Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien.

Von

Alfred Enneper.

Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellsch. d. Wiss. am 1. Juni 1878.

Die vorliegende Abhandlung verfolgt den doppelten Zweck: Aufstellung möglichst allgemeiner brauchbarer Formeln zu analytischen Untersuchungen der Flächen, für welche nur ein System von Krümmungslinien plan ist; ferner Anwendungen der allgemeinen Resultate auf einige specielle Probleme. Was den ersten Punkt anbelangt, so hat der Verfasser wiederholt Gelegenheit gehabt, sich seit längerer Zeit von der Brauchbarkeit des in Rede stehenden analytischen Materials zu überzeugen, worauf sich einige Andeutungen in den „Nachrichten v. d. K. G. d. W.“ aus den Jahren 1868 und 1876 beziehn. Die Anwendungen betreffen die Flächen, für welche beide Systeme von Krümmungslinien plan sind, oder eins dieser Curvensysteme plan, das andere sphärisch ist. Obgleich diese Flächen schon mehrfach zu ausgedehnten Untersuchungen Veranlassung gegeben haben, fehlte bisher eine Herleitung derselben aus allgemeinen Resultaten, welche Herleitung, mit der besseren Uebersicht, eine grössere Symmetrie und Leichtigkeit der Rechnungen verbindet. Hierbei ist namentlich eine sorgfältige Ausarbeitung der analytischen Ausdrücke angestrebt worden, mit Vermeidung aller Formen, welche für weitere Specialuntersuchungen nicht geeignet erschienen.

In Anbetracht ihres geringen Umfangs soll die Literatur über Krümmungslinien, soweit dieselbe Bezug hat auf die vorstehenden Untersuchungen und soweit dieselbe fundamentale Arbeiten betrifft, hier angeführt werden.

Im §. XVII der „Application de l'analyse à la géométrie“ hat Monge zuerst Flächen betrachtet, welche durch eine Eigenschaft ihrer Krümmungslinien characterisirt sind. Der von Monge behandelte Fall ist einer der einfachsten in geometrischer Hinsicht, wenn nämlich ein System von Krümmungslinien plan ist und die Ebenen desselben unter einander parallel sind. Die von Monge gegebenen Resultate, welche höchst wahrscheinlich noch aus dem vorigen Jahrhundert stammen*), haben erst lange Zeit nachher zu einer Reihe ungemein scharfsinniger Arbeiten Veranlassung gegeben. Hier ist zuerst Joachimsthal zu nennen, welcher 1846 in einer sehr kurzen Abhandlung „Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium" (Journal f. Math. t. XXX p. 347—350) den Satz aufstellte:

„Si quaedam linea curvaturae plana est, omnia plana superficiem in lineae curvaturae punctis tangentia cum plano hujus curvae eundem angulum formant."

Von diesem sehr oft citirten Satz hat Hr. Liouville im „Journal de Mathém." (Année 1846) T. XI, p. 87—89 unter dem Titel: „Sur un théorème de Mr. Joachimsthal relatif aux lignes de courbure planes" bald nach seinem Bekanntwerden einen geometrischen Beweis geliefert. In der oben erwähnten Abhandlung hat Joachimsthal am Ende derselben, ohne Herleitung, Formeln aufgestellt, welche sich auf Flächen beziehn, mit einem System planer Krümmungslinien, dessen Ebenen durch eine feste Gerade gehn. Sowohl auf diese Flächen, wie auf die Flächen von Monge ist Joachimsthal in einem „Mémoire sur les surfaces courbes" ausführlicher zurückgekommen, welches in dem Programme du Collége R. Français, Berlin 1848, enthalten ist. Zu erwähnen ist

*) Die erste Notiz über Krümmungslinien findet sich in einer Abhandlung von Monge über Anwendung der Geometrie auf Erdarbeiten unter dem Titel »Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais« enthalten in der Histoire de l'Académie. Année MDCCLXXXI (Paris 1784). In Nr. XXI dieser Abhandlung sind auf p. 687 die Krümmungslinien »lignes de la plus grande et de la moindre courbure« genannt. Der im Text erwähnte §. XVII bildet p. 139—161 der von Hachette 1807 besorgten dritten Auflage der Application, welches Werk bekanntlich die 1795 erschienenen »Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie« zur Grundlage hat.

noch, dass im „Journ. de Math." (Année 1848) T. XIII p. 73—79 „Démonstration géométrique de quelques théorèmes à la théorie des surfaces" Hr. Bertrand die Flächen von Monge einer rein geometrischen Betrachtung unterworfen hat.

Der oben erwähnte Satz von Joachimsthal lässt sich als specieller Fall eines allgemeinern Satzes auffassen, den Hr. Bonnet im „Journal de l'École Polytechnique" Cahier 32, Tome XIX (Paris 1848) auf p. 17 angemerkt hat: Schneiden sich zwei Flächen längs einer Curve unter einem constanten Winkel, ist die Curve eine Krümmungslinie der einen Fläche, so ist sie auch eine Krümmungslinie für die andere Fläche. Man findet diesen Satz unter N. 275 auf p. 215 angeführt in: „A treatise on the analytic geometry of three dimensions" by G. Salmon (London 1862). Die dort gegebene Beweisführung gestattet unmittelbar eine leichte Variation des Satzes von Hn. Bonnet. Schneiden sich zwei Flächen gegenseitig in einer Krümmungslinie, so schliessen die Normalen zu beiden Flächen in einem Punkte der Schnittcurve einen constanten Winkel ein. Da in einer Ebene und auf einer Kugelfläche jede Curve als Krümmungslinie angesehn werden kann, so erhält man aus der vorhergehenden Bemerkung unmittelbar den Satz von Joachimsthal, sowie sein Analogon für sphärische Krümmungslinien.

Die vereinzelten Resultate von Monge und Joachimsthal über plane Krümmungslinien scheinen den Anstoss zu allgemeinen Untersuchungen gegeben zu haben, welche Hr. Bonnet 1853 der Pariser Academie mittheilte*). Diese Untersuchungen hat der ausgezeichnete

---

*) Die Mittheilungen von Hn. Bonnet sind in den »Comptes-Rendus« enthalten, nämlich: T. 36 (1853)

»Sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.« (p. 81—84).

»Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes.« (219—222).

»Mémoire sur les surfaces à lignes de courbure sphériques.« (291—294).

»Deuxième note sur les surfaces à lignes de courbure sphériques.« (389—391).

»Troisième note sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques.« (585—587).

Geometer in einer grösseren Arbeit vereinigt, welche im „Journal de l'École Polytechnique" (Cahier 35, T. XX Paris 1853) u. d. T. „Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques" enthalten ist. Die sehr umfangreiche, 190 Quartseiten umfassende, Abhandlung zerfällt in vier Abtheilungen, nämlich:

„Première Partie. Sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes." (p. 119—181).

„Deuxième Partie. Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures seulement sont planes." (p. 182—234).

„Troisième Partie. Des surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système et sphériques dans l'autre, ou bien sphériques dans les deux systèmes." (p. 235—277).

„Quatrième Partie. Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont sphériques." (p. 277—306).

Die drei ersten Abtheilungen sind vollständig; die zweite Abtheilung enthält die Lösung des allgemeinen Problems, die Flächen analytisch zu definiren, für welche nur ein System von Krümmungslinien plan ist, eine Lösung, durch welche die analytische Geometrie der Flächen eine wesentliche Bereicherung erfahren hat. Die vierte Abtheilung beschränkt sich auf die beiden besonderen Fälle, dass die osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien entweder durch einen festen Punkt gehn, oder die Fläche der Krümmungslinien orthogonal schneiden. Der bei allen Untersuchungen von Hn. Bonnet eingeschlagene Weg besteht in der Integration partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach der von Monge gegebenen Methode.

Gleich nach der ersten Mittheilung des Hn. Bonnet an die Pa-

»Note sur les développées des surfaces à lignes de première courbure planes.« (1046—1050).

»Sur les surfaces qui sont coupée à angle droit par une suite de sphères variables suivant une loi quelconque.« (1133—1135).

Eine kurze Mittheilung in T. 42 (1856) »Sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes« (p. 1067—1070), bezieht sich auf imaginäre Flächen.

riser Academie wurde der von ihm behandelte Gegenstand von einem anderen hervorragenden Mathematiker, Hn. Serret, aufgenommen und in einer Reihe bemerkenswerther Aufsätze behandelt*). Vereinigt und weiter ausgeführt sind diese Aufsätze im „Journal de Mathématiques." (T. XVIII. Année 1853. p. 113—162) erschienen u. d. T. Serret: „Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques." Es werden in der Abhandlung die Flächen betrachtet, für welche beide Systeme von Krümmungslinien plan sind; das eine System plan, das andere sphärisch ist; oder endlich beide Systeme sphärisch sind. Den Ausgangspunkt bildet das Theorem von Joachimsthal, zu welchem auf p. 128 das analoge Theorem für sphärische Krümmungslinien aufgestellt ist. Mit Hülfe dieser Sätze treten nur partielle Differentialgleichungen erster Ordnung auf, wodurch die analytische Discussion sich vereinfacht.

Im „Journal für die reine und angewandte Mathematik" Band 54 (Berlin 1857) hat Joachimsthal in einem kurzen Aufsatz „Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes" (p. 181—192)

---

*) »Comptes Rendus.« T. 36. (1853).

»Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes.« (p. 200—204).

»Sur les surfaces à lignes de courbure sphériques.« (328—334).

»Sur les surfaces dont les lignes de courbure de chaque système sont planes ou sphériques.« (391—393).

»Observations sur deux Notes de M. Bonnet relatives aux surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques.« (432—436).

Spätere Publicationen, ebenfalls in den C.-R., von Hn. Serret sind folgende

T. 41 (1855). »Sur les trajectoires d'un plan mobile« (1253—1256).

T. 42 (1856). »Sur les trajectoires orthogonales d'une sphère mobile.« (105—108).

»Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont sphériques.« (109—110) und (190—194).

»Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes« (194).

Durch eine willkührliche Annahme auf p. 192 im T. 42 in Beziehung auf eine Integrationsconstante sind die Finalresultate der letztgenannten Aufsätze absolut unvollständig, wie schon in den »Nachrichten v. d. K. G. d. W.« aus dem Jahre 1872 (p. 18) bemerkt worden ist. Die richtigen Gleichungen finden sich l. c. p. 80—100.

die Untersuchungen von Hn. Bonnet durch rein geometrische Betrachtungen sehr zu reduciren gesucht. Es scheint selbstverständlich, dass, bei der ungemeinen Kürze der Abhandlung, von einer sehr eingehenden Behandlung des Gegenstandes Abstand genommen ist.

Die bisher aufgezählten Arbeiten sind ihrer Art nach fundamentaler Natur, sie enthalten die ersten Untersuchungen über Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien, wobei die mehr oder minder einfache angewandte Methode nicht in's Gewicht fällt. Bei einer neuen Bearbeitung schien es dem Verfasser geeignet zu sein, von Principien auszugehn, welche wesentlich auf die Elemente basirt sind, die bei Untersuchungen von krummen Linien auf Flächen hervortreten. Es ergeben sich dann von selbst die Sätze, welche für plane und sphärische Krümmungslinien characteristisch sind. An Stelle von partiellen Differentialgleichungen treten gewöhnliche Differentialgleichungen, wobei die verschiedenen Formen einer genauen Betrachtung unterworfen worden sind. Als Vorarbeiten zu der vorliegenden Abhandlung sind einige Aufsätze des Verfassers in der „Zeitschrift für Mathematik" zu betrachten. (Jahrgang 1862, p. 365—384, J. 1863, p. 241—263, J. 1864, p. 111—125).

Die in I und II enthaltenen Formeln sind nur der grösseren Deutlichkeit wegen für die übrigen Untersuchungen mit angeführt. Da sich die Nothwendigkeit herausstellte, sehr häufig auf diese Formeln verweisen zu müssen, so schien es angemessen, die in II enthaltenen Gleichungen, ohne weiteren Beweis anzuführen, wie dieses für einen Theil derselben schon früher in den „Nachrichten" a. d. J. 1867 geschehn ist.

I.

Zusammenstellung einiger Formeln aus der Theorie der Curven doppelter Krümmung.

Die Untersuchung von Curven auf krummen Flächen gewinnt an Einfachheit und methodischer Uebersicht, wenn die Elemente in Betracht gezogen werden, welche bei der allgemeinen Betrachtung der Curven doppelter Krümmung in den Vordergrund treten. Sowohl, was die Anwendung der allgemeinen Principien auf Krümmungslinien betrifft, wie die Bezeichnungen, welche im Folgenden festgehalten werden sollen, lassen es zweckmässig erscheinen, ein kurze Zusammenstellung der Formeln zu geben, welche bei den späteren Untersuchungen zur Verwendung kommen.

Es seien ξ, η, ζ die orthogonalen Coordinaten eines Punktes Π einer Curve doppelter Krümmung. Bezeichnet man durch ds das Bogenelement der Curve, so ist:

1) $$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Es werden ξ, η, ζ als Funktionen einer Variabeln angesehn, in Beziehung auf welche die nachfolgenden Differentialformeln gelten. Mittelst der Gleichung 1) kann man die in Rede stehende Variabele sich durch s ausgedrückt denken, so dass ξ, η, ζ von s abhängig sind. Im Punkte Π existiren bekanntlich drei gegenseitig zu einander orthogonale Richtungen, die Tangente, die Hauptnormale und die, von Saint-Venant benannte, Binormale. In Beziehung auf ein festes orthogonales Coordinatensystem, sei die Tangente durch die Winkel α, β, γ; die Hauptnormale durch die Winkel λ, μ, ν; endlich die Binormale durch die Winkel l, m, n bestimmt. Es sei $d\varepsilon$ der Contingenzwinkel, d. i. der Winkel, welchen zwei successive Normalebenen der Curve einschliessen, durch $d\omega$ werde der Torsionswinkel der Curve bezeichnet, d. i. der Winkel, den zwei successive osculatorische Ebenen bilden. Diesen Winkeln entsprechen im Punkte II der Curve der Krümmungsradius ϱ und der Torsionsradius r mittelst der Gleichungen:

$$2)\qquad d\varepsilon = \frac{ds}{\varrho},\ d\omega = \frac{ds}{r}.$$

Mit Rücksicht auf die gegebenen Bezeichnungen finden nachstehende Differentialformeln statt, welche im Folgenden, zur Vereinfachung der analytischen Rechnungen, mehrfach gebraucht werden.

$$3)\qquad d\xi = \cos\alpha\, ds,\ d\eta = \cos\beta\, ds,\ d\zeta = \cos\gamma\, ds.$$

$$4)\ \begin{cases} d\cos\alpha = \cos\lambda\dfrac{ds}{\varrho}, \\ d\cos\beta = \cos\mu\dfrac{ds}{\varrho}, \\ d\cos\gamma = \cos\nu\dfrac{ds}{\varrho}, \end{cases} \qquad 5)\ \begin{cases} d\cos l = \cos\lambda\dfrac{ds}{r}, \\ d\cos m = \cos\mu\dfrac{ds}{r}, \\ d\cos n = \cos\nu\dfrac{ds}{r}. \end{cases}$$

$$6)\qquad \begin{cases} d\cos\lambda = -\cos\alpha\dfrac{ds}{\varrho} - \cos l\dfrac{ds}{r}, \\ d\cos\mu = -\cos\beta\dfrac{ds}{\varrho} - \cos m\dfrac{ds}{r}, \\ d\cos\nu = -\cos\gamma\dfrac{ds}{\varrho} - \cos n\dfrac{ds}{r}. \end{cases}$$

Nimmt man s als unabhängige Variabele, so ist der Torsionsradius r durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\xi}{ds}, & \dfrac{d\eta}{ds}, & \dfrac{d\zeta}{ds} \\ \dfrac{d^2\xi}{ds^2}, & \dfrac{d^2\eta}{ds^2}, & \dfrac{d^2\zeta}{ds^2} \\ \dfrac{d^3\xi}{ds^3}, & \dfrac{d^3\eta}{ds^3}, & \dfrac{d^3\zeta}{ds^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{r\varrho^2}$$

bestimmt. Diese Gleichung lässt sich wegen der Gleichungen 3) bis 6) auf folgende Form bringen:

$$7)\qquad \begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \\ \cos l, & \cos m, & \cos n \end{vmatrix} = -1.$$

Mit Hülfe der Gleichung 7) und der beiden folgenden:

$$\cos l\cos\alpha + \cos m\cos\beta + \cos n\cos\gamma = 0,\ \cos l\cos\lambda + \cos m\cos\mu + \cos n\cos\nu = 0,$$

lassen sich die Werthe von $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ auf folgende Art darstellen:

$$8)\qquad \begin{cases} \cos l = \cos\gamma\cos\mu - \cos\beta\cos\nu, \\ \cos m = \cos\alpha\cos\nu - \cos\gamma\cos\lambda, \\ \cos n = \cos\beta\cos\lambda - \cos\alpha\cos\mu. \end{cases}$$

Die Gleichungen 8) haben für die folgenden Entwicklungen den besonderen Zweck, Weitläufigkeiten in der Rechnung zu vermeiden, welche sich auf andere Weise nicht umgehn lassen.

Dem Punkte Π entspricht eine Kugelfläche, welche mit der Curve vier successive Punkte gemeinsam hat und aus diesem Grunde die osculatorische Kugelfläche der Curve im Punkte Π genannt wird. Die Coordinaten des Mittelpunkts dieser Kugelfläche seien ξ^*, η^*, ζ^*, ferner R ihr Radius. Die bemerkten Quantitäten sind dann durch folgende Gleichungen definirt:

$$9)\qquad \begin{cases} \xi^* = \xi + \varrho\cos\lambda - r\dfrac{d\varrho}{ds}\cos l, \\[2ex] \eta^* = \eta + \varrho\cos\mu - r\dfrac{d\varrho}{ds}\cos m, \\[2ex] \zeta^* = \zeta + \varrho\cos\nu - r\dfrac{d\varrho}{ds}\cos n, \end{cases}$$

$$10)\qquad R^2 = \varrho^2 + \left(r\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

Für den Fall, dass eine Curve auf einer Kugelfläche liegt, d. h. sphärisch ist, fallen die Mittelpunkte aller osculatorischen Kugelflächen zusammen. In den Gleichungen 9) und 10) sind dann ξ^*, η^*, ζ^* und

R constant. Die Bedingung eines constanten Radius R ist allein hinreichend, da, in Folge davon, dann auch ξ^*, η^*, ζ^* constant sind, wie unmittelbar durch Differentiation folgt.

II.

Fundamentale Gleichungen für Krümmungslinien auf Flächen.

Auf einer Fläche lässt sich die Lage eines Punktes mittelst zweier Curvensysteme bestimmen, welche Systeme selbst auf der Fläche liegen. Es geschieht dieses bekanntlich analytisch dadurch, dass die Coordinaten x, y, z des Punktes als Functionen zweier Variabeln u und v angesehn werden. Das Coordinatensystem auf der Fläche, welches bei der vorliegenden Untersuchung in Betracht kommt, besteht aus den Krümmungslinien und ist analytisch durch die beiden folgenden Gleichungen definirt:

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}=0, \quad \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du\,dv}, & \frac{d^2y}{du\,dv}, & \frac{d^2z}{du\,dv} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix}=0.$$

Des besseren Verständnisses halber sollen einige fundamentale Gleichungen aus der Theorie der Flächen, soweit sich dieselben auf Krümmungslinien beziehn, angemerkt werden. Hierzu sind noch einige Gleichungen hinzugefügt, welche Anwendungen der in I enthaltenen Formeln auf Krümmungslinien enthalten. Es sind so analytisch-geometrische Materialien vereinigt, welche bei andern Untersuchungen über Krümmungslinien von Nutzen sein können. Giebt man v einen bestimmten Werth und lässt u allein variiren, so entspricht dieser Annahme eine Krümmungslinie, welche der Einfachheit halber die Krümmungslinie (u) genannt werde, analog entspricht dem allein variabeln v die Krümmungslinie (v).

Im Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, bilde die Normale zu Fläche die Winkel a, b, c mit den Coordinatenaxen. In dem bemerkten Punkte schneiden sich die Curven (u) und (v) orthogonal, die Tangente zur Curve (u) sei durch die Winkel a', b', c' bestimmt, die Tangente zur Curve (v) bilde die Winkel a'', b'', c'' mit den Coordinatenaxen. Durch die Normale und die Tangente zur Curve (u) ist im Punkte (x, y, z) ein Normalschnitt bestimmt, dessen osculatorischer Radius in diesem Punkte r' sei. Analoge Bedeutung habe r'' für die Curve (v). Es sind dann r' und r'' die Hauptkrümmungshalbmesser. Zu dem Vorhergehenden treten noch die folgenden Bezeichnungen:

$$1)\qquad E = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2, \quad G = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2.$$

Mit Rücksicht auf die angegebenen Bezeichnungen hat man folgende fundamentale Gleichungen, wenn u und v die Argumente der Krümmungslinien sind:

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = \sqrt{E}\cos a', \\[2ex] \dfrac{dy}{du} = \sqrt{E}\cos b', \\[2ex] \dfrac{dz}{du} = \sqrt{E}\cos c'. \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dv} = \sqrt{G}\cos a'', \\[2ex] \dfrac{dy}{dv} = \sqrt{G}\cos b'', \\[2ex] \dfrac{dz}{dv} = \sqrt{G}\cos c''. \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} \dfrac{d\cos a}{du} = -\dfrac{\sqrt{E}}{r'}\cos a', \\[2ex] \dfrac{d\cos b}{du} = -\dfrac{\sqrt{E}}{r'}\cos b', \\[2ex] \dfrac{d\cos c}{du} = -\dfrac{\sqrt{E}}{r'}\cos c', \end{cases} \qquad 5)\ \begin{cases} \dfrac{d\cos a}{dv} = -\dfrac{\sqrt{G}}{r''}\cos a'', \\[2ex] \dfrac{d\cos b}{dv} = -\dfrac{\sqrt{G}}{r''}\cos b'', \\[2ex] \dfrac{d\cos c}{dv} = -\dfrac{\sqrt{G}}{r''}\cos c''. \end{cases}$$

$$6)\begin{cases}\dfrac{d\cos a'}{du}=\dfrac{\sqrt{E}}{r'}\cos a-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{d\sqrt{E}}{dv}\cos a'',\\[2ex] \dfrac{d\cos b'}{du}=\dfrac{\sqrt{E}}{r'}\cos b-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{d\sqrt{E}}{dv}\cos b'',\\[2ex] \dfrac{d\cos c'}{du}=\dfrac{\sqrt{E}}{r'}\cos c-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{d\sqrt{E}}{dv}\cos c''.\end{cases}\quad 7)\begin{cases}\dfrac{d\cos a''}{du}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{d\sqrt{E}}{dv}\cos a',\\[2ex] \dfrac{d\cos b''}{du}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{d\sqrt{E}}{dv}\cos b',\\[2ex] \dfrac{d\cos c''}{du}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{d\sqrt{E}}{dv}\cos c'.\end{cases}$$

$$8)\begin{cases}\dfrac{d\cos a'}{dv}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{d\sqrt{G}}{du}\cos a'',\\[2ex] \dfrac{d\cos b'}{dv}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{d\sqrt{G}}{du}\cos b'',\\[2ex] \dfrac{d\cos c'}{dv}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{d\sqrt{G}}{du}\cos c''.\end{cases}\quad 9)\begin{cases}\dfrac{d\cos a''}{dv}=\dfrac{\sqrt{G}}{r''}\cos a-\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{d\sqrt{G}}{du}\cos a',\\[2ex] \dfrac{d\cos b''}{dv}=\dfrac{\sqrt{G}}{r''}\cos b-\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{d\sqrt{G}}{du}\cos b',\\[2ex] \dfrac{d\cos c''}{dv}=\dfrac{\sqrt{G}}{r''}\cos c-\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{d\sqrt{G}}{du}\cos c'.\end{cases}$$

Die Quantitäten E, G, r' und r'' sind durch die folgenden drei Gleichungen verbunden:

$$10)\qquad \frac{d\dfrac{\sqrt{E}}{r'}}{dv}=\frac{1}{r''}\frac{d\sqrt{E}}{dv},\quad \frac{d\dfrac{\sqrt{G}}{r''}}{du}=\frac{1}{r'}\frac{d\sqrt{G}}{du},$$

$$11)\qquad \frac{d\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{d\sqrt{E}}{dv}\right)}{dv}+\frac{d\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{d\sqrt{G}}{du}\right)}{du}+\frac{\sqrt{EG}}{r'r''}=0.$$

Wegen der Gleichungen 10) lässt sich die Gleichung 11) auch wie nachstehend darstellen:

$$12)\qquad \frac{d\left(\dfrac{r''}{\sqrt{G}}\dfrac{d\frac{\sqrt{E}}{r'}}{dv}\right)}{dv}+\frac{d\left(\dfrac{r'}{\sqrt{E}}\dfrac{d\frac{\sqrt{G}}{r''}}{du}\right)}{du}+\frac{\sqrt{EG}}{r'r''}=0.$$

Es muss bemerkt werden, dass für die Gleichungen 2) bis 9) die Relation

13) $$1 = \begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ \cos a', & \cos b', & \cos c' \\ \cos a'', & \cos b'', & \cos c'' \end{vmatrix}$$

zwischen den Cosinus der Winkel stattfindet, durch welche die Lage der Normale und der Tangenten der beiden Hauptschnitte im Punkte (x, y, z) bestimmt ist.

