Bestimmung des quadratischen Rest-Characters.

Von

Ernst Schering.

Vorgelegt in der Sitzung d. K. Gesellsch. d. Wissensch. 1879 Febr. 13.

Für die Berechnung des quadratischen Rest-Characters einer gegebenen Zahl in Bezug auf einen gegebenen Modul hat GAUSS zwei Methoden aufgestellt, welche beide den EUKLIDISCHEN Algorithmus zwischen den gegebenen Zahlen benutzen.

Diese Methoden finden sich in dem Abschnitte „Algorithmus novus ad decidendum, utrum numerus integer positivus datus numeri primi positivi dati residuum quadraticum sit an non-residuum“ der Abhandlung „Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliaciones novae. Gottingae 1817 Febr. 10“ (welche ich in GAUSS Werken Bd. II Seite 59 bis 64 aufgenommen habe).

Bei der ersten dieser Methoden wird wiederholt der Congruenz-Satz und der Multiplications-Satz für quadratische Rest-Characterere angewendet. Durch Benutzung des verallgemeinerten oder zusammengesetzten Rest-Characters, wie GAUSS ihn in Artikel 134 der Disquiss. Arithmet. (G. W. Bd. I. Seite 103 und 104) definirt und JACOBI ihn durch Benutzung des LEGENDRE'schen Zeichens dargestellt hat, lässt sich diese Methode formal vereinfachen, wie DIRICHLET das Entsprechende mit dem ersten GAUSSISCHEN Beweise des quadratischen Reciprocitäts-Satzes (Disquiss. Arithmet. 1801 Art. 125 bis 145. G. W. Bd. I. Seite 94 bis 111) in seiner Abhandlung: „Ueber den ersten der von GAUSS gegebenen Beweise des Reciprocitäts-gesetzes in der Theorie der quadratischen Reste“ (CRELLE's Journal f. Math. Bd. 47 Seite 139 bis 150 im Jahre 1854) ausgeführt hat.

Bei der anderen Methode (Artik. 3 bis 6 jenes Abschnittes) wird vollständig die Summe der grössten Ganzen berechnet, welche in den Gliedern einer arithmetischen Reihe enthalten sind. Die Summe der grössten Ganzen bestimmt den quadratischen Rest-Character, wie GAUSS bei seinem dritten Beweise 1808 Januar 15 (G. W. Bd. II. Seite 6) angegeben hat.

Die letztere Methode ist von Herrn CHR. ZELLER als Ausgangs-Punkt benutzt für eine von ihm in den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1879 Seite 197 bis 216) zur Berechnung des quadratischen Rest-Characters aufgestellte Regel, welche ein einfacheres Rechnungsverfahren darbietet als alle übrigen bis dahin bekannten. Bei der Methode des Herrn ZELLER bestimmen sich auch in gleich einfacher Weise diejenigen Summen grösster Ganzer, welche mit dem quadratischen Rest-Character zwischen zwei ungeraden Zahlen in enger Beziehung stehen.

Die von Herrn ZELLER gegebenen Andeutungen über die Auffindung und den Beweis seiner Regel erledigen den Fall, dass alle Reste in dem EUKLIDISCHEN Algorithmus ungerade Zahlen sind.

Die Regel selbst beschränkt sich auf den Fall, dass alle Reste positive Vorzeichen haben. Es schien mir wünschenswerth zu sein, eine Regel aufzufinden, welche von dieser Voraussetzung frei ist.

Bei der in der vorliegenden Abhandlung mitzutheilenden Ableitung der neuen Lehrsätze ergab sich als specielle Anwendung ein Beweis, der alle Fälle der ZELLER'schen Regel umfasst. Ausserdem lassen die neuen Sätze die Bedeutung derjenigen Zahl erkennen, welche für einen geraden Modul durch eine analoge Formel bestimmt wird, wie die verallgemeinerte GAUSSISCHE charakteristische Zahl für einen ungeraden Modul.

Einfach berechnen sich auch hiernach die Summen der grössten ganzen Zahlen, welche mit dem quadratischen Rest-Character zwischen zwei ungeraden Zahlen oder zwischen einer geraden und einer ungeraden Zahl in naher Beziehung stehen; die Vorzeichen der Reste in dem EUKLIDISCHEN Algorithmus können dabei ganz willkürlich genommen sein.

Artikel I.

Anzahl der Vorzeichen der Werthe einer Function.

Seit GAUSS' drittem Beweise aus dem Jahre 1808 für den Reciprocitäts-Satz bedient man sich vielfach des Begriffes des in einem Bruchwerthe enthaltenen grössten Ganzen. Für manche Zwecke, wie für einen neuen Beweis des Reciprocitäts-Satzes (Nachrichten d. K. Ges. d. W. zu Göttingen 1879 Seite 217 bis 224) habe ich es vortheilhaft gefunden, statt der grössten Ganzen mich der Anzahl der bestimmten Vorzeichen einer Function zu bedienen.

Für irgend eine reelle Grösse x soll derjenige unter den drei Ausdrücken

$$[1] \dots \dots \dots \text{Anz Pos}(x), \quad \text{Anz Neg}(x), \quad \text{Anz Null}(x)$$

welcher dem Vorzeichen des Werthes oder dem Werthe von x entspricht, gleich $+1$ sein, die beiden anderen Ausdrücke aber gleich 0 sein.

Für eine von einem Argumente oder von mehreren Argumenten $\mu, \nu, \dots$ abhängige Function $F(\mu, \nu, \dots)$ sollen die Ausdrücke

$$[2] \dots \text{Anz}_{\mu, \nu, \dots} \text{Null } F(\mu, \nu, \dots), \quad \text{Anz}_{\mu, \nu, \dots} \text{Pos } F(\mu, \nu, \dots), \quad \text{Anz}_{\mu, \nu, \dots} \text{Neg } F(\mu, \nu, \dots)$$

der Reihe nach die Anzahl der Nullwerthe, der positiven und der negativen Werthe der Function $F(\mu, \nu, \dots)$ bezeichnen, wenn die Argumente $\mu, \nu, \dots$ gegebene, in den meisten Fällen ganzzahlige Werthe durchlaufen.

Wenn es der Raum gestattet, werden die Grenzen für $\mu, \nu, \dots$ in dem Ausdrücke selbst, z. B. in der Form

$$\text{Anz}_{\mu=1}^M \text{Anz}_{\nu=1}^{\infty} \text{Pos } F(\mu, \nu, \dots)$$

angegeben.

Die in einem reellen Werthe x enthaltene grösste ganze Zahl $\mathfrak{G}\mathfrak{G}(x)$ so wie der darin enthaltene nicht negative Bruchrest $\mathfrak{B}(x)$ können durch die Bedingung

$$[3] \quad \dots \dots \dots 0 \leq x - \mathfrak{G}\mathfrak{G}(x) = \mathfrak{B}(x) < +1$$

bestimmt werden. Es ist dann auch

$$[4] \quad \dots \mathfrak{B}(x) = x - \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{Pos}(x - \nu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{Neg}(x - 1 + \nu) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{Null}(x - \nu)$$

Wird die an x zunächst liegende ganze Zahl $\mathfrak{N}\mathfrak{G}(x)$ und der in x enthaltene absolut kleinste Bruchrest $\mathfrak{A}\mathfrak{B}(x)$ der Bedingung

$$[5] \quad \dots \dots \dots -\frac{1}{2} < x - \mathfrak{N}\mathfrak{G}(x) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}(x) \leq +\frac{1}{2}$$

unterworfen, so ist:

$$[6] \quad \dots \mathfrak{A}\mathfrak{B}(x) = x - \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{Pos}(x + \frac{1}{2} - \nu) \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{Neg}(x - \frac{1}{2} + \nu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{Null}(x - \frac{1}{2} + \nu)$$

$$[7] \quad \dots \mathfrak{A}\mathfrak{B}(x) = x - \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{Pos}(x - \nu) \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{Neg}(x - 1 + \nu) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{Null}(x - \nu) - \mathfrak{Neg}\mathfrak{A}\mathfrak{B}(x)$$

worin also $\mathfrak{Neg}\mathfrak{A}\mathfrak{B}(x)$ den Werth $+1$ oder 0 hat, je nachdem der absolut kleinste in x enthaltene Bruchrest negativ oder nicht negativ ist.

Artikel II.

Quadratischer Rest-Character.

Als die Zahl, welche den verallgemeinerten oder zusammengesetzten quadratischen Rest-Character einer Restzahl n in Bezug auf den positiven

ungeraden mit n keinen gemeinsamen Theiler besitzenden Modul m bestimmt, können wir die Anzahl derjenigen in den $\frac{m-1}{2}$ Brüchen

$$\frac{n}{m}, 2 \frac{n}{m}, 3 \frac{n}{m}, \dots, \frac{m-1}{2} \frac{n}{m}$$

enthaltenen absolut kleinsten Bruchresten betrachten, welche negativ sind. Die den zusammengesetzten quadratischen Rest-Character bestimmende Zahl wird also gleich

$$[8] \dots \dots \dots \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \mathcal{A} \mathcal{B} \frac{n^{\mu}}{m}$$

worin $\mu = 1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}$ zu setzen ist.

Für irgend welche positive Grössen m und n und für ein aus positiven Grössen bestehendes Werthensystem des μ , welches weder $\frac{n^{\mu}}{m}$ noch $\frac{n^{\mu}}{m} + \frac{1}{2}$ eine ganze Zahl werden lässt, ergibt sich aus den letzten Gleichungen [6] und [7] des vorhergehenden Artikels

$$[9] \dots \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \mathcal{A} \mathcal{B} \frac{n^{\mu}}{m} \\ = \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Pos} \left(\frac{n^{\mu}}{m} + \frac{1}{2} - \nu \right) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Pos} \left(\frac{n^{\mu}}{m} - \nu \right)$$

und

$$\text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \mathcal{A} \mathcal{B} \frac{-n^{\mu}}{m} \\ = \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \left(-\frac{n^{\mu}}{m} - 1 + \nu \right) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \left(-\frac{n^{\mu}}{m} - \frac{1}{2} + \nu \right)$$

oder

$$\text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \mathcal{A} \mathcal{B} \frac{-n^{\mu}}{m} \\ = \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Pos} \left(\frac{n^{\mu}}{m} + 1 - \nu \right) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Pos} \left(\frac{n^{\mu}}{m} + \frac{1}{2} - \nu \right)$$

oder

$$[10] \dots \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \mathcal{A} \mathcal{B} \frac{-n^{\mu}}{m} \\ = \text{An}_{\delta}(\mu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Pos} \left(\frac{n^{\mu}}{m} - \nu \right) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Pos} \left(\frac{n^{\mu}}{m} + \frac{1}{2} - \nu \right)$$

worin $\mathcal{A}n_3(\mu)$ die Anzahl der Werthe bezeichnet, welche μ durchlaufen soll. Diese letzte Gleichung [10] hätte man aus der obigen [9] auch mit Hülfe des Satzes ableiten können, dass die absolut kleinsten Bruchreste von zwei Grössen, welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, entweder beide gleich 0 oder beide gleich $\pm \frac{1}{2}$ sind oder endlich sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Die Gleichungen [9] und [10] können wir, wenn wir

$$[11] \quad \dots \dots \dots n = \pm 1$$

setzen, in

$$[12] \quad \dots \quad \mathcal{A}n_{3\mu} \text{Neg} \mathcal{A} \mathcal{B} \frac{n\mu}{m} = + n \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{A}n_3 \mathcal{A}n_{3\mu} \text{Pos} \left(\frac{n\mu}{m} + \frac{1}{2} - \nu \right) \\ - n \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{A}n_3 \mathcal{A}n_{3\mu} \text{Pos} \left(\frac{n\mu}{m} - \nu \right) + \frac{1}{2} (1 - n) \mathcal{A}n_3(\mu)$$

zusammen fassen, worin also m, n, μ positiv sind und keiner der Werthe $\frac{n\mu}{m}, \frac{n\mu}{m} + \frac{1}{2}$ eine ganze Zahl wird.

Wollte man die letztern Beschränkungen vermeiden, so hätte man die Nullwerthe derjenigen Functionen mit zu berücksichtigen, welche in der Gleichung [12] nur mit ihren Vorzeichen in Betracht kommen.

Durch die Gleichung [12] bestimmt sich der zusammengesetzte quadratische Rest-Character der ganzen Zahl nn in Bezug auf den ganzzahligen Modul m , wenn m relativ prim zu $2n$ ist und wenn man μ die Werthe

$$1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}$$

durchlaufen lässt; hier wird also $\mathcal{A}n_3(\mu) = \frac{m-1}{2}$.

Setzen wir $\mu = \frac{m+1}{2} - \mu'$, so durchläuft μ' dieselben Werthe wie μ nur in entgegengesetzter Reihenfolge. Da solche aber auf die Anzahl der Vorzeichen der Werthe einer Function keinen Einfluss hat, so können wir diese Einsetzung z. B. bei dem ersten Gliede der zweiten Seite der

obigen Gleichung [12] ausführen und nachher statt μ' wieder μ anwenden; dadurch entsteht

$$[13] \quad \dots \quad \text{Anz}_{\mu} \text{Neg } \mathfrak{A} \mathfrak{B} \frac{n n \mu}{m} = + n \text{Anz}_{\mu} \text{Anz}_{\nu} \mathfrak{P} \text{of} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{m} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{n} \right) \\ - n \text{Anz}_{\mu} \text{Anz}_{\nu} \mathfrak{P} \text{of} \left(\frac{\mu}{m} - \frac{\nu}{n} \right) + \frac{1-n}{2} \cdot \frac{m-1}{2}$$

Es hat hier das ν alle ganze positive Zahlen zu durchlaufen, da aber für $\nu \geq \frac{n+1}{2}$ die Glieder der zweiten Seite der Gleichung zu Null werden, so kann man für ein ungerades n die Werthe von ν auf die Zahlen

$$1, 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$$

beschränken.

