eigentlichen Determinanten-Gliedern, welche durch Umkehrung einer *geraden* Anzahl von Indices-Paaren entstehen, im Ganzen 2^{g+u-1} eigentliche denselben Werth annehmende Determinanten-Glieder.

Diesen Gliedern werden in Folge der zwischen den Elementen vorausgesetzten Beziehung diejenigen eigentlichen 2^{g+u-1} Determinanten-Glieder, welche aus jenem Gliede [35] durch Umkehrung einer *ungeraden* Anzahl von Indices-Paaren entstehen, dem absoluten Werthe nach gleich aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzt, heben sich also mit jenen in der Determinante auf.

Für eine Determinante, in welcher jedes Element durch Umkehrung seines Indices-Paares den entgegengesetzten Werth annimmt, bleiben allein solche Glieder bestehen, deren Indices-Paare nur einfache Cyclen gerader Ordnung enthalten.

Artikel VIII.

Halbirung der Cyclen.

In einem einfachen Cyclus [39] haben die ersten Indices η in einer bestimmten Reihenfolge dieselben Werthe wie die zweiten Indices $\varkappa$, aber die η unter sich verschiedene Werthe.

Ist die Anzahl p der Werthen-Paare des Cyclus eine gerade Zahl, so haben bei der normalen Anordnung der Paare im Cyclus, das erste, das dritte, das fünfte u. s. f. das $p-1^{\text{ste}}$ Paar zusammen auch unter den η *und* $\varkappa$ keine gleiche Werthe. Ebenso haben das zweite, das vierte, u. s. f. das p^{te} Paar zusammen auch unter den η *und* $\varkappa$ keine gleiche Werthe.

Die Paare auf den ungeradzahligen Plätzen haben für die η und $\varkappa$ dieselben Werthe wie beziehungsweise die $\varkappa$ und η in den Paaren auf den geradzahligen Plätzen. Deshalb wollen wir diese beiden Reihen von Paaren *die beiden Hälften des Cyclus* nennen.

Ein eigentliches Determinanten-Glied, dessen Indices-Paare nur einfache Cyclen gerader Ordnung enthält, kann, durch Halbirung der Cyclen in zwei Factoren zerlegt werden, deren jeder unter seinen sämmtlichen n Indices η und $\varkappa$ keine zwei gleichwerthige enthält.

Da in einer solchen Determinante die Anzahl n der Indices-Paare nur eine gerade sein kann, so wollen wir 2ν statt n setzen. Für das Determinanten-Glied [35] erhalten wir hiernach auch die Form

$$[47] \qquad \prod_{\sigma} \mathrm{E}(\mathfrak{h}_\sigma, \mathfrak{k}_\sigma) \times \mathfrak{Z} \prod_{a,\alpha} (\mathfrak{h}_a - \mathfrak{h}_\alpha)(\mathfrak{k}_a - \mathfrak{k}_\alpha) \times \mathfrak{Z} \prod_{e} \prod_{\varepsilon} (\mathfrak{k}_e - \mathfrak{h}_\varepsilon)^2 \times$$
$$\times \prod_{\tau} \mathrm{E}(\mathfrak{h}_\tau, \mathfrak{k}_\tau) \times \mathfrak{Z} \prod_{b,\beta} (\mathfrak{h}_b - \mathfrak{h}_\beta)(\mathfrak{k}_b - \mathfrak{k}_\beta) \times \mathfrak{Z} \prod_{c} \prod_{\gamma} (\mathfrak{k}_c - \mathfrak{h}_\gamma)^2 \times$$
$$\times \mathfrak{Z} \prod_{\mathfrak{a}} \prod_{\mathfrak{b}} (\mathfrak{h}_{\mathfrak{b}} - \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}})(\mathfrak{k}_{\mathfrak{b}} - \mathfrak{k}_{\mathfrak{a}})$$

worin jedes der $\sigma, a, \alpha, e, \varepsilon, \mathfrak{a}$ die Werthe $1, 2, 3, \ldots \nu$ und jedes der $\tau, b, \beta, c, \gamma, \mathfrak{b}$ die Werthe $\nu+1, \nu+2, \ldots 2\nu$ mit der Beschränkung $a > \alpha$, $b > \beta$ zu durchlaufen hat, und worin die Elemente mit $\mathrm{E}(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ bezeichnet sind.