Um die Gleichungen von I in übersichtlicher Weise auf die Curven (u) und (v) anzuwenden, sollen für $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$, alle in I vorkommenden Quantitäten, soweit sich dieselben auf die Curve (u) beziehn, mit dem unteren Index 1, für die Curve (v) mit dem unteren Index 2 versehn werden.

Krümmungslinie (u).

In diesem Falle ist $ds_1 = \sqrt{E}\,du$. Man setze zur Vereinfachung:

14) $$\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{d\sqrt{E}}{dv} = H_1.$$

Es ist dann:

15) $$\cos\alpha_1 = \cos a', \ \cos\beta_1 = \cos b', \ \cos\gamma_1 = \cos c'.$$

Nimmt man:

16) $$\frac{1}{\varrho_1} = \sqrt{\frac{1}{r'^2} + H_1^{\,2}},$$

so ist die Richtung des Krümmungsradius durch folgende Gleichungen bestimmt:

17) $$\frac{\cos\lambda_1}{\varrho_1} = \frac{\cos a}{r'} - H_1 \cos a'', \quad \frac{\cos\mu_1}{\varrho_1} = \frac{\cos b}{r'} - H_1 \cos b'',$$
$$\frac{\cos\nu_1}{\varrho_1} = \frac{\cos c}{r'} - H_1 \cos c''.$$

In Folge der ersten Gleichung 8) von I, ist:

$$\cos l_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\lambda_1, & \cos\mu_1, & \cos\nu_1 \\ \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \end{vmatrix}.$$

Man multiplicire diese Gleichung mit der Gleichung 13), substituire für $\cos\alpha_1$, $\cos\lambda_1$ etc. ihre Werthe aus 15) und 17). Es ergiebt sich so der Werth von $\cos l_1$. Auf diese und ähnliche Weise ergeben sich zur Bestimmung der Richtung der Binormale folgende Gleichungen:

18)
$$\frac{\cos l_1}{\varrho_1} = H_1 \cos a + \frac{\cos a''}{r'}, \quad \frac{\cos m_1}{\varrho_1} = H_1 \cos b + \frac{\cos b''}{r'},$$
$$\frac{\cos n_1}{\varrho_1} = H_1 \cos c + \frac{\cos c''}{r'}.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich durch Differentiation nach u einfach der Torsionsradius r_1 bestimmen. Man substituire aus 16) den Werth von ϱ_1 und berücksichtige:

$$\frac{d\cos l_1}{du} = \frac{d\cos l_1}{ds_1}\frac{ds_1}{du} = \frac{\cos\lambda_1}{r_1}\sqrt{E}.$$

Wegen der ersten Gleichung 17) lässt sich durch $\cos\lambda_1$ dividiren, es bleibt:

19)
$$\frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{\frac{1}{r'}\frac{dH_1}{du} - H_1 \frac{d\frac{1}{r'}}{du}}{\frac{1}{r'^2} + H_1^2} = \frac{d \operatorname{arctang} r' H_1}{du}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 15) bis 19) ist der Mittelpunkt und der Radius der osculatorischen Kugelfläche durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$
20)\quad \begin{cases}
(\xi_1^* - x)\left(\frac{1}{r'}\frac{dH_1}{du} - H_1\, d\frac{\frac{1}{r'}}{du}\right) = \cos a \frac{dH_1}{du} + \cos a''\, d\frac{\frac{1}{r'}}{du}, \\
(\eta_1^* - y)\left(\frac{1}{r'}\frac{dH_1}{du} - H_1\, d\frac{\frac{1}{r'}}{du}\right) = \cos b \frac{dH_1}{du} + \cos b''\, d\frac{\frac{1}{r'}}{du}, \\
(\zeta_1^* - z)\left(\frac{1}{r'}\frac{dH_1}{du} - H_1\, d\frac{\frac{1}{r'}}{du}\right) = \cos c \frac{dH_1}{du} + \cos c''\, d\frac{\frac{1}{r'}}{du}.
\end{cases}
$$

$$
21)\quad R^2_1\left(\frac{1}{r'}\frac{dH_1}{du} - H_1\, d\frac{\frac{1}{r'}}{du}\right)^2 = \left(\frac{dH_1}{du}\right)^2 + \left(d\frac{\frac{1}{r'}}{du}\right)^2.
$$

Es hat H_1 folgende geometrische Bedeutung. Wird die developpabele Fläche, gebildet aus den berührenden Ebenen längs der Krümmungslinie (u), in einer Ebene ausgebreitet, so ist $\frac{1}{H_1}$ der Krümmungsradius der planen Curve in dem Punkte, welcher dem Punkte (x, y, z) der Krümmungslinie entspricht. Die Gleichungen 17) und 18) lassen sich noch etwas vereinfachen durch Einführung des Winkels δ_1, welchen die Binormale der Curve mit der Normalen zur Fläche im Punkte (x, y, z) bildet. Da $\cos\delta_1 = \cos a \cos l_1 + \cos b \cos m_1 + \cos c \cos n_1$, so geben die Gleichungen 18) $\cos\delta_1 = \varrho_1 H_1$ oder, nach 16)

$$
r' H_1 = \cot\delta_1 \text{ und } \varrho_1 H_1 = \cos\delta_1,\ \frac{1}{r'} = \frac{\sin\delta_1}{\varrho_1}.
$$

Die Gleichung 19) nimmt dann die Form:

$$
22)\quad \frac{\sqrt{E}}{r_1} = -\frac{d\delta_1}{du}
$$

an. Sowohl um die Bezeichnungen nicht zu vermehren, wie um die Einfachheit der Formeln zu wahren, soll der Winkel δ_1 nicht weiter in Betracht gezogen werden. Die Einführung dieses Winkels vereinfacht nur die Gleichungen 17) und 18), nicht aber die Gleichungen 20).

Da für die Krümmungslinie (v) die aufzustellenden Elemente durch ganz analoge Rechnungen zu bestimmen sind wie in dem Falle, dass u allein variirt, wird es genügen, die entsprechenden Gleichungen ohne weitere Deduction anzumerken. Es ist selbstredend, dass die Gleichung 13) und die Gleichungen 8) von I auf dieselbe Art zur Verwendung gekommen sind, wie für die Curve (u).

Krümmungslinie (v).

Für den Bogen s_2 besteht die Gleichung $ds_2 = \sqrt{G}dv$. Zur Abkürzung werde

23) $$\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du} = H_2$$

gesetzt. Mit Rücksicht hierauf hat man folgende Gleichungen:

24) $$\cos\alpha_2 = \cos a'',\ \cos\beta_2 = \cos b'',\ \cos\gamma_2 = \cos c''.$$

25) $$\frac{1}{\varrho_2} = \sqrt{\frac{1}{r''^2}+H_2^2}$$

26) $$\frac{\cos\lambda_2}{\varrho_2} = \frac{\cos a}{r''} - H_2\cos a',\ \frac{\cos\mu_2}{\varrho_2} = \frac{\cos b}{r''} - H_2\cos b',\ \frac{\cos\nu_2}{\varrho_2} = \frac{\cos c}{r''} - H_2\cos c'.$$

27) $$\frac{\cos l_2}{\varrho_2} = -H_2\cos a - \frac{\cos a'}{r''},\quad \frac{\cos m_2}{\varrho_2} = -H_2\cos b - \frac{\cos b'}{r''},$$
$$\frac{\cos n_2}{\varrho_2} = -H_2\cos c - \frac{\cos c'}{r''}.$$

28) $$\frac{\sqrt{G}}{r_2} = -\frac{\frac{1}{r''}\frac{dH_2}{dv} - H_2\frac{d\frac{1}{r''}}{dv}}{\frac{1}{r''^2}+H_2{}^2} = -\frac{d\,\text{arctang}\, r''H_2}{dv}.$$

$$29)\quad \begin{cases} (\xi_2^* - x)\left(\frac{1}{r''}\frac{dH_2}{dv} - H_2\, d\frac{\frac{1}{r''}}{dv}\right) = \cos a \frac{dH_2}{dv} + \cos a''\, d\frac{\frac{1}{r''}}{dv}, \\ (\eta_2^* - y)\left(\frac{1}{r''}\frac{dH_2}{dv} - H_2\, d\frac{\frac{1}{r''}}{dv}\right) = \cos b \frac{dH_2}{dv} + \cos b''\, d\frac{\frac{1}{r''}}{dv}, \\ (\zeta_2^* - z)\left(\frac{1}{r''}\frac{dH_2}{dv} - H_2\, d\frac{\frac{1}{r''}}{dv}\right) = \cos c \frac{dH_2}{dv} + \cos c''\, d\frac{\frac{1}{r''}}{dv}. \end{cases}$$

$$30)\quad R_2^2\left(\frac{1}{r''}\frac{dH_2}{dv} - H_2\, d\frac{\frac{1}{r''}}{dv}\right)^2 = \left(\frac{dH_2}{dv}\right)^2 + \left(d\frac{\frac{1}{r''}}{dv}\right)^2.$$

Bis auf die Vorzeichen, hervorgerufen durch die Gleichung 13), lassen sich die Gleichungen für die Krümmungslinie (v) aus den entsprechenden Gleichungen für die Curve (u) herleiten, nämlich durch Vertauschung von u mit v, wodurch E, G und r' respective in G, E und r'' übergehn.

III.

Bemerkungen über plane und sphärische Krümmungslinien.

Ist der gemeinsame Durchschnitt zweier Flächen auf jeder derselben eine Krümmungslinie, so schliessen die Normalen zu beiden Flächen in jedem Punkte der Schnittcurve immer denselben Winkel ein. Stellt man diesen Satz zusammen mit der Bemerkung, dass in der Ebene und auf der Kugelfläche jede Curve als Krümmungslinie angesehn werden kann, so folgt das von Joachimsthal gefundene Theorem und der etwas allgemeinere Satz betreffend sphärische Krümmungslinien. Ist eine Krümmungslinie sphärisch, so schneidet ihre osculatorische Kugelfläche die Fläche, welche die Krümmungslinie enthält, unter einem constanten Winkel. Geht die Kugelfläche in die Ebene über, so folgt der Satz von Joachimsthal. Die in II gegebenen Entwicklungen gestatten es das bemerkte Theorem analytisch zu verwerthen. Es handelt sich hierbei weniger um eine directe Anwendung des Theorems, als mit seiner Hülfe andere invariabele Grössen längs einer Krümmungslinie aufzustellen. Für eine plane Krümmungslinie sind diese invariabeln Quantitäten die Winkel, welche eine Normale zu ihrer Ebene mit den Coordinatenaxen bildet. Für eine sphärische Krümmungslinie sind Radius und Mittelpunkt der osculatorischen Kugelfläche invariabel.

Ist die Krümmungslinie (v) sphärisch, also der Radius ihrer osculatorischen Kugelfläche constant, oder genauer gesagt, von v unabhängig, so ist in der Gleichung 30) von II der Radius R_2 nur von u abhängig. Ist σ nur von u abhängig, so folgt durch Integration der bemerkten Gleichung:

$$1)\qquad \frac{1}{R_2} = \frac{\cos\sigma}{r''} + \sin\sigma\, H_2 .$$

Mittelst dieser Gleichung nehmen die Gleichungen 29) von II folgende Formen an:

$$2)\qquad \begin{cases} \xi_2^* = x + R_2(\cos a\cos\sigma - \cos a'\sin\sigma), \\ \eta_2^* = y + R_2(\cos b\cos\sigma - \cos b'\sin\sigma), \\ \zeta_2^* = z + R_2(\cos c\cos\sigma - \cos c'\sin\sigma). \end{cases}$$

Substituirt man in 1) für H_2 seinen Werth aus II 23), so folgt:

$$3)\qquad \frac{1}{R_2} = \frac{\cos\sigma}{r''} + \frac{\sin\sigma}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

Multiplicirt man mit $\sqrt{G}$, so lässt sich die vorstehende Gleichung wegen der Gleichungen II 10) auch auf folgende Form bringen:

$$4)\qquad \frac{\sqrt{G}}{R_2} = \cos\sigma\frac{\sqrt{G}}{r''} + \sin\sigma\frac{r'}{\sqrt{E}}\frac{d\frac{\sqrt{G}}{r''}}{du}.$$

Mittelst der Gleichung 3), der Gleichungen II 5) und II 8) ergiebt sich leicht, dass die linken Seiten der Gleichungen 2) von v unabhängig sind, also nur u enthalten können.

In dem Fall, dass die Krümmungslinie plan ist, hat man in der Gleichung 28) von II $r_2 = \infty$ zu nehmen, es ist dann $r'' H_2$ von v unabhängig. Man nehme

$$5) \qquad r'' H_2 = -\cot\sigma,$$

wo σ nur von u abhängt. Die Gleichungen II 27) lassen sich mittelst der Gleichung 5), wenn aus II 25) der Werth von ϱ_2 substituirt wird, auf folgende zweckmässige Formen bringen:

$$6) \qquad \begin{cases} \cos l_2 = \cos a \cos\sigma - \cos a' \sin\sigma, \\ \cos m_2 = \cos b \cos\sigma - \cos b' \sin\sigma, \\ \cos n_2 = \cos c \cos\sigma - \cos c' \sin\sigma. \end{cases}$$

Setzt man in der Gleichung 5) für H_2 wieder seinen Werth aus II 23), so ist:

$$7) \qquad \frac{r''}{\sqrt{EG}} \frac{d\sqrt{G}}{du} = -\cot\sigma,$$

oder auch:

$$8) \qquad \frac{r' r''}{\sqrt{EG}} \frac{d \frac{\sqrt{G}}{r''}}{du} = -\cot\sigma.$$

Die Gleichungen 7) und 8) folgen auch direct aus den Gleichungen 3) und 4), wenn $R_2 = \infty$ genommen wird. Aus den Gleichungen 2) und 6) fliessen unmittelbar die am Eingang von III bemerkten Theoreme.

Für die Krümmungslinie (u) ergeben sich leicht ganz analoge Bedingungen wie die vorhergehenden, wenn die Curve sphärisch oder plan sein soll. Es seien $r, \xi_1^*, \eta_1^*, \zeta_1^*, l_1, m_1, n_1$ nur von v abhängig. Ist die Krümmungslinie (u) sphärisch, so finden folgende Gleichungen statt:

9) $$\frac{1}{R_1} = \frac{\cos\tau}{r'} + \frac{\sin\tau}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{E}}{dv},$$

oder auch:

10) $$\frac{\sqrt{E}}{R_1} = \cos\tau\frac{\sqrt{E}}{r'} + \sin\tau\frac{r''}{\sqrt{G}}d\frac{\frac{\sqrt{E}}{r'}}{dv}.$$

11) $$\begin{cases} \xi_1^* = x + R_1(\cos a\cos\tau - \cos a''\sin\tau), \\ \eta_1^* = y + R_1(\cos b\cos\tau - \cos b''\sin\tau), \\ \zeta_1^* = z + R_1(\cos c\cos\tau - \cos c''\sin\tau). \end{cases}$$

Dem Falle einer planen Krümmungslinie (u) entspricht folgendes System von Gleichungen:

12) $$\frac{r'}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{E}}{dv} = \frac{r'r''}{\sqrt{EG}}d\frac{\frac{\sqrt{E}}{r'}}{dv} = -\cot\tau.$$

13) $$\begin{aligned} \cos l_1 &= -\cos a\cos\tau + \cos a''\sin\tau, \\ \cos m_1 &= -\cos b\cos\tau + \cos b''\sin\tau, \\ \cos n_1 &= -\cos c\cos\tau + \cos c''\sin\tau. \end{aligned}$$

Ist die Krümmungslinie (v) gleichzeitig plan und sphärisch, also ein Kreis, so finden zwei Gleichungen von der Art wie 3) und 7) gleichzeitig statt, nur darf natürlich nicht in beiden Gleichungen derselbe Winkel σ stehn. Ist σ_0 nur von u abhängig, so setze man statt der Gleichung 7):

$$\frac{r''}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du} = -\cot\sigma_0.$$

Aus dieser Gleichung und 3) folgt:

$$r'' = R_2\frac{\sin(\sigma_0 - \sigma)}{\sin\sigma_0},$$

es ist also r'' von v unabhängig. Bekanntlich ist die Fläche in diesem Falle die Enveloppe einer Kugelfläche von variabelm Radius, deren Mittelpunkt eine beliebige Curve doppelter Krümmung beschreibt. Der analytische Beweis mittelst der Gleichungen 3) und 5) von II möge seiner Einfachheit halber hier angemerkt werden. Man setze in den bemerkten Gleichungen $r'' = U$, wo U eine Function von u ist. Die bemerkten Gleichungen geben durch Elimination von $\cos a''$, $\cos b''$, $\cos c''$:

$$\frac{dx}{dv} = -U\frac{d\cos a}{dv},\quad \frac{dy}{dv} = -U\frac{d\cos b}{dv},\quad \frac{dz}{dv} = -U\frac{d\cos c}{dv}.$$

Sind ξ, η, ζ nur von u abhängig, so geben die vorstehenden Gleichungen integrirt:

14) $$x-\xi = -U\cos a,\quad y-\eta = -U\cos b,\quad z-\zeta = -U\cos c.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man weiter:

15) $$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{du} = \dfrac{dx}{du} + U\dfrac{d\cos a}{du} + \dfrac{dU}{du}\cos a, \\[2ex] \dfrac{d\eta}{du} = \dfrac{dy}{du} + U\dfrac{d\cos b}{du} + \dfrac{dU}{du}\cos b, \\[2ex] \dfrac{d\zeta}{du} = \dfrac{dz}{du} + U\dfrac{d\cos c}{du} + \dfrac{dU}{du}\cos c. \end{cases}$$

Die Summe der Quadrate der Gleichungen 14) führt auf:

16) $$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = U^2.$$

Die Gleichungen 14) respective mit den Gleichungen 15) multiplicirt und dann addirt geben:

17) $$(x-\xi)\frac{d\xi}{du} + (y-\eta)\frac{d\eta}{du} + (z-\zeta)\frac{d\zeta}{du} = -U\frac{dU}{du}.$$

Die Verbindung der Gleichungen 16) und 17) führt unmittelbar auf die obige Behauptung. Wenn auch die Enveloppe einer Kugelfläche nur einen besondern Fall der Flächen bildet, für welche ein System von Krümmungslinien plan ist, so bietet die Zusammenstellung der hierhin gehörigen Gleichungen ein besonderes Interesse, welches sowohl durch die relative Einfachheit der Formeln, wie durch ihre directe Herleitung begründet ist. In den Gleichungen 16) und 17) sehe man ξ, η, ζ als Coordinaten eines Punktes Π einer Curve doppelter Krümmung an. Es lassen sich dann die Formeln von I, wenn $u = s$ genommen wird, sehr vortheilhaft anwenden. Setzt man $U = S$, und:

$$\text{18)} \qquad \frac{dS}{ds} = \cos\sigma,$$

so werden die Gleichungen 16) und 17):

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2 = S^2,$$
$$(x-\xi)\cos\alpha+(y-\eta)\cos\beta+(z-\zeta)\cos\gamma = -S\cos\sigma.$$

Es lassen sich diese beiden Gleichungen durch die drei folgenden ersetzen, in denen θ eine näher zu bestimmende Function von s und v ist.

$$\text{19)} \qquad \begin{cases} (x-\xi)\cos\alpha+(y-\eta)\cos\beta+(z-\zeta)\cos\gamma = -S\cos\sigma, \\ (x-\xi)\cos\lambda+(y-\eta)\cos\mu+(z-\zeta)\cos\nu = S\sin\sigma\sin\theta, \\ (x-\xi)\cos l+(y-\eta)\cos m+(z-\zeta)\cos n = -S\sin\sigma\cos\theta. \end{cases}$$

Der Annahme s constant entspricht eine ebene Krümmungslinie. Um die Linie zu finden, längs welcher s allein variirt, hat man aus den Gleichungen 19) die Gleichung:

$$\frac{dx}{ds}\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{ds}\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{ds}\frac{dz}{dv} = 0$$

zu bilden, wo v nur in θ vorkommt. Legt man hierbei die Gleichungen von I zu Grunde, so folgt unter Zuziehung der Gleichung 18):

$$\text{20)} \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}+\frac{\cot\sigma}{\varrho}\cos\theta.$$

Die von s unabhängige Quantität, welche die Integration der Gleichung 20) involvirt, ist gleich einer beliebigen Function von v zu setzen. Da diese Differentialgleichung weiter unten behandelt ist, so möge hier ihre Aufstellung genügen.

IV.

Flächen, für welche ein System von Krümmungslinien plan ist.

A. Die Ebenen der planen Krümmungslinien sind den Normalebenen einer Curve doppelter Krümmung parallel.

Die analytische Lösung des Problems: die Flächen mit nur einem System planer Krümmungslinien aufzustellen, lässt sich sehr übersichtlich durchführen, wenn die Ebenen des planen Systems den Normalebenen einer Curve doppelter Krümmung parallel genommen werden. Es kommen dann die I gegebenen Gleichungen zur Anwendung, wodurch die Darstellung sehr an Einfachheit gewinnt. Zu diesem Zweck soll angenommen werden, dass die Linien des Systems (v) plan sind, dass ferner das Argument u des andern Systems von der in I vorkommenden Variabeln s abhängig ist. Allgemeiner kann man u und s als gegenseitig von einander abhängig nehmen, oder als Functionen einer dritten Variabeln, für welche sich von selbst eins der geometrischen Elemente der Curve darbietet, deren Bogen durch s bezeichnet ist.

Nimmt man die Ebenen der planen Krümmungslinien parallel den Normalebenen einer Curve im Raume an, so setze man in den Gleichungen 6) von III $l_2 = \alpha$, $m_2 = \beta$, $n_2 = \gamma$, so dass also:

$$1)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \cos a \cos\sigma - \cos a' \sin\sigma, \\ \cos\beta = \cos b \cos\sigma - \cos b' \sin\sigma, \\ \cos\gamma = \cos c \cos\sigma - \cos c' \sin\sigma. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind also α, β, γ und σ nur von s abhängig. Zu den Gleichungen 1) tritt noch die Gleichung 7) von II, nämlich:

$$2)\qquad \frac{r''}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du} = -\cot\sigma.$$

Die Gleichung 2) ist auch eine unmittelbare Folge der Gleichungen 1), wenn eine derselben nach v differentiirt wird. Multiplicirt man die Gleichungen 1) mit den folgenden:

$$\frac{dx}{dv} = \cos a'', \quad \frac{dy}{dv} = \cos b'', \quad \frac{dz}{dv} = \cos c'',$$

bildet die Summe der so erhaltenen Producte, so folgt:

$$\frac{dx}{dv}\cos\alpha + \frac{dy}{dv}\cos\beta + \frac{dz}{dv}\cos\gamma = 0.$$

Bezeichnet Ω eine Function von s, so giebt die vorstehende Gleichung integrirt:

$$3)\qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \Omega.$$

Auf die Gleichungen 1) und 3) ist die folgende Untersuchung basirt. Es sollen zunächst die Gleichungen 1) genauer untersucht werden. Man differentiire dieselben nach u. Unter Anwendung der Gleichungen 4) von I, sowie der Gleichungen 4), 6) und 10) von II folgt:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\lambda}{\varrho}\dfrac{ds}{du} = -(\cos a\sin\sigma + \cos a'\cos\sigma)\left(\dfrac{\sqrt{E}}{r'} + \dfrac{d\sigma}{du}\right) + \cos a''\sin\sigma\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{d\sqrt{E}}{dv}, \\[2ex] \dfrac{\cos\mu}{\varrho}\dfrac{ds}{du} = -(\cos b\sin\sigma + \cos b'\cos\sigma)\left(\dfrac{\sqrt{E}}{r'} + \dfrac{d\sigma}{du}\right) + \cos b''\sin\sigma\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{d\sqrt{E}}{dv}, \\[2ex] \dfrac{\cos\nu}{\varrho}\dfrac{ds}{du} = -(\cos c\sin\sigma + \cos c'\cos\sigma)\left(\dfrac{\sqrt{E}}{r'} + \dfrac{d\sigma}{du}\right) + \cos c''\sin\sigma\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{d\sqrt{E}}{dv}. \end{cases}$$

Durch Addition der Summe der Quadrate der vorstehenden Gleichungen erhält man:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{du}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{d\sigma}{du}\right)^2 + \left(\frac{\sin\sigma}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}\right)^2.$$

Ist θ ein näher zu bestimmender Winkel, so lässt sich die vorstehende Gleichung durch:

$$5)\qquad \frac{\sqrt{E}}{r'}+\frac{d\sigma}{du}=\frac{\sin\theta}{\varrho}\frac{ds}{du},\quad \frac{\sin\sigma}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}=\frac{\cos\theta}{\varrho}\frac{ds}{du}$$

ersetzen. In Folge der Gleichungen 10) von II lässt sich die zweite Gleichung 5) auf die Form bringen:

$$\sin\sigma\,\frac{d\frac{\sqrt{E}}{r'}}{dv}=\frac{\cos\theta}{\varrho}\frac{ds}{du}\frac{\sqrt{G}}{r''}.$$

Durch Substitution des Werthes von $\frac{\sqrt{E}}{r'}$ aus der ersten Gleichung 5) in die vorstehende Gleichung geht dieselbe über in:

$$6)\qquad \sin\sigma\frac{d\theta}{dv}=\frac{\sqrt{G}}{r''}.$$

Jeder der Annahmen $\sigma=0$ oder $\frac{d\theta}{dv}=0$ entspricht nach 6) $r''=\infty$, d. h. die Fläche ist developpabel. In der folgenden Untersuchung sollen die beiden bemerkten Annahmen ausgeschlossen sein*). In Folge der Gleichungen 5) nehmen die Gleichungen 4) folgende Formen an:

$$7)\qquad \begin{cases}\cos\lambda=-(\cos a\sin\sigma+\cos a'\cos\sigma)\sin\theta+\cos a''\cos\theta,\\ \cos\mu=-(\cos b\sin\sigma+\cos b'\cos\sigma)\sin\theta+\cos b''\cos\theta,\\ \cos\nu=-(\cos c\sin\sigma+\cos c'\cos\sigma)\sin\theta+\cos c''\cos\theta.\end{cases}$$

Aus den Gleichungen 1) und 7) lassen sich $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ unter Zuziehung der Gleichungen I 8) und II 13) herstellen. Das Verfahren ist dasselbe wie dasjenige, mit dessen Hülfe die Gleichungen II 18) abgeleitet sind. Man erhält so:

---

*) Ueber die developpabeln Flächen vergleiche man die letzte Abtheilung E von IV.

$$8)\quad \begin{cases} \cos l \;= (\cos a \sin\sigma + \cos a' \cos\sigma)\cos\theta + \cos a'' \sin\theta, \\ \cos m = (\cos b \sin\sigma + \cos b' \cos\sigma)\cos\theta + \cos b'' \sin\theta, \\ \cos n \;= (\cos c \sin\sigma + \cos c' \cos\sigma)\cos\theta + \cos c'' \sin\theta. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen differentiire man nach u. Hierdurch geht die linke Seite über in $\cos\lambda \frac{1}{r}\frac{ds}{du}$. Wendet man rechts die Gleichungen 5) an, sowie die in II gegebenen Gleichungen 4), 6) und 7), so ergiebt sich leicht, dass in Folge der ersten Gleichung 7) auf der rechten Seite ebenfalls der Factor $\cos\lambda$ vorkommt. Mit Weglassung dieses Factors erhält man zur Bestimmung von θ die Differentialgleichung:

$$8)^* \qquad \frac{d\theta}{du} = \frac{1}{r}\frac{ds}{du} + \frac{\cot\sigma}{\varrho}\cos\theta\frac{ds}{du},$$

oder einfacher, wenn s als unabhängige Variabele genommen wird:

$$9) \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r} + \frac{\cot\sigma}{\varrho}\cos\theta.$$

In der Gleichung 9) sind für eine bestimmte Curve ϱ und r bekannte Functionen von s. Da im allgemeinen Falle ϱ, r und σ arbiträr bleiben, so lässt sich die bemerkte Differentialgleichung nur unter der Annahme allgemein integriren, dass ein particulärer Werth von θ bekannt ist, welcher keine arbiträre Constante enthält.