Setzen wir

$$[14] \quad \dots \dots \dots m = \pm 1$$

und führen die Umtauschung von m mit n aus, so geht die Gleichung

[13] in

$$[15] \quad \dots \quad \text{Anz}_{\nu} \text{Neg } \mathfrak{A} \mathfrak{B} \frac{m m \nu}{n} = m \text{Anz}_{\mu, \nu} \mathfrak{P} \text{of} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{m} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{n} \right) \\ - m \text{Anz}_{\mu, \nu} \mathfrak{P} \text{of} \left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m} \right) + \frac{1-m}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$$

über, wo wieder

$$[16] \quad \dots \dots \dots \mu = 1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$$

ist. Beachtet man, dass für jedes der $\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$ hier in Betracht kommenden Werthensysteme von μ und ν immer entweder $\frac{\mu}{m} - \frac{\nu}{n}$ oder $\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m}$ positiv ist, so erhält man

$$[17] \quad \dots \dots \dots \text{Anz}_{\mu, \nu} \mathfrak{P} \text{of} \left(\frac{\mu}{m} - \frac{\nu}{n} \right) + \text{Anz}_{\mu, \nu} \mathfrak{P} \text{of} \left(\frac{\nu}{n} - \frac{\mu}{m} \right) = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$$

Die Vereinigung der Gleichungen [13], [15], [17] gibt

$$[18] \quad \dots n \text{Anz}_{\mu} \text{Neg } \mathfrak{A} \mathfrak{B} \frac{n n \mu}{m} + m \text{Anz}_{\nu} \text{Neg } \mathfrak{A} \mathfrak{B} \frac{m m \nu}{n} - 2 \text{Anz}_{\mu, \nu} \mathfrak{P} \text{of} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{m} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{n} \right) \\ = - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{m-1}{2} \\ = - \left(\frac{m-1}{2} - 2 \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m-1}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} - 2 \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \right) + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$$

als Darstellung des allgemeinen Reciprocitäts-Gesetzes der quadratischen Rest-Characteren für zwei beliebig positive oder negative Zahlen m und n , welche ungerade und ohne gemeinsamen Theiler sind.

Artikel III.

Vorzeichen der Werthe der linearen Functionen.

Die mit zwei veränderlichen Argumenten versehenen Functionen, von deren Werthen wir hier die Vorzeichen in Rechnung gezogen haben, sind besondere lineare Functionen. Um für die allgemeinen linearen Functionen zweier Argumente die Anzahl der Vorzeichen ihrer Werthe in einer an den EUKLIDISCHEN Algorithmus sich eng anschliessenden Form zu bestimmen, denken wir uns die Function durch geeignete Einführung der Veränderlichen auf die Form $\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n}$ gebracht. Hierin sollen m und n positive Grössen, aber a und c beliebige reelle Grössen bedeuten. Es soll

μ die ganzen positiven Zahlen 1, 2, 3, . . . M
 und ν die ganzen positiven Zahlen 1, 2, 3, . . . N
 durchlaufen.

Für unsere Zwecke genügt es, die Allgemeinheit so zu beschränken, dass wir annehmen: der Ausdruck

$$\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n}$$

werde für kein ganzzahliges ν zu Null, wenn das ganzzahlige μ nicht ausserhalb der Grenzen 1 und M liegt;

ebenso werde jener Ausdruck für kein ganzzahliges μ zu Null, wenn das ganzzahlige ν nicht ausserhalb der Grenzen 1 und N liegt.

Zur Ermittlung des Werthes von

$$\prod_{\mu=1}^M \prod_{\nu=1}^N \text{Pot} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right)$$

wenden wir von einem zwischen m und n aufgestellten EUKLIDISCHEN Algorithmus die erste Gleichung

$$[19] \dots \dots \dots m = nh + rr$$

an, worin h eine ganze Zahl oder Null, ferner

$$[20] \dots \dots \dots r = \pm 1$$

und r positiv sei.

Um zunächst die Abzählung in Bezug auf μ zu vereinfachen, setzen wir

$$[21] \dots \frac{\mu - a}{m} - \frac{\nu - c}{n} = \frac{1}{m} \{ \mu - a - (nh + rr) \frac{\nu - c}{n} \}$$

$$= \frac{1}{m} \{ \mu - h\nu - rC - (a - hc - re) - r(r \frac{\nu - c}{n} + e - C) \}$$

worin e und C beliebige Werthe haben können.

Treffen wir die Bestimmung:

$$[22] \dots \dots \dots e = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \{ (a - hc) r \}$$

so wird $r(a - hc) - e$ also auch $(a - hc) - re$ eine ganze Zahl. Dann kann $r \frac{\nu - c}{n} + e$ keine ganze Zahl für ein nicht ausserhalb der Grenzen 1 und N liegendes ganzzahliges ν sein, denn sonst würde es für solches ν ein ganzzahliges μ geben, welches die zweite Seite also auch die erste Seite der Gleichung [21], unserer Voraussetzung entgegen, verschwinden liesse.

Es gibt daher immer einen positiven echten Bruch C , welcher den Ausdruck $r \frac{\nu - c}{n} + e - C$ einen ganzzahligen Werth und zwar

$$[23] \dots r \frac{\nu - c}{n} + e - C = \sum_{\rho=1}^{\infty} \mathfrak{P} \text{of} \left(r \cdot \frac{\nu - c}{n} + e - \rho \right) - \sum_{\rho=1}^{\infty} \mathfrak{N} \text{eg} \left(r \cdot \frac{\nu - c}{n} + e - 1 + \rho \right)$$

annehmen lässt.

Die Functionen, deren positive oder negative Werthe auf der zweiten Seite dieser Gleichung gezählt werden, können also für kein ganzzahliges ρ verschwinden, wenn ν einen ganzzahligen nicht ausserhalb der Grenzen 1 und N liegenden Werth annimmt. Diese selben Bedingungen bleiben erfüllt für diejenigen Functionen, welche man aus jenen

durch Division mit der positiven Grösse r ableitet und welche mit den Vorzeichen ihrer Werthe in der Gleichung

$$[24] \dots r \cdot \frac{v-c}{n} + e - C = \sum_{\rho=1}^{\infty} \text{Unz} \text{Bof} \left(\frac{v-c}{n} - \frac{\rho-c}{r} \right) - \sum_{\rho=1}^{\infty} \text{Unz} \text{Neg} \left(\frac{v-c}{n} - \frac{1-\rho-c}{r} \right)$$

in Betracht kommen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$[25] \dots M^0 = h v + (a - h c - r e) + r \left(r \frac{v-c}{n} + e - C \right)$$

so wird also M^0 eine ganze Zahl und

$$[26] \dots \frac{\mu-a}{m} - \frac{v-c}{n} = \frac{1}{m} (\mu - r C - M^0)$$

worin C einen positiven echten Bruch bedeutet.

Unter diesen Voraussetzungen besteht nun offenbar allgemein die Identität

$$[27] \dots \sum_{\mu=1}^M \text{Unz} \text{Bof} (\mu - r C - M^0) = M + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r + \sum_{\mu=M+1}^{\infty} \text{Unz} \text{Neg} (\mu - r C - M^0) \\ - M^0 - \sum_{\mu=1}^{\infty} \text{Unz} \text{Bof} (-\mu + 1 - r C - M^0)$$

Dividirt man hier die Functionen, deren Werthe nur mit ihren Vorzeichen in Betracht kommen, durch die positive Grösse m und berücksichtigt die vorhergehende Gleichung [26], so erhält man:

$$[28] \dots \sum_{\mu=1}^M \text{Unz} \text{Bof} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{v-c}{n} \right) = M + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r + \sum_{\mu=M+1}^{\infty} \text{Unz} \text{Neg} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{v-c}{n} \right) \\ - M^0 - \sum_{\mu=1}^{\infty} \text{Unz} \text{Bof} \left(\frac{1-\mu-a}{m} - \frac{v-c}{n} \right)$$

Führen wir nach den Gleichungen [24] und [25] den Werth von M^0 hier ein und ordnen die Glieder, so finden wir:

$$[29] \dots \left. \begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^M \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & + r \sum_{\rho=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\nu-c}{n} - \frac{\rho-e}{r} \right) \end{aligned} \right| = \begin{aligned} & M + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r - h\nu - (a - hc - re) \\ & + \sum_{\mu=M+1}^{\infty} \text{An}_3 \text{Neg} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & - \sum_{\mu=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{1-\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & + r \sum_{\rho=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{Neg} \left(\frac{\nu-c}{n} - \frac{1-\rho-e}{r} \right) \end{aligned}$$

Summiren wir diese Gleichung über die ganzzahligen positiven Werthe $\nu = 1, 2, 3 \dots N$, fügen dann auf beiden Seiten das Glied

$$\sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right)$$

hinzu und benutzen die Identität

$$[30] \dots \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \psi(\mu, \nu) = \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^N \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \psi(\mu, \nu) + \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \psi(\mu, \nu)$$

so erhalten wir die Gleichung

$$[31] \dots \left. \begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & + r \sum_{\nu=1}^N \sum_{\rho=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\nu-c}{n} - \frac{\rho-e}{r} \right) \end{aligned} \right| = \begin{aligned} & -\frac{1}{2}hN(1+N) + N(M + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r) - N(a - hc - re) \\ & + \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & + \sum_{\mu=M+1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^N \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Neg} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & - \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^N \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{1-\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & + r \sum_{\nu=1}^N \sum_{\rho=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Neg} \left(\frac{\nu-c}{n} - \frac{1-\rho-e}{r} \right) \end{aligned}$$

hierbei haben wir die Voraussetzungen gemacht:

$$m = nh + rr, \quad r = \pm 1, \quad e = \mathfrak{AB} \{(a - hc)r\}$$

m, n, r positive Grössen; h ganze Zahl oder Null

M, N positive Zahlen, welche die Bedingung erfüllen, dass der Ausdruck

$$\frac{\mu - a}{m} - \frac{\nu - c}{n}$$

für kein ganzzahliges ν verschwindet, wenn das ganzzahlige μ nicht ausserhalb der Grenzen 1 und M liegt;

und dass der Ausdruck auch für kein ganzzahliges μ verschwindet, wenn das ganzzahlige ν nicht ausserhalb der Grenzen 1 und N liegt.

Diese Bedingung ergab dann als nothwendige Folge, dass auch der Ausdruck

$$\frac{\nu - c}{n} - \frac{\rho - e}{r}$$

für kein ganzzahliges ρ verschwindet, wenn das ganzzahlige ν nicht ausserhalb der Grenzen 1 und N liegt.

Die Gleichung [31] kann dazu dienen, das zu bestimmende erste Glied der ersten Seite der Gleichung auf das zweite Glied zurückzuführen, wenn nemlich die M, N solche Werthe haben, dass die Werthe der Glieder der zweiten Seite der Gleichung ermittelt werden können.

Ergibt sich $\frac{n}{r}$ als ganze Zahl oder als eine von einer ganzen Zahl um eine im Verhältniss zu N genügend wenig verschiedene Grösse, so lässt sich das zweite Glied der ersten Seite der Gleichung [31] unmittelbar berechnen. Ist diese Bedingung aber noch nicht erfüllt, so wird unter Anwendung der folgenden zwischen n und r gebildeten Gleichung des EUKLIDISCHEN Algorithmus eine weitere Reduction mit Hülfe des durch die Gleichung [31] dargestellten Lehrsatzes erforderlich.

Artikel IV.

Anwendung der allgemeinen Reductionsformel.

Will man die allgemeine Reductions-Gleichung [31] unmittelbar

zur Berechnung der Anzahl der Vorzeichen der Werthe einer linearen Function anwenden, so verdient beachtet zu werden, dass man durch geeignete Wahl von N die zweite Seite jener Gleichung erheblich vereinfachen kann.

Setzt man nemlich zu diesem Zwecke

$$[32] \dots\dots\dots N = \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pos} \left(\frac{M-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right)$$

also

$$[33] \dots\dots\dots \frac{M-a}{m} - \frac{N-c}{n} > 0 > \frac{M-a}{m} - \frac{N+1-c}{n}$$

so werden, weil m und n positiv sind, in der Gleichung [31] auf der zweiten Seite das viertletzte und das drittletzte Glied verschwinden.

Es war e als echter Bruch bestimmt; sind nun auch a und c echte Brüche also:

$$[34] \dots\dots\dots -1 < a < +1, \quad -1 < c < +1$$

so kann, wie unmittelbar zu ersehen, in der Gleichung [31] auf der zweiten Seite das vorletzte Glied für $\mu > 1$ so wie das letzte Glied für $\rho > 1$ keinen Beitrag mehr liefern.

Die Gleichung selbst geht also in:

$$[35] \dots\dots\dots \left. \begin{aligned} & \prod_{\mu=1}^N \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & + r \prod_{r=1}^N \prod_{\rho=1}^{\infty} \text{Pos} \left(\frac{\nu-c}{n} - \frac{\rho-e}{r} \right) \end{aligned} \right| = \left| \begin{aligned} & -\frac{1}{2} h N (1+N) + N \left(M + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r \right) - N(a - hc - re) \\ & - \prod_{\nu=1}^N \text{Pos} \left(-\frac{a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & + r \prod_{\nu=1}^N \text{Neg} \left(\frac{\nu-c}{n} + \frac{e}{r} \right) \end{aligned} \right|$$

über, wobei ausser den für die Gleichung [31] bestehenden und neben ihr angegebenen Bedingungen noch die Voraussetzungen [32] und [34] gelten.

Beispiel: Es soll der Werth des Ausdrucks

$$\prod_{\mu=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pof} \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{206} \right)$$

ermittelt werden.

Zunächst ist

$$\prod_{\mu=1}^{\infty} \text{Pof} \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{379} - \frac{1 - \frac{1}{2}}{206} \right) = 94$$

also, wenn man $\mu = 94 + 1 - \mu'$ setzt und nachher μ statt μ' anwendet, ergibt sich

$$\begin{aligned} [36] \quad \prod_{\mu=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pof} \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{206} \right) &= \prod_{\mu=1}^{94} \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pof} \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{206} \right) \\ &= \prod_{\mu=1}^{94} \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pof} \left(\frac{\mu + \frac{1}{2}}{379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{206} \right) \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck mit Hülfe der Gleichung [35] zu reduciren, setzen wir

$$379 = 206 \cdot 2 - 33$$

also

$$m = 379, n = 206, r = 33, r = -1, h = 2, M = 94, a = -\frac{1}{4}, c = +\frac{1}{2}$$

$$a - hc = -\frac{5}{4}, e = \mathfrak{AB}(a - hc)r = \mathfrak{AB}\frac{5}{4} = \frac{1}{4}, a - hc - re = -1$$

Nach Gleichung [32] wird

$$N = \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pof} \left(\frac{94 + \frac{1}{2}}{379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{206} \right) = 51$$

also

$$\prod_{\nu=1}^N \text{Pof} \left(-\frac{a}{m} - \frac{\nu - c}{m} \right) = \prod_{\nu=1}^{51} \text{Pof} \left(\frac{1}{4 \cdot 379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{206} \right) = 0$$

Weil $e > 0$, $c < +1$ ist, wird in Gleichung [35] das letzte Glied der zweiten Seite zu 0 und die Gleichung geht also für dieses Beispiel in

$$[37] \dots \left. \begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^{94} \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pof} \left(\frac{\mu + \frac{1}{2}}{379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{206} \right) \\ & - \sum_{\nu=1}^{51} \sum_{\rho=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pof} \left(\frac{\nu - \frac{1}{2}}{206} - \frac{\rho - \frac{1}{2}}{33} \right) \end{aligned} \right| = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 51 \cdot 52 + 51 \cdot 95 + 51 \cdot 1 = 2244$$

über.