In der That der Ausdruck [47] unterscheidet sich von jenem [35] nur durch Hinzufügung der auf die reihenden Grössen $e, \varepsilon, c, \gamma$ sich beziehenden Producte. Diese Producte lassen den übrigen Theil des Ausdruckes ungeändert, wenn bei der zuvor angegebenen Halbirung der von den $(\eta, \varkappa)$ gebildeten Cyclen die Indices-Paare $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ der einen Hälften in die erste Zeile und die Indices-Paare $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ der anderen Hälften der Cyclen in die zweite Zeile der Formel [47] gebracht sind.

Dieselben Vorzeichen-Producte lassen aber den Ausdruck verschwinden, wenn unter den $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ der ersten Zeile oder unter den $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ der zweiten Zeile gleiche Werthe auftreten, welches aber nach Ausführung der Halbirung der Cyclen nicht vorkommen kann.

Umgekehrt folgt unmittelbar aus diesen Bemerkungen, dass, wenn die 2ν Grössen $\mathfrak{h}$ wie die 2ν Grössen $\mathfrak{k}$ keine andere Werthe haben als die 2ν gegebenen Grössen h oder als die mit diesen identischen k, auch der Ausdruck [47] entweder verschwindet oder ein eigentliches Determinanten-Glied mit Cyclen gerader Ordnung darstellt.

Um die Cyclen zu bilden, sind nemlich die Indices-Paare abwechselnd aus der ersten und aus der zweiten Zeile in Formel [47] zu entnehmen, weil für den Fall des Nichtverschwindens

[48] $$|\mathfrak{h}_1, \ldots \mathfrak{h}_\nu| = |\mathfrak{k}_{\nu+1}, \ldots \mathfrak{k}_{2\nu}|, \quad |\mathfrak{k}_1, \ldots \mathfrak{k}_\nu| = |\mathfrak{h}_{\nu+1}, \ldots \mathfrak{h}_{2\nu}|$$

wird.

Die Summe aller Determinanten-Glieder, denen nur Cyclen gerader Ordnung entsprechen, erhalten wir demnach, wenn wir die Ausdrücke von der Form [47] für alle solche aus den h als Werthen der $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ gebildeten Werthensysteme $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ summiren, welche algebraisch verschiedene Ausdrücke [47] darstellen.

Mit einem bestimmten Werthensysteme der Indices-Paare ergeben alle diejenigen Werthensysteme, welche die Indices-Paare nur ihre Reihenfolge vertauschen lassen, algebraisch gleiche Ausdrücke [47].

Die Versetzung der Reihenfolge kann zunächst dadurch geschehen, dass eine der beiden Hälften eines Cyclus nach Belieben in die erste oder die zweite Zeile der Formel [47] gebracht wird. Bezeichnet $\mathfrak{g}$ die Anzahl sämmtlicher Cyclen für das bestimmte Glied, so erhält man durch diese verschiedenartige Bildung der beiden Factoren, nemlich in Formel [47] der ersten und zweiten Zeile, zusammen $2^{\mathfrak{g}}$ algebraisch gleiche Ausdrücke. Jeder der beiden Factoren, nemlich der beiden Zeilen in [47], kann nun noch formal verschieden werden durch sämmtliche $\Pi(\nu)$ Umstellungen der Reihenfolge seiner ν Indices-Paare $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$.