Aus den Gleichungen 1), 7) und 8) ergiebt sich folgendes System:

$$10)\quad \begin{cases} \cos a = \cos\alpha\cos\sigma + (\cos l\;\cos\theta - \cos\lambda\;\sin\theta)\sin\sigma, \\ \cos b = \cos\beta\cos\sigma + (\cos m\cos\theta - \cos\mu\;\sin\theta)\sin\sigma, \\ \cos c = \cos\gamma\cos\sigma + (\cos n\cos\theta - \cos\nu\;\sin\theta)\sin\sigma. \end{cases}$$

$$11)\quad \begin{cases} \cos a' = -\cos\alpha\sin\sigma + (\cos l\;\cos\theta - \cos\lambda\;\sin\theta)\cos\sigma, \\ \cos b' = -\cos\beta\sin\sigma + (\cos m\cos\theta - \cos\mu\sin\theta)\cos\sigma, \\ \cos c' = -\cos\gamma\sin\sigma + (\cos n\;\cos\theta - \cos\nu\sin\theta)\cos\sigma. \end{cases}$$

$$12)\quad \begin{cases} \cos a'' = \cos l\;\sin\theta + \cos\lambda\cos\theta, \\ \cos b'' = \cos m\sin\theta + \cos\mu\cos\theta, \\ \cos c'' = \cos n\sin\theta + \cos\nu\cos\theta. \end{cases}$$

Nach den Gleichungen II 2) ist:

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{E}\frac{du}{ds}\cos a', \quad \frac{dy}{ds} = \sqrt{E}\frac{du}{ds}\cos b', \quad \frac{dz}{ds} = \sqrt{E}\frac{du}{ds}\cos c'.$$

Führt man ω statt s als unabhängige Variabele ein, wo $ds = r\,d\omega$, so ist auch:

$$\frac{dx}{d\omega} = \sqrt{E}\frac{du}{d\omega}\cos a', \quad \frac{dy}{d\omega} = \sqrt{E}\frac{du}{d\omega}\cos b', \quad \frac{dz}{d\omega} = \sqrt{E}\frac{du}{d\omega}\cos c'.$$

Diese Gleichungen, in Verbindung mit den Gleichungen 1), 7) und 8), geben:

13)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\omega}\cos\alpha + \dfrac{dy}{d\omega}\cos\beta + \dfrac{dz}{d\omega}\cos\gamma = -\sqrt{E}\dfrac{du}{d\omega}\sin\sigma, \\ \dfrac{dx}{d\omega}\cos\lambda + \dfrac{dy}{d\omega}\cos\mu + \dfrac{dz}{d\omega}\cos\nu = -\sqrt{E}\dfrac{du}{d\omega}\cos\sigma\sin\theta, \\ \dfrac{dx}{d\omega}\cos l + \dfrac{dy}{d\omega}\cos m + \dfrac{dz}{d\omega}\cos n = +\sqrt{E}\dfrac{du}{d\omega}\cos\sigma\cos\theta. \end{cases}$$

Was die weitere Darstellung betrifft, so ist in Beziehung auf die Curve, deren Normalebenen die Ebenen der planen Krümmungslinien parallel sind, in Betracht zu ziehn, wann sich die Curve auf eine ebene Curve oder eine Gerade reducirt. Diese beiden Fälle erfordern eine besondere Behandlung, welche bedeutend einfacher wie diejenige des allgemeinen Falles sich gestaltet. Es soll zuerst angenommen werden, dass der Torsionsradius r einen endlichen Werth habe.

In 9) führe man ω statt s mittelst der Gleichung $ds = r\,d\omega$ ein, setze ferner zur Abkürzung:

14)
$$\frac{r\cot\sigma}{\varrho} = p.$$

Die Gleichung zur Bestimmung von θ vereinfacht sich in:

$$15) \qquad \frac{d\theta}{d\omega} = 1 + p\cos\theta.$$

Es sei φ ein particulärer Werth von θ, welcher keine willkührliche Constante enthält. Für φ findet dann die analoge Gleichung wie 15) statt:

$$16) \qquad \frac{d\varphi}{d\omega} = 1 + p\cos\varphi.$$

Werden zur Vereinfachung die Bezeichnungen eingeführt:

$$17) \qquad \int p\sin\varphi\, d\omega = q,\quad M = \int e^{-q} p\cos\varphi\, d\omega,$$

so ist das vollständige Integral der Differentialgleichung 15) durch die Gleichung

$$18) \qquad \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{(V+M)\sin\frac{\varphi}{2} + e^{-q}\cos\frac{\varphi}{2}}{(V+M)\cos\frac{\varphi}{2} - e^{-q}\sin\frac{\varphi}{2}}$$

bestimmt. Es bedeutet hierin V eine beliebige Function von v. Aus den Gleichungen 15) bis 18) ergeben sich die nachstehenden Relationen, welche weiter unten gebraucht werden:

$$19) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin\theta &= \frac{[(V+M^2 - e^{-2q}]\sin\varphi + 2(V+M)e^{-q}\cos\varphi}{(V+M)^2 + e^{-2q}}, \\ \cos\theta &= \frac{[(V+M)^2 - e^{-2q}]\cos\varphi - 2(V+M)e^{-q}\sin\varphi}{(V+M)^2 + e^{-2q}}, \\ 1 - \cos(\theta - \varphi) &= \frac{2e^{-2q}}{(V+M)^2 + e^{-2q}}, \\ \sin(\theta - \varphi) &= \frac{2(V+M)e^{-q}}{(V+M)^2 + e^{-2q}}. \end{aligned} \right.$$

$$20) \qquad -\frac{d\theta}{dV} = [1 - \cos(\theta - \varphi)]e^{q}.$$

$$
21)\quad \begin{cases} \dfrac{d\dfrac{1}{1-\cos(\theta-\varphi)}}{d\omega} = p\,\dfrac{\sin\theta+\sin\varphi}{1-\cos(\theta-\varphi)}, \\[2ex] \dfrac{d\dfrac{\sin\theta-\sin\varphi}{1-\cos(\theta-\varphi)}}{d\omega} = \dfrac{\cos\theta-\cos\varphi}{1-\cos(\theta-\varphi)}, \quad \dfrac{d\dfrac{\cos\theta\, e^{-q}}{1-\cos(\theta-\varphi)}}{d\omega} = \dfrac{-\sin\theta\, e^{-q}}{1-\cos(\theta-\varphi)}. \end{cases}
$$

Die Darstellung der Coordinaten x, y, z eines Punktes einer Fläche mit einem System planer Krümmungslinien als Functionen der Argumente der Krümmungslinien lässt sich durch successive Differentiationen der Gleichung 3) nach u ausführen. An Stelle von u differentiire man nach ω. Die erste Gleichung 13) in Verbindung mit den Gleichungen 2) und 4) von I giebt durch Differentiation der Gleichung 3) in Beziehung auf ω:

$$
22)\qquad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = \frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega} + \frac{\varrho}{r}\sqrt{E}\frac{du}{d\omega}\sin\sigma
$$

Nimmt man zur Vereinfachung:

$$
23)\qquad \frac{\varrho}{r}\sqrt{E}\frac{du}{d\omega}\sin\sigma = T,
$$

so wird die Gleichung 22) einfacher:

$$
24)\qquad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = \frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega} + T.
$$

Diese Gleichung werde wieder nach ω differentiirt mit Rücksicht auf die Gleichungen 3), 13), 23) und I 6). Man erhält so die folgende Gleichung, in welcher p dieselbe Bedeutung wie in 14) hat:

$$
25)\qquad -(x\cos l + y\cos m + z\cos n) = \frac{dT}{d\omega} + Tp\sin\theta + \frac{d\dfrac{\varrho}{r}\dfrac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega} + \frac{r}{\varrho}\,\Omega.
$$

Endlich differentiire man die Gleichung 25) nach ω, setze dann links für $x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu$ seinen Werth aus 24) ein. Man drücke wieder $\sqrt{E}$ nach 23) durch T aus, setze nach 14) $\frac{r\cot\sigma}{\varrho} = p$. Es ergiebt sich so, mit Rücksicht auf die letzte Gleichung 13), zur Bestimmung von T die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$26)\quad d\frac{\frac{dT}{d\omega}+Tp\sin\theta}{d\omega}+T(1+p\cos\theta)+d^2\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega^2}+d\frac{\frac{r}{\varrho}\Omega}{d\omega}+\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}=0.$$

Die Constanten in Beziehung auf ω, welche das Integral dieser Gleichung enthält, sind gleich zwei beliebigen Functionen von v zu setzen. Man nehme zuerst die Differentialgleichung:

$$27)\quad d\frac{\frac{dT_0}{d\omega}+T_0 p\sin\theta}{d\omega}+T_0(1+p\cos\theta)=0.$$

Die Gleichung 15) zeigt unmittelbar, dass $\cos\theta$ ein particuläres Integral von 27) ist.

Das zweite particuläre Integral

$$\cos\theta\int\frac{e^{\int\operatorname{tang}\theta\, d\omega}}{\cos\theta}\,d\omega$$

lässt sich mittelst der Gleichungen 15) bis 19) sehr vereinfachen. Man findet:

$$d\frac{\log\frac{1-\cos(\theta-\varphi)}{\cos\theta}e^q}{d\omega}=\operatorname{tang}\theta,$$

$$d\frac{\frac{\sin\theta-\sin\varphi}{\cos\theta}e^q}{d\omega}=\frac{1-\cos(\theta-\varphi)}{\cos^2\theta}e^q.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lässt sich das zweite particuläre Integral von 27) auf die Form:

$$(\sin\theta-\sin\varphi)e^q$$

bringen. Um die nachfolgenden Rechnungen etwas zu vereinfachen bringe man die Gleichung 26) auf folgende Form, in welcher zur Abkürzung

28) $$T + \frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega} = T_1,$$

und nach 14) $\frac{\varrho}{r}p = \cot\sigma$ gesetzt ist:

29) $$d\frac{\frac{dT_1}{d\omega} + T_1 p \sin\theta}{d\omega} + T_1(1 + p\cos\theta) =$$
$$d\frac{\cot\sigma\sin\theta\frac{d\Omega}{d\omega} - \frac{r}{\varrho}\Omega}{d\omega} + \cot\sigma\cos\theta\frac{d\Omega}{d\omega}.$$

Zu Folge der beiden particulären Integrale ist das allgemeine Integral von 29)

30) $$T_1 = K_1\cos\theta + K_2(\sin\theta - \sin\varphi)e^q.$$

Nach der Methode von Lagrange sind K_1 und K_2 mittelst der folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$\frac{dK_1}{d\omega}\cos\theta + \frac{dK_2}{d\omega}(\sin\theta - \sin\varphi)e^q = 0,$$

31) $$-\frac{dK_1}{d\omega}\sin\theta + \frac{dK_2}{d\omega}(\cos\theta - \cos\varphi)e^q =$$
$$d\frac{\cot\sigma\sin\theta\frac{d\Omega}{d\omega} - \frac{r}{\varrho}\Omega}{d\omega} + \cot\sigma\cos\theta\frac{d\Omega}{d\omega}.$$

Wendet man die Gleichungen 15) bis 19) an, so geben dieselben, unter Zuziehung der integratio per partes:

$$\int d\frac{\cot\sigma\sin\theta\frac{d\Omega}{d\omega}-\frac{r}{\varrho}\Omega}{d\omega}\cdot\frac{\sin\theta-\sin\varphi}{1-\cos(\theta-\varphi)}d\omega=\left[\cot\sigma\sin\theta\frac{d\Omega}{d\omega}-\frac{r}{\varrho}\Omega\right]\frac{\sin\theta-\sin\varphi}{1-\cos(\theta-\varphi)}$$

$$-\int\left[\cot\sigma\sin\theta\frac{d\Omega}{d\omega}-\frac{r}{\varrho}\Omega\right]\frac{\cos\theta-\cos\varphi}{1-\cos(\theta-\varphi)}d\omega.$$

Aus den Gleichungen 31) bilde man den Werth von K_1 und bringe die vorstehende Gleichung zur Anwendung. Bedeutet V_1 eine Function von v, so ist:

$$\begin{aligned}K_1 &= V_1-\left[\cot\sigma\sin\theta\frac{d\Omega}{d\omega}-\frac{r}{\varrho}\Omega\right]\frac{\sin\theta-\sin\varphi}{1-\cos(\theta-\varphi)}\\ &+\int\left[\frac{\cos\varphi-\cos\theta}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{r}{\varrho}\Omega-\cot\sigma\frac{\sin(\theta-\varphi)}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{d\Omega}{d\omega}\right]d\omega.\end{aligned}\tag{32}$$

In dem Integrale rechts wende man auf den zweiten Term wieder die integratio per partes an und substituire für p seinen Werth aus 13). Es ist dann:

$$\int\cot\sigma\frac{\sin(\theta-\varphi)}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{d\Omega}{d\omega}d\omega=\cot\sigma\frac{\sin(\theta-\varphi)}{1-\cos(\theta-\varphi)}\Omega$$

$$-\int\left[\frac{\cos\varphi-\cos\theta}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{r}{\varrho}\Omega\cot^2\sigma-\frac{\sin(\theta-\varphi)}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}\frac{d\sigma}{d\omega}\right]d\omega.$$

Der Werth von K_1 in 32) lässt sich nun auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}K_1 &= V_1-\left[\cot\sigma\sin\theta\frac{d\Omega}{d\omega}-\frac{r}{\varrho}\Omega\right]\frac{\sin\theta-\sin\varphi}{1-\cos(\theta-\varphi)}-\frac{\sin(\theta-\varphi)\cot\sigma\,\Omega}{1-\cos(\theta-\varphi)}\\ &+\int\left[\frac{\cos\varphi-\cos\theta}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{r}{\varrho}-\frac{\sin(\theta-\varphi)}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{d\sigma}{d\omega}\right]\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}d\omega.\end{aligned}\tag{33}$$

Auf ganz ähnliche Art lässt sich der Werth von K_2 aus den Gleichungen 31) darstellen. Bedeutet V_2 eine Function von v, so ergiebt eine Rechnung, deren weitere Ausführung unterbleiben möge:

$$
34)\quad \begin{aligned}
K_2 = V_2 + \left[\cot\sigma\sin\theta\frac{d\Omega}{d\omega} - \frac{r}{\varrho}\Omega\right]\frac{\cos\theta\, e^{-q}}{1-\cos(\theta-\varphi)} + \frac{e^{-q}\cot\sigma\,\Omega}{1-\cos(\theta-\varphi)} \\
-\int\left[\frac{\sin\theta}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{r}{\varrho} - \frac{1}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{d\sigma}{d\omega}\right]\frac{\Omega e^{-q}}{\sin^2\sigma}d\omega.
\end{aligned}
$$

Substituirt man den Werth von T_1 aus 28) in 30), so folgt:

$$
35)\quad T + \frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega} = K_1\cos\theta + K_2(\sin\theta - \sin\varphi)e^q.
$$

Diese Gleichung werde nach ω differentiirt, mit Rücksicht auf die erste Gleichung 31) lässt sich die nachstehende Relation ableiten:

$$
36)\quad d\frac{T+\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega} + Tp\sin\theta = -\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}p\sin\theta - K_1\sin\theta + K_2(\cos\theta - \cos\varphi)e^q.
$$

Die beiden Integrale, welche in K_1 und K_2 vorkommen, haben einen sehr einfachen Zusammenhang. Man setze zur Vereinfachung:

$$
37)\quad \int\left[\frac{\sin\theta}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{r}{\varrho} - \frac{1}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{d\sigma}{d\omega}\right]\frac{\Omega e^{-q}}{\sin^2\sigma}d\omega = J.
$$

Mit Hülfe der Gleichungen 19) folgt unmittelbar, dass sich J auf die Form:

$$
J = V^2\frac{L}{2} + VL_1 + \frac{L_2}{2}
$$

bringen lässt, wo die Factoren L, L_1, L_2 Integrale sind, welche nur von ω abhängen. Wenn man das in K_1 vorkommende Integral durch Substitution der Werthe von $\sin\theta$ und $\cos\theta$ aus 19) auf eine ähnliche Form wie J bringt, so erhält man:

$$
38)\quad \int\left[\frac{\cos\varphi - \cos\theta}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{r}{\varrho} - \frac{\sin(\theta-\varphi)}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{d\sigma}{d\omega}\right]\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}d\omega = \frac{dJ}{dV}.
$$

Man kann auch, ohne die bemerkten etwas weitläufigen Rechnungen zu machen, die Gleichung 38) unmittelbar aus der Gleichung 37) herleiten, unter Beachtung der Gleichung 20).

Die Werthe von K_1 und K_2 setze man aus 33) und 34) in die Gleichungen 35) und 36), wobei die abkürzenden Bezeichnungen aus 37) und 38) anzuwenden sind. Es ergeben sich dann Ausdrücke für die rechten Seiten der Gleichungen 24) und 25), wodurch sich diese Gleichungen auf folgende Art schreiben lassen:

$$39)\quad \left\{\begin{aligned} & x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu = \\ & \Omega\cot\sigma\sin\theta+\left(V_1+\frac{dJ}{dV}\right)\cos\theta+(V_2-J)(\sin\theta-\sin\varphi)e^q, \\ & -(x\cos l+y\cos m+z\cos n) = \\ & \Omega\cot\sigma\cos\theta-\left(V_1+\frac{dJ}{dV}\right)\sin\theta+(V_2-J)(\cos\theta-\cos\varphi)e^q. \end{aligned}\right.$$

Es bleibt noch übrig den Zusammenhang zwischen den Functionen V_1 und V_2 herzustellen, welche beide Functionen nicht willkührlich sind.

Man substituire in:

$$\frac{dx}{dv}\cos a+\frac{dy}{dv}\cos b+\frac{dz}{dv}\cos c = 0,$$

aus 10) die Werthe von $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$. Da nach 3)

$$\frac{dx}{dv}\cos\alpha+\frac{dy}{dv}\cos\beta+\frac{dz}{dv}\cos\gamma = 0,$$

so nimmt die bemerkte Gleichung die Form an:

$$\frac{dx}{dv}(\cos l\cos\theta-\cos\lambda\sin\theta)+\frac{dy}{dv}(\cos m\cos\theta+\cos\mu\sin\theta)+$$
$$\frac{dz}{dv}(\cos n\cos\theta-\cos\nu\sin\theta) = 0.$$

Nimmt man V als unabhängige Variabele, so lässt sich diese Gleichung wie folgt schreiben:

$$d\frac{x.(\cos\lambda\sin\theta-\cos l\cos\theta)+y(\cos\mu\sin\theta-\cos m\cos\theta)+z(\cos\nu\sin\theta-\cos n\cos\theta)}{dV}=$$

$$[x(\cos\lambda\cos\theta+\cos l\sin\theta)+y(\cos\mu\cos\theta+\cos m\sin\theta)+z(\cos\nu\cos\theta+\cos n\sin\theta)]\frac{d\theta}{dV}.$$

Mittelst der Gleichungen 39) reducirt sich diese Gleichung auf:

$$d\frac{(V_2-J)[1-\cos(\theta-\varphi)]e^q}{dV}=\left[V_1+\frac{dJ}{dV}+(V_2-J)\sin(\theta-\varphi)e^q\right]\frac{d\theta}{dV}.$$

Unter Zuziehung von 20) folgt:

$$\frac{dV_2}{dV}=-V_1.$$

Nimmt man also $V_2=-W$, so ist $V_1=\frac{dW}{dV}$. Die Gleichungen 3) und 39) geben nun zur Bestimmung von x, y und z folgendes System:

$$40)\quad\begin{cases} x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\Omega, \\ x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=\Omega\cot\sigma\sin\theta-(W+J)(\sin\theta-\sin\varphi)e^q \\ \qquad\qquad+d\frac{W+J}{dV}.\cos\theta, \\ x\cos l+y\cos m+z\cos n=-\Omega\cot\sigma\cos\theta+(W+J)(\cos\theta-\cos\varphi)e^q \\ \qquad\qquad+d\frac{(W+J)}{dV}.\sin\theta. \end{cases}$$

Sieht man W als Function von V an, so enthalten die Gleichungen 40) in Beziehung auf V oder v nur eine arbiträre Function. Für die nicht planen Krümmungslinien treten in Beziehung auf das Argument derselben fünf arbiträre Functionen auf, nämlich Ω, σ, das Verhältniss von ϱ zu r und zwei der drei Winkel α, β und γ. Zur Vervollständigung sind den Gleichungen 40) die Gleichungen 14) bis 19) und die Definition von J aus 37) beizufügen.

Durch Elimination von T zwischen den Gleichungen 23) und 24) folgt:

41) $$\frac{\varrho}{r}\sqrt{E}\frac{du}{d\omega}\sin\sigma = x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu - \frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}.$$

Durch diese Gleichung und die zweite Gleichung 40) ist $\sqrt{E}$ bestimmt. Differentiirt man die zweite und dritte Gleichung 40) nach v, multiplicirt die so erhaltenen Gleichungen respective mit $\cos\theta$ und $\sin\theta$, bildet die Summe dieser Producte, so ergiebt sich in Folge der Gleichungen 12):

42) $$\sqrt{G} = \frac{d\theta}{dv}\left[\Omega\cot\sigma - (W+J)e^q - \frac{\sin(\theta-\varphi)}{\frac{d\theta}{dV}}e^q\frac{d(W+J)}{dV} + \frac{\frac{d^2(W+J)}{dV^2}}{\frac{d\theta}{dV}}\right].$$

Verbindet man mit dieser Gleichung die Gleichungen 6) und 20), so hat man zur Bestimmung von r'':

43) $$r''\sin\sigma = \Omega\cot\sigma - (W+J)e^q + \frac{\sin(\theta-\varphi)}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{d(W+J)}{dV}$$
$$-\frac{e^{-q}}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{d^2(W+J)}{dV^2}.$$

Mittelst der Gleichungen 40) und 43) lässt sich noch ein merkwürdiger Satz verificiren, dessen Beweis sich einfacher mit Hülfe der in I und II gegebenen allgemeinen Formeln führen lässt. Man trage auf den Normalen längs einer bestimmten planen Krümmungslinie (v) den entsprechenden Hauptkrümmungshalbmesser r'' ab. Die Endpunkte liegen dann auf einer Curve, welche die Helix einer beliebigen Cylinderfläche ist. Dieses ergiebt sich analytisch auf folgende Weise. Dem Punkte (x, y, z) der planen Krümmungslinie entspricht der Punkt $(x+r''\cos a,\ y+r''\cos b,\ z+r''\cos c)$ der bemerkten Curve. Lässt man in diesen Ausdrücken nur v variiren, so ergiebt sich mittelst der Gleichung 2), dass das Verhältniss von Krümmungsradius dividirt durch Torsionsradius gleich $-\cot\sigma$ ist, also in Beziehung auf v

constant. Hieraus folgt unmittelbar der bemerkte Satz, dessen Beweis nicht weiter ausgeführt werden soll.