Zur Reduction des zweiten Gliedes der ersten Seite dieser Gleichung setzen wir

$$206 = 33 \cdot 6 + 8$$

und $M = 51$, $m = 206$, $n = 33$, $h = 6$, $r = 8$, $r = +1$, $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$ also

$$a - hc = -1, \quad e = \mathfrak{A} \mathfrak{B}(a - hc)r = 0, \quad a - hc - re = -1$$

Nach Gleichung [32] wird

$$N = \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{Pof} \left(\frac{51 - \frac{1}{2}}{206} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{33} \right) = 8$$

In der Gleichung [35] auf der zweiten Seite verschwindet das vorletzte Glied, weil $a > 0$, $c < +1$ ist, und ebenfalls das letzte Glied, weil $c < +1$, $e = 0$ ist, die Gleichung gibt also für diesen Fall:

$$[38] \dots \left. \begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^{51} \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pof} \left(\frac{\mu - \frac{1}{2}}{206} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{33} \right) \\ & + \sum_{\nu=1}^8 \sum_{\rho=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pof} \left(\frac{\nu - \frac{1}{2}}{33} - \frac{\rho}{8} \right) \end{aligned} \right| = -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 + 8(51 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + 8 = 200$$

Das zweite Glied der ersten Seite dieser Gleichung liesse sich mit Hülfe von

$$33 = 8 \cdot 4 + 1$$

weiter reduciren, man sieht hier aber auch unmittelbar, dass

$$[39] \dots \dots \sum_{\nu=1}^8 \sum_{\rho=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pof} \left(\frac{\nu - \frac{1}{2}}{33} - \frac{\rho}{8} \right) = \sum_{\nu=1}^8 \text{An}_3 \text{Pof} \left(\frac{\nu - \frac{1}{2}}{33} - \frac{1}{8} \right) = 4$$

ist. Die Verbindung der Gleichungen [36], [37], [38], [39] ergibt

$$[40] \dots \prod_{\mu=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pof} \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{206} \right) = 2244 + 200 - 4 = 2440$$

als Lösung der Aufgabe.

Artikel V.

Grenzwerte mit einfacher Beziehung unter einander.

Die auf der zweiten Seite der Reductions - Gleichung [31] vorkommenden und unmittelbar zu bestimmenden Glieder vereinfachen sich auch, wenn man

$$[41] \quad M = tm - 1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tm), \quad N = tn - 1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn)$$

und für a und c dieselben Grenzen annimmt, welche sich für e durch dessen Bestimmungsweise [22] ergaben, nemlich

$$[42] \dots \dots \dots -\frac{1}{2} < a \leq +\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < c \leq +\frac{1}{2}$$

Man erhält hier, wenn man auch die bei Gleichung [31] angegebenen Voraussetzungen über das Nichtverschwinden der linearen Functionen beachtet:

$$\frac{\mu - a}{m} - \frac{\nu - c}{n} \leq \frac{M - a}{m} - \frac{N + 2 - c}{n} = -\frac{1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tm) + a}{m} - \frac{1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn) - c}{n} < 0$$

worin $\mu \leq M$, $\nu \geq N + 2$ ist,

$$\frac{\mu - a}{m} - \frac{\nu - c}{n} \geq \frac{M + 2 - a}{m} - \frac{N - c}{n} = \frac{1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tm) - a}{m} + \frac{1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn) + c}{n} > 0$$

worin $\mu \geq M + 2$, $\nu \leq N$ ist,

$$\frac{1 - \mu - a}{m} - \frac{\nu - c}{n} \leq \frac{1 - 2 - a}{m} - \frac{1 - c}{n} < 0, \quad \text{für } \mu \geq 2, \nu \geq 1$$

$$\frac{\nu - c}{n} - \frac{1 - \rho - e}{r} \geq \frac{1 - c}{n} + \frac{1 + e}{r} > 0, \quad \text{für } \nu \geq 1, \rho \geq 2$$

Aus diesen Beziehungen ergibt sich unmittelbar, dass die Reductions - Gleichung [31] die einfachere Form

$$[43] \dots \left. \begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & + r \sum_{\nu=1}^N \sum_{\rho=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\nu-c}{n} - \frac{\rho-e}{r} \right) \end{aligned} \right| = \begin{aligned} & -\frac{1}{2} h N (1+N) + N (M + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r) - N (a - hc - re) \\ & + \sum_{\mu=1}^M \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{N+1-c}{n} \right) \\ & + \sum_{\nu=1}^N \text{Neg} \left(\frac{M+1-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & - \sum_{\nu=1}^N \text{An}_3 \text{Pos} \left(-\frac{a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & + r \sum_{\nu=1}^N \text{An}_3 \text{Neg} \left(\frac{\nu-c}{n} + \frac{e}{r} \right) \end{aligned}$$

annehmen kann. Ausser den bei [31] angegebenen Bedingungen gelten hier auch noch [41] und [42].

Die Gleichung [43] hat im allgemeinen Falle die Bedeutung einer Zurückführungs-Gleichung des ersten auf den zweiten Ausdruck in der ersten Seite der Gleichung. Für den besonderen Fall

$$h = 0, \quad r = +1, \quad r = m, \quad e = a$$

stellt sie ein Reciprocitäts-Gesetz in der Form:

$$[44] \dots \left. \begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) \\ & + \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^{\infty} \text{An}_3 \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\nu-c}{n} - \frac{\mu-a}{m} \right) \end{aligned} \right| = \begin{aligned} & + MN \\ & + \sum_{\mu=1}^M \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{N+1-c}{n} \right) \\ & + \sum_{\nu=1}^N \text{An}_3 \text{Pos} \left(\frac{\nu-c}{n} - \frac{M+1-a}{m} \right) \end{aligned}$$

unter denselben Voraussetzungen, welche vorher angegeben sind, dar. Diese Gleichung hätte man auch, ohne Zuhülfenahme von [43], aus der Identität [30] und aus dem Satze, dass von zwei mit entgegengesetzten Vorzeichen versehenen nicht verschwindenden reellen Grössen Eine positiv ist, ableiten können.

Besteht der anzuwendende Euklidische Algorithmus aus einer grossen Anzahl von Gleichungen, so würde der Lehrsatz [43] für jene Gleichungen eine Reihe von grossen zu berechnenden Zahlen ergeben, welche in

der schliesslichen Lösung bis auf Eine sich gegenseitig aufheben. Die betreffenden Theile erkennt man aber, wenn man

$$[41^*] \quad R = tr - 1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tr)$$

setzt, unmittelbar aus den Gleichungen

$$[45] \dots -\frac{1}{2}hN(1+N) + N(M + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r) = +\frac{1}{2}\{M + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tm)\}\{N - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn)\} \\ + \frac{1}{2}r\{N + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn)\}\{R - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tr)\} \\ + \frac{1}{2}\mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tm) + \frac{1}{2}r\mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn) \\ + \{\frac{1}{2} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tm)\}\{\frac{1}{2} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn)\} \\ - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}h\{1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn)\}\mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn)$$

$$[46] \dots -N(a - ch - re) = t(cm - an) + rt(en - cr) - (hc - a + re)\{1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn)\}$$

Die beiden hiernach folgenden Glieder der zweiten Seite der Gleichung [43] können in die für die Berechnung übersichtlicheren Ausdrücke:

$$[47] \dots \mathfrak{A}\mathfrak{N}_3 \mathfrak{P}\mathfrak{o}\mathfrak{f} \left(\frac{\mu - a}{m} - \frac{N + 1 - c}{n} \right)$$

$$= \mathfrak{A}\mathfrak{N}_3 \mathfrak{P}\mathfrak{o}\mathfrak{f} \left\{ -\mu - a + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tm) + h[c - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn)] + r \frac{c - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn)}{n} \right\}$$

$$[48] \dots \mathfrak{A}\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}\mathfrak{e}\mathfrak{g} \left(\frac{M + 1 - a}{m} - \frac{\nu - c}{n} \right) = \mathfrak{A}\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}\mathfrak{e}\mathfrak{g} \left\{ \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tm) - a}{m} + \frac{\nu + c - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(-tn)}{n} \right\}$$

umgewandelt werden.

Artikel VI.

Einfache Formen der linearen Function.

Bei der Bestimmung des quadratischen Rest-Character's treten die linearen Functionen auf, in welchen a und c keine andere Werthe als 0 oder $+\frac{1}{2}$ haben. Auch die Grenzen M und N der Argumente μ und ν besitzen die einfachen Werthe, welche sich aus [41] für $t = \frac{1}{2}$ ergeben.

Die Grössen m und n sind dann ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Theiler und durch diese Eigenschaft werden die oben bei Gleichung [31] ausgesprochenen Bedingungen über das Nichtverschwinden der linearen Functionen erfüllt.

Die Gleichung [43] kann nur dann zur Reduction der zu berechnenden Grösse dienen, wenn m grösser als n und n grösser als r ist. Wir machen also für die folgenden Untersuchungen die Voraussetzungen:

[49] $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ und } n \text{ positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler} \\ m > n > r > 0, \quad m = nh + rr, \quad r = \pm 1, \quad h \text{ ganze Zahl} \\ a = 0 \text{ oder } = +\frac{1}{2}, \quad c = 0 \text{ oder } = +\frac{1}{2}, \quad e = \mathfrak{B}(hc - a) \\ M = \frac{1}{2}m - 1 + \mathfrak{B}\frac{1}{2}m, \quad N = \frac{1}{2}n - 1 + \mathfrak{B}\frac{1}{2}n, \quad R = \frac{1}{2}r - 1 + \mathfrak{B}\frac{1}{2}r \end{array} \right.$

Für $v \leq N$ wird deshalb

$$\frac{M+1-a}{m} - \frac{v-c}{n} \geq \frac{M+1-a}{m} - \frac{N-c}{n} = \frac{\mathfrak{B}\frac{1}{2}m-a}{m} + \frac{1-\mathfrak{B}\frac{1}{2}n+c}{n} \geq \frac{0-\frac{1}{2}}{m} + \frac{1-\frac{1}{2}+0}{n} > 0$$

und daher

[50] $\dots \dots \dots \sum_{v=1}^N \text{Anz Neg} \left(\frac{M+1-a}{m} - \frac{v-c}{n} \right) = \sum_{v=1}^N \text{Anz Pos} \left(\frac{v-c}{n} - \frac{M+1-a}{m} \right) = 0$

Für $v \geq 1$ wird

$$-\frac{a}{m} - \frac{v-c}{n} \leq -\frac{a}{m} - \frac{1-c}{n} \leq \frac{0}{m} - \frac{1-\frac{1}{2}}{n} < 0$$

und daher

[51] $\dots \dots \dots \sum_{v=1}^N \text{Anz Pos} \left(-\frac{a}{m} - \frac{v-c}{n} \right) = 0$

Es ist:

$$\frac{v-c}{n} + \frac{e}{r} \geq \frac{1-\frac{1}{2}}{n} + \frac{0}{r} > 0$$

also

[52] $\dots \dots \dots \sum_{v=1}^N \text{Anz Neg} \left(\frac{v-c}{n} + \frac{e}{r} \right) = 0$

Auf der zweiten Seite der Reductions-Gleichung [43] bleibt noch ein Glied zu bestimmen. Ersetzen wir darin die Veränderliche μ durch $M+1-\mu$, so entsteht

$$\begin{aligned}
 [53] \quad \dots \quad \prod_{\mu=1}^M \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{N+1-c}{n} \right) &= \prod_{\mu=1}^M \text{Pos} \left(\frac{M+1-\mu-a}{m} - \frac{N+1-c}{n} \right) \\
 &= \prod_{\mu=1}^M \text{Pos} \left(-\frac{\mu - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m + a}{m} - \frac{\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} n - c}{n} \right)
 \end{aligned}$$

Ist nun $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} n = \frac{1}{2}$ so wird für $\mu \geq 1$ in Folge der Voraussetzungen über die Grenzwerte von a und c

$$-\frac{\mu - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m + a}{m} - \frac{\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} n - c}{n} \leq -\frac{1 - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m + a}{m} - \frac{\frac{1}{2} - c}{n} \leq -\frac{1 - \frac{1}{2} + 0}{m} - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{n} < 0$$

also nach Gleichung [53] auch

$$[54] \quad \dots \quad \prod_{\mu=1}^M \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{N+1-c}{n} \right) = 0 \quad \text{wenn } \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} n = \frac{1}{2} \text{ ist.}$$

Für $c = 0$ und $\mu \geq 1$ wird

$$-\frac{\mu - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m + a}{m} - \frac{\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} n - c}{n} \leq -\frac{1 - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m + a}{m} - \frac{\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} n - 0}{n} \leq -\frac{1 - \frac{1}{2} + 0}{m} - \frac{0 - 0}{n} < 0$$

also nach [53] auch

$$[55] \quad \dots \quad \prod_{\mu=1}^M \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{N+1-c}{n} \right) = 0 \quad \text{wenn } c = 0 \text{ ist}$$

Wir haben noch den Fall $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} n = 0$, $c = \frac{1}{2}$ zu betrachten. Da hier n gerade ist und m mit n keinen gemeinsamen Theiler besitzt, so wird $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m = \frac{1}{2}$ also aus [53] jetzt

$$[56] \quad \dots \quad \prod_{\mu=1}^M \text{Pos} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{N+1-c}{n} \right) = \prod_{\mu=1}^M \text{Pos} \left(-\frac{\mu - \frac{1}{2} + a}{m} + \frac{1}{2n} \right)$$

Wegen der Gleichung $m = n h + r$ kann man

$$[57] \quad \dots \quad -\frac{\mu - \frac{1}{2} + a}{m} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{m} \left\{ -\mu + \left(\frac{1}{2} h - a + r e \right) + \frac{1}{2} - r \left(e - \frac{r}{2n} \right) \right\}$$

setzen. Da $e = 0$ oder $= +\frac{1}{2}$ und $0 < r < n$ ist, so wird

$$0 < \frac{1}{2} - r \left(e - \frac{r}{2n} \right) < +1$$

Im vorliegenden Falle ist $e = \mathfrak{B}(ch - a) = \mathfrak{B}(\frac{1}{2}h - a)$, also wird die Grösse

$$\frac{1}{2}h - a + re \quad \text{oder} \quad ch - a + re$$

gleich einer ganzen Zahl oder gleich Null. Sie kann daher nicht negativ sein, weil sie wegen $h > 0$ und wegen der Werthe von a und e sonst gleich $-\frac{1}{2}$ sein müsste. Sie kann aber auch nicht grösser als M sein. In der That ist im gegenwärtigen Falle

$$M = \frac{1}{2}m - 1 + \mathfrak{B}\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n\bar{h} + \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}$$

also

$$M - (\frac{1}{2}h - a + re) = \frac{1}{2}h(n-1) + r(\frac{1}{2}r - e) - \frac{1}{2} + a \geq \frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}(n-r) - 1 \geq -\frac{1}{2}$$

Da aber der Werth von $M - (\frac{1}{2}h - a + re)$ sich zuvor als ganze Zahl ergab, so muss er, um der zuletzt gefundenen Beziehung genügen zu können, Null oder eine ganze positive Zahl sein. Es wird demnach

$$\sum_{\mu=1}^M \mathfrak{B}\mathfrak{of} \left\{ -\mu + (\frac{1}{2}h - a + re) + \frac{1}{2} - r \left(e - \frac{r}{2n} \right) \right\} = \frac{1}{2}h - a + re = ch - a + re$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung [57] auch

$$[58] \dots \sum_{\mu=1}^M \mathfrak{B}\mathfrak{of} \left(\frac{\mu - a}{m} - \frac{N+1-c}{n} \right) = ch - a + re, \quad \text{wenn: } \mathfrak{B}\frac{1}{2}n = 0, \quad c = \frac{1}{2} \text{ ist.}$$

Die drei Gleichungen [54], [55], [58] können wir gemeinsam in der einen

$$[59] \dots \sum_{\mu=1}^M \mathfrak{B}\mathfrak{of} \left(\frac{\mu - a}{m} - \frac{N+1-c}{n} \right) = 2c(1 - 2\mathfrak{B}\frac{1}{2}n)(ch - a + re)$$

darstellen.