Im ganzen entstehen also $2^{\mathfrak{g}}.\Pi(\nu).\Pi(\nu)$ algebraisch gleichwerthige Ausdrücke und . . . . [49]

man erhält die Summe aller Determinanten-Glieder mit geradzahligen Cyclen, wenn man den Ausdruck [47] *durch* $2^{\mathfrak{g}}.\Pi(\nu).\Pi(\nu)$ *dividirt und dann in Bezug auf jede der* 4ν *Grössen* $\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{k}$ *über sämmtliche* 2ν *Werthe der* h *summirt. Es bezeichnet* $\mathfrak{g}$ *die Anzahl der für je ein bestimmtes Werthensystem in den* 2ν *Indices-Paaren* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *vorkommenden Cyclen.*

Ein eigentliches nicht verschwindendes Glied enthält Indices-Paare, welche die Bedingungen [48] erfüllen. Es ist also in [47] auch:

[50] $$\prod_e \prod_\varepsilon (\mathfrak{k}_e - \mathfrak{h}_\varepsilon) = \prod_\mathfrak{a} \prod_\mathfrak{b} (\mathfrak{h}_\mathfrak{b} - \mathfrak{h}_\mathfrak{a}), \quad \prod_c \prod_\gamma (\mathfrak{k}_c - \mathfrak{h}_\gamma) = \prod_\mathfrak{a} \prod_\mathfrak{b} (\mathfrak{k}_\mathfrak{b} - \mathfrak{k}_\mathfrak{a})$$

und der Ausdruck [47] kann durch

[51] $$\begin{aligned} &\prod_\sigma E(\mathfrak{h}_\sigma, \mathfrak{k}_\sigma) \times \mathfrak{Z} \prod_{(a,\alpha)} (\mathfrak{h}_\alpha - \mathfrak{h}_a)(\mathfrak{k}_a - \mathfrak{k}_\alpha) \times \mathfrak{Z} \prod_e \prod_\varepsilon (\mathfrak{k}_e - \mathfrak{h}_\varepsilon) \times \\ &\times \prod_\tau E(\mathfrak{h}_\tau, \mathfrak{k}_\tau) \times \mathfrak{Z} \prod_{(b,\beta)} (\mathfrak{h}_b - \mathfrak{h}_\beta)(\mathfrak{k}_b - \mathfrak{k}_\beta) \times \mathfrak{Z} \prod_c \prod_\gamma (\mathfrak{k}_c - \mathfrak{h}_\gamma) \times \\ &\times \prod_\mathfrak{a} \prod_\mathfrak{b} (\mathfrak{h}_\mathfrak{b} - \mathfrak{h}_\mathfrak{a})^2 (\mathfrak{k}_\mathfrak{b} - \mathfrak{k}_\mathfrak{a})^2 \end{aligned}$$

ersetzt werden, wenn sämmtliche Zeichen ihre obige Bedeutung beibehalten.

Artikel IX.

Zurückführung auf Jacobi's Resolventen.

Gebrauchen wir in Formel [51] statt $\mathfrak{h}_\sigma, \mathfrak{k}_\sigma, \mathfrak{h}_\tau, \mathfrak{k}_\tau$ jetzt beziehungsweise $s_{2\sigma-1}, s_{2\sigma}, t_{2\rho-1}, t_{2\rho}$ für $\tau = \nu + \rho$ und kehren unter den von e und ε sowie unter den von c und γ abhängigen Differenzen diejenigen um, in welchen $e < \varepsilon$, $c < \gamma$ ist, so können wir die beiden ersten Zeilen in [51] abgesehen von den beiden sich zu $+1$ ergänzenden Factoren $(-1)^{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}$ auch beziehungsweise in der Form:

[52] $$\begin{aligned} &\prod_\sigma E(s_{2\sigma-1}, s_{2\sigma}) \times \mathfrak{Z} \prod_{(m,\mu)} (s_m - s_\mu) \times \\ &\times \prod_\rho E(t_{2\rho-1}, t_{2\rho}) \times \mathfrak{Z} \prod_{(m,\mu)} (t_m - t_\mu) \end{aligned}$$

darstellen, wenn σ und ρ die Zahlen $1, 2, \ldots \nu$ aber m und μ die Zahlen $1, 2, 3, \ldots 2\nu$ mit der Bedingung $m > \mu$ durchlaufen.