Die bisherigen Entwicklungen enthalten die allgemeinsten Formeln, welche sich aufstellen lassen. Sie erfordern einige Modificationen, wenn die Curve, deren Normalebenen die Ebenen der planen Krümmungslinien parallel sind, in eine ebene Curve oder in eine Gerade übergeht. Hierzu kann man noch einen dritten Fall beifügen, wenn die Ebenen der planen Krümmungslinien die Normalen längs jeder Curve enthalten. Es ist dann bekanntlich gleichzeitig die Krümmungslinie auch geodätische Linie. Dieser Fall, welcher zunächst betrachtet werden soll, lässt sich viel einfacher direct behandeln, als wenn die allgemeinen Formeln zu Grunde gelegt werden. Es sind dann Reductionen vorzunehmen, die etwas weitläufig ausfallen, wenn die Resultate in ihrer einfachsten Form auftreten sollen. Aus diesem Grunde sind die geodätischen Krümmungslinien besonders behandelt.

B. Die Ebenen der planen Krümmungslinien enthalten die Normalen zur Fläche.

Enthält die Ebene der planen Krümmungslinie, welche durch den Punkt (x, y, z) der Fläche geht, die Normale derselben, so ist $\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma = 0$, d. i. nach 10) $\cos \sigma = 0$. Die Gleichung 9) wird einfach

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r} \text{ d. i. } \frac{d\theta}{d\omega} = 1,$$

also $\theta = \omega + \psi$, wo ψ eine Function von v ist. Setzt man $p = 0$, so gehn die Gleichungen 3), 24), 25) und 26) über in:

$$44) \quad \begin{cases} x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \Omega, \\ x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = \dfrac{\varrho}{r} \dfrac{d\Omega}{d\omega} + T, \\ -(x \cos l + y \cos m + z \cos n) = d \dfrac{\dfrac{\varrho}{r} \dfrac{d\Omega}{d\omega} + T}{d\omega} + \dfrac{r}{\varrho} \Omega. \end{cases}$$

45) $$d^2\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}+T}{d\omega^2}+\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}+T+d\frac{\frac{r}{\varrho}\Omega}{d\omega}=0.$$

Da Ω und $\frac{r}{\varrho}$ beliebige Functionen von ω sind, so kann man:

46) $$\frac{r}{\varrho}\Omega=\frac{d^2 f(\omega)}{d\omega^2}+f(\omega)=f''(\omega)+f(\omega)$$

setzen, wo $f(\omega)$ eine beliebige Function von ω ist. Die Gleichung 45) giebt dann:

47) $$\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}+T+f'(\omega)=V_1\cos\omega+V_2\sin\omega.$$

Es sind V_1 und V_2 nur von v abhängig. Man bilde aus 44) die Werthe von $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dz}{dv}$, setze dieselben in:

$$\frac{dx}{dv}\cos a+\frac{dy}{dv}\cos b+\frac{dz}{dv}\cos c=0,$$

wo für $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ die Werthe aus 10), unter der Annahme $\cos\sigma=0$, zu substituiren sind. Die bemerkte Gleichung wird dann:

$$\frac{dT}{dv}\sin\theta+\frac{d^2T}{d\omega\, dv}\cos\theta,$$

oder, wenn ψ statt v als unabhängige Variabele genommen, ferner $\theta=\omega+\psi$ gesetzt wird:

$$\frac{dT}{d\psi}\sin(\omega+\psi)+\frac{d^2T}{d\omega\, d\psi}\cos(\omega+\psi)=0.$$

Durch Einsetzung des Werthes von T aus 46) giebt die vorstehende Gleichung:

$$\frac{dV_1}{d\psi}\sin\psi+\frac{dV_2}{d\psi}\cos\psi=0.$$

Ist V eine beliebige Function von v oder ψ, so lässt sich die vorstehende Gleichung durch die beiden folgenden ersetzen:

$$\frac{dV_1}{d\psi} = \left[\frac{d^2 V}{d\psi^2} + V\right]\cos\psi, \quad \frac{dV_2}{d\psi} = -\left[\frac{d^2 V}{d\psi^2} + V\right]\sin\psi,$$

oder

$$V_1 = \frac{dV}{d\psi}\cos\psi + V\sin\psi, \quad V_2 = -\frac{dV}{d\psi}\sin\psi + V\cos\psi.$$

Man setze diese Werthe von V_1 und V_2 in die Gleichung 47), darauf aus derselben den Werth von T und aus 46) den Werth von Ω in die Gleichungen 44). Zur Bestimmung von x, y, z ergiebt sich folgendes System von Gleichungen:

$$48)\quad \begin{cases} x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \frac{\varrho}{r}[f''(\omega) + f(\omega)], \\ x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = -f'(\omega) + \frac{dV}{d\psi}\cos(\omega+\psi) + V\sin(\omega+\psi), \\ x\cos l + y\cos m + z\cos n = -f(\omega) + \frac{dV}{d\psi}\sin(\omega+\psi) - V\cos(\omega+\psi). \end{cases}$$

Es ist selbstverständlich, dass V in den vorstehenden Gleichungen eine andere Bedeutung hat wie in den allgemeinen Untersuchungen; da kein Missverständniss entstehn kann, so ist derselbe Buchstabe zur Verwendung gekommen um die Bezeichungen nicht zu sehr zu vermehren. In jedem besonderen Falle kann man in den Gleichungen 48) einfach $\psi = v$ setzen, kommen aber diese Gleichungen bei weiteren allgemeinen Untersuchungen zur Verwendung, so ist die Specialisirung $\psi = v$ nicht mehr zulässig.

Die Gleichungen 48) lassen sich noch mehr umformen. Es möge nur auf eine Umformung hingewiesen werden. Setzt man:

$$49)\quad \begin{cases} \xi_0 = \frac{\varrho}{r}[f''(\omega)+f(\omega)]\cos\alpha - f'(\omega)\cos\lambda - f(\omega)\cos l, \\ \eta_0 = \frac{\varrho}{r}[f''(\omega)+f(\omega)]\cos\beta - f'(\omega)\cos\mu - f(\omega)\cos m, \\ \zeta_0 = \frac{\varrho}{r}[f''(\omega)+f(\omega)]\cos\gamma - f'(\omega)\cos\nu - f(\omega)\cos n, \end{cases}$$

$$\frac{ds_0}{ds} = d\frac{\frac{\varrho}{r}[f''(\omega)+f(\omega)]}{ds} + \frac{f'(\omega)}{\varrho},$$

so kann man ξ_0, η_0, ζ_0 als Coordinaten eines Punktes Π_0 einer Curve doppelter Krümmung ansehn. Werden für den Punkt Π_0 alle vorkommenden Elemente auf ähnliche Art wie für den Punkt Π in I bezeichnet, durch Anhängung des Index 0, so zeigt eine leichte Betrachtung der Gleichungen 49), dass $\alpha_0 = \alpha$, $\lambda_0 = \lambda$, $l_0 = l$, $d\omega_0 = d\omega$ etc. ist. Versieht man in den Gleichungen 48) alle von s abhängigen Grössen mit dem Index 0, so kann man links, mit Hülfe der Gleichungen 49), x, y, z mit $x - \xi_0$, $y - \eta_0$, $z - \zeta_0$ vertauschen, wodurch rechts die Function $f(\omega)$ wegfällt. Lässt man darauf den Index 0 wieder weg, so treten an Stelle der Gleichungen 48) die folgenden:

$$50)\quad \begin{cases} (x-\xi)\cos\alpha + (y-\eta)\cos\beta + (z-\zeta)\cos\gamma = 0 \\ (x-\xi)\cos\lambda + (y-\eta)\cos\mu + (z-\zeta)\cos\nu = \frac{dV}{d\psi}\cos(\omega+\psi) + V\sin(\omega+\psi), \\ (x-\xi)\cos l + (y-\eta)\cos m + (z-\zeta)\cos n = \frac{dV}{d\psi}\sin(\omega+\psi) - V\cos(\omega+\psi). \end{cases}$$

Nimmt man in den Gleichungen 48) oder 50) s allein variabel, so geben diese Gleichungen:

$$\frac{\frac{dx}{ds}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\cos\beta} = \frac{\frac{dz}{ds}}{\cos\gamma}.$$

Diese Gleichungen geben unmittelbar den Satz:

Sind die Ebenen von geodätischen Krümmungslinien den Normalebenen einer Helix parallel, so ist jede Krümmungslinie des nicht planen Systems ein Helix.

C. Die Ebenen der planen Krümmungslinien sind den Normalebenen einer planen Curve, oder einer festen Geraden parallel.

Geht die Curve, zu deren Normalebenen die Ebenen eines Systems von planen Krümmungslinien parallel sind, in eine ebene Curve über, so ist $r=\infty$. Nimmt man die Ebene der Curve zur Ebene der x und y, so lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$50)^* \qquad \begin{array}{lll} \cos\alpha = \sin\varepsilon, & \cos\lambda = \cos\varepsilon, & \cos l = 0, \\ \cos\beta = -\cos\varepsilon, & \cos\mu = \sin\varepsilon, & \cos m = 0, \\ \cos\gamma = 0, & \cos\nu = 0, & \cos n = 1. \end{array}$$

In diesem Falle treten an Stelle der Gleichungen 10), 11) und 12) die einfachen Systeme:

$$51) \begin{cases} \cos a = \sin\varepsilon\cos\sigma - \cos\varepsilon\sin\sigma\sin\theta, \\ \cos b = \cos\varepsilon\cos\sigma - \sin\varepsilon\sin\sigma\sin\theta, \\ \cos c = \sin\sigma\cos\theta. \end{cases} \quad 52) \begin{cases} \cos a' = -\sin\varepsilon\sin\sigma - \cos\varepsilon\cos\sigma\sin\theta, \\ \cos b' = \cos\varepsilon\sin\sigma - \sin\varepsilon\cos\sigma\sin\theta, \\ \cos c' = \cos\sigma\cos\theta, \end{cases}$$

$$53) \qquad \cos a'' = \cos\varepsilon\cos\theta, \quad \cos b'' = \sin\varepsilon\cos\theta, \quad \cos c'' = \sin\theta.$$

Im vorliegenden Falle werde ε als unabhängige Variabele genommen. An Stelle der Gleichungen 13) ergeben sich nach 52):

$$54) \begin{cases} \dfrac{dx}{d\varepsilon}\sin\varepsilon - \dfrac{dy}{d\varepsilon}\cos\varepsilon = (\cos a'\sin\varepsilon - \cos b'\cos\varepsilon)\sqrt{E}\dfrac{du}{d\varepsilon} = -\sqrt{E}\dfrac{du}{d\varepsilon}\sin\sigma, \\ \dfrac{dx}{d\varepsilon}\cos\varepsilon + \dfrac{dy}{d\varepsilon}\sin\varepsilon = (\cos a'\cos\varepsilon + \cos b'\sin\varepsilon)\sqrt{E}\dfrac{du}{d\varepsilon} = -\sqrt{E}\dfrac{du}{d\varepsilon}\cos\sigma\sin\theta. \end{cases}$$

Für $\cos\alpha = \sin\varepsilon$, $\cos\beta = -\cos\varepsilon$ und $\cos\gamma = 0$, wird die Gleichung 3) einfacher:

55) $$x \sin \varepsilon - y \cos \varepsilon = \Omega,$$

wo Ω Function von ε ist. Die Gleichung 9) zur Bestimmung von θ wird, für $r = \infty$ und $ds = \varrho d\varepsilon$:

56) $$\frac{d\theta}{d\varepsilon} = \cot \sigma \cos \theta.$$

Ist V eine Function von v, so setze man:

57) $$\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = e^{2V + 2\int \cot \sigma d\varepsilon}.$$

Hieraus folgt:

58) $$\frac{d\theta}{dV} = \cos \theta.$$

Setzt man analog wie in 23)

59) $$\sqrt{E} \frac{du}{d\varepsilon} \sin \sigma = T,$$

so giebt die Gleichung 55) nach ε differentiirt:

60) $$x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} + T.$$

Differentiirt man diese Gleichung wieder nach ε, so folgt, unter Zuziehung der Gleichungen 54) und 55), für T die Differentialgleichung:

60)* $$d\frac{\frac{d\Omega}{d\varepsilon} + T}{d\varepsilon} + T \cot \sigma \sin \theta + \Omega = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nach 56) auf die Form:

$$d\frac{\frac{d\Omega}{d\varepsilon} + T - \sin \theta \cot \sigma \Omega}{d\varepsilon} + \left[\frac{d\Omega}{d\varepsilon} + T - \sin \theta \cot \sigma \Omega\right] \cot \sigma \sin \theta$$
$$+ \left(1 - \sin \theta \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right) \frac{\Omega}{\sin^2 \sigma} = 0$$

bringen. Die vorstehende Gleichung lässt sich nach 56) leicht integriren. Ist V_1 eine Function von V, so folgt:

$$61)\quad \frac{d\Omega}{d\varepsilon}+T-\sin\theta\cot\sigma\,\Omega=V_1\cos\theta-\cos\theta\int\frac{1-\sin\theta\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\cos\theta}\,\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}\,d\varepsilon.$$

Durch die Gleichungen 55), 60) und 61) sind x und y bestimmt, für die Berechnung der dritten Coordinate z ist ein besonderer Weg einzuschlagen. Es ist:

$$\frac{dz}{du}=\sqrt{E}\cos c' \text{ oder } \frac{dz}{d\varepsilon}=\sqrt{E}\frac{du}{d\varepsilon}\cos c'.$$

Hierin substituire man aus der dritten Gleichung 52) $\cos c'=\cos\sigma\cos\theta$ und drücke nach 59) $\sqrt{E}$ durch T aus. Es folgt so:

$$\frac{dz}{d\varepsilon}=\cot\sigma\cos\theta\,T$$

oder auch, nach 56):

$$62)\quad d\frac{z+\cos\theta\cot\sigma\,\Omega}{d\varepsilon}=\cot\sigma\cos\theta\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}+T-\sin\theta\cot\sigma\,\Omega\right)-\cos\theta\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}.$$

Nach 56) ist:

$$\cot\sigma\cos\theta\,.\,\cos\theta=\frac{d\theta}{d\varepsilon}\cos\theta=\frac{d\sin\theta}{d\varepsilon}.$$

In 62) werde aus 61) der Werth von T eingesetzt und die vorstehende Gleichung angewandt, hierdurch ergiebt sich:

$$d\frac{z+\cot\sigma\cos\theta\,\Omega}{d\varepsilon}=V_1\frac{d\sin\theta}{d\varepsilon}-\frac{d\sin\theta}{d\varepsilon}.\int\frac{1-\sin\theta\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\cos\theta}\,\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}\,d\varepsilon-\cos\theta\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}.$$

Bei der Integration dieser Gleichung ist, zur Vermeidung von Doppelintegralen, bei dem zweiten Term der rechten Seite die integratio per partes auszuführen. Die von ε unabhängige Quantität, welche die Integration involvirt, sei V_2, wo V_2 eine Function von v bezeichnet. Es ergiebt sich dann zur Bestimmung von z die Gleichung:

$$63)\quad \begin{aligned} z+\cot\sigma\cos\theta\,\Omega &= V_2+V_1\sin\theta-\sin\theta\int\frac{1-\sin\theta\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\cos\theta}\,\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}\,d\varepsilon \\ &+\int\frac{\sin\theta-\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\cos\theta}\,\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}\,d\varepsilon. \end{aligned}$$

Um die Schreibweise etwas zu vereinfachen, werde:

$$64)\quad J=\int\frac{\sin\theta-\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\cos\theta}\,\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}\,d\varepsilon$$

gesetzt. Aus 58) und 64) folgt dann:

$$65)\quad \frac{dJ}{dV}=\int\frac{1-\sin\theta\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\cos\theta}\,\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}\,d\varepsilon.$$

Zur Bestimmung von x, y, z geben die Gleichungen 55) und 60) bis 65) das nachfolgende System:

$$66)\quad \begin{cases} x\sin\varepsilon-y\cos\varepsilon=\Omega, \\ x\cos\varepsilon+y\sin\varepsilon=\sin\theta\cot\sigma\,\Omega+V_1\cos\theta-\frac{dJ}{dV}.\cos\theta, \\ z=-\cos\theta\cot\sigma\,\Omega+V_1\sin\theta-\frac{dJ}{dV}\sin\theta+J+V_2. \end{cases}$$

Der Zusammenhang der Functionen V_1 und V_2 ergiebt sich auf folgende Art. Man setze in:

$$\frac{dx}{dv}\cos a+\frac{dy}{dv}\cos b+\frac{dz}{dv}\cos c=0,\quad \text{oder}\ \frac{dx}{dV}\cos a+\frac{dy}{dV}\cos b+\frac{dz}{dV}\cos c=0$$

für $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ ihre Werthe aus 51), für x, y, z die Werthe aus 66). Eine einfache Rechnung giebt:

$$\left(V_1 - \frac{dJ}{dV}\right)\frac{d\theta}{dV} + \left(\frac{dJ}{dV} + \frac{dV_2}{dV}\right)\cos\theta = 0.$$

Diese Gleichung reducirt sich nach 58) auf:

$$V_1 + \frac{dV_2}{dV} = 0.$$

Nimmt man einfach $V_2 = W$, also $V_1 = -\frac{dW}{dV}$, so gehn die Gleichungen 66) in folgende über:

$$67)\quad \begin{cases} x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = \Omega, \\ x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon = \sin\theta\cot\sigma\,\Omega - d\dfrac{W+J}{dV}\cos\theta, \\ \qquad\qquad z = -\cos\theta\cot\sigma\,\Omega - d\dfrac{W+J}{dV}\sin\theta + W + J. \end{cases}$$

Durch die Gleichungen 57), 64) und 67) sind die Flächen vollständig bestimmt, für welche die Ebenen eines Systems planer Krümmungslinien derselben Geraden parallel sind. Für den besonderen Fall $\cos\sigma = 0$, nehme man $\Omega = f'(\varepsilon)$. Nach 57) ist θ von ε unabhängig, statt V führe man mit Hülfe von 58) θ als unabhängige Variabele ein und setze;

$$W = -\frac{\psi(\theta)}{\cos\theta}.$$

In diesem besonderen Falle lassen sich die Gleichungen 67) durch folgende ersetzen:

$$68)\quad \begin{cases} x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = f'(\varepsilon), \\ x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon = -f(\varepsilon) + \psi'(\theta)\cos\theta + \psi(\theta)\sin\theta, \\ \qquad\qquad z = \psi'(\theta)\sin\theta - \psi(\theta)\cos\theta. \end{cases}$$

Die Gleichungen 68) enthalten die Lösung des letzten Falls, den die Flächen mit einem Systeme planer Krümmungslinien darbieten, wenn diese Ebenen den Normalebenen einer Geraden parallel sind. Man hat nur nöthig ε und θ mit einander zu vertauschen um die Formeln so zu erhalten, dass dieselben den allgemeinen Relationen 1) und 2) entsprechen. Da eine directe Behandlung dieses Falls sich äusserst einfach gestaltet, so möge dieselbe hier noch kurz erwähnt werden.

D. Die Ebenen der planen Krümmungslinien sind den Normalebenen einer Geraden, oder einer festen Ebene parallel.

Geht die Curve, zu deren Normalebenen die Ebenen eines Systems von planen Krümmungslinien parallel sind, in eine Gerade über, so ist $\varrho = \infty$. Nimmt man diese Gerade zur Axe der z, so geben die Gleichungen 1) $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$ gesetzt:

69)
$$\begin{cases} 0 = \cos a \cos\sigma - \cos a' \sin\sigma, \\ 0 = \cos b \cos\sigma - \cos b' \sin\sigma, \\ 1 = \cos c \cos\sigma - \cos c' \sin\sigma. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 5) folgt für $\varrho = \infty$:

70)
$$\frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{d\sigma}{du} = 0, \quad \frac{d\sqrt{E}}{dv} = 0.$$

Es möge der Fall σ constant und $r' = \infty$ bei Seite gelassen werden, derselbe bezieht sich auf developpabele Flächen, die sehr leicht zu untersuchen sind, unter Anwendung geeigneter Gleichungen. Ein anderes, wie ein directes Verfahren, führt bei den developpabeln Flächen auf weitläufige Rechnungen, die, wenigstens bei allgemeinen Untersuchungen über Krümmungslinien, die Herstellung von Gleichungen erfordern, welche einfacher zum Ausgangspunkt der Untersuchungen genommen werden.

Setzt man in die Gleichungen II 4) nach 70) $\frac{\sqrt{E}}{r'} = -\frac{d\sigma}{du}$, nimmt σ zur unabhängigen Variabeln, so gehn die bemerkten Gleichungen in:

71) $$\frac{d\cos a}{d\sigma} = \cos a', \quad \frac{d\cos b}{d\sigma} = \cos b', \quad \frac{d\cos c}{d\sigma} = \cos c'$$

über. Die Substitution der Werthe von $\cos a'$, $\cos b'$, $\cos c'$ transformirt die Gleichungen 69) in:

$$0 = \cos a \cos\sigma - \frac{d\cos a}{d\sigma}\sin\sigma, \quad 0 = \cos b\cos\sigma - \frac{d\cos b}{d\sigma}\sin\sigma,$$
$$1 = \cos c\cos\sigma - \frac{d\cos c}{d\sigma}\sin\sigma.$$

Sind v_1, v_2 und v_3 Functionen von v, so geben die vorstehenden Gleichungen integrirt:

72) $$\cos a = v_1 \sin\sigma, \quad \cos b = v_2 \sin\sigma, \quad \cos c = v_3 \sin\sigma + \cos\sigma.$$

Die Relation $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$ nimmt durch die Gleichungen 72) die Form an:

$$1 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + 2 v_3 \cot\sigma.$$

Soll nun σ nicht constant sein, so kann diese Gleichung nur für $v_3 = 0$ und $1 = v_1^2 + v_2^2$ stattfinden. Man kann $v_1 = \cos\psi$, $v_2 = \sin\psi$ setzen. Die Gleichungen 72) werden hierdurch:

73) $$\cos a = \cos\psi\sin\sigma, \quad \cos b = \sin\psi\sin\sigma, \quad \cos c = \cos\sigma$$

Aus den Gleichungen 69) und 73) folgt:

74) $$\cos a' = \cos\psi\cos\sigma, \quad \cos b' = \sin\psi\sin\sigma, \quad \cos c' = -\sin\sigma.$$

Da nach 73) und 74) $\cos c'' = 0$, findet die Gleichung $\frac{dz}{dv} = 0$ statt, woraus unmittelbar

75) $$z = \Omega$$

folgt, wo Ω nur von u oder σ abhängt. Diese Gleichung ist selbstverständlich, sie drückt aus, dass die Ebenen der planen Krümmungslinien einander parallel sind. Da

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{E}\cos c',$$

so geben die Gleichungen 74) und 75):

$$\sqrt{E} = -\frac{d\Omega}{du}\frac{1}{\sin\sigma}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der Gleichungen 74) erhält man weiter:

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{E}\cos a' = -\cos\psi\frac{d\Omega}{du}\cot\sigma,$$

$$\frac{dy}{du} = \sqrt{E}\cos b' = -\sin\psi\frac{d\Omega}{du}\cot\sigma.$$

Sind V_1 und V_2 Functionen von v, so geben diese Gleichungen integrirt:

76) $$x = V_1 - \cos\psi\int\cot\sigma\,d\Omega,\quad y = V_2 - \sin\psi\int\cot\sigma\,d\Omega.$$

Nimmt man in der Gleichung:

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv} = 0,$$

Ω und ψ statt u und v als unabhängige Variabele, so folgt mittelst der Gleichungen 75) und 76):

$$\frac{dV_1}{d\psi}\cos\psi + \frac{dV_2}{d\psi}\sin\psi = 0.$$

Bezeichnet V eine beliebige Function von ψ, so kann man an Stelle der vorstehenden Gleichung:

77) $$V_1 = \frac{dV}{d\psi}\sin\psi - V\cos\psi,\quad -V_2 = \frac{dV}{d\psi}\cos\psi + V\sin\psi$$

nehmen. Ist ferner $f(\sigma)$ eine beliebige Function von σ, so kann man immer setzen:

$$-\Omega = f'(\sigma)\sin\sigma - f(\sigma)\cos\sigma \text{ und } -\cot\sigma\, d\Omega = d[f'(\sigma)\cos\sigma + f(\sigma)\sin\sigma].$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen und der Gleichungen 77) lässt sich das System zur Bestimmung von x, y, z auf folgende Form bringen:

78) $$\begin{cases} x\sin\psi - y\cos\psi = \dfrac{dV}{d\psi}, \\ x\cos\psi + y\sin\psi = -V + f'(\sigma)\cos\sigma + f(\sigma)\sin\sigma, \\ z = -f'(\sigma)\sin\sigma + f(\sigma)\cos\sigma. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind von den Gleichungen 68) nur durch die Bezeichnungsweise verschieden. Führt man x, y mittelst der Gleichungen:

79) $$-X = -\frac{dV}{d\psi}\sin\psi + V\cos\psi,\ -Y = \frac{dV}{d\psi}\cos\psi + V\sin\psi$$

ein, so geben die beiden ersten Gleichungen 78):

80) $$\begin{cases} (x-X)\sin\psi - (y-Y)\cos\psi = 0, \\ (x-X)\cos\psi + (y-Y)\sin\psi = f'(\sigma)\cos\sigma + f(\sigma)\sin\sigma \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2} = f'(\sigma)\cos\sigma + f(\sigma)\sin\sigma.$$

Durch Elimination von σ zwischen dieser Gleichung und der dritten Gleichung 78) folgt eine Gleichung von der Form:

81) $$z = F[(x-X)^2+(y-Y)^2].$$

Nach 79) ist:

82) $$\frac{dX}{d\psi}\cos\psi + \frac{dY}{d\psi}\sin\psi = 0.$$

Die erste Gleichung 80) lässt sich hierdurch auf folgende Form bringen:

83) $$(x-X)\frac{dX}{d\psi} + (y-Y)\frac{dY}{d\psi} = 0.$$

Sieht man X, Y als die Coordinaten eines Punktes einer ebenen Curve an, so ist nach 82) ψ der Winkel, welchen die Normale der Curve mit der Axe der x bildet. Die beiden Gleichungen 81) und 83) zeigen unmittelbar, dass eine Fläche mit einem Systeme von planen Krümmungslinien in parallelen Ebenen, die Enveloppe einer Rotationsfläche ist, welche sich so bewegt, dass ein fester Punkt der Rotationsaxe eine plane Curve durchläuft, deren Ebene zur Rotationsaxe senkrecht ist.