Mit Hülfe der vier Gleichungen [50], [51], [52], [59] erhalten wir die Reductions-Gleichung [43] in der Gestalt:

$$\begin{aligned}
[60] \dots \prod_{\mu=1}^M \prod_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{Pof} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) &= \left| \begin{aligned} & -\frac{1}{2} h N (1+N) + N (M + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r) - N (a - hc - re) \\ & + 2c (1 - 2\mathfrak{B} \frac{1}{2} n) (ch - a + re) \end{aligned} \right. \\
+ r \prod_{\nu=1}^N \prod_{\rho=1}^{\infty} \mathfrak{Pof} \left(\frac{\nu-c}{n} - \frac{\rho-e}{r} \right) &= \left| \begin{aligned} & -\frac{1}{2} h N (1+N) + N (M + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r) \\ & + (hc - a + re) (N + 2c - 4c\mathfrak{B} \frac{1}{2} n) \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

wobei die unter [49] angegebenen Voraussetzungen gelten.

Für diese Voraussetzungen finden wir aus der allgemeineren Gleichung [44], wenn wir die Gleichungen [50] und [59] berücksichtigen, als Reciprocitäts-Satz:

$$\begin{aligned}
[61] \dots \prod_{\mu=1}^M \prod_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{Pof} \left(\frac{\mu-a}{m} - \frac{\nu-c}{n} \right) &= MN + 2c (1 - 2\mathfrak{B} \frac{1}{2} n) (ch - a + re) \\
+ \prod_{\nu=1}^N \prod_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{Pof} \left(\frac{\nu-c}{n} - \frac{\mu-a}{m} \right) &
\end{aligned}$$

Artikel VII.

Einfachste lineare Functionen.

Die in der Reductions-Gleichung [60] auf der zweiten Seite vorkommenden von a , c und e unabhängigen Glieder kann man, wenn man die Werthe von M , N und R in [49] berücksichtigt und Alles auf geeignete Weise anordnet, in:

$$\begin{aligned}
[62] \dots & -\frac{1}{2} h N (1+N) + N (M + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r) \\
& = +\frac{1}{2} (M + \mathfrak{B} \frac{1}{2} m) (N - \mathfrak{B} \frac{1}{2} n) + \frac{1}{2} r (N + \mathfrak{B} \frac{1}{2} n) (R - \mathfrak{B} \frac{1}{2} r) \\
& + \frac{1}{2} \mathfrak{B} \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} r \mathfrak{B} \frac{1}{2} n - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} h \mathfrak{B} \frac{1}{2} n \\
& - \frac{1}{4} (N + \mathfrak{B} \frac{1}{2} n) (nh + rr - m) + \frac{1}{2} h (\frac{1}{2} - \mathfrak{B} \frac{1}{2} n) \mathfrak{B} \frac{1}{2} n + (\frac{1}{2} - \mathfrak{B} \frac{1}{2} m) (\frac{1}{2} - \mathfrak{B} \frac{1}{2} n)
\end{aligned}$$

umformen. Hier verschwinden die letzten drei Glieder.

Es ist nemlich der Voraussetzung nach $nh + rr - m = 0$.

Es hat $\mathfrak{B} \frac{1}{2} n$ den Werth 0 oder $+\frac{1}{2}$ also ist

$$[63] \quad \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}n}\right) \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}n} = 0$$

Es können der Voraussetzung nach m und n nicht zugleich gerade sein, also ist:

$$[64] \dots \quad \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}m}\right) \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}n}\right) = 0$$

und ebenso:

$$[65] \dots \quad \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}n}\right) \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}r}\right) = 0$$

Die auf der zweiten Seite der Reductions-Gleichung [60] noch vorkommenden übrigen Glieder verschwinden, wenn a und c den Werth Null haben, denn dann wird auch $\mathfrak{B}(hc - a)$ das ist e zu Null. Wir erhalten also:

$$[66] \dots \left. \begin{aligned} & \mathfrak{A}_3^M \mathfrak{A}_3^\infty \mathfrak{Pof} \left(\frac{\mu}{m} - \frac{\nu}{n} \right) \\ & + r \mathfrak{A}_3^N \mathfrak{A}_3^\infty \mathfrak{Pof} \left(\frac{\nu}{n} - \frac{\rho}{r} \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & = -\frac{1}{2} h N (1 + N) + N (M + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r) \\ & = \frac{1}{2} (M + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}m}) (N - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}n}) + \frac{1}{2} r (N + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}n}) (R - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}r}) \\ & \quad + \frac{1}{2} \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}m} + \frac{1}{2} r \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} h \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}n} \end{aligned}$$

bei den unter [49] angegebenen Voraussetzungen, so weit diese nicht a , c und e betreffen. Die zu $a = 0 = c$ gehörige Form heisse die erste Form

$$[67] \dots \quad \text{der linearen Function } \frac{\mu - a}{m} - \frac{\nu - c}{n}$$

Artikel VIII.

Einfache lineare Functionen der zweiten Form.

Um die verschiedenen Formen der Gleichung [60] für alle Werthensysteme der a und c übersichtlicher darzustellen, setzen wir

$$[68] \dots \quad S(a, c) = \mathfrak{A}_3^M \mathfrak{A}_3^\infty \mathfrak{Pof} \left(\frac{\mu - a}{m} - \frac{\nu - c}{n} \right) + r \mathfrak{A}_3^N \mathfrak{A}_3^\infty \mathfrak{Pof} \left(\frac{\nu - c}{n} - \frac{\rho - e}{r} \right)$$

Es ist also im vorigen Artikel der Werth von $S(0, 0)$ ermittelt und wir haben nach [60] noch

$$[69] \dots \quad S(a, c) - S(0, 0) = (ch - a + re) (N + 2c - 4c \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}n})$$

zu bestimmen.

Für das der zweiten Form der Function [67] entsprechende Werthensystem

$$[70] \quad a = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m, \quad c = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n$$

ergibt sich aus den Gleichungen $e = \mathfrak{B}(hc - a)$ und $-rr = nh - m$ unmittelbar, dass auch

$$[71] \quad e = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r$$

wird. Zunächst lässt die Gleichung [63] den zu untersuchenden Ausdruck sich vereinfachen, weil

$$2c - 4c\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n = 4 \cdot (\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n) \cdot \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n = 0$$

wird. Setzt man dann die Werthe von a, c, e, N ein und ordnet Alles auf geeignete Weise, so erhält man

$$\begin{aligned} & (ch - a + re)(N + 2c - 4c\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n) \\ &= \frac{1}{2}(m-1)\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n - \frac{1}{2}(n-1)\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m + \frac{1}{2}r(n-1)\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r - \frac{1}{2}r(r-1)\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}r - \frac{1}{2}h\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n \\ & \quad + \frac{1}{2}(hn + rr - m)\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n - h(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n)\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n \\ & \quad - (\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m)(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n) \\ & \quad + r(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n)(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r) \end{aligned}$$

Die letzten vier Glieder verschwinden hier in Folge der Definitionsgleichung [49] für r und der Gleichungen [63], [64], [65], wir erhalten also

$$[72] \quad \dots S(\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m, \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n) - S(0, 0) = +\frac{1}{2}(m-1)\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n - \frac{1}{2}(n-1)\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m \\ + \frac{1}{2}r(n-1)\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r - \frac{1}{2}r(r-1)\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n \\ + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}r - \frac{1}{2}h\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n$$

unter den bei der Gleichung [66] angegebenen Voraussetzungen.

Artikel IX.

Einfache lineare Functionen der dritten und vierten Form.

Es bleibt uns noch die übersichtliche Anordnung der Glieder der Reductions - Gleichung auszuführen, wenn weder zugleich $a = 0 = c$ noch zugleich $a = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m$ und $c = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n$ ist. Aus der Bestimmungs-

weise [49] des e ergibt sich, dass nicht zugleich $c = 0 = e$ sein kann, weil sonst auch $a = 0$ sein müsste, ferner dass auch nicht zugleich $c = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n$ und $e = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r$ sein kann, denn sonst müsste auch $a = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m$ sein.

Da also weder zugleich

$$\frac{1}{2} = a = c = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n$$

noch zugleich

$$\frac{1}{2} = c = e = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r$$

ist, so wird

$$[73] \dots a\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m \cdot \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n = 0 = ce\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n \cdot \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r$$

Es kann nicht zugleich $a = 0 = \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m$ sein, weil sonst nach der Voraussetzung dieses Artikels $c = \frac{1}{2}$ und wegen n relativ prim zu m auch $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n = \frac{1}{2}$ sein müsste. Dieser Satz wird durch die Gleichungen

$$[74] \dots (\frac{1}{2} - a)(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m) = 0 = (\frac{1}{2} - c)(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n) = (\frac{1}{2} - e)(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r)$$

dargestellt. Ist $a = 0$, so muss also $c = \frac{1}{2}$, $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m = \frac{1}{2}$ sein; ist $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n = 0$ so muss ebenfalls $c = \frac{1}{2}$, $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m = \frac{1}{2}$ sein; das heisst, es ist:

$$[75] \dots (\frac{1}{4} - a\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n)(\frac{1}{4} - c\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m) = 0 = (\frac{1}{4} - c\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r)(\frac{1}{4} - e\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n)$$

Die Verbindung dieser Gleichung mit [73] ergibt noch

$$[76] \dots a\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n + c\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m = \frac{1}{4}, \quad [76^*] \dots c\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r + e\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n = \frac{1}{4}$$

Die Gleichung [76] unterscheidet, wie leicht zu sehen, die in diesem Artikel zu betrachtenden Werthe der a und c von den in den beiden vorhergehenden Artikeln für a und c vorausgesetzten Werthensystemen.

Nach Einführung des Werthes von N können wir den zu bestimmenden Ausdruck in

$$[77] \dots (hc - a + re)(N + 2c - 4c\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n) \\ = \frac{1}{2}mc - a(\frac{1}{2}n - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n) + \frac{1}{2}rne - rc(\frac{1}{2}r - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r) - \frac{1}{4}r - hc\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n \\ - 4(hc - a + re)(\frac{1}{2} - c)(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n) \\ + \frac{1}{2}c(nh + rr - m) + r(\frac{1}{4} - c\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r - e\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n)$$

umgestalten. Die letzten drei Glieder der zweiten Seite dieser Gleichung verschwinden in Folge von [74], [49] und [76*].

Aus der Reductions-Gleichung [60] oder [69] erhalten wir daher :

[78] . . $S(a,c) - S(0,0) = \frac{1}{2}mc - a(\frac{1}{2}n - \mathfrak{B}\frac{1}{2}n) + \frac{1}{2}rne - rc(\frac{1}{2}r - \mathfrak{B}\frac{1}{2}r) - \frac{1}{4}r - hc\mathfrak{B}\frac{1}{2}n$
 wofür ausser den bei Gleichung [49] angegebenen Voraussetzungen auch noch [76] gilt.

In diesem und den beiden vorhergehenden Artikeln haben wir für a, c Werthensysteme betrachtet, welche aus 0 und $+\frac{1}{2}$ gebildet werden können. Die Anzahl dieser Werthensysteme beträgt vier, in ihnen zusammen nimmt sowohl a wie auch c zweimal den Werth 0 und zweimal den Werth $+\frac{1}{2}$ an, also die Summe der vier Werthe von a beträgt $+1$ und die Summe der vier Werthe von c beträgt ebenfalls $+1$.

Im Artikel VII haben wir das Werthensystem $a = 0 = c$, im Artikel VIII das Werthensystem $a = \mathfrak{B}\frac{1}{2}m, c = \mathfrak{B}\frac{1}{2}n$. Beide Werthensysteme sind von einander verschieden, weil $\mathfrak{B}\frac{1}{2}m$ und $\mathfrak{B}\frac{1}{2}n$ nicht zugleich verschwinden können. Für den laufenden Artikel haben wir also zwei von jenen beiden und auch von einander verschiedene Werthensysteme, welche wir mit (a', c') und (a'', c'') bezeichnen wollen.

Es wird dann also

$$[79] \quad a' + a'' + \mathfrak{B}\frac{1}{2}m = 1, \quad c' + c'' + \mathfrak{B}\frac{1}{2}n = 1$$

und durch dieselben Betrachtungen ergibt sich

$$[80] \quad e' + e'' + \mathfrak{B}\frac{1}{2}r = 1$$

Artikel X.

Beziehungen zwischen den Vorzeichen der vier linearen Functionen.