Hiervon unterscheidet der Ausdruck [51] sich nur durch den in der dritten Zeile befindlichen Vorzeichen-Factor. Dieser drückt aber die Bedingung aus, dass kein $s_{2\sigma-1}$ einem t_{-1} und kein $s_{2\sigma}$ einem $t_{2\rho}$ gleich werden soll.

Wenden wir die Darstellung [52] auf *Determinanten-Elemente* an, deren jedes wie in [45] *mit Umkehrung seines Indices-Paares auch seinen Werth ins Entgegengesetzte verwandeln lässt*, so fällt durch solche Umkehrung der Indices-Paare die letzt genannte Bedingung fort, während die erste wie auch die zweite Zeile in [51] ihren Werth ungeändert beibehält.

Jedes nicht verschwindende und mit anderen Gliedern sich nicht annulirende Determinanten-Glied kann also auf die Form [52] *gebracht werden.*

Haben in [52] *die* 4ν *Grössen* s *und* t *keinen andern Werth als die* 2ν *Grössen* h, *so ist der Ausdruck entweder gleich Null oder ein eigentliches Glied einer solchen Determinante.*

In der That der Ausdruck [52] verschwindet nur dann nicht, wenn die s alle von einander und die t alle von einander verschieden sind. In diesem Falle kann man aber die 2ν Werthen-Paare

[53] $$(s_{2\sigma-1}, s_{2\sigma}) \quad \text{und} \quad (t_{2\rho-1}, t_{2\rho})$$

entweder unmittelbar oder nach etwa erforderlicher Umkehrung einzelner Werthenpaare, wobei der Ausdruck [52] seinen Werth nicht ändert, in einfache Cyclen gerader Ordnung zerlegen. Es sind demnach alle für die in Rede stehenden Glieder erforderlichen Bedingungen, wie wir im Artikel VII gesehen haben, erfüllt.

An jenem Orte haben wir auch gefunden, dass unter den im allgemeinen verschiedenen eigentlichen Determinanten-Gliedern für diese besondere Determinante noch 2^g einander algebraisch gleich werden durch Hinzunahme der Bedingungen $E(\eta, \varkappa) = -E(\varkappa, \eta)$.

[54] *Wir erhalten also die gesuchte Determinante, wenn wir* [52] *mit* 2^g *multipliciren und über alle solche Werthensysteme* h *für jedes* s *und* t

summiren, welche den Ausdruck mit Berücksichtigung der Gleichungen $\mathrm{E}(\eta, x) = -\mathrm{E}(x, \eta)$ *algebraisch verschiedene Werthe annehmen lassen. Es bedeutet dabei* g *die Anzahl der von den* 2ν *Werthen-Paaren* [53] *entweder unmittelbar oder durch etwa erforderliche Umkehrung einzelner Werthen-Paare gebildete Cyclen, welche die zweite Ordnung übertreffen.*

Nimmt man in [52] für die s und t jedes aus den h zusammengesetzte Werthensystem, so erkennt man zunächst 2^g Ausdrücke als einander gleich. Diejenigen 2^g Cyclen, welche aus [53] entweder schon unmittelbar oder nach erforderlichen Umkehrungen gebildet werden und höherer als zweiter Ordnung sind, können ihre beiden Hälften beliebig auf die beiden Zeilen in [52] vertheilen. Zweitens werden immer diejenigen $2^{2\nu}$ Ausdrücke einander gleich, die durch Umkehrung der 2ν Werthenpaare [52] aus einander hervorgehen. Schliesslich werden noch jedesmal diejenigen $\Pi(\nu) . \Pi(\nu)$ Ausdrücke einander gleich, welche durch Veränderung der Reihenfolge der aus den s gebildeten Werthen-Paaren unter sich und der aus den t gebildeten Werthen-Paaren unter sich hervorgehen.