E. Die planen Krümmungslinien sind Geraden. Developpabele Flächen.

Nimmt man in den Gleichungen 23) und 25) von II $\varrho_2 = \infty$, so ist auch $r'' = \infty$ und G von u unabhängig. Die Krümmungslinie ist eine Gerade, die Fläche developpabel. Wird eine developpabele Fläche als Tangentenfläche einer Curve doppelter Krümmung angesehn, so lassen sich die in I entwickelten Gleichungen mit Vortheil anwenden. Liegt der Punkt (x, y, z) auf der Tangente des Punktes (ξ, η, ζ), so bestehn die Gleichungen:

84) $$x = \xi + (v-s)\cos\alpha,\ y = \eta + (v-s)\cos\beta,\ z = \zeta + (v-s)\cos\gamma.$$

Die Curven für welche s oder v allein variirt sind Krümmungslinien. Da die Krümmungsebene der Curve im Punkte (ξ, η, ζ) die berührende Ebene der Fläche im Punkte (x, y, z) ist, so finden die Gleichungen statt:

85) $$\cos a = \cos l,\ \cos b = \cos m,\ \cos c = \cos n.$$

Unter Zuziehung der Gleichungen von I, der Gleichungen 2), 3) und 4) von II erhält man aus 84) und 85), wenn $u = s$ genommen wird:

86) $$\sqrt{E} = \frac{v-s}{\varrho},\ \sqrt{G} = 1,\ \frac{\sqrt{E}}{r'} = -\frac{1}{r},\ \frac{r'}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{E}}{dv} = -\frac{r}{\varrho}.$$

Im Fall einer conischen Fläche reducirt sich die Wendecurve auf einen Punkt. Die Generatricen der Fläche können den Tangenten einer

Curve doppelter Krümmung parallel genommen werden. Fällt die Spitze der Kegelfläche in den Anfangspunkt der Coordinaten, so ergeben sich für x, y, z folgende, zu 84) analoge Gleichungen:

87) $$x = v\cos\alpha,\ y = v\cos\beta,\ z = v\cos\gamma.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich leicht die entsprechenden Gleichungen zu den Gleichungen 86).

88) $$\sqrt{E} = \frac{v}{\varrho},\ \sqrt{G} = 1,\ \frac{\sqrt{E}}{r'} = -\frac{1}{r},\ \frac{r'}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{E}}{dv} = -\frac{r}{\varrho}.$$

Für eine cylindrische Fläche ist bekanntlich der endliche Hauptkrümmungshalbmesser eines Punktes der Fläche gleich dem Krümmungshalbmesser einer planen Schnittcurve, deren Ebene durch den bemerkten Punkt geht und senkrecht zu den Generatricen steht.

V.

Flächen, für welche beide Systeme von Krümmungslinien plan sind*).

Die in IV gegebenen allgemeinen Untersuchungen gestatten eine sehr einfache Bestimmung der Flächen, für welche beide Systeme von Krümmungslinien plan sind. Ist jede der Curven (u) plan, so besteht nach III 12) die Bedingung:

---

*) Es möge hier der folgende Satz angemerkt werden, den der Verfasser bei allgemeinern Untersuchungen gefunden hat.

Theorem.

Existiren auf einer Fläche zwei Systeme von planen Curven, deren Ebenen die Fläche unter constanten Winkeln schneiden, so sind beide Systeme Krümmungslinien.

$$\frac{r'}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{E}}{dv} = -\cot\tau,$$

oder:

$$1) \qquad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv} = -\cot\tau . \frac{\sqrt{E}}{r'},$$

wo τ nur von v abhängt.

Zu dieser Gleichung nehme man die Gleichungen IV 5) und IV 9) nämlich:

$$2) \qquad \frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{d\sigma}{du} = \frac{\sin\theta}{\varrho}\frac{ds}{du}, \quad \frac{\sin\sigma}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv} = \frac{\cos\theta}{\varrho}\frac{ds}{du}.$$

$$3) \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r} + \frac{\cot\sigma}{\varrho}\cos\theta.$$

Zwischen den Gleichungen 1) und 2) eliminire man $\frac{\sqrt{E}}{r'}$, und $\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}$. Zur Vereinfachung werde ε, definirt durch $ds = \varrho\, d\varepsilon$, als unabhängige Variabele genommen. Man erhält so:

$$4) \qquad \cos\theta + \cot\tau \sin\sigma \sin\theta + \cot\tau \frac{d\cos\sigma}{d\varepsilon} = 0.$$

Die Gleichung 3) mit ϱ multiplicirt giebt:

$$5) \qquad \frac{d\theta}{d\varepsilon} = \frac{\varrho}{r'} + \cot\sigma\cos\theta.$$

Die Gleichung 4) differentiire man, mit Rücksicht auf die Gleichung 5), nach ε. Setzt man dabei $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, so lässt sich das Resultat wie folgt schreiben:

$$-\cot\sigma \sin\theta[\cos\theta + \cot\tau\sin\sigma\sin\theta] + \sin\theta\cot\tau\cos\sigma\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$
$$+ [-\sin\theta + \cot\tau\sin\sigma\cos\theta]\frac{\varrho}{r} + \cot\tau\left[\cos\sigma + \frac{d^2\cos\sigma}{d\varepsilon^2}\right] = 0.$$

Die vorstehende Gleichung wird nach 4) einfacher:

$$[-\sin\theta + \cot\tau \sin\sigma\cos\theta]\frac{\varrho}{r} + \cot\tau\left[\cos\sigma + \frac{d^2\cos\sigma}{d\varepsilon^2}\right] = 0.$$

Durch Elimination von θ zwischen dieser Gleichung und der Gleichung 4) folgt endlich:

$$6)\qquad \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 = \cot^2\tau.\left[\left(\cos\sigma + \frac{d^2\cos\sigma}{d\varepsilon^2}\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{r}\frac{d\cos\sigma}{d\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\varrho}{r}\sin\sigma\right)^2\right].$$

In der Gleichung 6) hängt τ nur von v ab, alle anderen vorkommenden Quantitäten sind Functionen von u oder ε. Die Gleichung 6) kann nur unter den beiden Bedingungen bestehn, es ist τ constant, oder der Factor von $\cot\tau$ verschwindet. Für ein constantes τ ist nach 4) θ von v unabhängig, die Fläche ist dann developpabel. Nimmt man τ constant, hält die Gleichung 5) zusammen mit den Gleichungen 86) und 88) von IV, so ist dort das Verhältniss des Torsionsradius zum Krümmungsradius der in Betracht kommenden Curve doppelter Krümmung constant. Dieselbe ist die Helix einer beliebigen Cylinderfläche. Fügt man noch die cylindrischen Flächen hinzu, so ergeben sich folgende developpabele Flächen, deren beide Systeme von Krümmungslinien plan sind: 1. Tangentenfläche der Helix einer beliebigen Cylinderfläche, 2. die Fläche des Kreiskegels, 3. jede Cylinderfläche.

Ist τ nicht constant, so muss in 6) der Factor von $\cot^2\tau$ verschwinden. Es folgt dann

$$\frac{\varrho}{r} = 0,$$

also $r = \infty$. Die Ebenen der Krümmungslinien (v) sind die Normalebenen einer planen Curve. Für $r = \infty$ reducirt sich die Gleichung 6) auf:

$$7)\qquad \cos\sigma + \frac{d^2\cos\sigma}{d\varepsilon^2} = 0.$$

Ist k eine Constante, kleiner oder gleich der Einheit, ε_0 ein constanter Winkel, so giebt die Gleichung 7) integrirt $\cos\sigma = k\cos(\varepsilon - \varepsilon_0)$.

Man kann einfach $\varepsilon_0 = 0$ nehmen, da es gleichgültig ist, ob x, y, z von ε oder $\varepsilon - \varepsilon_0$ abhängen. Die Constante ε_0 bezieht sich, wie eine einfache Betrachtung der Gleichungen IV 67) zeigt, nur auf eine Drehung des Coordinatensystems um die Axe der z. Im vorliegenden Falle kommen die Gleichungen 57), 64) und 67) von IV zur Anwendung. Setzt man:

$$8)\qquad \cos\sigma = k\cos\varepsilon,\ \sin\sigma = \sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon},$$

so ist:

$$e^{\int\cot\sigma\, d\varepsilon} = k\sin\varepsilon + \sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon},$$

$$9)\qquad e^{-\int\cot\sigma\, d\varepsilon} = \frac{\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon} - k\sin\varepsilon}{1-k^2}.$$

Mittelst der Gleichungen 8) giebt die Gleichung 4):

$$10)\qquad \cos\theta + \cot\tau[\sin\theta\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon} - k\sin\varepsilon] = 0.$$

Die Gleichung 57) von IV giebt, mit Rücksicht auf die Gleichungen 9):

$$11)\qquad \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{e^{2V}[\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}+k\sin\varepsilon]^2 - 1}{e^{2V}[\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}+k\sin\varepsilon]^2+1}, \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{2e^V[\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}+k\sin\varepsilon]}{e^{2V}[\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}+k\sin\varepsilon]^2+1}. \end{cases}$$

Die Substitution der Werthe von $\sin\theta$ und $\cos\theta$ aus den Gleichungen 11) in die Gleichung 10) liefert zwischen V und τ die Gleichung:

$$12)\qquad 2e^V + e^{2V}(1-k^2)\cot\tau - \cot\tau = 0.$$

und hieraus:

$$13)\qquad e^V = \frac{\sqrt{1-k^2\cos^2\tau} - \sin\tau}{(1-k^2)\cos\tau},\quad e^{-V} = \frac{\sqrt{1-k^2\cos^2\tau}+\sin\tau}{\cos\tau}.$$

Es ist nach 8)

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{k \sin\varepsilon}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2\varepsilon}}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen 11) giebt:

$$\frac{\sin\theta - \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\cos\theta} = \frac{e^{2V}(1 - k^2) - 1}{2e^V\sqrt{1 - k^2\cos^2\varepsilon}}$$

d. i. nach 12):

14) $$\frac{\sin\theta - \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\cos\theta} = \frac{-\operatorname{tang}\tau}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\varepsilon}}.$$

Nach 13) kann man τ als Function von V, oder V als von τ abhängig ansehn. Durch Differentiation folgt:

15) $$dV = -\frac{d\tau}{\cos\tau\sqrt{1 - k^2\cos^2\tau}}.$$

Die Gleichung 64) von IV, nämlich

$$J = \int \frac{\sin\theta - \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\cos\theta} \frac{\Omega}{\sin^2\sigma} d\varepsilon,$$

nimmt in Folge der Gleichungen 8) und 14) folgende Form an:

16) $$J = -\operatorname{tang}\tau \int \frac{\Omega}{(1 - k^2\cos^2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} d\varepsilon.$$

Es ist dann nach 15):

17) $$\frac{dJ}{dV} = \frac{\sqrt{1 - k^2\cos^2\tau}}{\cos\tau} \int \frac{\Omega}{(1 - k^2\cos^2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} d\varepsilon = -\frac{\sqrt{1 - k^2\cos^2\tau}}{\sin\tau} J.$$

Zur leichteren Berechnung von $\sin\theta$ und $\cos\theta$ multiplicire man in den Gleichungen 11) Zähler und Nenner mit:

$$\frac{e^{-V}}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}+k\sin\varepsilon}=e^{-V}\frac{\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}-k\sin\varepsilon}{1-k^2};$$

werden darauf die Werthe von e^V und e^{-V} aus 13) substituirt, so folgt:

$$18)\quad \begin{cases} \sin\theta=\dfrac{k\sin\varepsilon\sqrt{1-k^2\cos^2\tau}-\sin\tau\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}}{\sqrt{1-k^2\cos^2\tau}\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}-k\sin\varepsilon\sin\tau}, \\ \cos\theta=\dfrac{(1-k^2)\cos\tau}{\sqrt{1-k^2\cos^2\tau}\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}-k\sin\varepsilon\sin\tau}. \end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichungen 8) und 18) ergeben sich ohne Schwierigkeit die beiden Relationen:

$$19)\quad \begin{cases} (\sin\theta\cot\sigma\sin\varepsilon-\cos\varepsilon)\,k\cos\tau+\cos\theta\cot\sigma\sqrt{1-k^2\cos^2\tau}=0, \\ \qquad -\sin\theta\sqrt{1-k^2\cos^2\tau}+k\cos\theta\sin\varepsilon\cos\tau=\sin\tau. \end{cases}$$

Zur Vermeidung der in 16) und 17) auftretenden Integrale sei Ω eine Function von ε bestimmt durch:

$$20)\qquad \Omega=(1-k^2\cos^2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}f'(\varepsilon).$$

Es ist dann:

$$21)\qquad J=-\operatorname{tang}\tau.f'(\varepsilon),\quad \frac{dJ}{dV}=\frac{\sqrt{1-k^2\cos^2\tau}}{\cos\tau}f(\varepsilon).$$

In Folge der Gleichungen 67) von IV bestehn für x, y, z die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x\sin\varepsilon-y\cos\varepsilon&=\Omega, \\ x\cos\varepsilon+y\sin\varepsilon&=\sin\theta\cot\sigma\,\Omega-d\frac{W+J}{dV}.\cos\theta, \\ z&=-\cos\theta\cot\sigma\,\Omega-d\frac{W+J}{dV}\sin\theta+W+J. \end{aligned}$$

Dieses System lässt sich durch das folgende ersetzen:

$$22)\quad \begin{cases} x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = \Omega, \\ y = (\sin\theta\cot\sigma\sin\varepsilon - \cos\varepsilon)\,\Omega - d\dfrac{W+J}{dV}\cos\theta\sin\varepsilon, \\ z = -\cos\theta\cot\sigma\,\Omega - d\dfrac{W+J}{dV}\sin\theta + W + J. \end{cases}$$

An Stelle von W werde eine Function von τ eingeführt mittelst der Gleichung:

$$23)\quad W = \frac{F(\tau)}{\cos\tau}.$$

Nach 15) ist dann:

$$24)\quad \frac{dW}{dV} = -\frac{F'(\tau)\cos\tau + F(\tau)\,\sin\tau}{\cos\tau}\sqrt{1-k^2\cos^2\tau}.$$

In 22) führe man für $\cot\sigma$, $\sin\theta$, $\cos\theta$, Ω, J, W ihre Werthe aus den Gleichungen 8), 18), 20), 21), 23) und 24) ein. Statt der Gleichung für z bilde man die Gleichung:

$$z - y\frac{k\cos\tau}{\sqrt{1-k^2\cos^2\tau}}.$$

Mit Benutzung der Gleichungen 19) lassen sich dann für die Coordinaten x, y, z eines Punktes einer Fläche, für welche beide Systeme von Krümmungslinien plan sind, folgende Gleichungen aufstellen:

$$25)\quad \begin{cases} x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = (1-k^2\cos^2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}.f'(\varepsilon), \\ y\dfrac{\sqrt{1-k^2\cos^2\tau}\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon} - k\sin\varepsilon\sin\tau}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\cos^2\tau}} = -f(\varepsilon)\sin\varepsilon \\ \qquad -f'(\varepsilon)\cos\varepsilon\,(1-k^2\cos^2\varepsilon) + [F'(\tau)\cos\tau + F(\tau)\sin\tau]\sin\varepsilon, \\ z - y\dfrac{k\cos\tau}{\sqrt{1-k^2\cos\tau}} = -F'(\tau)\sin\tau + F(\tau)\cos\tau. \end{cases}$$

Die Gleichungen 25) sind allgemein, sie schliessen auch den besonderen Fall ein, dass die Gleichung 7) für $\cos\sigma = 0$ identisch besteht. Dann ist nach 8) $k = 0$, in unwesentlich anderer Form ergeben sich wieder die Gleichungen IV 68). Für $k = 1$ reducirt sich in der zweiten Gleichung 25) der Factor von y auf:

$$\frac{1 - \cos^2\varepsilon\cos^2\tau}{2\sin\varepsilon\sin^2\tau}.$$

In Folge der Gleichungen III 13) sind die Cosinus der Winkel, welche die Normale zur Ebene der planen Krümmungslinie (u) mit den Coordinatenaxen bildet:

$$-\cos a\cos\tau + \cos a''\sin\tau,\quad -\cos b\cos\tau + \cos b''\sin\tau,\quad -\cos c\cos\tau + \cos c''\sin\tau.$$

Hierin sind für $\cos a$, $\cos a''$ etc. die Werthe aus IV 51) und IV 53) einzusetzen, mit Rücksicht auf die Gleichungen 8) und 18). Die bemerkten Cosinus haben dann folgende Werthe:

$$0,\quad k\cos\tau,\quad -\sqrt{1 - k^2\cos^2\tau}.$$

Die an sich etwas weitläufige Rechnung lässt sich mittelst der dritten Gleichung 25) umgehn, welche zeigt, dass die Ebene einer der Krümmungslinien (u) der Axe der x parallel ist. Dieses Resultat ist selbstverständlich, nach der zu Anfang dieser Nummer gemachten Bemerkung. Sind beide Systeme von Krümmungslinien plan, so sind die Ebenen eines Systems den Normalebenen einer planen Curve parallel. Es ergeben sich so zwei plane Curven, deren Ebenen zu einander senkrecht sind.

VI.

Flächen, für welche ein System von Krümmungslinien plan, das zweite sphärisch ist.

Die allgemeinen Formeln von IV führen mit grosser Leichtigkeit zur Aufstellung der in der Ueberschrift genannten Flächen; wobei sich ergeben wird, dass im Wesentlichen dabei zwei Arten von Flächen zu unterscheiden sind. Bei der einen Art sind die Ebenen des planen Systems den Normalebenen einer planen Curve parallel, die Projection des Radius der Kugelfläche, welche die sphärische Krümmungslinie enthält, auf die Normale zur Fläche, ist constant. Bei der zweiten Art gehn die Ebenen der planen Krümmungslinien alle durch denselben Punkt. Nimmt man wieder wie in IV und V das System (v) plan, ferner das System (u) sphärisch, so finden für das letztgenannte System nach III 9) und III 11) folgende Gleichungen statt:

1) $$\frac{\sqrt{E}}{R_1} = \cos\tau \frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{\sin\tau}{\sqrt{G}} \frac{d\sqrt{E}}{dv}.$$

2) $$\begin{cases} \xi_1^* = x + R_1 (\cos a \cos\tau - \cos a'' \sin\tau), \\ \eta_1^* = y + R_1 (\cos b \cos\tau - \cos b'' \sin\tau), \\ \zeta_1^* = z + R_1 (\cos c \cos\tau - \cos c'' \sin\tau). \end{cases}$$

In den vorstehenden Gleichungen sind $R_1, \tau, \xi_1^*, \eta_1^*, \zeta_1^*$ nur von v abhängig. Zur Vermeidung von Wiederholungen soll ein besonderer Fall zuerst betrachtet werden, wenn die Ebenen des planen Systems den Normalebenen einer Geraden, oder, was dasselbe ist, unter einander parallel sind. In den allgemeinen Formeln von IV ist dann $\varrho = \infty$ zu nehmen, welcher besondere Fall unter D behandelt ist. In Folge der Gleichungen IV 70) ist E von v unabhängig, die Gleichung 1) reducirt sich auf $r' = R_1 \cos\tau$, woraus folgt, dass die sphärische Krümmungslinie ein Kreis ist. Nach IV 70) ist:

3) $$\frac{\sqrt{E}}{r'} = -\frac{d\sigma}{du}.$$

Die Gleichungen 74) und 78) von IV geben:

$$\sqrt{E} = [f''(\sigma) + f(\sigma)] \frac{d\sigma}{du}.$$

Aus dieser Gleichung und 3) folgt:

$$-r' = f''(\sigma) + f(\sigma).$$

Da r' nur von v abhängig ist, so kann die letzte Gleichung nur besteht, wenn $f''(\sigma)+f(\sigma)=k$ ist, wo k eine Constante bedeutet. Diese Gleichung giebt $f(\sigma)=k+z_0\cos\sigma+h\sin\sigma$. Die Gleichungen 78) von IV zeigen, dass z_0 sich nur auf eine Verlegung des Anfangspunktes in der z-Axe bezieht, die Constante h lässt sich mit V vereinigen. Nimmt man einfach $z_0=0$, $h=0$, also $f(\sigma)=k$, so erhält man aus der dritten Gleichung 78) und den beiden Gleichungen 80) von IV

$$(x-X)^2+(y-Y)^2+z^2=k^2.$$

Die entsprechende Fläche ist die Enveloppe einer Kugelfläche von constantem Radius, deren Mittelpunkt eine ebene Curve beschreibt. Es soll im Folgenden der Fall $\varrho=\infty$ ausgeschlossen sein.

In Folge der Gleichungen IV 5) ist:

$$4)\qquad \frac{\sqrt{E}}{r'}+\frac{d\sigma}{du}=\frac{\sin\theta}{\varrho}\frac{ds}{du},\quad \frac{\sin\sigma}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}=\frac{\cos\theta}{\varrho}\frac{ds}{du}.$$

In den Gleichungen 23) und 59) von IV ist $\sqrt{E}$ auf dieselbe Weise durch eine Quantität T ausgedrückt, nämlich $r\,d\omega=ds$ und $\varrho\,d\varepsilon=ds$ gesetzt:

$$5)\qquad \sqrt{E}=\frac{T}{\varrho\sin\sigma}\frac{ds}{du}.$$

Man substituire in 1) die Werthe von $\frac{\sqrt{E}}{r'}$, $\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}$ und $\sqrt{E}$ aus 4) und 5), multiplicire die erhaltene Gleichung mit $R_1\,\varrho\sin\sigma$ und nehme s als unabhängige Variabele. Für T ergiebt sich dann folgende Gleichung:

$$6)\qquad T=R_1\cos\tau\left[\sin\theta\sin\sigma+\varrho\frac{d\cos\sigma}{ds}\right]+R_1\sin\tau\cos\theta.$$

Nach IV 9) genügt θ der Gleichung:

$$7)\qquad \frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{r}+\frac{\cot\sigma}{\varrho}\cos\theta.$$

Setzt man wieder $ds=r\,d\omega$, so werden die Gleichungen 6) und 7):

8) $$T = R_1 \cos\tau\left[\sin\theta\sin\sigma + \frac{\varrho}{r}\frac{d\cos\sigma}{d\omega}\right] + R_1 \sin\tau\cos\theta.$$

9) $$\frac{d\theta}{d\omega} = 1 + \frac{r\cot\sigma}{\varrho}\cos\theta.$$

Es genügt nach IV 26) T der folgenden Differentialgleichung, wenn dort:

$$p = \frac{r\cot\sigma}{\varrho}$$

gesetzt wird:

$$d\frac{\frac{dT}{d\omega} + T\frac{r\cot\sigma}{\varrho}\sin\theta}{d\omega} + T\left(1 + \frac{r\cot\sigma}{\varrho}\cos\theta\right)$$

$$+ d^2\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega^2} + d\frac{\frac{r\Omega}{\varrho}}{d\omega} + \frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega} = 0.$$

Wird hierin der Werth von T aus 8) eingesetzt, ferner der Werth von $\frac{d\theta}{d\omega}$ aus 9), so geht die vorstehende Gleichung in folgende über:

10) $$R_1 \cos\tau\left[d^2\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\cos\sigma}{d\omega}}{d\omega^2} + d\frac{\frac{r\cos\sigma}{\varrho}}{d\omega} + \frac{\varrho}{r}\frac{d\cos\sigma}{d\omega}\right]$$
$$d^2\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega^2} + d\frac{\frac{r\Omega}{\varrho}}{d\omega} + \frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega} = 0.$$

Wenn $r = \infty$, so erhält man aus den Gleichungen 6) und 7), in Verbindung mit 60)* von IV:

11) $$R_1 \cos\tau\left[\frac{d^2\cos\sigma}{d\varepsilon^2} + \cos\sigma\right] + \frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2} + \Omega = 0.$$

Es erweist sich nicht nöthig die Gleichung 11) neben der Gleichung 10) zu betrachten, da die Gleichung 10), wie sich zeigen wird, sämmtliche Fälle umfasst.