Die Gleichung [66] können wir mit Benutzung von [49], [64], [65] und [68] in dieser Weise

$$[81] \quad S(0,0) = +\frac{1}{2}MN + \frac{1}{2}rNR - \frac{1}{4}(m-1)\mathfrak{B}\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}(n-1)\mathfrak{B}\frac{1}{2}m \\ - \frac{1}{4}r(n-1)\mathfrak{B}\frac{1}{2}r + \frac{1}{4}r(r-1)\mathfrak{B}\frac{1}{2}n - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}r + \frac{1}{4}h\mathfrak{B}\frac{1}{2}n$$

darstellen. Vergleichen wir diese mit [72], so erhalten wir:

$$[82] \dots S(\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m, \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n) + S(0, 0) = MN + rNR$$

Denken wir uns die Gleichung [78] für das Werthensystem (a', c') und auch für (a'', c'') aufgestellt, addiren die beiden so entstandenen Gleichungen, fügen noch die mit 2 multiplicirte Gleichung [81] hinzu und berücksichtigen [64], [65], [79] und [80] so finden wir:

$$\begin{aligned} [83] \dots S(a', c') + S(a'', c'') \\ &= + MN + rNR \\ &\quad + (m-1)\left(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n\right) - (n-1)\left(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m\right) \\ &\quad + r(n-1)\left(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r\right) - r(r-1)\left(\frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n\right) \\ &= + (M-1 + 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m)(N+1 - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n) + r(N-1 + 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n)(R+1 - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}r) \end{aligned}$$

Die beiden Formeln [82] und [83] hätte man auch unmittelbar aus den für

$$M = \frac{1}{2}m - 1 + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m, \quad N = \frac{1}{2}n - 1 + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n$$

bestehenden Gleichungen

$$[84] \dots \prod_{\mu=1}^M \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pof}\left(\frac{\mu - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m}{m} - \frac{\nu - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n}{n}\right) + \prod_{\mu=1}^M \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pof}\left(\frac{\mu}{m} - \frac{\nu}{n}\right) = MN$$

$$[85] \dots \prod_{\mu=1}^M \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pof}\left(\frac{\mu - \frac{1}{2}}{m} - \frac{\nu - \frac{1}{2} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n}{n}\right) \left| \begin{aligned} &= (M-1 + 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m)(N+1 - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n) \\ &+ \prod_{\mu=1}^M \prod_{\nu=1}^{\infty} \text{Pof}\left(\frac{\mu - \frac{1}{2} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m}{m} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{n}\right) \end{aligned} \right.$$

ableiten können. Die durch [84] und [85] dargestellten Lehrsätze ergeben sich aus der Betrachtung der einander zu $M+1$ und zu $N+1$ in [84], aber zu $M+2 - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m$ und zu $N+2 - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n$ in [85] ergänzenden Argumentwerthe der beiden μ und der beiden ν .

Die Gleichungen [84] und [85] gelten, wenn m und n positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind und wenn für den Fall

$$\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m = 0, \quad \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}n = \frac{1}{2},$$

in Gleichung [85] die Zahl m grösser als n ist.

Artikel XI.

Summation für den Euklidischen Algorithmus.

Um die ganze Reihe von aufeinander folgenden Gleichungen eines EUKLIDISCHEN Algorithmus untersuchen zu können, gehen wir von unserer bisherigen Bezeichnungsweise zu einer neuen mit den Gleichungen

$$[86] \dots m = m_{\sigma-1}, \quad n = m_{\sigma}, \quad h = h_{\sigma}, \quad r = m_{\sigma+1}, \\ r = m_{\sigma+1} = \frac{1}{2}1, \quad M = M_{\sigma-1}, \quad N = M_{\sigma}, \quad R = M_{\sigma+1}$$

über, so dass also

$$[87] \dots \dots \quad m_{\sigma-1} = m_{\sigma} h_{\sigma} + m_{\sigma+1} m_{\sigma+1}$$

$$[88] \dots \dots \quad M_{\sigma} = \frac{1}{2}m_{\sigma} - 1 + \mathfrak{B} \frac{1}{2}m_{\sigma}$$

für jedes σ wird. Ferner wollen wir

$$[89] \dots \quad a = \mathfrak{B} \frac{1}{2}w_{\sigma-1}, \quad c = \mathfrak{B} \frac{1}{2}w_{\sigma}, \quad e = \mathfrak{B} \frac{1}{2}w_{\sigma+1}$$

setzen, worin $w_{\sigma-1}$, w_{σ} , $w_{\sigma+1}$ ganze Zahlen sind, für welche die Gleichung $e = \mathfrak{B}(hc - a)$ erfüllt sein muss. Diese Bedingung wird hergestellt und die gegebenen Werthe von a und c erleiden keine Beeinflussung, wenn wir die w durch die Gleichung

$$[90] \dots \quad w_{\sigma-1} = w_{\sigma} h_{\sigma} + m_{\sigma+1} w_{\sigma+1}$$

verbinden. Es ist also entweder

erstens entsprechend den Annahmen des Artikels VII jedes w_{σ} gerade oder zweitens entsprechend den Annahmen des Artikels VIII:

$w_{\sigma} = m_{\sigma}$ für jedes σ

oder endlich drittens entsprechend dem Artikel IX

$$[91] \dots \quad \mathfrak{B} \frac{1}{2}w_{\sigma-1} \cdot \mathfrak{B} \frac{1}{2}m_{\sigma} + \mathfrak{B} \frac{1}{2}w_{\sigma} \cdot \mathfrak{B} \frac{1}{2}m_{\sigma-1} = \frac{1}{4}$$

ebenfalls für jedes σ , und zwar gibt es für diesen letzteren Fall zwei Werthensysteme v und u von w , welche nach [79] und [80] für jedes σ die Gleichung

$$[92] \dots \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v_{\sigma} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_{\sigma} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\sigma} = 1$$

erfüllen.

Indem wir μ_{σ} die Zahlen 1, 2, 3, . . . M_{σ}

ferner $\mu_{\sigma-1}$ die Zahlen 1, 2, 3, . . . $M_{\sigma-1}$

und jedes ν_{σ} und $\nu_{\sigma-1}$ alle ganze positive Zahlen durchlaufen lassen, setzen wir:

$$[93] \dots T(\sigma, w) = \text{An}_{\delta, \nu} \text{Pos} \left\{ (\mu_{\sigma-1} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} w_{\sigma-1}) \frac{1}{m_{\sigma-1}} - (\nu_{\sigma} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} w_{\sigma}) \frac{1}{m_{\sigma}} \right\}$$

$$= \text{An}_{\delta, \nu} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - (\nu_{\sigma-1} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} w_{\sigma-1} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\sigma-1}) \frac{1}{m_{\sigma-1}} - (\nu_{\sigma} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} w_{\sigma}) \frac{1}{m_{\sigma}} \right\}$$

$$T'(\sigma, w) = \text{An}_{\delta, \nu} \text{Pos} \left\{ (\mu_{\sigma} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} w_{\sigma}) \frac{1}{m_{\sigma}} - (\nu_{\sigma-1} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} w_{\sigma-1}) \frac{1}{m_{\sigma-1}} \right\}$$

$$= \text{An}_{\delta, \nu} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - (\nu_{\sigma} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} w_{\sigma} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\sigma}) \frac{1}{m_{\sigma}} - (\nu_{\sigma-1} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} w_{\sigma-1}) \frac{1}{m_{\sigma-1}} \right\}$$

Für jede dieser beiden Functionen kommen also vier Formen in Betracht, welche den zuvor angegebenen vier Werthensystemen der w angehören.

Indem wir für $\mathfrak{M}_{\sigma}$ keinen anderen Werth als ± 1 zulassen, setzen wir

$$[94] \dots \mathfrak{M}_{\sigma+1} = -m_{\sigma+1} \mathfrak{M}_{\sigma}$$

Haben wir nun eine Reihe von aufeinander folgenden Gleichungen

[87] des EUKLIDISCHEN Algorithmus, stellen wir für jede derselben die einzelnen Reductions-Gleichungen [82], [83], [78] auf, multipliciren diese mit $\mathfrak{M}_{\sigma}$ und summiren von $\sigma = \lambda$ bis $\sigma = x$, so erhalten wir nach Fortlassung der sich gegenseitig unmittelbar aufhebenden Theile:

$$[95] \dots \mathfrak{M}_{\lambda} T(\lambda, 0) + \mathfrak{M}_{\lambda} T(\lambda, m) - \mathfrak{M}_{x+1} T(x+1, 0) - \mathfrak{M}_{x+1} T(x+1, m)$$

$$= \mathfrak{M}_{\lambda} M_{\lambda-1} M_{\lambda} - \mathfrak{M}_{x+1} M_x M_{x+1}$$

$$\mathfrak{M}_{\lambda} T(\lambda, v) + \mathfrak{M}_{\lambda} T(\lambda, u) - \mathfrak{M}_{x+1} T(x+1, v) - \mathfrak{M}_{x+1} T(x+1, u)$$

$$= \mathfrak{M}_{\lambda} (M_{\lambda-1} - 1 + 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\lambda-1}) (M_{\lambda} + 1 - 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\lambda})$$

$$- \mathfrak{M}_{x+1} (M_x - 1 + 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_x) (M_{x+1} + 1 - 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{x+1})$$

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{M}_\lambda T(\lambda, v) - \mathfrak{M}_\lambda T(\lambda, 0) - \mathfrak{M}_{x+1} T(x+1, v) + \mathfrak{M}_{x+1} T(x+1, 0) \\
&= +\frac{1}{2} \mathfrak{M}_\lambda m_{\lambda-1} \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} v_\lambda - \mathfrak{M}_\lambda \left(\frac{1}{2} m_\lambda - \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} m_\lambda \right) \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} v_{\lambda-1} \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathfrak{M}_{x+1} m_x \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} v_{x+1} + \mathfrak{M}_{x+1} \left(\frac{1}{2} m_{x+1} - \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} m_{x+1} \right) \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} v_x \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\sigma=\lambda}^{\sigma=x} \mathfrak{M}_{\sigma+1} - \sum_{\sigma=\lambda}^{\sigma=x} \mathfrak{M}_\sigma \cdot h_\sigma \cdot \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} v_\sigma \cdot \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} m_\sigma
\end{aligned}$$

und eine Gleichung, welche aus der letzteren dadurch hervorgeht, dass u überall an die Stelle von v tritt.

Diese Gleichungen können dazu angewendet werden, die gesuchten Zahlen T zu bestimmen, wenn man den EUKLIDISCHEN Algorithmus so weit fortgesetzt denkt bis der Rest 0 entsteht, die vorhergehende Gleichung wird dann den Rest $\underline{+1}$ erhalten. Es seien die beiden letzten Gleichungen

$$\begin{aligned}
[96] \quad m_{x-1} &= m_x h_x + m_{x+1} m_{x+1} \\
m_x &= m_{x+1} h_{x+1}
\end{aligned}$$

$$\text{also} \quad m_{x+1} = \underline{+1}, \quad m_{x+1} = 1, \quad h_{x+1} = m_x, \quad M_{x+1} = 0$$

Aus den Definitions - Gleichungen [93] ist unmittelbar zu ersehen, dass hier die acht Zahlen T , T' , welche den Index $x+1$ haben, zu Null werden. Wir erhalten demnach zur Bestimmung der ersten vier Zahlen T die Gleichungen

$$\begin{aligned}
[97]: T(\lambda, 0) + T(\lambda, m) &= M_{\lambda-1} M_\lambda \\
T(\lambda, v) + T(\lambda, u) &= (M_{\lambda-1} - 1 + 2 \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} m_{\lambda-1}) (M_\lambda + 1 - 2 \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} m_\lambda) \\
\mathfrak{M}_\lambda T(\lambda, v) - \mathfrak{M}_\lambda T(\lambda, 0) &= \mathfrak{M}_\lambda \frac{1}{2} m_{\lambda-1} \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} v_\lambda - \mathfrak{M}_\lambda \left(\frac{1}{2} m_\lambda - \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} m_\lambda \right) \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} v_{\lambda-1} \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\sigma=\lambda+1}^{z+1} \mathfrak{M}_\sigma - \sum_{\sigma=\lambda}^{z+1} \mathfrak{M}_\sigma \cdot h_\sigma \cdot \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} v_\sigma \cdot \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} m_\sigma \\
&= \mathfrak{M}_\lambda \left(\frac{1}{2} m_{\lambda-1} - \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} m_{\lambda-1} \right) \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} v_\lambda \\
&\quad - \mathfrak{M}_\lambda \cdot \frac{1}{2} m_\lambda \cdot \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} v_{\lambda-1} \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\sigma=\lambda}^{z+1} \mathfrak{M}_\sigma - \sum_{\sigma=\lambda}^{z+1} \mathfrak{M}_\sigma \cdot h_\sigma \cdot \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} v_\sigma \cdot \mathfrak{B}^{\frac{1}{2}} m_\sigma
\end{aligned}$$

und noch eine vierte Gleichung, welche aus der letzten Doppelgleichung durch Umwandlung des v in u abgeleitet werden kann.

Lassen wir λ einen *gegebenen* Zahlenwerth annehmen und treffen die Bestimmungen:

$$[98] \quad \dots \mathfrak{M}_\lambda = +1, \quad \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v_{\lambda-1} = \frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\lambda-1}, \quad \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v_\lambda = \frac{1}{2}, \\ \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_{\lambda-1} = \frac{1}{2}, \quad \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_\lambda = \frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_\lambda$$

so beschränken wir dadurch die Allgemeinheit nicht, erfüllen die Gleichung [92] unmittelbar und die Bedingungsgleichung [91], indem wir die v oder auch die u als die Werthe der w betrachten.