Hiernach lässt sich der Lehrsatz [54] auch so aussprechen: dass die gesuchte Determinante entsteht, wenn man den Ausdruck [52] mit $2^{2\nu} . \Pi(\nu) . \Pi(\nu)$ dividirt und über alle Werthe h für jedes s und t summirt; *also ist:*

[55]
$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(h_1, \ldots h_{2\nu} \mid h_1, \ldots h_{2\nu}) \\
&= \Big\{\frac{1}{2\nu}\,\frac{1}{\Pi(\nu)} \sum_{\mathfrak{s}}^{(2\nu)} \prod_{\rho} \mathrm{E}(\mathfrak{s}_{2\rho-1}, \mathfrak{s}_{2\rho}) \times \mathfrak{Z} \prod_{(m,\mu)} (\mathfrak{s}_m - \mathfrak{s}_\mu)\Big\}^2 \\
&= \Big\{\sum_{(\mathfrak{t})} \prod_{\rho} \mathrm{E}(\mathfrak{t}_{2\rho-1}, \mathfrak{t}_{2\rho}) \times \mathfrak{Z} \prod_{(m,\mu)} (\mathfrak{t}_m - \mathfrak{t}_\mu)\Big\}^2 \\
&= \sum_{(s,t)} 2^g \prod_{\rho} \mathrm{E}(s_{2\rho-1}, s_{2\rho}) . \mathrm{E}(t_{2\rho-1}, t_{2\rho}) \times \mathfrak{Z} \prod_{(m,\mu)} (s_m - s_\mu)(t_m - t_\mu)
\end{aligned}$$

die aus den $2\nu . 2\nu$ *Elementen* $\mathrm{E}(h_\sigma, h_\tau)$ *gebildete Determinante, wenn für jedes* σ *und* τ *die Gleichung* $\mathrm{E}(h_\sigma, h_\tau) = -\mathrm{E}(h_\tau, h_\sigma)$ *erfüllt wird.*

Die Producte in [55] beziehen sich theils auf die ganzen Zahlen $1, 2, \ldots \nu$ als Werthe der ρ, theils auf die ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots 2\nu$ als Werthe der m und μ mit Erfüllung der Bedingung $m > \mu$.

In der 2νfachen Summation durchläuft jedes der 2ν reihenden $\mathfrak{s}$ alle 2ν Werthe h.

Die Summation der zweiten Darstellung bezieht sich auf solche Werthenverbindungen der h für die t, welche algebraisch verschiedene Glieder geben, von welchen also ein Werthensystem weder durch Umsetzung der Reihenfolge der ν Indices-Paare $(t_{2\rho-1}, t_{2\rho})$ noch durch Umkehrung innerhalb der einzelnen Paare aus einem anderen Werthensysteme abgeleitet werden kann. Der hier durch die Summation gebildete Ausdruck, dessen Quadrat der Determinante gleich wird, ist der von Jacobi bei seiner Ausführung der Pfaff'schen Integrations-Methode (Crelle's Journal Band 2. Seite 355. 1827 August 14) in anderer Form zuerst dargestellte und nach seiner wichtigsten Eigenschaft untersuchte Ausdruck, der wol verdiente Jacobi's Resolvente genannt zu werden.

Die Summation der dritten Darstellung bezieht sich auf solche Werthenverbindungen der h sowol für die s als auch für die t, welche ein Werthensystem weder durch Umsetzung der Reihenfolge der 2ν Indices-Paare $(s_{2\rho-1}, s_{2\rho})$ und $(t_{2\rho-1}, t_{2\rho})$ noch durch Umkehrung innerhalb der einzelnen Paare aus einem andern Werthensysteme hervorgehen lassen. Es bedeutet g die Anzahl der in den 2ν Indices-Paaren unmittelbar vorkommenden und der nach etwa erforderlichen Umkehrungen von Indices-Paaren noch herstellbaren einfachen Cyclen, deren Ordnung die zweite übertrifft.

Inhalt.

Meine Untersuchungen über andere Eigenschaften der Jacobi'schen Resolventen, so wie über ihre Beziehungen zu den für die Theorie der quadratischen Reste so wichtigen Kronecker'schen Vorzeichen-Producten, werde ich bei nächster Gelegenheit der Öffentlichkeit übergeben.