In der Gleichung 10) ist $R_1 \cos\tau$ nur von v abhängig; die Gleichung 10) kann nur unter den beiden Bedingungen bestehn, entweder ist $R_1 \cos\tau = k$, wo k eine Constante bedeutet, oder die linke Seite verschwindet identisch in Folge der beiden Gleichungen:

12) $$d^2 \frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\cos\sigma}{d\omega}}{d\omega^2} + d\frac{\frac{r\cos\sigma}{\varrho}}{d\omega} + \frac{\varrho}{v}\frac{d\cos\sigma}{d\omega} = 0.$$

13) $$d^2 \frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega^2} + d\frac{\frac{r\Omega}{\varrho}}{d\omega} + \frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega} = 0.$$

Wenn $R_1 \cos\tau = k$ constant ist, so zeigen die Gleichungen 2), dass die gesuchte Fläche eine Parallelfläche zu der Fläche ist, welche $k = 0$ entspricht. Nimmt man in 10) $R_1 \cos\tau = 0$, so ergiebt sich die Gleichung 13). In Folge der Gleichungen von I sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ die particulären Integrale der Differentialgleichung dritter Ordnung:

14) $$d^2 \frac{\frac{\varrho}{r}\frac{dH}{d\omega}}{d\omega^2} + d\frac{\frac{rH}{\varrho}}{d\omega} + \frac{\varrho}{r}\frac{dH}{d\omega} = 0.$$

Die Gleichung 14) enthält die beiden Gleichungen 12) und 13), sowie die Gleichung 10) wenn $R_1 \cos\tau = k$ ist.

In Folge der Gleichungen IV 1) und IV 3) hat man:

$$\cos\alpha\cos a + \cos\beta\cos b + \cos\gamma\cos c = \cos\sigma,\quad \cos\alpha\cos a'' + \cos\beta\cos b'' + \cos\gamma\cos c'' = 0,$$
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \Omega.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen geben die Gleichungen 2) respective mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ multiplicirt und addirt:

15) $$\xi_1^*\cos\alpha + \eta_1^*\cos\beta + \zeta_1^*\cos\gamma = \Omega + R_1\cos\tau . \cos\sigma.$$

Ist $R_1 \cos\tau = k$, so giebt die Gleichung 10)

16) $$\Omega + R_1\cos\tau\cos\sigma = \Omega + k\cos\sigma = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma,$$

wo x_0, y_0 und z_0 Constanten sind. Die Gleichung 15) lässt sich hierdurch auf die Form:

$$17)\qquad (\xi_1^* - x_0)\cos\alpha + (\eta_1^* - y_0)\cos\beta + (\zeta_1^* - z_0)\cos\gamma = 0$$

bringen. Die Constanten x_0, y_0, z_0 beziehn sich nur auf die Lage des Anfangspunktes der Coordinaten. Man kann immer $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ nehmen. Dem Falle $R_1 \cos\sigma = k$ entsprechen dann nach 16) und 17) folgende Gleichungen:

$$18)\qquad \Omega + k\cos\sigma = 0,\quad \xi_1^*\cos\alpha + \eta_1^*\cos\beta + \zeta_1^*\cos\gamma = 0.$$

Wenn $R_1 \cos\tau$ variabel ist, so finden die Gleichungen 12) und 13) statt. Sind A, B, C, x_0, y_0, z_0 Constanten, so geben die bemerkten Gleichungen:

$$19)\quad \cos\sigma = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma,\quad \Omega = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma.$$

Da, wie leicht ersichtlich, die Constanten x_0, y_0, z_0 sich nur auf die Lage des Anfangspunktes der Coordinaten beziehn, so nehme man einfach $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, also $\Omega = 0$. Die Verbindung der Gleichungen 15) und 19) führt zu den folgenden:

$$20)\begin{cases} \Omega = 0,\quad \cos\sigma = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma, \\ (\xi_1^* - AR_1\cos\tau)\cos\alpha + (\eta_1^* - BR_1\cos\tau)\cos\beta + (\zeta_1^* - CR_1\cos\tau)\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Jedes der beiden Gleichungssysteme 18) und 20) enthält eine Gleichung von der Form:

$$21)\qquad V_1\cos\alpha + V_2\cos\beta + V_3\cos\gamma = 0,$$

wo V_1, V_2, V_3 nur von v abhängen. Die Gleichung 21) nach s differentiirt giebt:

$$(V_1\cos\lambda + V_2\cos\mu + V_3\cos\nu)\,\frac{1}{\varrho} = 0.$$

Schliesst man den Fall $\varrho = \infty$ aus, so reducirt sich die vorstehende Gleichung auf:

22) $$V_1 \cos\lambda + V_2 \cos\mu + V_3 \cos\nu = 0.$$

Die Gleichung 22) nach s differentiirt liefert, unter Zuziehung der Gleichung 21).

$$(V_1 \cos l + V_2 \cos m + V_3 \cos n)\frac{1}{r} = 0.$$

Hieraus folgt entweder:

23) $$V_1 \cos l + V_2 \cos m + V_3 \cos n = 0,$$

oder $r = \infty$. Bestehn die Gleichungen 21), 22) und 23), so geben dieselben zum Quadrat erhoben und addirt:

$$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = 0$$

d. h. $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$. Für die Annahme $r = \infty$ kann man $\cos\gamma = 0$ nehmen, wodurch sich die Gleichung 21) auf $V_1 \cos\alpha + V_2 \cos\beta = 0$ reducirt. Soll nun, wegen $\cos\beta = \pm \sin\alpha$, der Winkel α nicht constant sein, so müssen V_1 und V_2 gleichzeitig verschwinden. Die Gleichung 21) führt also auf die Annahmen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$, oder $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ und $\cos\gamma = 0$. Es ist zu bemerken, dass dem, schon vorhin behandelten, Falle $\varrho = \infty$ in der Gleichung 21) $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$ und $V_3 = 0$ entsprechen. Nur in diesem Falle bleiben zwei der Functionen V_1, V_2, V_3 unbestimmt. Für die weitere Behandlung der beiden Annahmen, enthalten in den Gleichungen 18) und 20), ist es am einfachsten, dieselben einzeln zu untersuchen. Allgemeine Gleichungen, welche beiden Annahmen gemein sind, lassen für jede derselben so wesentliche Reductionen zu, dass eine Aufstellung solcher allgemeinen Gleichungen nicht nöthig erscheint. Von den beiden sich darbietenden Fällen soll zuerst der einfachere untersucht werden.

Erster Fall.

Nimmt man $R_1 \cos\tau = k$, so werden die Gleichungen 2):

24) $$\begin{cases} \xi_1^* = x + k\cos a - R_1 \sin\tau\cos a'', \\ \eta_1^* = y + k\cos b - R_1 \sin\tau\cos b'', \\ \zeta_1^* = z + k\cos c - R_1 \sin\tau\cos c''. \end{cases}$$

In Folge der Gleichungen 18) finden die Gleichungen statt:

25) $$\Omega + k\cos\sigma = 0,$$

26) $$\xi_1^* \cos\alpha + \eta_1^* \cos\beta + \zeta_1^* \cos\gamma = 0.$$

Die Gleichung 26) wird identisch für $\xi_1^* = 0$, $\eta_1^* = 0$, $\zeta_1^* = 0$. Die osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien sind dann sämmtlich concentrisch. Die Gleichungen 24) geben, wenn die linken Seiten verschwinden, nach v differentiirt:

$$0 = -R_1 \sin\tau \frac{\sqrt{G}}{r''} \cos a + \frac{R_1 \sin\tau}{\sqrt{E}} \frac{d\sqrt{G}}{du} \cos a' - \left(\frac{dR_1 \sin\tau}{dv} + \frac{k\sqrt{G}}{r''} - \sqrt{G}\right) \cos a'',$$

$$0 = -R_1 \sin\tau \frac{\sqrt{G}}{r''} \cos b + \frac{R_1 \sin\tau}{\sqrt{E}} \frac{d\sqrt{G}}{du} \cos b' - \left(\frac{dR_1 \sin\tau}{dv} + \frac{k\sqrt{G}}{r''} - \sqrt{G}\right) \cos b'',$$

$$0 = -R_1 \sin\tau \frac{\sqrt{G}}{r''} \cos c + \frac{R_1 \sin\tau}{\sqrt{E}} \frac{d\sqrt{G}}{du} \cos c' - \left(\frac{dR_1 \sin\tau}{dv} + \frac{k\sqrt{G}}{r''} - \sqrt{G}\right) \cos c''.$$

Da $R_1 \sin\tau$ nicht verschwindet, so können diese Gleichungen nur bestehn, wenn

$$\frac{\sqrt{G}}{r''} = 0, \quad \frac{d\sqrt{G}}{du} = 0, \quad \frac{dR_1 \sin\tau}{dv} + \frac{k\sqrt{G}}{r''} - \sqrt{G} = 0.$$

Wegen $r'' = \infty$ ist die Fläche developpabel. Da weiter $\frac{d\sqrt{G}}{du} = 0$, so sind $\cos a''$, $\cos b''$, $\cos c''$ wegen:

$$\frac{d\cos a''}{dv} = 0, \quad \frac{d\cos b''}{dv} = 0, \quad \frac{d\cos c''}{dv} = 0,$$

nur von u abhängig. Die entsprechende Fläche ist derjenigen parallel, für welche $k = 0$ ist. Nimmt man in den Gleichungen 24) $\xi_1^* = 0$, $\eta_1^* = 0$, $\zeta_1^* = 0$ und $k = 0$, so erhält man aus denselben:

$$\frac{x}{\cos a''} = \frac{y}{\cos b''} = \frac{z}{\cos c''}.$$

Da a'', b'', c'' nur von u abhängen, so ist durch die vorstehenden Gleichungen eine conische Fläche characterisirt. Den concentrischen osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien entspricht im vorliegenden Falle die Parallelfläche einer beliebigen conischen Fläche.

Die Gleichung 26) giebt zweitens zu der Annahme $\xi_1^* = 0$, $\eta_1^* = 0$ und $\cos\gamma = 0$ Veranlassung. Die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien liegen in diesem Falle auf einer Geraden. In den Gleichungen 24) setze man $\xi_1^* = 0$, $\eta_1^* = 0$, für $\cos a$, $\cos a''$ etc. ihre Werthe aus den Gleichungen IV 51) und IV 53), man erhält dann:

$$\begin{aligned}
0 &= x + k(\sin\varepsilon\cos\sigma - \cos\varepsilon\sin\sigma\sin\theta) - R_1\sin\tau\cos\varepsilon\cos\theta,\\
0 &= y - k(\cos\varepsilon\cos\sigma + \sin\varepsilon\sin\sigma\sin\theta) - R_1\sin\tau\sin\varepsilon\cos\theta,\\
\zeta_1^* &= z + k\sin\sigma\cos\theta - R_1\sin\tau\sin\theta.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen leitet man die folgenden ab:

27)
$$\left\{\begin{aligned}
x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon &= -k\cos\sigma,\\
x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon &= k\sin\sigma\sin\theta + R_1\sin\tau\cos\theta,\\
z &= \zeta_1^* - k\sin\sigma\cos\theta + R_1\sin\tau\sin\theta.
\end{aligned}\right.$$

Um den Vergleich der vorstehenden Gleichungen mit den Gleichungen IV 67) zu erleichtern, betrachte man zuerst die Parallelfläche für welche $k = 0$ ist.

Wegen der Gleichung 25) ist dann in den Gleichungen IV 67) $\Omega = 0$ zu nehmen, also auch $J = 0$. Es ergiebt sich so:

$$R_1\sin\tau = -\frac{dW}{dV},\ \xi_1^* = W.$$

Eliminirt man W zwischen diesen Gleichungen, so erhält man für die Gleichungen 27) die Bedingung:

28)
$$R_1\sin\tau = -\frac{d\xi_1^*}{dV}.$$

Zweiter Fall.

Die Gleichungen 20) geben zu ganz ähnlichen Betrachtungen Veranlassung wie die Gleichungen 18). In der Gleichung:

29) $(\xi_1^* - AR_1 \cos\tau)\cos\alpha + (\eta_1^* - BR_1 \cos\tau)\cos\beta + (\zeta_1^* - CR_1 \cos\tau)\cos\gamma = 0$

nehme man zuerst $\cos\gamma = 0$ und $\xi_1^* = AR_1 \cos\tau$, $\eta_1^* = BR_1 \cos\tau$. Die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien liegen in einer festen Ebene, welche durch die Axe der z geht. Wird der Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene der x und y zur Axe der y genommen, so ist $\xi_1^* = 0$, also $A = 0$. Setzt man $B = -k$, so treten an Stelle der Gleichungen 29) und:

30) $$\cos\sigma = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma$$

die folgenden:

31) $$\eta_1^* = -kR_1 \cos\tau,\ \cos\sigma = -k\cos\beta.$$

Für $\Omega = 0$ reduciren sich die Gleichungen IV 67) auf:

32) $$\begin{cases} x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = 0, \\ x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon = -\cos\theta\dfrac{dW}{dV}, \\ z = W - \sin\theta\dfrac{dW}{dV}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dass die Ebenen der planen Krümmungslinien sämmtlich durch dieselbe Gerade, die Axe der z, gehn. Legt man die Formeln 50)* zu Grunde, so ist $\cos\beta = -\cos\varepsilon$. Die zweite Gleichung 31) wird nun:

33) $$\cos\sigma = k\cos\varepsilon.$$

Dieses ist genau dieselbe Gleichung wie die erste Gleichung V 8). Es ergeben sich für $\sin\theta$ und $\cos\theta$ dieselben Werthe wie in V 11). Die Gleichungen 51), 52) und 53) von IV) haben im vorliegenden Falle dieselbe Bedeutung wie in V. Hieraus schliesst man, dass das System der Krümmungslinien (u) ebenfalls plan ist, also aus Kreisen besteht. Man nehme, wie in V 11) und V 8):

$$34)\quad \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{e^{2V}[\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}+k\sin\varepsilon]^2-1}{e^{2V}[\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}+k\sin\varepsilon]^2+1}, \\ \cos\theta = \dfrac{2e^{V}[\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}+k\sin\varepsilon]}{e^{2V}[\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}+k\sin\varepsilon]^2+1}, \\ \cos\sigma = k\cos\varepsilon,\ \sin\sigma = \sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}\ . \end{cases}$$

Die dritte Gleichung 32) nach u differentiirt giebt:

$$35)\quad \sqrt{E}\cos c' = -\cos\theta\frac{d\theta}{du}\frac{dW}{dV}.$$

Nun ist aber nach IV 8)* für $r=\infty$:

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\cot\sigma\cos\theta}{\varrho}\frac{ds}{du},$$

ferner ist nach IV 52) $\cos c' = \cos\sigma\cos\theta$. Mit Hülfe dieser Gleichungen erhält man aus 35):

$$36)\quad \sqrt{E} = -\frac{\cos\theta}{\sin\sigma}\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{du}\frac{dW}{dV}.$$

Nach IV 5) ist:

$$\frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{\sin\theta}{\varrho}\frac{ds}{du} - \frac{d\sigma}{du} = \left(\sin\theta - \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{du},$$

wenn wieder $ds = \varrho\, d\varepsilon$ gesetzt wird. Diese Gleichung werde mit $\sin\sigma$ multiplicirt, nach 33)

$$-\sin\sigma\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\cos\sigma}{d\varepsilon} = -k\sin\varepsilon$$

substituirt. Es folgt dann:

$$\sin\sigma\frac{\sqrt{E}}{r'} = (\sin\theta\sin\sigma - k\sin\varepsilon)\,\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{du}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung 36) giebt:

$$r' = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta\sin\sigma - k\sin\varepsilon}\frac{dW}{dV}.$$

Unter Zuziehung der Gleichungen 34) nimmt der vorstehende Ausdruck für r' folgende Form an:

37) $$r' = -\frac{2e^V}{(1-k^2)e^{2V}-1}\frac{dW}{dV}.$$

Es ist also r' von u unabhängig, d. h. das System der Krümmungslinien (u) besteht aus Kreisen. Man kann die entsprechende Fläche leicht als Enveloppe einer Kugelfläche darstellen, indem ein ähnliches Verfahren eingeschlagen wird, wie das in III befolgte, um dort die Gleichungen 15) u. folg. zu bilden.

Nach IV 51) sind die Winkel a, b, c bestimmt durch:

38) $$\begin{cases} \cos a = \sin\varepsilon\cos\sigma - \cos\varepsilon\sin\sigma\sin\theta, \\ \cos b = -\cos\varepsilon\cos\sigma - \sin\varepsilon\sin\sigma\sin\theta, \\ \cos c = \sin\sigma\cos\theta. \end{cases}$$

Man bilde nun die Werthe von X, Y, Z, definirt durch die Gleichungen:

39) $$X = x + r'\cos a,\quad Y = y + r'\cos b,\quad Z = z + r'\cos c.$$

Mittelst der Gleichungen 32), 34), 37) und 38) erhält man:

40) $$\begin{cases} X = 0, \\ Y = \dfrac{2ke^V}{(1-k^2)e^{2V}-1}\dfrac{dW}{dV} = -kr', \\ Z = W - \dfrac{(1-k^2)e^{2V}+1}{(1-k^2)e^{2V}-1}\dfrac{dW}{dV}. \end{cases}$$

An Stelle der Gleichungen 32) lassen sich die folgenden aufstellen, durch welche die Enveloppe einer Kugelfläche bestimmt ist:

$$x^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2=r'^2,$$

$$(y-Y)\frac{dY}{dV}+(z-Z)\frac{dZ}{dV}=-r'\frac{dr'}{dV}.$$

Es sind hierin r', X, Y, Z durch die Gleichungen 37) und 40) bestimmt. Man kann die Gleichungen 2) mit den Gleichungen 32) in Verbindung bringen, wodurch sich Beziehungen zwischen den Functionen ergeben, welche von V abhängig sind. In die Gleichungen 2) substituire man für $\cos a$, $\cos a''$ etc. die Werthe aus IV 51) und IV 53), ersetze dann x, y, z, θ und σ mittelst der Gleichungen 32) und 34). Die etwas weitläufigen Rechnungen führen zu folgenden Resultaten:

41)
$$\begin{cases} \xi_1^* = 0, \quad \eta_1^* = -kR_1\cos\tau, \\ 2e^V\left[\frac{dW}{dV}+R_1\sin\tau\right]+R_1\cos\tau\left[(1-k^2)e^{2V}-1\right]=0, \\ \zeta_1^* = W+R_1\cos\tau.\frac{(1-k^2)e^{2V}-1}{2V}. \end{cases}$$

Bezeichnet man durch ψ den Winkel, welchen die Ebene der planen Krümmungslinie (u) mit der Normale im Punkte (x, y, z) der Fläche bildet, so ist:

$$2e^V+[(1-k^2)e^{2V}-1]\cot\psi=0.$$

Durch Einführung von ψ statt V lassen sich die Gleichungen 40) und 41) noch etwas einfacher darstellen, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll. Die letzte zu untersuchende Annahme, welche die Gleichung 29) darbietet, besteht in dem gleichzeitigen Verschwinden der Factoren von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, und $\cos\gamma$, d. h. für:

42) $$\xi_1^* = AR_1\cos\tau, \quad \eta_1^* = BR_1\cos\tau, \quad \zeta_1^* = CR_1\cos\tau.$$

Die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien liegen auf einer Geraden. Wird dieselbe zur Axe der z genommen, so ist $\xi_1^*=0$, $\eta_1^*=0$. Setzt man noch $C=k$, so giebt die dritte Gleichung 42)

43) $$\zeta_1^* = kR_1 \cos\tau.$$

Da in diesem Falle $A = 0$, $B = 0$, $C = k$, so nimmt die zweite Gleichung 20) die Form an:

44) $$\cos\sigma = k\cos\gamma.$$

In den Gleichungen 2) nehme man $\xi_1^* = 0$, $\eta_1^* = 0$ und $\zeta_1^* = kR_1 \cos\tau$. Man erhält so:

$$0 = x + R_1 (\cos a \cos\tau - \cos a'' \sin\tau),$$
$$0 = y + R_1 (\cos b \cos\tau - \cos b'' \sin\tau),$$
$$kR_1 \cos\tau = z + R_1 (\cos c \cos\tau - \cos c'' \sin\tau).$$

Diese Gleichungen multiplicire man respective mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und bilde die Summe der Producte. Analog verfahre man mit den Factoren $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ und $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$. Durch Substitution der Werthe von $\cos a$, $\cos a''$ etc. aus IV 10) und IV 12) folgt dann:

45) $$\begin{cases} kR_1 \cos\tau\cos\gamma = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + R_1 \cos\tau\cos\sigma, \\ kR_1 \cos\tau\cos\nu = x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu + R_1 \cos\tau\sin\theta\sin\sigma - R_1 \sin\tau\cos\theta, \\ kR_1 \cos\tau\cos n = x\cos l + y\cos m + z\cos n + R_1 \cos\tau\cos\theta\sin\sigma - R_1 \sin\tau\sin\theta. \end{cases}$$

Mit diesen Gleichungen sind die Gleichungen IV 40) zu verbinden unter der Voraussetzung $\Omega = 0$. Da nach IV 37) dann auch $J = 0$ ist, so reduciren sich die Gleichungen 45) auf die beiden folgenden:

46) $$\begin{gathered} kR_1 \cos\tau\cos\nu = \\ -W(\sin\theta - \sin\varphi)e^q - R_1 \cos\tau\sin\theta\sin\sigma + \left(\frac{dW}{dV} - R_1 \sin\tau\right)\cos\theta, \\ kR_1 \cos\tau\cos n = \\ W(\cos\theta - \cos\varphi)e^q + R_1 \cos\tau\cos\theta\sin\sigma + \left(\frac{dW}{dV} - R_1 \sin\tau\right)\sin\theta, \end{gathered}$$

oder auch:

47)
$$\left\{\begin{array}{c} kR_1\cos\tau\cos\nu - We^q\sin\varphi = \\ -(R_1\cos\tau\sin\sigma + We^q)\sin\theta + \left(\frac{dW}{dV} - R_1\sin\tau\right)\cos\theta, \\ kR_1\cos\tau\cos n + We^q\cos\varphi = \\ (R_1\cos\tau\sin\sigma + We^q)\cos\theta + \left(\frac{dW}{dV} - R_1\sin\tau\right)\sin\theta. \end{array}\right.$$

Die Gleichungen 46) gehen durch Elimination von $\frac{dW}{dV}$:

48) $$[\sin\sigma + k(\cos\nu\sin\theta - \cos n\cos\theta)]R_1\cos\tau + [1 - \cos(\theta - \varphi)]We^q = 0.$$

Auf ähnliche Art erhält man aus 46):

49) $$k(\cos\nu\cos\theta + \cos n\sin\theta)R_1\cos\tau + \sin(\theta - \varphi)We^q = \frac{dW}{dV} - R_1\sin\tau.$$

Aus der Gleichung 48) bilde man $\frac{dW}{dV}$, substituire den dafür erhaltenen Ausdruck in die Gleichung 49). Mit Rücksicht auf die Gleichung IV 20), nämlich:

$$-\frac{d\theta}{dV} = [1 - \cos(\theta - \varphi)]e^q,$$

ergiebt sich die folgende Beziehung:

$$[\sin\sigma + k(\cos\nu\sin\theta - \cos n\cos\theta)]\frac{dR_1\cos\tau}{dV} + [1 - \cos(\theta - \varphi)]R_1\sin\tau\, e^q.$$

Die Elimination von $\sin\sigma + k(\cos\nu\sin\theta - \cos n\cos\theta)$ und $1 - \cos(\theta - \varphi)$ zwischen der vorstehenden Gleichung und der Gleichung 48) führt auf:

50) $$\frac{1}{R_1\cos\tau}\, d\frac{R_1\cos\tau}{dV} = \frac{R_1\sin\tau}{W}.$$

Eine zweite Gleichung zwischen den von v oder V abhängigen Functionen ergiebt sich aus der Summe der Quadrate der beiden Gleichungen 47). Man setze in dieser Summe $\cos^2\nu + \cos^2 n = 1 - \cos^2\gamma$, $\sin^2\sigma = 1 - \cos^2\sigma$, ferner nach 44) $\cos\sigma = k\cos\gamma$. Dividirt man die erhaltene Gleichung durch $2 R_1 \cos\tau W$, so lässt sich folgende Gleichung herstellen:

$$-[\sin\sigma + k(\cos\nu \sin\varphi - \cos n \cos\varphi)]\, e^q =$$
$$\frac{(R_1 \cos\tau)^2 (1-k^2) + \left(\frac{dW}{dV} - R_1 \sin\tau\right)^2}{2 R_1 \cos\tau W}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nur von u oder s, die rechte Seite nur von v oder V abhängt, so muss jede Seite constant sein. Bezeichnet g eine Constante, so zerfällt die vorstehende Gleichung in die beiden folgenden:

51) $$\sin\sigma + k(\cos\nu \sin\varphi - \cos n \cos\varphi) = -g\, e^{-q}.$$

52) $$(R_1 \cos\tau)^2 (1-k^2) + \left(\frac{dW}{dV} - R_1 \sin\tau\right)^2 = 2 g R_1 \cos\tau W.$$

Durch Einsetzung des Werthes von $R_1 \sin\tau$ aus der Gleichung 50) in die Gleichung 52) erhält man:

$$\left[\frac{d\frac{W}{R_1 \cos\tau}}{dV}\right]^2 = 2g \frac{W}{R_1 \cos\tau} - 1 + k^2.$$

Bedeutet g_0 eine Constante, so giebt die vorstehende Gleichung integrirt:

53) $$2 g W = R_1 \cos\tau [(g V - g_0)^2 + 1 - k^2].$$

Es verschwindet g_0 mit g. Ist $g = 0$, so zerfällt die Gleichung 52) in $1 = k^2$ und

$$\frac{dW}{dV} = R_1 \sin\tau.$$

Da also gleichzeitig $g = 0$ und $k = 1$, so muss auch in 53) dann $g_0 = 0$ sein. Es lässt sich demnach $g_0 = g V_0$ setzen, wo V_0 eine weitere Constante bedeutet. Man kann nun, unbeschadet der Allgemeinheit, $V_0 = 0$ setzen, da es gleichgültig ist, ob die arbiträre Function V, oder $V - V_0$ in den Ausdrücken für $\sin\theta$ und $\cos\theta$ vorkommt. Nimmt man in der Gleichung 53) $g_0 = 0$, so geht dieselbe über in:

54) $$2g W = R_1 \cos\tau[g^2 V^2 + 1 - k^2].$$

Durch Combination dieser Gleichung mit der Gleichung 50) findet man leicht:

55) $$\frac{dW}{dV} - R_1 \sin\tau = g V R_1 \cos\tau.$$

In die Gleichung 48) setze man für $\sin\theta$ und $\cos\theta$ die Werthe aus IV 19). Wegen der Gleichung 54) lässt sich durch Division mit $R_1 \cos\tau$ die Function W durch V ausdrücken. Es ergiebt sich so:

56)
$$g(V+M)^2[\sin\sigma + k(\cos\nu\sin\varphi - \cos n\cos\varphi)] + 2kg(V+M)e^{-q}[\cos\nu\cos\varphi + \cos n\sin\varphi]$$
$$+ g e^{-2q}[\sin\sigma - k(\cos\nu\sin\varphi - \cos n\cos\varphi)] + e^{-q}[g^2 V^2 + 1 - k^2] = 0.$$

Da V variabel ist, so müssen die Factoren von V^2 und V einzeln verschwinden. Es ergeben sich dann die Gleichung 51) und

57) $$k(\cos\nu\cos\varphi + \cos n\sin\varphi) = gM.$$

Die Gleichung 56) reducirt sich unter Zuziehung der Gleichungen 51) und 57) auf:

$$g[\sin\sigma - k(\cos\nu\cos\varphi - \cos n\sin\varphi)]e^{-q} + g^2 M^2 + 1 - k^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird identisch in Folge von $\cos\sigma = k\cos\gamma$, wenn die Werthe von ge^{-q} und gM aus den Gleichungen 51) und 57) eingesetzt werden. Durch Differentiation nach s kehren die Gleichungen 51) und 57) in sich zurück, unter Beachtung der in IV vorkommenden Gleichungen 9), 14) und 17).