Setzen wir zur Abkürzung noch

$$[99] \quad \dots N_{\lambda-1} = M_{\lambda-1} \cdot (1 - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_\lambda), \quad N_\lambda = M_\lambda \cdot (1 - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\lambda-1})$$

$$[100] \quad \left. \begin{aligned} H(\lambda, v) &= (1 - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_\lambda) \{ h_\lambda \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v_\lambda - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v_{\lambda-1} + m_{\lambda+1} \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v_{\lambda+1} \} 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v_\lambda \\ &= (1 - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_\lambda) \cdot \{ \frac{1}{2} h_\lambda + m_{\lambda+1} \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} h_\lambda \} \\ H(\lambda, u) &= (1 - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_\lambda) \{ h_\lambda \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_\lambda - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_{\lambda-1} + m_{\lambda+1} \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_{\lambda+1} \} 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_\lambda \\ &= (1 - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_\lambda) \cdot \{ \frac{1}{2} h_\lambda - \frac{1}{2} + m_{\lambda+1} \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} h_\lambda - \frac{1}{2}) \} \end{aligned} \right|$$

$$[101] \quad \left. \begin{aligned} +4 V_\lambda &= - \sum_{\sigma=\lambda}^{x+1} \mathfrak{M}_\sigma \cdot h_\sigma \cdot 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v_\sigma \cdot 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_\sigma + \sum_{\sigma=\lambda+1}^{x+1} \mathfrak{M}_\sigma + m_{\lambda-1} + 2N_\lambda \\ -4 U_\lambda &= - \sum_{\sigma=\lambda}^{x+1} \mathfrak{M}_\sigma \cdot h_\sigma \cdot 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_\sigma \cdot 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_\sigma + \sum_{\sigma=\lambda+1}^{x+1} \mathfrak{M}_\sigma + 1 - m_\lambda - 2N_{\lambda-1} \end{aligned} \right|$$

so erhalten wir aus den Gleichungen [97] jetzt:

$$[102] \quad \begin{aligned} T(\lambda, 0) + T(\lambda, m) &= M_{\lambda-1} M_\lambda \\ T(\lambda, v) + T(\lambda, u) &= M_{\lambda-1} M_\lambda + N_{\lambda-1} - N_\lambda \\ T(\lambda, v) - T(\lambda, 0) &= -N_\lambda + V_\lambda \\ T(\lambda, u) - T(\lambda, 0) &= +N_{\lambda-1} - U_\lambda \end{aligned}$$

und aus [61], [86], [89], [98] zur Bestimmung der Zahlen T die Gleichungen

$$\begin{aligned}
[103] \quad T(\lambda, 0) + T(\lambda, 0) &= M_{\lambda-1} M_{\lambda} \\
T'(\lambda, m) + T(\lambda, m) &= M_{\lambda-1} M_{\lambda} \\
T'(\lambda, v) + T(\lambda, v) &= M_{\lambda-1} M_{\lambda} + H(\lambda, v) \\
T'(\lambda, u) + T(\lambda, u) &= M_{\lambda-1} M_{\lambda} + H(\lambda, u)
\end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen [102] und [103] hat die Form:

$$\begin{aligned}
104] \quad 2T(\lambda, 0) = 2T'(\lambda, m) &= M_{\lambda-1} M_{\lambda} - V_{\lambda} + U_{\lambda} \\
2T(\lambda, m) = 2T'(\lambda, 0) &= M_{\lambda-1} M_{\lambda} + V_{\lambda} - U_{\lambda} \\
2T(\lambda, v) &= M_{\lambda-1} M_{\lambda} - 2N_{\lambda} + V_{\lambda} + U_{\lambda} \\
2T(\lambda, u) &= M_{\lambda-1} M_{\lambda} + 2N_{\lambda-1} - V_{\lambda} - U_{\lambda} \\
2T'(\lambda, v) &= M_{\lambda-1} M_{\lambda} + 2H(\lambda, v) + 2N_{\lambda} - V_{\lambda} - U_{\lambda} \\
2T'(\lambda, u) &= M_{\lambda-1} M_{\lambda} + 2H(\lambda, u) - 2N_{\lambda-1} + V_{\lambda} + U_{\lambda}
\end{aligned}$$

Die Definition [93] der T und der T' in Verbindung mit den Festsetzungen [98] über die v und u ergibt

$$\begin{aligned}
T(\lambda, v) &= \text{An}_{\delta, v, v} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - (v_{\lambda-1} + \frac{1}{2} - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}m_{\lambda-1}}) \frac{1}{m_{\lambda-1}} - (v_{\lambda} - \frac{1}{2}) \frac{1}{m_{\lambda}} \right\} \\
T(\lambda, u) &= \text{An}_{\delta, v, v} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - (v_{\lambda-1} + \frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}m_{\lambda-1}}) \frac{1}{m_{\lambda-1}} - (v_{\lambda} - \frac{1}{2} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}m_{\lambda}}) \frac{1}{m_{\lambda}} \right\} \\
T'(\lambda, v) &= \text{An}_{\delta, v, v} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - (v_{\lambda} + \frac{1}{2} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}m_{\lambda}}) \frac{1}{m_{\lambda}} - (v_{\lambda-1} - \frac{1}{2} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}m_{\lambda-1}}) \frac{1}{m_{\lambda-1}} \right\} \\
T'(\lambda, u) &= \text{An}_{\delta, v, v} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - (v_{\lambda} + \frac{1}{2} - 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}m_{\lambda}}) \frac{1}{m_{\lambda}} - (v_{\lambda-1} - \frac{1}{2}) \frac{1}{m_{\lambda-1}} \right\}
\end{aligned}$$

worin $v_{\lambda-1}$ und v_{λ} alle ganze positive Zahlen als Werthe anzunehmen haben. Durch die Betrachtung der verschiedenen Verbindungen von geraden und ungeraden Werthen für $m_{\lambda-1}$ und für m_{λ} findet man demnach:

$$\begin{aligned} \text{An}_{\delta_{v,v}} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - (\nu_{\lambda-1} - \frac{1}{2}) \frac{1}{m_{\lambda-1}} - (\nu_{\lambda} - \frac{1}{2}) \frac{1}{m_{\lambda}} \right\} \\ = 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda-1}} \cdot (1 - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda}}) \cdot T(\lambda, v) + 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda}} \cdot (1 - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda-1}}) T'(\lambda, u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{An}_{\delta_{v,v}} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - (\nu_{\lambda-1} - \frac{1}{2} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda-1}}) \frac{1}{m_{\lambda-1}} - (\nu_{\lambda} - \frac{1}{2} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda}}) \frac{1}{m_{\lambda}} \right\} \\ = 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda-1}} \cdot (1 - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda}}) T(\lambda, u) + 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda}} \cdot (1 - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda-1}}) T'(\lambda, v) \end{aligned}$$

Hieraus und aus der Bedeutung [93] von $T(\lambda, 0)$, $T(\lambda, m)$ erhält man, wenn man die in [104] gefundenen Werthe benutzt:

$$\begin{aligned} [105] \quad & 2 \text{An}_{\delta_{v,v}} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - (\nu_{\lambda-1} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda-1}}) \frac{1}{m_{\lambda-1}} - \nu_{\lambda} \cdot \frac{1}{m_{\lambda}} \right\} = M_{\lambda-1} M_{\lambda} - V_{\lambda} + U_{\lambda} \\ & 2 \text{An}_{\delta_{v,v}} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - \nu_{\lambda-1} \cdot \frac{1}{m_{\lambda-1}} - (\nu_{\lambda} - \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda}}) \frac{1}{m_{\lambda}} \right\} = M_{\lambda-1} M_{\lambda} + V_{\lambda} - U_{\lambda} \\ & 2 \text{An}_{\delta_{v,v}} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - (\nu_{\lambda-1} - \frac{1}{2}) \frac{1}{m_{\lambda-1}} - (\nu_{\lambda} - \frac{1}{2}) \frac{1}{m_{\lambda}} \right\} = M_{\lambda-1} M_{\lambda} + V_{\lambda} + U_{\lambda} \\ & 2 \text{An}_{\delta_{v,v}} \text{Pos} \left\{ \frac{1}{2} - (\nu_{\lambda-1} - \frac{1}{2} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda-1}}) \frac{1}{m_{\lambda-1}} - (\nu_{\lambda} - \frac{1}{2} + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda}}) \cdot \frac{1}{m_{\lambda}} \right\} \\ & \qquad \qquad \qquad = \bar{M}_{\lambda-1} M_{\lambda} + 2 N_{\lambda-1} + 2 N_{\lambda} - V_{\lambda} - U_{\lambda} \end{aligned}$$

Die Gleichung [12] und die Definition [93] der T und T' ergibt unmittelbar:

$$\begin{aligned} [106] \quad & \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \left(n_{\lambda} m_{\lambda} \mu_{\lambda-1} \cdot \frac{1}{m_{\lambda-1}} \right) \\ & = n_{\lambda} \{ T(\lambda, v) - T(\lambda, 0) \} 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda-1}} + n_{\lambda} \{ T(\lambda, m) - T(\lambda, 0) \} \{ 1 - 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda-1}} \} \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2} (1 - n_{\lambda}) M_{\lambda-1} \\ & \quad \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \left(n_{\lambda-1} m_{\lambda-1} \mu_{\lambda} \cdot \frac{1}{m_{\lambda}} \right) \\ & = n_{\lambda-1} \{ T'(\lambda, u) - T'(\lambda, 0) \} 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda}} + n_{\lambda-1} \{ T'(\lambda, m) - T'(\lambda, 0) \} \{ 1 - 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda}} \} \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2} (1 - n_{\lambda-1}) M_{\lambda} \end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} M_{\lambda-1} = \frac{1}{2} m_{\lambda-1} - 1 + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda-1}}, \quad M_{\lambda} = \frac{1}{2} m_{\lambda} - 1 + \mathfrak{B}_{\frac{1}{2} m_{\lambda}}, \quad n_{\lambda-1} = \pm 1, \quad n_{\lambda} = \pm 1 \\ \mu_{\lambda-1} = 1, 2, 3, \dots, M_{\lambda-1}, \quad \mu_{\lambda} = 1, 2, 3, \dots, M_{\lambda} \end{aligned}$$

zu setzen ist.

Durch Einführung der Ausdrücke [102] für die T und T' in die Gleichungen [106] erhält man

$$[107] \dots \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \left(n_{\lambda} m_{\lambda} \mu_{\lambda-1} \cdot \frac{1}{m_{\lambda-1}} \right) \\ = n_{\lambda} \{ V_{\lambda} - U_{\lambda} \cdot (1 - 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\lambda-1}) \} + \frac{1}{2} (1 - n_{\lambda}) M_{\lambda-1}$$

$$[108] \dots \text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \left(n_{\lambda-1} m_{\lambda-1} \mu_{\lambda} \cdot \frac{1}{m_{\lambda}} \right) \\ = n_{\lambda-1} \{ U_{\lambda} - V_{\lambda} \cdot (1 - 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\lambda}) \} + \frac{1}{2} (1 - n_{\lambda-1}) M_{\lambda}$$

Hierbei gelten also ausser den nach den Gleichungen [106] angegebenen Voraussetzungen auch noch die folgenden:

$m_{\lambda-1}$ und m_{λ} ohne gemeinsamen Theiler, $m_{\lambda-1}' > m_{\lambda} > 0$;

für $m_{\lambda-1}$ und m_{λ} ist ein EUKLIDISCHER Algorithmus mit beständig abnehmenden Resten durch Gleichungen von der Form [87] bis zu den beiden Schlussgleichungen [96] gebildet;

von den Anfangswerthen [98] der v und u ausgehend, ist, so weit wir die Untersuchungen bis zu dieser Stelle geführt haben, die ganze Reihe der Werthe der v und u nach Vorschrift der für w angegebenen Gleichung [90] bestimmt;

es ist die Reihe der Grössen $\mathfrak{M}$ nach Vorschrift der Gleichung [94] und mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen [98] ermittelt;

es sind $N_{\lambda-1}$ und N_{λ} nach [99] ferner V_{λ} und U_{λ} nach [101] berechnet.

Die gesuchte Anzahl der positiven Werthe der vier einfachen linearen Functionen ergeben sich dann aus [105] und die gesuchte Anzahl der negativen absolut kleinsten Bruchreste aus den Gleichungen [107] und [108].

Für den Fall, dass der Nenner $m_{\lambda-1}$ gerade und $n_{\lambda} = +1$ ist, folgt aus [107] und [105]:

$$\text{An}_{\delta_{\mu}} \text{Neg} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \left(m_{\lambda} \mu_{\lambda-1} \cdot \frac{1}{m_{\lambda-1}} \right) = V_{\lambda} - U_{\lambda} \equiv M_{\lambda-1} M_{\lambda} = \frac{1}{2} (m_{\lambda-1} - 2) \cdot \frac{1}{2} (m_{\lambda} - 1) \pmod{2}$$

Ist aber der Nenner m_{λ} gerade und $n_{\lambda-1} = +1$ so folgt aus [108]:

$$\text{Anz}_{\mu} \text{Neg} \mathfrak{B} \left(m_{\lambda-1} \mu_{\lambda} \frac{1}{m_{\lambda}} \right) = U_{\lambda} - V_{\lambda} \equiv M_{\lambda-1} M_{\lambda} = \frac{1}{2}(m_{\lambda-1} - 1) \cdot \frac{1}{2}(m_{\lambda} - 2) \pmod{2}$$

Die hier gefundene Eigenschaft der Anzahl der in den Brüchen

$$1 \cdot \frac{n}{m}, \quad 2 \cdot \frac{n}{m}, \quad 3 \cdot \frac{n}{m}, \quad \dots \quad \frac{m-2}{2} \cdot \frac{n}{m}$$

vorkommenden negativen absolut kleinsten Bruchreste, dass sie nemlich, wenn m gerade positiv und n positiv relativ prim zu m ist, gleichzeitig gerade oder ungerade mit der Zahl $\frac{m-2}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$ wird, hätte man auch unmittelbar daraus ableiten können, dass die absolut kleinsten Bruchreste zweier zu der Hälfte einer ungeraden Zahl sich ergänzender gebrochener Grössen gleiche Vorzeichen haben.

Ist der Nenner $m_{\lambda-1}$ in [107] oder der Nenner m_{λ} in [108] ungerade, so bestimmt die durch die betreffende Gleichung gefundene Anzahl der negativen absolut kleinsten Bruchreste bekanntlich den zusammengesetzten quadratischen Restcharacter beziehungsweise der beliebigen Zahl $n_{\lambda} m_{\lambda}$ für den Modul $m_{\lambda-1}$ oder der beliebigen Zahl $n_{\lambda-1} m_{\lambda-1}$ für den Modul m_{λ} .

Artikel XII.

Gerade und ungerade Reste im Euklidischen Algorithmus.

Bei der bis jetzt erhaltenen Bestimmungsweise [105] [107] [108] der gesuchten Zahlen bedarf es noch der Ermittlung der Reihen der Grössen v , u und $\mathfrak{M}$ in den Summen, von welchen die V_{λ} , U_{λ} in [101] abhängen. Es sind v und u die beiden Werthensysteme des w , welche die Gleichungen [90] und [91] erfüllen. Ist $\mathfrak{B} \frac{1}{2} m_{\sigma} = 0$ so wird $\mathfrak{B} \frac{1}{2} w_{\sigma} = \frac{1}{2}$

Um $\mathfrak{B} \frac{1}{2} w_{\sigma}$ bei einem ungeraden m_{σ} kennen zu lernen, betrachten wir erstens den Fall

$$m_{\psi} \equiv 1 \equiv m_{\psi+1} \pmod{2}$$

hier muss

$$w_{\psi+1} - w_{\psi} \equiv 1 \equiv (\psi + 1) - \psi + (1 + m_{\psi}) h_{\psi} \pmod{2}$$

sein, weil weder w_{ψ} und $w_{\psi+1}$ zugleich gerade noch zugleich ungerade sein können.

Zweitens sei

$$m_{\psi} \equiv 0 \pmod{2}$$

Dann müssen also w_{ψ} , $w_{\psi-1}$ und $m_{\psi+1}$ ungerade und demnach

$$\begin{aligned} w_{\psi+1} - w_{\psi-1} &= -h_{\psi} w_{\psi} + (1 - m_{\psi+1}) w_{\psi+1} \equiv h_{\psi} \\ &\equiv (\psi + 1) - (\psi - 1) + (1 + m_{\psi-1}) h_{\psi-1} + (1 + m_{\psi}) h_{\psi} \end{aligned}$$

modulo 2 werden.

Beide Fälle können wir in der Einen Regel zusammenfassen, dass wenn m_{φ} und m_{σ} ungerade sind:

$$[109] \dots \quad w_{\sigma} - w_{\varphi} \equiv \sigma - \varphi + \sum_{\psi=\varphi}^{\sigma-1} (1 + m_{\psi}) h_{\psi} \pmod{2}$$

wird. Die Verallgemeinerung dieser Congruenz auf beliebig grosse Werthe von $\psi - \varphi$ ergibt sich durch das Beweisverfahren der vollständigen Induction.