Durch Elimination von φ zwischen den Gleichungen 51) und 57) folgt:

$$(ge^{-q} + \sin\sigma)^2 + (gM)^2 = k^2(\cos^2\nu + \cos^2 n) = k^2(1 - \cos^2\gamma).$$

Setzt man links $\sin^2\sigma = 1 - \cos^2\sigma = 1 - k^2\cos^2\gamma$, so giebt die vorstehende Gleichung

58) $$g^2(e^{-2q} + M^2) + 2g\,e^{-q}\sin\sigma + 1 - k^2 = 0.$$

Bei der folgenden Untersuchung möge zuerst die Annahme $g = 0$, $k = 1$ ausgeschlossen sein.

Durch Substitution der Werthe von $\cos\nu$ und $\cos n$ aus den Gleichungen 46) erhält man:

$$kR_1\cos\tau(\cos\nu\sin\theta - \cos n\cos\theta) = -[1-\cos(\theta-\varphi)]\,We^q - R_1\cos\tau\sin\sigma,$$

$$kR_1\cos\tau(\cos\nu\cos\theta + \cos n\sin\theta) = -\sin(\theta-\varphi)\,We^q + \frac{dW}{dV} - R_1\sin\tau.$$

In diese Gleichungen setze man die Werthe von W und $\frac{dW}{dV} - R_1\sin\tau$ aus 53) und 55), dividire auf beiden Seiten durch $R_1\cos\tau$. Aus IV 19) führe man noch die Werthe von $1-\cos(\theta-\varphi)$ und $\sin(\theta-\varphi)$ ein. Es folgt dann:

59) $$\left\{\begin{aligned} &k(\cos\nu\sin\theta - \cos n\cos\theta) = -\frac{g^2V^2+1-k^2}{g}\,\frac{e^{-q}}{(V+M)^2+e^{-2q}} - \sin\sigma,\\ &k(\cos\nu\cos\theta + \cos n\sin\theta) = -\frac{g^2V^2+1-k^2}{g}\,\frac{V+M}{(V+M)^2+e^{-2q}} + gV =\\ &\qquad\frac{(g^2V^2-1+k^2)M + g^2[e^{-2q}+M^2]V - (1-k^2)]V}{[(V+M)^2+e^{-2q}]g}.\end{aligned}\right.$$

Die Elimination von W zwischen den Gleichungen 54) und 55) giebt:

60) $$2gR_1\sin\tau = \frac{dR_1\cos\tau}{dV}[g^2V^2+1-k^2].$$

Statt V führe man eine Function ψ mittelst der Gleichung:

61) $$gV = \sqrt{1-k^2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\psi}{2}$$

ein. Hierdurch vereinfacht sich die Gleichung 60) in:

$$62)\qquad R_1 \sin\tau = \sqrt{1-k^2}\,\frac{d R_1 \cos\tau}{d\psi}.$$

Setzt man aus 58)

$$63)\qquad g^2(e^{2q}+M^2) = -2g e^{-q}\sin\sigma - (1-k^2),$$

ferner aus 61) den Werth von V, so folgt:

$$64)\qquad \begin{aligned}[(V+M)^2+e^{-2q}]\, g^2\cos^2\frac{\psi}{2} &= -g e^{-q}\sin\sigma - (g e^{-q}\sin\sigma + 1 - k^2)\cos\psi \\ &\quad + gM\sqrt{1-k^2}\sin\psi.\end{aligned}$$

Man kann dieser Gleichung auf folgende Art eine etwas einfachere Form geben. Wird aus 58) der Werth von g^2M^2 substituirt, so ist:

$$(g e^{-q}\sin\sigma + 1 - k^2)^2 + (gM)^2(1-k^2) = g^2 e^{-2q}(k^2-\cos^2\sigma) = (g e^{-q} k\sin\gamma)^2,$$

da $\cos\sigma = k\cos\gamma$. Ist nun t ein näher zu bestimmender Winkel, so wird die vorstehende Gleichung durch:

$$65)\qquad \begin{aligned} g e^{-q}\sin\sigma + 1 - k^2 &= g e^{-q} k \sin\gamma \sin t, \\ gM\sqrt{1-k^2} &= g e^{-q} k\sin\gamma\cos t \end{aligned}$$

identisch. Durch Einführung des Winkels t nimmt die Gleichung 64) folgende Form an:

$$66)\qquad [(V+M)^2+e^{-2q}]\, g\cos^2\frac{\psi}{2} = -e^{-q}[\sin\sigma + k\sin\gamma\sin(t-\psi)].$$

Die Anwendung der Gleichungen 63) und 65) giebt:

$$g^2(e^{-2q}+M^2) - (1-k^2) = -2(g e^{-q}\sin\sigma + 1 - k^2) = -2g e^{-q} k\sin\gamma\sin t.$$

Auf die Gleichungen 59) wende man die Gleichungen 61), 65), 66) und die vorstehende an. Mit Rücksicht auf $\sin^2\sigma = 1 - k^2\cos^2\gamma$ ergiebt sich:

$$67)\quad \begin{cases} \sin\theta\cos\nu - \cos\theta\cos n = \sin\gamma\,\dfrac{-k\sin\gamma + \sin\sigma\sin(\psi - t)}{\sin\sigma - k\sin\gamma\sin(\psi - t)}, \\[2ex] \sin\theta\cos n + \cos\theta\cos\nu = \sin\gamma\,\dfrac{\cos(\psi - t)\,.\,\sqrt{1-k^2}}{\sin\sigma - k\sin\gamma\sin(\psi - t)}. \end{cases}$$

Es bleibt noch die Bestimmung des Winkels t übrig, welche sich auf folgende Art ausführen lässt. Aus den Gleichungen 51) und 57) erhält man leicht:

$$\sin\varphi\sin^2\gamma = -\frac{\sin\sigma + g\,e^{-q}}{k}\cos\nu + \frac{gM}{k}\cos n.$$

Aus den Gleichungen 65) entwickele man die Werthe von e^{-q} und M, substituire dieselben in die vorstehende Gleichung. Es folgt so:

$$\sin\varphi(k\sin\gamma\sin t - \sin\sigma) = k\cos\nu - \frac{\cos\nu\sin\sigma\sin t}{\sin\gamma} + \frac{\cos n\cos t\sqrt{1-k^2}}{\sin\gamma}.$$

Diese Gleichung werde mit $\cot\sigma$ multiplicirt, im zweiten und dritten Terme rechts setze man $\cos\sigma = k\cos\gamma$, hierdurch geht die bemerkte Gleichung in folgende über:

$$68)\quad \begin{aligned} \sin\varphi(k\sin\gamma\sin t - \sin\sigma)\cot\sigma &= k\cos\nu\cot\sigma - k\cot\gamma\cos\nu\sin t \\ &\quad + \frac{k\cos\gamma\cos n\cos t\sqrt{1-k^2}}{\sin\sigma\sin\gamma}. \end{aligned}$$

Nach den Gleichungen IV 14) und IV 17) ist $\dfrac{dq}{ds} = \dfrac{\cot\sigma\sin\varphi.}{\varrho}$ Mit Rücksicht hierauf werde die erste Gleichung 65) nach s differentiirt. Zieht man dabei die Relationen:

$$\frac{d\sin\gamma}{ds} = -\cot\gamma\frac{d\cos\gamma}{ds} = -\frac{\cot\gamma\cos\nu}{\varrho},$$

$$\frac{d\sin\sigma}{ds} = -\cot\sigma\frac{d\cos\sigma}{ds} = -k\cot\sigma\frac{d\cos\gamma}{ds} = -\frac{k\cot\sigma\cos\nu}{\varrho}$$

in Betracht, so ist $\dfrac{dt}{ds}$ durch die Gleichung:

$$-\frac{\sin\varphi\cot\sigma\sin\sigma}{\varrho}-\frac{k\cos\nu\cot\sigma}{\varrho}=-\frac{\sin\varphi\cot\sigma k\sin\gamma\,\mathrm{sint}}{\varrho}$$

$$-\frac{k\cot\gamma\cos\nu\,\mathrm{sint}}{\varrho}+k\sin\gamma\cos t\frac{dt}{ds}$$

bestimmt. Mit Hülfe der Gleichung 68) reducirt sich die vorstehende Gleichung für $\frac{dt}{ds}$ auf:

69)
$$\frac{dt}{ds}=\frac{\cos\gamma\cos n}{\varrho\sin\sigma\sin^2\gamma}\sqrt{1-k^2}.$$

Führt man statt s die Variabele u_1 mittelst der Gleichung:

70)
$$du_1=\frac{\cos n}{\varrho\sin^2\gamma}ds$$

ein, so ist:

$$\frac{dt}{du_1}=\frac{\cos\gamma}{\sin\sigma}\sqrt{1-k^2},\quad\left(\frac{dt}{du_1}\right)^2=\frac{\cos^2\gamma\,.\,(1-k^2)}{1-k^2\cos^2\gamma},$$

also:

71)
$$\cos^2\gamma\left[1-k^2+k^2\left(\frac{dt}{du_1}\right)^2\right]=\left(\frac{dt}{du_1}\right)^2.$$

Fügt man zu dieser Gleichung $\cos\alpha=\sin\gamma\cos s_1$, $\cos\beta=\sin\gamma\sin s_1$ hinzu, wo s_1 von s abhängt, so folgt:

$$(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2=(d\sin\gamma)^2+(\sin\gamma\,ds_1)^2,$$

und hieraus:

$$\frac{\cos^2\lambda+\cos^2\mu}{\varrho^2}=\frac{\cot^2\gamma\cos^2\nu}{\varrho^2}+\left(\sin\gamma\frac{ds_1}{ds}\right)^2.$$

Mittelst der Gleichung 70) ist nun einfach:

$$1=\left(\frac{ds_1}{du_1}\right)^2.$$

Für $s_1=u_1$ bestehn also die Gleichungen:

72)
$$\cos\alpha=\sin\gamma\cos u_1,\quad\cos\beta=\sin\gamma\sin u_1.$$

Durch die Gleichungen 45), 62), 67) und 69) ist die letzte Annahme, abgesehn vom besonderen Falle $k = 1$, welche die Betrachtung der Flächen mit einem Systeme planer und einem Systeme sphärischer Krümmungslinien erfordert, vollständig erledigt. Die angeführten Gleichungen scheinen für weitere Untersuchungen von speciellen Fällen besonders geeignet zu sein. Es sind die Gleichungen 70), 71) und 72 nur aufgestellt zur Herleitung eines Systems, welches von Herrn Bonnet herrührt. (Journal de l'École Polyt. t. XX p. 207 u. 208). Zu diesem Zwecke ersetze man die Gleichungen 45) durch die folgenden:

$$\text{73)}\quad \begin{cases} x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0. \\ z = R_1\cos\tau[k\sin^2\gamma + \sin\sigma(\sin\theta\cos\nu - \cos\theta\cos n)] \\ \quad + R_1\sin\tau(\cos\theta\cos\nu + \sin\theta\cos n] \\ x^2 + y^2 + (z - kR_1\cos\tau)^2 = (R_1\cos\tau)^2 + (R_1\sin\tau)^2. \end{cases}$$

Die zweite dieser Gleichungen lässt sich nach 67) auf folgende Form bringen, wobei $\sin^2\sigma - k^2\sin^2\gamma = 1 - k^2$ gesetzt und der Werth von $R_1\sin\tau$ aus 62) eingeführt ist:

$$\text{74)}\qquad z = (1-k^2)\sin\gamma \, . \, \frac{R_1\cos\tau\sin(\psi - t) + d\dfrac{R_1\cos\tau}{d\psi}\cos(\psi - t)}{\sin\sigma - k\sin\gamma\sin(\psi - t)}.$$

Durch Verbindung der Gleichungen 62), 71) bis 74) erhält man ohne Mühe das von Herrn Bonnet gefundene System, welches bei besonderen Anwendungen weniger einfach zu sein scheint, wie die oben erwähnten Gleichungen 45), 62), 67) und 69).

Die bisher aufgestellten Gleichungen schliessen den Fall $k = 1$ aus, welcher sich ohne grosse Entwickelungen erledigen lässt. Für $k = 1$ folgt aus 44) $\sigma = \gamma$. Nimmt man in den Gleichungen 51) und 57) $k = 1$, $g = 0$, so gehn dieselben in

$$\cos n\cos\varphi - \cos\nu\sin\varphi = \sin\sigma = \sin\gamma, \quad \cos\nu\cos\varphi + \cos n\sin\varphi = 0$$

über. Aus den vorstehenden Gleichungen ergeben sich für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ folgende Werthe:

75) $$\cos\varphi = \frac{\cos n}{\sin\gamma}, \quad \sin\varphi = -\frac{\cos\nu}{\sin\gamma}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass der Winkel φ, bestimmt durch die vorstehenden Gleichungen, der Differentialgleichung:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} + \frac{\cot\sigma}{\varrho}\cos\varphi = \frac{1}{r} + \frac{\cot\gamma}{\varrho}\cos\varphi$$

genügt. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 75) ergiebt sich weiter:

$$q = -\int \frac{\cos\gamma\cos\nu}{\varrho\sin^2\gamma}\,ds = -\int \frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\frac{d\cos\gamma}{ds}\,ds = \int \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma = \log\sin\gamma,$$

76) $$e^q = \sin\gamma, \quad M = \int e^{-q}\frac{\cot\sigma}{\varrho}\cos\varphi\,ds = \int \frac{\cos n\cos\gamma}{\varrho\sin^3\gamma}\,ds.$$

Wird der Werth von q aus 76) in die Gleichungen IV 19) eingesetzt, so ist der Winkel θ bestimmt durch:

77) $$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{-[(V+M)^2\sin^2\gamma - 1]\dfrac{\cos\nu}{\sin\gamma} + 2(V+M)\cos n}{(V+M)^2\sin^2\gamma + 1}, \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{[(V+M)^2\sin^2\gamma - 1]\dfrac{\cos n}{\sin\gamma} + 2(V+M)\cos\nu}{(V+M)^2\sin^2\gamma + 1}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 75), 76) und 77) geben:

$$\frac{\sin\gamma + \cos\nu\sin\theta - \cos n\cos\theta}{1 - \cos(\theta - \varphi)}e^{-q} = 1.$$

Wegen der vorstehenden Relation erhält man aus 48):

$$R_1\cos\tau + W = 0.$$

Da aber weiter für $g = 0$ die Gleichung 55)

$$\frac{dW}{dV} = R_1\sin\tau$$

giebt, so sind $R_1 \sin\tau$ und $R_1 \cos\tau$ durch die Gleichung:

78) $$R_1 \sin\tau = -d\frac{R_1 \cos\tau}{dV}$$

verbunden. In den Gleichungen 45) nehme man $k = 1$, $\sigma = \gamma$, substituire für θ und $R_1 \sin\tau$ ihre Werthe aus 77) und 78). Die Fläche, welche dem Werthe $k = 1$ entspricht, ist nun durch folgende Gleichungen definirt:

79) $$\left\{\begin{aligned}
& x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0 \\
& x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = \\
& 2R_1 \cos\tau \frac{\cos\nu + (V+M)\cos n \sin\gamma}{(V+M)^2\sin^2\gamma + 1} - \\
& \frac{[(V+M)^2\sin^2\gamma - 1]\dfrac{\cos n}{\sin\gamma} + 2(V+M)\cos\nu}{(V+M)^2\sin^2\gamma + 1}\,\frac{dR_1\cos\tau}{dV}, \\
& x\cos l + y\cos m + z\cos n = \\
& 2R_1 \cos\tau \frac{\cos n - (V+M)\cos\nu \sin\gamma}{(V+M)^2\sin^2\gamma + 1} + \\
& \frac{[(V+M)^2\sin^2\gamma - 1]\dfrac{\cos\nu}{\sin\gamma} - 2(V+M)\cos n}{(V+M)^2\sin^2\gamma + 1}\,\frac{dR_1\cos\tau}{dV}.
\end{aligned}\right.$$

Auf folgende Art lassen sich die vorstehenden Gleichungen noch etwas transformiren. Nimmt man:

80) $$\cos\alpha = \sin\gamma\cos u_1, \ \cos\beta = \sin\gamma\sin u_1,$$

so ist:

$$\cos\beta\frac{d\cos\alpha}{ds} - \cos\alpha\frac{d\cos\beta}{ds} = -\sin^2\gamma\frac{du_1}{ds},$$

das ist:

$$\frac{\cos n}{\varrho} = -\sin^2\gamma\frac{du_1}{ds}$$

Man führe u_1 statt s mittelst der Gleichung:

81) $$du_1 = -\frac{\cos n}{\varrho \sin^2\gamma} ds$$

ein. Die Gleichungen 80) differentiirt geben dann:

82) $$\cos\lambda = -\cot\gamma\cos\nu\cos u_1 + \frac{\cos n}{\sin\gamma}\sin u_1, \quad \cos\mu = -\cot\gamma\cos\nu\sin u_1 - \frac{\cos n}{\sin\gamma}\cos u_1.$$

Unter Zuziehung der Gleichungen I 8) erhält man aus 80) und 82):

83) $$\cos l = -\cot\gamma\cos n\cos u_1 - \frac{\cos\nu}{\sin\gamma}\sin u_1, \quad \cos m = -\cot\gamma\cos n\sin u_1 + \frac{\cos\nu}{\sin\gamma}\cos u_1.$$

Die zweite Gleichung 76) liefert durch Differentiation:

$$\frac{dM}{ds} = \frac{\cos n \cos\gamma}{\varrho \sin^3\gamma}$$

oder u_1 statt s aus 81) eingeführt:

84) $$\frac{dM}{du_1} = -\cot\gamma.$$

Wird diese Gleichung mit Rücksicht auf 81) differentiirt, so erhält man:

85) $$\frac{d^2M}{du_1^2} = -\frac{1}{\sin^3\gamma}\frac{d\cos\gamma}{ds}\frac{ds}{du_1} = \frac{\cos\nu}{\cos n \sin\gamma}.$$

Durch Combination der Gleichungen 84) und 85) mit $\cos^2\gamma + \cos^2\nu + \cos^2 n = 1$ folgt endlich:

86) $$\cos^2 n = \frac{1}{1 + \left(\frac{dM}{du_1}\right)^2 + \left(\frac{d^2M}{du_1^2}\right)^2}, \quad \cos^2\nu = \frac{\left(\frac{d^2M}{du_1^2}\right)^2}{1 + \left(\frac{dM}{du_1}\right)^2}\cos^2 n.$$

Nimmt man u_1 zur unabhängigen Variabeln, so lassen sich in den Gleichungen 79) alle von u_1 abhängigen Grössen ausdrücken durch

$\cos u_1$, $\sin u_1$, M und die Differentialquotienten von M nach u_1, wo nun M eine beliebige Function von u_1 bedeutet. Mit Hülfe der angeführten Gleichungen kann man an Stelle der Gleichungen 79) folgendes System aufstellen, in welchem zur Vereinfachung:

$$\frac{dM}{du_1} = M'$$

gesetzt ist:

$$x\cos u_1 + y\sin u_1 - zM' = 0,$$

$$x\sin u_1 - y\cos u_1 = -\frac{dR_1\cos\tau}{dV} + 2\,\frac{(V+M)R_1\cos\tau + (1+M'^2)\dfrac{dR_1\cos\tau}{dV}}{(V+M)^2+1+M'^2},$$

$$z = 2\,\frac{R_1\cos\tau - (V+M)\dfrac{dR_1\cos\tau}{dV}}{(V+M)^2+1+M'^2}.$$

Hiermit sind alle wesentlichen Annahmen erörtert, zu deren Untersuchung die Flächen mit einem Systeme planer und einem Systeme sphärischer Krümmungslinien Veranlassung geben. Die Flächen zerfallen nach dem Vorhergehenden in zwei Classen. Die erste Classe umfasst die Flächen, für welche die Projection des Radius der Kugelfläche, welche die sphärische Krümmungslinie enthält, auf die Normale zur Fläche constant ist. Eine solche Fläche ist gleichzeitig Parallelfläche einer einfacheren Fläche derselben Art, für welche die Ebenen der planen Krümmungslinien alle durch denselben Punkt gehn.

Sind die osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien concentrisch, so ist die entsprechende Fläche developpabel, nämlich die Parallelfläche einer Kegelfläche. Die planen Krümmungslinien sind in diesem Falle Geraden.

Liegen die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien auf einer Geraden, so sind die Ebenen der planen Krümmungslinien den Normalebenen einer planen Curve parallel.

Liegen endlich die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien auf einer ebenen Curve, so ist die Fläche die Enveloppe einer Kugelfläche von constantem Radius, deren Mittelpunkt eine beliebige ebene Curve beschreibt. Die beiden ebenen Curven, welche hier erwähnt sind, fallen nicht zusammen, sondern sind wesentlich von einander verschieden.

Die Flächen der zweiten Classe sind durch die beiden folgenden Eigenschaften bestimmt. Die Ebenen der planen Krümmungslinien gehn alle durch denselben Punkt. Die Ebene einer planen Krümmungslinie schneidet die Fläche unter einem Winkel, dessen Cosinus proportional ist dem Cosinus des Winkels, welchen die bemerkte Ebene mit einer festen Ebene einschliesst. Vom analytischen Gesichtspunkte aus sind die Flächen der zweiten Classe ungleich complicirter wie die in der ersten Classe enthaltenen. Beiden Classen gemeinschaftlich ist die Enveloppe einer Kugelfläche von constantem Radius, deren Mittelpunkt eine ebene Curve beschreibt, welcher Fall desshalb besonders behandelt und vorangestellt ist. Von diesem Falle abgesehn, bietet die zweite Classe zwei Fälle zu untersuchen, je nachdem die Ebenen der planen Krümmungslinien den Normalebenen einer planen Curve oder den Normalebenen einer beliebigen Curve doppelter Krümmung parallel sind. Im ersten Falle besteht das zweite System von Krümmungslinien aus Kreisen. Die Fläche ist die Enveloppe einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt eine ebene Curve beschreibt. Für irgend einen Punkt dieser Curve ist seine Distanz von einer festen Geraden dem Radius der Kugelfläche proportional. Die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien liegen auf einer ebenen Curve. Sind endlich die Ebenen der planen Krümmungslinien den Normalebenen einer Curve im Raume parallel, so liegen die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien auf einer Geraden. Die Untersuchung dieses letzten Falles, welcher wohl das meiste Interesse darbietet, ist in sofern nicht ohne Complication, als es sich um die Integration einer Differentialgleichung handelt, welche bei den vorhin erwähnten Fällen eine sehr einfache Form annimmt.

VII.

Ueber eine Erweiterung des Begriffs von Parallelflächen.

Anwendung auf die Flächen mit einem Systeme planer Krümmungslinien.