Beachtet man, dass $(1 + m_{\tau}) h_{\tau} \equiv -1$ wird, wenn h_{τ} ungerade und m_{τ} gerade ist, so sieht man, dass dieser Satz [109] sich in folgender Weise aussprechen lässt:

Sind in zwei Euklidischen Algorithmen mit ganzen Zahlen

$$\begin{aligned} &\dots \dots \dots \\ m_{\psi-2} &= m_{\psi-1} h_{\psi-1} + m_{\psi} m_{\psi} \\ m_{\psi-1} &= m_{\psi} h_{\psi} + m_{\psi+1} m_{\psi+1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\dots \dots \dots \\ w_{\psi-2} &= w_{\psi-1} h_{\psi-1} + m_{\psi} w_{\psi} \\ w_{\psi-1} &= w_{\psi} h_{\psi} + m_{\psi+1} w_{\psi+1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

die entsprechenden Quotienten $\dots h_{\psi-1}, h_{\psi} \dots$ identisch und weder die Reste in dem einen noch in dem anderen Algorithmus alle gerade, auch nicht die entsprechenden Reste der beiden Algorithmen sämmtlich zugleich gerade oder zugleich ungerade,

so entspricht einem geraden Reste m_{ψ} (beziehungsweise w_{ψ}) des einen Algorithmus ein ungerader Rest w_{ψ} (beziehungsweise m_{ψ}) des anderen Algorithmus,

und zwei ungeraden Resten z. B. m_{φ}, m_{σ} des einen Algorithmus entsprechen in dem anderen Algorithmus zwei Reste w_{φ}, w_{σ} , deren Unterschied $w_{\sigma} - w_{\varphi}$ gleichzeitig gerade oder ungerade ist mit der Anzahl der zwischen diesen beiden Resten vorkommenden Quotienten

$$h_{\varphi}, h_{\varphi+1}, \dots, h_{\sigma-2}, h_{\sigma-1}$$

abgerechnet diejenigen darin etwa vorkommenden ungeraden Quotienten h_{τ} , welchen gerade Divisoren m_{τ} in der Reihe

$$m_{\varphi}, m_{\varphi+1}, \dots, m_{\sigma-2}, m_{\sigma-1}$$

zugehören

Beachten wir, dass in der Congruenz [109] aus der Summe das Glied $(1 + m_{\varphi})h_{\varphi}$, weil m_{φ} ungerade ist, fortgelassen werden kann, und nehmen wir für m_{φ} eine ungerade unter den beiden Zahlen $m_{\lambda-1}, m_{\lambda}$, so erhalten wir nach den die Anfangswerthe $v_{\lambda-1}, u_{\lambda-1}, v_{\lambda}, u_{\lambda}$ betreffenden Festsetzungen [98] allgemein bei jedem σ , für welches m_{σ} ungerade ist:

$$[110] \quad v_{\sigma} \equiv 1 + \sigma - \lambda + \sum_{\psi=\lambda}^{\sigma-1} (1 + m_{\psi})h_{\psi} \pmod{2}$$

$$[111] \quad u_{\sigma} \equiv \sigma - \lambda + \sum_{\psi=\lambda}^{\sigma-1} (1 + m_{\psi})h_{\psi} \pmod{2}$$

Artikel XIII.

Zeller's Vorschrift für die Ausrechnung.

Wenden wir die allgemeinen Sätze auf den besonderen Fall an, dass alle Reste im EUKLIDISCHEN Algorithmus positiv $m_\sigma = +1$ genommen sind und dass die erste ∞ -Zahl $m_{\lambda-1}$ ungerade ist, so erhalten wir einen Beweis für die von Herrn ZELLER aufgestellte Regel zur Bestimmung des quadratischen Rest-Characters.

Nach den Festsetzungen in [98] wird hier

$$\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\lambda-1} = \frac{1}{2}, \quad \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v_{\lambda-1} = 0, \quad \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v_\lambda = \frac{1}{2}$$

und, wegen $m_\sigma = +1$ für jedes σ , nach [94] noch:

$$\mathfrak{M}_\sigma = (-1)^{\sigma-\lambda} \mathfrak{M}_\lambda = (-1)^{\sigma-\lambda}, \quad \sum_{\sigma=\lambda+1}^{x+1} \mathfrak{M}_\sigma = -2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} (1+x-\lambda)$$

Setzen wir

$$[112] \quad \rho' = \sum_{\sigma=\lambda}^{x+1} (-1)^{\sigma-\lambda} h_\sigma \cdot 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v_\sigma \cdot 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_\sigma + 2 \cdot \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} (1+x-\lambda)$$

so ergeben die Gleichungen [107] und [101] für diesen Fall:

$$[113] \quad \text{Anz}_{\delta_\mu} \text{Neg} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \left(m_\lambda \mu_{\lambda-1} \cdot \frac{1}{m_{\lambda-1}} \right) = V_\lambda = \frac{1}{4} (m_{\lambda-1} - \rho')$$

Der EUKLIDISCHE Algorithmus hat die Form

$$\begin{aligned} m_{\lambda-1} &= m_\lambda h_\lambda + m_{\lambda+1} \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ m_{\sigma-1} &= m_\sigma h_\sigma + m_{\sigma+1} \\ m_\sigma &= m_{\sigma+1} h_{\sigma+1} + m_{\sigma+2} \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ m_{x-1} &= m_x h_x + m_{x+1} = m_x h_x + 1 \\ m_x &= m_{x+1} h_{x+1} = h_{x+1} \end{aligned}$$

Mit Anwendung der Congruenz [110] folgern wir aus [112] und [113] die von Herrn ZELLER aufgestellte Regel:

erstens, in der Reihe der Quotienten

$$h_\lambda, h_{\lambda+1}, \dots, h_\tau, \dots, h_\sigma, \dots, h_\psi, \dots, h_{x+1}$$

wird jeder ungerade h_τ , dessen zugehöriger Divisor m_τ gerade ist, ausgetilgt und jedem folgenden Quotienten $\pm h_{\tau+1}, \pm h_{\tau+2} \dots \pm h_{x+1}$ das entgegengesetzte Vorzeichen von seinem ursprünglichen positiven oder wenn er durch ein solches Verfahren schon eine Vorzeichenänderung erlitten hat, das entgegengesetzte Vorzeichen von demjenigen gegeben, welches er schon erlangt hatte;

zweitens: jeder hiernach noch stehen gebliebene mit dem angemessenen Vorzeichen versehene gerade Quotient $\pm h_\rho$, dessen zugehöriger Divisor m_ρ gerade ist, wird durch 0 ersetzt;

drittens: von der so erhaltenen Reihe der modificirten (rectificirten) Quotienten werden der erste, der dritte und alle ungeradstelligen addirt;

viertens wird, wenn die Anzahl $(x+1) - (\lambda-1)$ der Gleichungen in der Kettenbruch-Entwicklung von $\frac{m_{\lambda-1}}{m_\lambda}$ gerade ist, noch die Einheit hinzugefügt.

Die so erhaltene Summe werde mit ρ' bezeichnet, dann ist $\frac{1}{2}(m_{\lambda-1} - \rho')$ die Anzahl der in den $\frac{1}{2}(m_{\lambda-1} - 1)$ Brüchen

$$1 \cdot m_\lambda \cdot \frac{1}{m_{\lambda-1}}, \quad 2 m_\lambda \cdot \frac{1}{m_{\lambda-1}}, \quad 3 m_\lambda \cdot \frac{1}{m_{\lambda-1}}, \quad \dots, \quad \frac{m_{\lambda-1}-1}{2} \cdot m_\lambda \cdot \frac{1}{m_{\lambda-1}}$$

enthaltenen negativen absolut kleinsten Bruchresten.

Ist nun ausser $m_{\lambda-1}$ auch m_λ ungerade, so wird nach [98]

$$\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_{\lambda-1} = \frac{1}{2}, \quad \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_\lambda = 0$$

Berücksichtigen wir, dass

$$1 + \sum_{\sigma=\lambda+1}^{x+1} \mathfrak{M} = 1 + \sum_{\sigma=\lambda+1}^{x+1} (-1)^{\sigma-\lambda} = 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}(x - \lambda + 2)$$

ist und setzen wir

$$[114] \quad \rho'' = \sum_{\sigma=\lambda}^{x+1} (-1)^{1+\sigma-\lambda} \cdot h_{\sigma} \cdot 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_{\sigma} \cdot 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\sigma} + 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} (x - \lambda + 2)$$

so erhalten wir aus [108] und [101] jetzt

$$[115] \quad \text{Anz}_{\mu} \text{Reg} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \left(m_{\lambda-1} \cdot \mu_{\lambda} \cdot \frac{1}{m_{\lambda}} \right) = U_{\lambda} = \frac{1}{4} (m_{\lambda} - \rho'')$$

und also mit Hülfe von [111] die von Herrn ZELLER aufgestellte Vorschrift:
die Quotienten

$$h_{\lambda}, h_{\lambda+1}, h_{\pi}, h_{\sigma}, \dots, h_{x+1}$$

werden denselben Abänderungen unterworfen, die in dem ersten und dem zweiten Theile der so eben hier ausgesprochenen Regel aufgestellt sind;

dann wird die Summe der zweiten, vierten und aller geradstelligen Glieder der auf die angegebene Weise modificirten Quotienten gebildet;

endlich wird noch die Einheit addirt, wenn die Anzahl $(x - \lambda + 2)$ der Gleichungen des EUKLIDISCHEN Algorithmus ungerade ist;

aus der auf diese Weise erhaltenen Zahl ρ'' ergibt sich $\frac{1}{4}(m_{\lambda} - \rho'')$ als die Anzahl der in den $\frac{1}{2}(m_{\lambda} - 1)$ Brüchen

$$1 m_{\lambda-1} \cdot \frac{1}{m_{\lambda}}, \quad 2 m_{\lambda-1} \cdot \frac{1}{m_{\lambda}}, \quad 3 m_{\lambda-1} \cdot \frac{1}{m_{\lambda}}, \quad \dots \quad \frac{m_{\lambda}-1}{2} m_{\lambda-1} \cdot \frac{1}{m_{\lambda}}$$

enthaltenen negativen absolut kleinsten Bruchresten.

Mit Hülfe der Gleichungen [113], [115], [104] und der Definitionen [93] der T und T' finden wir für ungerade $m_{\lambda-1}$ und m_{λ} , welche wir jetzt beziehungsweise durch m und n ersetzen wollen, die von Herrn ZELLER aufgestellten Gleichungen:

an. Hierin ist $\mathfrak{M}_\lambda$ noch beliebig $= \pm 1$, wir werden aber $\mathfrak{M}_\lambda = +1$ wie in [98] annehmen.

Die hier befolgte Vorschrift kann man auch so aussprechen:

für die negativ genommene, dem absoluten Werthe nach grössere, Zahl $-m_{\lambda-1}$ und für die positiv genommene kleinere Zahl m_λ wird der Euklidische Algorithmus in der Weise gebildet, dass immer die zu zerlegende Zahl $m_{\sigma-1}$ mit demjenigen Vorzeichen ($-\mathfrak{M}_\sigma$) versehen wird, welches dem Vorzeichen ($\mathfrak{M}_\sigma$) des zuletzt entstandenen Restes $\mathfrak{M}_\sigma m_\sigma$ ertgegengesetzt ist.

Der auf solche Weise erhaltene Quotient, nemlich der mit dem absoluten Werthe m_σ des letzten Restes multiplicirte Factor

$$[118] \dots \quad -\mathfrak{M}_\sigma h_\sigma = k_\sigma$$

hat dann immer schon das ihm in den Summen der Gleichungen [101] zu ertheilende Vorzeichen.

Um ferner den Einfluss der Werthe von $(1+m_\psi)h_\psi$ in [110] und [111] auf $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}v_\sigma$, auf $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}u_\sigma$ und auf den in dem einzelnen Gliede der Summen der Gleichungen [101] vorkommenden Factor $2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}v_\sigma \cdot 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m_\sigma$ oder $2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}u_\sigma \cdot 2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m_\sigma$ zu berücksichtigen,

wird aus der Reihe Q der Quotienten

$$k_\lambda, k_{\lambda+1}, \dots k_\tau, \dots k_{\tau+1}$$

jeder ungerade k_τ , dessen zugehöriger Divisor m_τ gerade ist, fortgelassen.

Um schliesslich das Verschwinden des Factors $2\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}m_\sigma$ an den noch übrigen Stellen zu berücksichtigen,

ersetzen wir jeden nach der eben getroffenen Auswahl übrig gebliebenen geraden Quotienten k_ρ , dessen zugehöriger Divisor m_ρ gerade ist, durch den Werth 0.

Die nach diesen Vorschriften modificirten Quotienten Q^* seien

$$[119] \quad K_1, K_2, K_3, \dots K_{2\theta-1}, K_{2\theta}, \dots$$

dann wird nach Gleichung [110]

$$[120] \dots - \sum_{\sigma=\lambda}^{x+1} \mathfrak{M}_{\sigma} \cdot h_{\sigma} \cdot 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} v \cdot 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\sigma} = \mathfrak{M}_{\lambda} \Sigma K_{2\theta-1} = \Sigma K_{2\theta-1}$$

für $\theta = 1, 2, 3, \dots$

das ist die Summe der ungeradstelligen Glieder in der Reihe Q^* der modificirten Quotienten;

ferner wird nach [111]:

$$[121] \dots - \sum_{\sigma=\lambda}^{x+1} \mathfrak{M}_{\sigma} \cdot h_{\sigma} \cdot 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} u_{\sigma} \cdot 2 \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}} m_{\sigma} = \mathfrak{M}_{\lambda} \Sigma K_{2\theta} = \Sigma K_{2\theta}$$

für $\theta = 1, 2, 3 \dots$

das ist die Summe der geradstelligen Glieder in der Reihe Q^* der modificirten Quotienten.

Die andere zu bildende Summe

$$[122] \dots + \sum_{\sigma=\lambda+1}^{x+1} \mathfrak{M}_{\sigma}$$

hat für den nach obiger Vorschrift [117] gebildeten EUKLIDischen Algorithmus die einfache Bedeutung:

sie ist die Anzahl der positiven Reste vermindert um die Anzahl der negativen Reste.

Die nach diesen Vorschriften ausgeführte Berechnung der Werthe der Summen ergeben eine sehr einfache Bestimmung [101] der V_{λ} und U_{λ} und damit auch der in den Gleichungen [105], [107], [108] gesuchten Zahlen.

Artikel XV.

Beispiel I. (Gauss Werke Bd. II. Seite 63 und 64) $m_{\lambda-1} = 379, m_{\lambda} = 103.$

Rechnung nach den allgemeinen Vorschriften:

Die Gleichungen [88] und [99] ergeben:

$$M_{\lambda-1} = 189, \quad M_{\lambda} = 51, \quad N_{\lambda-1} = 0, \quad N_{\lambda} = 0$$

Der Algorithmus [117] sei:

	Q	$Div.$	$Rest$	Q^*	$K_{2\theta-1}$	$K_{2\theta}$
$-379 = -4 \cdot 103 + 33$	-4		+33	-4	-	4
$-103 = -3 \cdot 33 - 4$	-3		-4	-3		-
$+33 = +8 \cdot 4 + 1$	+8		+1	0		0
$-4 = -4 \cdot 1$	-4		1	-4		-
				$\Sigma K_{2\theta-1} = -4,$		$\Sigma K_{2\theta} = -7$
$\Sigma M_{\sigma} = +2 - 1 =$				$= +1$		$= +1$
				$m_{\lambda-1} = +379$		$+1$
				$2N_{\lambda} = 0$	$-m_{\lambda}$	$= -103$
					$-2N_{\lambda-1} =$	0
nach [101]				$+4V_{\lambda} = +376$	$-4U_{\lambda}$	$= -108$
				$V_{\lambda} = +94$	U_{λ}	$= +27$

$$\text{nach [107]: } \sum_{\mu=1}^{189} \mathfrak{A}n_3 \text{ Neg } \mathfrak{A} \mathfrak{B} \frac{103}{379} \cdot \mu = V_{\lambda} = 94$$

$$\text{nach [108]: } \sum_{\nu=1}^{51} \mathfrak{A}n_3 \text{ Neg } \mathfrak{A} \mathfrak{B} \frac{379}{103} \cdot \nu = U_{\lambda} = 27$$

Aus den Gleichungen [105] wird hier

$$2 \cdot \mathfrak{A}n_{3\mu\nu} \mathfrak{P}of \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{379} - \frac{\nu}{103} \right) = 189 \cdot 51 - 94 + 27 = 2 \cdot 4786$$

$$2 \cdot \mathfrak{A}n_{3\mu\nu} \mathfrak{P}of \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{103} \right) = 189 \cdot 51 + 94 - 27 = 2 \cdot 4853$$

$$2 \cdot \mathfrak{A}n_{3\mu\nu} \mathfrak{P}of \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{103} \right) = 189 \cdot 51 + 94 + 27 = 2 \cdot 4880$$

$$2 \cdot \mathfrak{A}n_{3\mu\nu} \mathfrak{P}of \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{379} - \frac{\nu}{103} \right) = 189 \cdot 51 - 94 - 27 = 2 \cdot 4759$$

worin die μ und ν alle positive ganze Zahlen zu durchlaufen haben.

Vergleichen wir das hier gefundene Resultat

$$\mathfrak{A}n_{3\mu\nu} \mathfrak{P}of \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{103} \right) = 4880$$

mit der obigen Gleichung [40]:

$$\mathfrak{A}n_{3\mu\nu} \mathfrak{P}of \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{379} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{206} \right) = 2440$$

so sehen wir an einem Beispiel, wie

$$\Re_{\mu, \nu} \text{Pot} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{m} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{n} \right) = 2 \cdot \Re_{\frac{1}{2}} \text{Pot} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{m} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{2n} \right)$$

wird, wenn μ und ν wie zuvor alle positive ganze Zahlen durchlaufen.

Dieser Satz lässt sich aber für ungerade m und n unschwer allgemein ableiten und ergibt für das Reciprocitäts-Gesetz der quadratischen Reste einen Beweis, welcher dem dritten GAUSSISCHEN dem EISENSTEINISCHEN geometrischen und dem KRONECKERSCHEN arithmetischen Beweise sich eng anschliesst.

Beispiel II. $m_{\lambda-1} = 155\ 006\ 407 = m$, $m_{\lambda} = 14\ 930\ 352 = n$.

Erste Rechnung: nach ZELLERS Regeln.

	<i>Q</i>	<i>Divis.</i>	<i>Rest</i>	<i>rect. Q</i>	(ρ')
155 006 407 =	10.	14 930 352 +	5 702 887	0	0
14 930 352 =	2.	5 702 887 +	3 524 578	2	
5 702 887 =	1.	3 524 578 +	2 178 309		
3 524 578 =	1.	2 178 309 +	1 346 269	- 1	- 1
2 178 309 =	1.	1 346 269 +	832 040	- 1	
1 346 269 =	1.	832 040 +	514 229		
832 040 =	1.	514 229 +	317 811	+ 1	+ 1
514 229 =	1.	317 811 +	196 418	+ 1	
317 811 =	1.	196 418 +	121 393		
196 418 =	1.	121 393 +	75 025	- 1	- 1
121 393 =	1.	75 025 +	46 368	- 1	
75 025 =	1.	46 368 +	28 657		
46 368 =	1.	28 657 +	17 711	+ 1	+ 1
28 657 =	1.	17 711 +	10 946	+ 1	
17 711 =	1.	10 946 +	6 765		
10 946 =	1.	6 765 +	4 181	- 1	- 1
6 765 =	1.	4 181 +	2 584	- 1	
4 181 =	1.	2 584 +	1 597		
2 584 =	1.	1 597 +	987	+ 1	+ 1
1 597 =	1.	987 +	610	+ 1	
987 =	1.	610 +	377		
610 =	1.	377 +	233	- 1	- 1
377 =	1.	233 +	144	- 1	
233 =	1.	144 +	89		
144 =	1.	89 +	55	+ 1	+ 1
89 =	1.	55 +	34	+ 1	
55 =	1.	34 +	21		
34 =	1.	21 +	13	- 1	- 1
21 =	1.	13 +	8	- 1	
13 =	1.	8 +	5		
8 =	1.	5 +	3	+ 1	+ 1
5 =	1.	3 +	2	+ 1	
3 =	1.	2 +	1		
2 =	2.	1		- 2	- 2
Anzahl =	34 . .				+ 1
					$\rho' = - 1$

$$\frac{1}{2}(m - \rho') = \frac{1}{2}(155\ 006\ 407 + 1) = 38\ 751\ 602 \equiv 0 \pmod{2}$$

also:

$$\left(\frac{14\ 930\ 352}{155\ 006\ 407} \right) = + 1$$

Die Summen der grössten Ganzen lassen sich für das vorliegende Beispiel nach diesen Regeln nicht bestimmen, weil die eine 14 930 352 der beiden vorgegebenen Zahlen gerade ist.

Zweite Rechnung: mit Hülfe der vorhandenen Tafeln und mit Anwendung des Reiprocitäts-Satzes für quadratische Reste: Es ist 155 006 407 = 23 · 6 739 409 und 6 739 409 ist nach DASE'S Factoren-Tafeln eine Primzahl. Ferner ist 14 930 352 = 2² · 3³ · 17 · 107 also

$$\begin{aligned} \left(\frac{14\ 930\ 352}{155\ 006\ 407}\right) &= \left(\frac{3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 107}{155\ 006\ 407}\right) = \left(\frac{-155\ 006\ 407}{3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 107}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot \left(\frac{+1}{17}\right) \cdot \left(\frac{+1}{19}\right) \cdot \left(\frac{-1}{107}\right) \\ &= (-1) \cdot (+1) \cdot (+1) \cdot (-1) = +1 \end{aligned}$$

Es ist aber auch:

$$\begin{aligned} \left(\frac{14\ 930\ 352}{155\ 006\ 407}\right) &= \left(\frac{14\ 930\ 352}{23}\right) \cdot \left(\frac{14\ 930\ 352}{6\ 739\ 409}\right) \text{ und} \\ \left(\frac{14\ 930\ 352}{23}\right) &= \left(\frac{-6}{23}\right) = \left(\frac{2}{23}\right) \cdot \left(\frac{-3}{23}\right) = \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{-3}{23}\right) = \left(\frac{-3}{23}\right) = \left(\frac{23}{3}\right) = -1 \\ \left(\frac{14\ 930\ 352}{6\ 739\ 409}\right) &= \left(\frac{3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 107}{6\ 739\ 409}\right) = \left(\frac{6\ 739\ 409}{3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 107}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot \left(\frac{-3}{17}\right) \cdot \left(\frac{-5}{19}\right) \cdot \left(\frac{2}{107}\right) \cdot \left(\frac{7}{107}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot \left(\frac{17}{3}\right) \cdot \left(\frac{-1}{19}\right) \cdot \left(\frac{19}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-107}{7}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-1}{19}\right) \cdot \left(\frac{-1}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{7}\right) = -1 \end{aligned}$$

Dritte Rechnung: nach den allgemeinen Vorschriften.

Die Gleichungen [88] und [99] ergeben:

$$M_{\lambda-1} = 77\ 503\ 203 = N_{\lambda-1}, \quad M_{\lambda} = 7\ 465\ 175, \quad N_{\lambda} = 0$$

$$M_{\lambda-1} \cdot M_{\lambda} = 578\ 574\ 973\ 455\ 525$$

	<i>Q</i>	<i>Div.</i>	<i>Rest.</i>	<i>Q*</i>	<i>K</i> ₂₀₋₁	<i>K</i> ₂₀
- 155 006 407 =	- 10 ·	14 930 352	- 5 702 887	0	0	
14 930 352 =	+ 3 ·	5 702 887	- 2 178 309	+ 3		+ 3
5 702 887 =	+ 3 ·	2 178 309	- 832 040	+ 3	+ 3	
2 178 309 =	+ 3 ·	832 040	- 317 811			
832 040 =	+ 3 ·	317 811	- 121 393	+ 3		+ 3
317 811 =	+ 3 ·	121 393	- 46 368	+ 3	+ 3	
121 393 =	+ 3 ·	46 368	- 17 711			
46 368 =	+ 3 ·	17 711	- 6 765	+ 3		+ 3
17 711 =	+ 3 ·	6 765	- 2 584	+ 3	+ 3	
6 765 =	+ 3 ·	2 584	- 987			
2 584 =	+ 3 ·	987	- 377	+ 3		+ 3
987 =	+ 3 ·	377	- 144	+ 3	+ 3	
377 =	+ 3 ·	144	- 55			
144 =	+ 3 ·	55	- 21	+ 3		+ 3
55 =	+ 3 ·	21	- 8	+ 3	+ 3	
21 =	+ 3 ·	8	- 3			
8 =	+ 3 ·	3	- 1	+ 3		+ 3
3 =	+ 3 ·	1	-	+ 3	+ 3	
			$\Sigma K_{20-1} =$		+ 18	+ 18 = ΣK_{20}
			$\Sigma M_{\sigma} = 0 - 17 =$		- 17	- 17 = ΣM_{σ}

$$\begin{array}{r|l}
 \Sigma K_{2\theta-1} = & + 18 \\
 \Sigma M_{\sigma} = 0 - 17 = & - 17 \\
 m_{\lambda-1} = + 155\ 006\ 407 & - 14\ 930\ 352 = - m_{\lambda} \\
 & - 155\ 006\ 406 = - 2 N_{\lambda-1} \\
 \hline
 4 V_{\lambda} = + 155\ 006\ 408 & - 169\ 936\ 756 = - 4 U_{\lambda} \\
 V_{\lambda} = + 38\ 751\ 602 & + 42\ 484\ 189 = U_{\lambda} \\
 V_{\lambda} + U_{\lambda} = + 81\ 235\ 791 & + 38\ 751\ 602 = V_{\lambda}' \\
 2 N_{\lambda-1} + 2 N_{\lambda} = + 155\ 006\ 406 & + 81\ 235\ 791 = V_{\lambda} + U_{\lambda} \\
 2 N_{\lambda-1} + 2 N_{\lambda} - V_{\lambda} - U_{\lambda} = + 73\ 770\ 615 & - 3\ 732\ 587 = V_{\lambda} - U_{\lambda}
 \end{array}$$

Nach [101]:

$$\text{Nach [107]: } \sum_{\mu=1}^{77\ 503\ 203} \text{Anz Neg } \mathfrak{A} \mathfrak{B} \frac{14\ 930\ 352}{155\ 006\ 407} \cdot \mu = V_{\lambda} = 38\ 751\ 602$$

$$\text{Nach [108]: } \sum_{\nu=1}^{7\ 465\ 175} \text{Anz Neg } \mathfrak{A} \mathfrak{B} \frac{155\ 006\ 407}{14\ 930\ 352} \cdot \nu = U_{\lambda} - V_{\lambda} = 3\ 732\ 587$$

Aus den vier Gleichungen [105] folgt:

$$\text{Anz}_{\mu, \nu} \text{Pof} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{155\ 006\ 407} - \frac{\nu}{14\ 930\ 352} \right) = 289\ 287\ 488\ 594\ 056$$

$$\text{Anz}_{\mu, \nu} \text{Pof} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{155\ 006\ 407} - \frac{\nu}{14\ 930\ 352} \right) = 289\ 287\ 484\ 861\ 469$$

$$\text{Anz}_{\mu, \nu} \text{Pof} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \frac{1}{2}}{155\ 006\ 407} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{14\ 930\ 352} \right) = 289\ 287\ 527\ 345\ 658$$

$$\text{Anz}_{\mu, \nu} \text{Pof} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{155\ 006\ 407} - \frac{\nu - \frac{1}{2}}{14\ 930\ 352} \right) = 289\ 287\ 523\ 613\ 070$$

worin μ und ν alle positive ganze Zahlen zu durchlaufen haben.

INHALT:

Bestimmung des quadratischen Rest - Characters.

Geschichtliche Einleitung	Seite 1
I. Anzahl der Vorzeichen der Werthe einer Function	— 3
II. Quadratischer Rest - Character	— 4
III. Vorzeichen der Werthe der linearen Functionen	— 8
IV. Anwendung der allgemeinen Reductionsformel	— 12
V. Grenzwerte mit einfacher Beziehung unter einander	— 16
VI. Einfache Formen der linearen Function	— 18
VII. Einfachste lineare Functionen	— 22
VIII. Einfache lineare Functionen der zweiten Form	— 23
IX. Einfache lineare Functionen der dritten und vierten Form	— 24
X. Beziehungen zwischen den Vorzeichen der vier linearen Functionen	— 26
XI. Summation für den EUKLIDischen Algorithmus	— 28
XII. Gerade und ungerade Reste im EUKLIDischen Algorithmus	— 35
XIII. ZELLERS Vorschrift für die Ausrechnung	— 38
XIV. Allgemeine Vorschriften für die Berechnung	— 41
XV. Beispiele	— 43

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen](#)

Jahr/Year: 1879

Band/Volume: [24](#)

Autor(en)/Author(s): Schering Ernst

Artikel/Article: [Bestimmung des quadratischen Rest-Characters. 1-47](#)