Die Eigenschaft zweier Parallelflächen, dass den Krümmungslinien der einen Fläche auch Krümmungslinien der andern Fläche entsprechen, kann zur Vereinfachung von Untersuchungen dienen, welche sich auf die bemerkten Curven beziehn. Ein Beispiel hierzu bietet die auf p. 64 u. f. gegebene Darstellung. Die „Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften aus d. J. 1870" enthalten p. 70—82 eine Erweiterung des Begriffs von Parallelflächen, nebst einigen Andeutungen über die Anwendung davon auf plane Krümmungslinien. Eine kurze Ausführung dieser Andeutungen, nebst Herleitung einiger ohne Beweis aufgestellten Resultate, bildet den Gegenstand der folgenden Darstellung.

Zwei Flächen S und S_1 mögen sich so entsprechen, dass die Normalen zu denselben in zwei correspondirenden Punkten P und P_1 einander parallel sind. Unter Beibehaltung der in II gegebenen Bezeichnungen, folgt, dass in den Punkten P und P_1 die Winkel a, b, c dieselben Werthe haben, dasselbe ist also auch der Fall mit dem Ausdruck:

$$\frac{d\cos a}{du}\frac{d\cos a}{dv}+\frac{d\cos b}{du}\frac{d\cos b}{dv}+\frac{d\cos c}{du}\frac{d\cos c}{dv}.$$

Sind nun u und v für die Fläche S die Argumente der Krümmungslinien, so verschwindet der obige Ausdruck. Führt man denselben Ausdruck für die Fläche S_1 aus, so erhält man folgendes Theorem, dessen Beweis mit Hülfe allgemeiner Formeln sich ohne Schwierigkeit ergiebt*).

Theorem.

Zwei Flächen S und S_1 mögen sich so entsprechen, dass die Nor-

*) Man vergleiche z. B. die auf p. 235 gegebenen Formeln in den »Nachrichten d. K. G. d. W. a. d. J. 1867.«

malen in zwei correspondirenden Punkten einander parallel sind. Soll den Krümmungslinien der Fläche S auf der Fläche S_1 ein System orthogonaler Curven entsprechen, so können drei Fälle stattfinden. Erstens: den Krümmungslinien von S entsprechen auf S_1 wieder Krümmungslinien. Zweitens: die Fläche S_1 ist eine Minimalfläche, d. h. in jedem ihrer Punkte verschwindet die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser. Drittens: Die Fläche S_1 ist eine Kugelfläche oder eine Ebene.

Es soll nur der erste der bemerkten Fälle hier in Betracht kommen, derselbe umfasst auch den Fall, dass S_1 eine Kugelfläche oder eine Ebene ist. Es seien x, y, z die Coordinaten von P; x_1, y_1, z_1 die Coordinaten von P_1. Die Projection der Distanz PP_1 auf eine der parallelen Normalen in den Punkten P und P_1 werde durch t bezeichnet. Es finden dann folgende Gleichungen statt:

$$1)\qquad \begin{cases} x_1 = x + t\cos a - \dfrac{r'}{\sqrt{E}}\dfrac{dt}{du}\cos a' - \dfrac{r''}{\sqrt{G}}\dfrac{dt}{dv}\cos a'', \\[2ex] y_1 = y + t\cos b - \dfrac{r'}{\sqrt{E}}\dfrac{dt}{du}\cos b' - \dfrac{r''}{\sqrt{G}}\dfrac{dt}{dv}\cos b'', \\[2ex] z_1 = z + t\cos c - \dfrac{r'}{\sqrt{E}}\dfrac{dt}{du}\cos c' - \dfrac{r''}{\sqrt{G}}\dfrac{dt}{dv}\cos c'', \end{cases}$$

wo t durch die folgende partielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt ist:

$$2)\qquad \frac{d^2t}{du\,dv} = \frac{dt}{du}\frac{r'}{\sqrt{E}}\frac{d\dfrac{\sqrt{E}}{r'}}{dv} + \frac{dt}{dv}\frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{d\dfrac{\sqrt{G}}{r''}}{du}.$$

Es sind nun u und v für beide Flächen die Argumente der Krümmungslinien, so dass die in II aufgestellten Formeln wieder zur Anwendung kommen.

Wegen der parallelen Normalen haben in den Punkten P und P_1 die Quantitäten

$$\frac{\sqrt{E}}{r'},\quad \frac{\sqrt{G}}{r''}$$

dieselben Werthe, also auch alle andern Ausdrücke, welche von diesen Quantitäten abhängig sind. Legt man die Gleichungen 10), 23), 25) und 28) von II zu Grunde, so ist:

$$-\frac{\varrho_2}{r_2} = \frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{d\frac{r'' H_2}{dv}}{[1+(r'' H_2)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad r'' H_2 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{d\sqrt{G}}{du} = \frac{r' r''}{\sqrt{EG}} d\frac{\frac{\sqrt{G}}{r''}}{du}.$$

Da also $\frac{\varrho_2}{r_2}$ nur von $\frac{\sqrt{E}}{r'}$, $\frac{\sqrt{G}}{r''}$ und den Differentialquotienten dieser Quantitäten abhängig ist, so erhält man folgendes

Theorem.

Haben zwei Flächen in correspondirenden Punkten parallele Normalen, entsprechen die Krümmungslinien einander, so ist das Verhältniss des Krümmungsradius zum Torsionsradius für zwei entsprechende Krümmungslinien in den beiden correspondirenden Punkten dasselbe.

Aus dem vorstehenden Satze ergiebt sich unmittelbar, dass einem planen Systeme von Krümmungslinien auf der Fläche S auch ein planes System auf der Fläche S_1 entspricht. Die besondere, mittelst der Gleichung III 10) leicht zu beweisende, Eigenschaft der Parallelflächen, dass einem System sphärischer Krümmungslinien von S auf S_1 wieder ein derartiges System entspricht, findet für die Gleichungen 1) nicht allgemein statt. Im Folgenden soll nur auf plane Krümmungslinien Bezug genommen werden.

Die Gleichung 2) lässt sich auf folgende Art schreiben:

$$3) \qquad d\frac{\frac{r'}{\sqrt{E}}\frac{dt}{du}}{dv} - \frac{r' r''}{\sqrt{EG}} d\frac{\frac{\sqrt{G}}{r''}}{du}\frac{dt}{dv} = 0.$$

Ist das System von Krümmungslinien, für welches v allein variirt, plan, so findet die Gleichung III 8) statt. Die Gleichung 3) geht dann über in:

$$d\frac{\frac{r'}{\sqrt{E}}\frac{dt}{du}}{dv} + \cot\sigma\frac{dt}{dv} = 0.$$

Bedeutet Ω_1 eine beliebige Function von u, so giebt die vorstehende Gleichung integrirt:

$$4)\qquad \frac{r'}{\sqrt{E}}\frac{dt}{du}+t\cot\sigma+\frac{\Omega_1}{\sin\sigma}=0,$$

wo zur Vereinfachung der folgenden Rechnung die Constante in Beziehung auf v durch $\frac{\Omega_1}{\sin\sigma}$ bezeichnet ist.

Die Gleichung 4) multiplicire man mit $\frac{\sqrt{E}}{r'}$ und setze nach IV 5)

$$\frac{\sqrt{E}}{r'}=-\frac{d\sigma}{du}+\frac{\sin\theta}{\varrho}\frac{ds}{du}.$$

Die Gleichung zur Bestimmung von t wird dann:

$$5)\qquad \frac{dt}{du}+t\left(-\cot\sigma\frac{d\sigma}{du}+\frac{\cot\sigma\sin\theta}{\varrho}\frac{ds}{du}\right)=\frac{-\Omega_1}{\sin\sigma}\left(\frac{\sin\theta}{\varrho}\frac{ds}{du}-\frac{d\sigma}{du}\right).$$

Man nehme ω statt u zur unabhängigen Variabeln, wo $ds=r\,d\omega$. Die Gleichung 5) wird hierdurch:

$$6)\qquad \frac{dt}{d\omega}+t\left(-\cot\sigma\frac{d\sigma}{d\omega}+\frac{r\cot\sigma\sin\theta}{\varrho}\right)=-\left(\frac{r}{\varrho}\sin\theta-\frac{d\sigma}{d\omega}\right)\frac{\Omega_1}{\sin\sigma}.$$

Die Gleichungen 14), 17) und 21) von IV geben:

$$\frac{r\cot\sigma\sin\theta}{\varrho}=-d\frac{\log[1-\cos(\theta-\varphi)]e^q}{d\omega}.$$

Die Gleichung 6) lässt sich hierdurch auf folgende Art darstellen:

$$7)\qquad \frac{dt}{d\omega}-t\,d\frac{\log\sin\sigma.[1-\cos(\theta-\varphi)]e^q}{d\omega}=-\left(\frac{r}{\varrho}\sin\theta-\frac{d\sigma}{d\omega}\right)\frac{\Omega_1}{\sin\sigma}.$$

Man setze zur Abkürzung:

$$8)\qquad \int\left[\frac{\sin\theta}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{r}{\varrho}-\frac{1}{1-\cos(\theta-\varphi)}\frac{d\sigma}{d\omega}\right]\frac{\Omega_1 e^{-q}}{\sin^2\sigma}\,d\omega=J_1.$$

Bezeichnet W_1 eine beliebige Function von v oder V, so giebt die Gleichung 7) integrirt, mit Rücksicht auf 8):

9) $$t = \sin\sigma[1 - \cos(\theta - \varphi)]\, e^q (W_1 - J_1).$$

Nach IV 6) ist

$$\frac{r''}{\sqrt{G}} = \frac{1}{\sin\sigma \frac{d\theta}{dv}},$$

also:

10) $$\frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{dt}{dv} = \frac{\frac{dt}{dv}}{\sin\sigma \frac{d\theta}{dv}} = \frac{\frac{dt}{dV}}{\sin\sigma \frac{d\theta}{dV}},$$

wenn V statt v zur unabhängigen Variabeln genommen wird. Man setze rechts für t seinen Werth aus 9) ein, ferner aus IV 20):

$$-\frac{d\theta}{dV} = [1 - \cos(\theta - \varphi)]\, e^q.$$

Hierdurch erhält man aus der Gleichung 10):

11) $$\frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{dt}{dv} = \sin(\theta - \varphi)\, e^q (W_1 - J_1) - d\frac{W_1 - J_1}{dV}.$$

Man führe aus 3), 4) und 11) die Werthe von:

$$t, \ \frac{r'}{\sqrt{E}} \frac{dt}{du}, \ \frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{dt}{dv}$$

in die Gleichungen 1) ein. Unter Zuziehung der Gleichungen 10), 11), 12) und 40) von IV geben die Gleichungen 1) das folgende System:

12) $$\begin{cases} x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = \Omega - \Omega_1, \\ x_1 \cos\lambda + y_1 \cos\mu + z_1 \cos\nu = (\Omega - \Omega_1) \cot\sigma \sin\theta \\ + (W_1 - J_1 + W + J)(\sin\theta - \sin\varphi)\, e^q + d\dfrac{(W_1 - J_1 + W + J)}{dV} \cos\theta, \\ x_1 \cos l + y_1 \cos m + z_1 \cos n = -(\Omega - \Omega_1) \cot\sigma \cos\theta \\ + (W_1 - J_1 + W + J)(\cos\theta - \cos\varphi)\, e^q + d\dfrac{(W_1 - J_1 + W + J)}{dV} \sin\theta. \end{cases}$$

Das Integral J_1 in 9) ergiebt sich aus dem Integral J in IV 37) durch Vertauschung von Ω mit Ω_1. Die Gleichungen 12) unterscheiden sich von den Gleichungen IV 40) nur dadurch, dass $\Omega - \Omega_1$ an Stelle von Ω und $W + W_1$ an Stelle von W getreten ist, was nach dem Vorhergehenden stattfinden muss. Die willkührlichen Functionen, welche die Integration der Gleichung 2) involvirt, verbinden sich durch Addition mit den entsprechenden willkührlichen Functionen, welche in den Werthen von x, y und z enthalten sind. Man kann nun die Fläche S_1 so bestimmen, dass die Werthe von x_1, y_1, z_1 zwei willkührliche Functionen weniger enthalten wie die Coordinaten x, y, z. Es lassen sich so für die Fläche S_1 möglichst einfache Formen auffinden, welchen alle Flächen mit einem Systeme planer Krümmungslinien durch parallele Normalen correspondiren. Nimmt man in den Gleichungen 12) $\Omega_1 = \Omega$, so ist auch $J_1 = J$. Setzt man ferner $W_1 + W = A + BV$, wo A und B Constanten sind, so ist die Fläche S_1 durch die folgenden, einfachen Gleichungen definirt:

$$
13)\quad \begin{cases} x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = 0, \\ x_1 \cos\lambda + y_1 \cos\mu + z_1 \cos\nu = -(A + BV)(\sin\theta - \sin\varphi)e^q + B\cos\theta, \\ x_1 \cos l + y_1 \cos m + z_1 \cos n = (A + BV)(\cos\theta - \cos\varphi)e^q + B\sin\theta. \end{cases}
$$

Nimmt man noch $B = 0$, so ist einfacher:

$$
14)\quad \begin{cases} x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = 0, \\ x_1 \cos\lambda + y_1 \cos\mu + z_1 \cos\nu - A\sin\varphi\, e^q = -A\sin\theta \,.\, e^q, \\ x_1 \cos l + y_1 \cos m + z_1 \cos n + A\cos\varphi\, e^q = A\cos\theta \,.\, e^q. \end{cases}
$$

Durch Elimination von θ zwischen der zweiten und dritten Gleichung lassen sich die Gleichungen 14) durch die beiden folgenden ersetzen:

$$
15)\quad \begin{cases} x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = 0, \\ (x_1 \cos\lambda + y_1 \cos\mu + z_1 \cos\nu - A e^q \sin\varphi)^2 + \\ (x_1 \cos l + y_1 \cos m + z_1 \cos n + A e^q \cos\varphi)^2 = (A e^q)^2. \end{cases}
$$

Die Gleichungen 15) gestatten eine Umformung, welche unmittelbar auf einen bemerkenswerthen Satz führt. Setzt man:

$$16)\quad \begin{cases} \xi_1 = A e^q (\cos\lambda \sin\varphi - \cos l \cos\varphi - \cot\sigma \cos\alpha), \\ \eta_1 = A e^q (\cos\mu \sin\varphi - \cos m \cos\varphi - \cot\sigma \cos\beta), \\ \zeta_1 = A e^q (\cos\nu \sin\varphi - \cos n \cos\varphi - \cot\sigma \cos\gamma), \end{cases}$$

so geben die Gleichungen 15):

$$17)\quad (x_1 - \xi_1)\cos\alpha + (y_1 - \eta_1)\cos\beta + (z_1 - \zeta_1)\cos\gamma = A e^q \cot\sigma.$$

$$18)\quad (x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + (z_1 - \zeta_1)^2 = \left(\frac{A e^q}{\sin\sigma}\right)^2.$$

Die Gleichungen 17) und 18) werden nach 16) identisch für $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$. Dieselben repräsentiren einen Kreis, welcher durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Man differentiire die Gleichungen 16), nehme ε zur unabhängigen Variabeln, wo $d\varepsilon = \frac{ds}{\varrho}$ ist. Mit Hülfe der in I aufgestellten Gleichungen, sowie der Gleichungen 14), 16) und 17) von IV folgt:

$$19)\quad \begin{cases} \dfrac{\frac{d\xi_1}{d\varepsilon}}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{d\eta_1}{d\varepsilon}}{\cos\beta} = \dfrac{\frac{d\zeta_1}{d\varepsilon}}{\cos\gamma} = \dfrac{A e^q}{\sin^2\sigma}\left(\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon} - \sin\varphi\right), \\ d\dfrac{\frac{e^q}{\sin\sigma}}{d\varepsilon} = -\dfrac{e^q \cos\sigma}{\sin^2\sigma}\left(\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon} - \sin\varphi\right). \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung der vorstehenden Gleichungen lässt sich die Gleichung 17) auf folgende Form bringen:

$$20)\quad (x_1 - \xi_1)\frac{d\xi_1}{d\varepsilon} + (y_1 - \eta_1)\frac{d\eta_1}{d\varepsilon} + (z_1 - \zeta_1)\frac{d\zeta_1}{d\varepsilon} = -A^2 \frac{e^q}{\sin\sigma} d\frac{\frac{e^q}{\sin\sigma}}{d\varepsilon},$$

d. h. die Gleichung 17) folgt durch Differentiation der Gleichung 18) nach ε. Man hat so aus den Gleichungen 17) und 18) das nachstehende

M 2

Theorem.

Entsprechen sich zwei Flächen S und S_1 der Art, dass in zwei correspondirenden Punkten die Normalen und die Tangenten zu den Hauptschnitten parallel sind, so existiren für eine gegebene Fläche S_1 unzählig viele Flächen S. Es lassen sich so alle Flächen S mit einem System planer Krümmungslinien auf die Enveloppe einer Kugelfläche zurückführen, wenn die Kugelfläche beständig durch einen festen Punkt geht und ihr Mittelpunkt eine beliebige Curve doppelter Krümmung beschreibt.

Wenn $\cos\sigma = 0$ ist, so ist nach IV 14) und IV 17) $q = 0$. Die Gleichungen 16) geben dann:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = A^2.$$

Die rechte Seite der Gleichung 18) reducirt sich auf A^2. Es liegt also der Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) auf einer Kugelfläche mit dem Radius A. Hieraus erhält man das

Theorem:

Alle Flächen, für welche ein System Krümmungslinien gleichzeitig aus geodätischen Linien besteht, lassen sich auf die Enveloppe einer Kugelfläche von constantem Radius zurückführen. Der Mittelpunkt derselben beschreibt eine beliebige Curve, welche auf einer zweiten Kugelfläche liegt, deren Radius gleich dem Radius der mobilen Kugelfläche ist.

Den Gleichungen 16) bis 20) lässt sich noch ein anderes System an die Seite stellen, wenn in den Gleichungen 13) $A = 0$ genommen wird. Setzt man $-B$ statt B, substituirt für $\sin\theta$ und $\cos\theta$ ihre Werthe aus IV 19), so leitet man aus den Gleichungen 13) die folgenden ab:

$$21)\begin{cases} x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma = 0 \\ \dfrac{x_1\cos\lambda + y_1\cos\mu + z_1\cos\nu}{B} - \cos\varphi = -2M\dfrac{(V+M)\cos\varphi - e^{-q}\sin\varphi}{(V+M)^2 + e^{-2q}} \\ \dfrac{x_1\cos l + y_1\cos m + z_1\cos n}{B} - \sin\varphi = -2M\dfrac{(V+M)\sin\varphi + e^{-q}\cos\varphi}{(V+M)^2 + e^{-2q}}. \end{cases}$$

Durch Elimination von V zwischen den beiden letzten Gleichungen 21) folgt:

$$[x_1 \cos\lambda + y_1 \cos\mu + z_1 \cos\nu - B(\cos\varphi + Me^q \sin\varphi)]^2$$
$$+ [x_1 \cos l + y_1 \cos m + z_1 \cos n - B(\sin\varphi - Me^q \cos\varphi)]^2 = (B\, Me^q)^2.$$

Mit Hülfe der ersten Gleichung 21) lässt sich die vorstehende Gleichung auf folgende Form bringen:

$$22)\qquad (x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + (z_1 - \zeta_1)^2 = \left(\frac{B\, Me^q}{\sin\sigma}\right)^2,$$

wo:

$$23)\begin{cases} \dfrac{\xi_1}{B} = (\cos\varphi + Me^q \sin\varphi)\cos\lambda + (\sin\varphi - Me^q\cos\varphi)\cos l - Me^q \cot\sigma\cos\alpha, \\ \dfrac{\eta_1}{B} = (\cos\varphi + Me^q \sin\varphi)\cos\mu + (\sin\varphi - Me^q\cos\varphi)\cos m - Me^q \cot\sigma\cos\beta, \\ \dfrac{\zeta_1}{B} = (\cos\varphi + Me^q \sin\varphi)\cos\nu + (\sin\varphi - Me^q\cos\varphi)\cos n - Me^q \cot\sigma\cos\gamma. \end{cases}$$

Mit Hülfe der in I aufgestellten Gleichungen, ferner der Gleichungen 14), 16) und 17) von IV, erhält man aus den Gleichungen 23):

$$\frac{\frac{d\xi_1}{d\varepsilon}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{d\eta_1}{d\varepsilon}}{\cos\beta} = \frac{\frac{d\zeta_1}{d\varepsilon}}{\cos\gamma} = -\frac{B}{\cos\sigma}\, \frac{d\frac{Me^q}{\sin\sigma}}{d\varepsilon}.$$

Man findet, dass sich die erste Gleichung 19) durch eine andere Gleichung ersetzen lässt, welche auch durch Differentiation der Gleichung 22) nach ε folgt. Die Fläche S_1 ist wieder die Enveloppe einer Kugelfläche. Das System, welches $A = 0$ entspricht, ist weit complicirter wie der zuerst behandelte Fall für $B = 0$.

Die Gleichungen 16) bis 23) gelten auch für den Fall, dass die Ebenen der planen Krümmungslinien den Normalebenen einer planen Curve parallel sind.

Durch eine Rechnung, welche ziemlich weitläufig ist, sonst aber keine nennenswerthen Schwierigkeiten darbietet, lassen sich die Gleichungen 67) von IV aus den dort gegebenen allgemeinen Gleichungen 40) herleiten. Hierbei ist zu beachten, dass V und W in beiden Systemen nicht gleiche Bedeutungen haben. Man hat dabei die Gleichungen 50)* anzuwenden und die Gleichungen 16) und 17) auf folgende Art zu modificiren. Man setze

$$p = \frac{r \cot \sigma}{\varrho}$$

ferner $r\,d\omega = ds = \varrho\, d\varepsilon$ in die Gleichungen 16) und 17) von IV. Dann ist allgemein:

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = \frac{\varrho}{r} + \cot\sigma \cos\varphi, \tag{24}$$

$$q = \int \cot\sigma \sin\varphi\, d\varepsilon,\quad M = \int e^{-q} \cot\sigma \cos\varphi\, d\varepsilon. \tag{25}$$

Ist nun $r = \infty$, so folgt aus 24):

$$\frac{1}{\cos\varphi} \frac{d\varphi}{d\varepsilon} = \cot\sigma. \tag{26}$$

Setzt man hieraus den Werth von $\cot\sigma$ in die beiden Gleichungen 25), so geben dieselben:

$$\begin{cases} q = \int \operatorname{tang}\varphi\, d\varphi = -\log\cos\varphi,\quad e^{q} = \dfrac{1}{\cos\varphi},\quad e^{-q} = \cos\varphi, \\ M = \int \cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi. \end{cases} \tag{27}$$

Finden die Gleichungen IV 50)* statt, so gehn die Gleichungen 16) und 18) unter Zuziehung von 27) in folgende über:

$$\begin{cases} \xi_1 = A\left(\operatorname{tang}\varphi \cos\varepsilon - \dfrac{\cot\sigma}{\cos\varphi}\sin\varepsilon\right), \\ \eta_1 = A\left(\operatorname{tang}\varphi \sin\varepsilon + \dfrac{\cot\sigma}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\right), \\ \zeta_1 = -A. \end{cases} \tag{28}$$

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + (z_1 - \zeta_1)^2 = \left(\frac{A}{\cos\varphi \sin\sigma}\right)^2. \tag{29}$$

Auf ähnliche Art treten an Stelle der Gleichungen 22) und 23) die folgenden:

$$\begin{cases} \xi_1 = B\left(\dfrac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi} - \operatorname{tang}\varphi \cot\sigma \sin\varepsilon\right), \\ \eta_1 = B\left(\dfrac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi} + \operatorname{tang}\varphi \cot\sigma \cos\varepsilon\right), \\ \zeta_1 = 0. \end{cases} \tag{30}$$

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + (z_1 - \zeta_1)^2 = \left(\frac{B \operatorname{tang}\varphi}{\sin\sigma}\right)^2. \tag{31}$$

Die Curve, welche der Mittelpunkt der mobilen Kugelfläche beschreibt, ist nach 28) und 30) eine ebene Curve.

Die vorstehenden Entwicklungen, betreffend die Reduction der Flächen mit einem Systeme planer Krümmungslinien auf einfachere Flächen derselben Art, geben zu mancherlei speciellen Untersuchungen Veranlassung. Eine weitere Ausführung dieser Untersuchungen kann hier um so mehr unterbleiben, als auf der einen Seite das in der Abhandlung enthaltene analytische Material die betreffenden Untersuchungen wesentlich erleichtert, auf der andern Seite Betrachtungen, welche sich auf einzelne, besondere Flächen beziehn, ausserhalb der Grenzen dieser Abhandlung fallen.

Inhalt.

Berichtigungen.

p. 14. In Gleichung 19) ist die linke Seite $\frac{\sqrt{E}}{r_1}$.

p. 28. Erste Gleichung 19). Im Zähler von $\sin\theta$ fehlt die Klammer in $(V+M)^2$.

p. 41. Zweite Gleichung 51) muss heissen $\cos b = -\cos\varepsilon\cos\sigma - \sin\varepsilon\sin\sigma\sin\theta$.

p. 47. Zweite Gleichung 74) muss heissen $\cos b' = \sin\psi\cos\sigma$.

p. 71. Zweite Gleichung 45) lese man rechts $- R_1\cos\tau\sin\theta\sin\sigma$.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1878

Band/Volume: 23

Autor(en)/Author(s): Enneper Alfred

Artikel/Article: Untersuchungen über die Fläche mit planen und sphärischen Krümmungslinien. 1-96