# Ueber das ponderomotorische Elementargesetz der Elektrodynamik.

Von

#### E. Riecke.

Vorgetragen in der Sitzung der K. Gesellschaft d. Wissenschaften am 7. December 1878.

Es liegt in der Natur der physikalischen Forschung, dass denjenigen Vorstellungen, welche wir mit den beobachteten Erscheinungen verknüpfen, eine absolute Wahrheit nicht zugeschrieben werden kann. Wir werden dieselben so lange für wahr, d. h. für der Wirklichkeit entsprechend halten, als keine Thatsachen bekannt sind, welche mit denselben in Widerspruch sich befinden, wir werden unsere Vorstellungen ändern oder durch neue Vorstellungen zu ersetzen suchen, sobald wir auf Thatsachen geführt werden, welche in den bisherigen Vorstellungskreis nicht eingeordnet werden können. In der Möglichkeit verschiedener Vorstellungskreise für ein und dasselbe Gebiet von Erscheinungen, welche eine charakteristische Eigenthümlichkeit aller physikalischen Forschung bildet, liegt aber auch ein wesentliches Moment für ihre weitere Entwicklung; denn wenn verschiedene Vorstellungen auf ein gewisses Gebiet von Erscheinungen gleichmässige Anwendung finden, so erwächst dadurch immer die Aufgabe, neue experimentelle Thatsachen zu entdecken, durch welche die Alternative zwischen den verschiedenen Vorstellungskreisen entschieden wird. Wenn nun auch für das Gebiet der elektrischen Erscheinungen in neuerer Zeit mehrfach der Versuch gemacht worden ist, die bisherigen Grundlagen der Theorie durch andere zu ersetzen, so kann mit Bezug auf diese Versuche von vornherein bemerkt werden, dass es sich bei denselben nicht um eine Aenderung jener Grundlagen handelt, welche durch neue experimentelle Thatsachen mit Nothwendigkeit gefordert würde, und dass ebensowenig unsere Grundvorstellung von der Existenz imponderabler

elektrischer Flüssigkeiten durch jene Untersuchungen berührt wird. Dieselben beziehen sich vielmehr nur auf die Kräfte, welche entweder von den einzelnen Elementen eines galvanischen Stroms auf andere ebensolche Elemente und auf bewegte Leiterelemente ausgeübt werden, d. h. auf die elektrodynamischen Elementargesetze, oder auf die elektrischen Grundkräfte, welche zwischen den einzelnen in Bewegung begriffenen elektrischen Theilchen anzunehmen sind, damit sich aus ihrer Gesammtwirkung die Gesetze jener Elementarwirkungen ergeben. Die Entdeckung dieser elektrischen Grundkräfte bildet nur auf dem Gebiete der elektrostatischen Erscheinungen eine Aufgabe, welche principiell denselben Grad von Einfachheit besitzt, wie die entsprechende Aufgabe der Bestimmung der zwischen den ponderablen Körpern stattfindenden Gravitationskräfte. Alle elektrodynamischen Wirkungen sind Gesammtwirkungen der gleichzeitig bewegten positiven und negativen elektrischen Theilchen; eine directe Bestimmung der Grundkräfte ist daher hier nicht möglich, vielmehr muss das Gesetz derselben errathen werden aus dem Gesetz der gesammten von allen in einem Leiterelement bewegten elektrischen Theilchen ausgehenden Wirkung, d. h. aus dem Elementargesetz. Die Aufgabe, die elektrischen Grundkräfte zu bestimmen, wird aber noch weiter erschwert dadurch, dass auch die von den einzelnen Elementen eines galvanischen Stroms ausgehenden Elementarwirkungen nicht unmittelbar Gegenstand der Beobachtung sind, sondern dass wir immer nur die Gesammtwirkungen beobachten, welche von geschlossenen Stromringen auf andere eben solche Ringe oder auf bewegliche Theile derselben ausgeübt werden. Es ist nun zuerst Ampère gelungen, für die ponderomotorische Wechselwirkung galvanischer Ströme ein Elementargesetz zu entdecken, welches wir nach ihm als das Ampère'sche Gesetz bezeichnen; er hat es aber versäumt für dieses Gesetz einen directen thatsächlichen Beweis durch exacte Messungen zu geben. Ein solcher Beweis wurde wenigstens für den Fall, dass die beiden auf einander wirkenden Stromelemente zweien geschlossenen Stromringen angehören, erst durch die elektrodynamischen Messungen geliefert, welche Weber in der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen mitgetheilt hat. We-

ber hat sich aber nicht mit dieser Bestätigung des Ampère'schen Gesetzes durch genaue Messungen begnügt, sondern er hat von diesem Gesetze aus den Weg gebahnt zu der Erforschung der elektrischen Grundkräfte und hat für die Wechselwirkung elektrischer Theilchen das nach ihm genannte Grundgesetz entwickelt. Dieses Gesetz findet dann unmittelbar Anwendung auf die Bestimmung derjenigen Kräfte, welche hervortreten, wenn in einem Leiterelement die Stärke der galvanischen Strömung irgend welchen Aenderungen unterworfen wird oder wenn dasselbe in irgend einer relativen Bewegung gegen ein anderes Leiterelement begriffen ist, d. h. es ergeben sich aus dem Weber'schen Grundgesetz Elementargesetze für die Erscheinungen der Voltainduction. Da nun die so ermittelten Inductionsgesetze mit den beobachteten Erscheinungen in vollkommener Uebereinstimmung sich befinden, so umfasst die auf dem Weber'schen Grundgesetze sich aufbauende Theorie in der That das ganze Gebiet der elektrischen Erscheinungen. Diese von Weber begründete Theorie wurde in neuerer Zeit angegriffen durch die Arbeiten von Helmholtz und Clausius, und es wurde von beiden der Versuch gemacht, die ihrer Meinung nach fehlerhafte Theorie durch eine neue zu ersetzen. Helmholtz hat im Wesentlichen zwei Einwände gegen das Weber'sche Gesetz erhoben, von welchen übrigens der eine nicht so wohl dieses Gesetz, als vielmehr gewisse accessorische Annahmen betrifft, die zum Zweck der Untersuchung der galvanischen Strömung im Inneren der Conductoren gemacht worden sind. Der zweite Einwand besteht darin. dass nach Helmholtz das Weber'sche Gesetz einen Widerspruch gegen das Princip der Erhaltung der Energie enthalten sollte. Das Gesetz, welches Helmholtz an Stelle des Weber'schen vorgeschlagen hat, ergab sich dadurch, dass er einen gewissen formalen Zusammenhang, welchen F. Neumann zwischen der ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkung geschlossener Ströme entdeckt hatte, auf die elementaren Wirkungen der galvanischen Strömung übertrug; dieses Gesetz macht also nicht den Anspruch ein Grundgesetz der elektrischen Wirkungen zu sein, sondern es giebt zunächst nur einen einfachen mathematischen Ausdruck, aus welchem als aus einer gemeinsamen Quelle die verschiedenartigen

elektrodynamischen Wirkungen nach bestimmten Regeln abgeleitet werden können. Die von Helmholtz gegen das Weber'sche Gesetz erhobenen Einwände sind durch die Arbeiten von Weber und C. Neumann widerlegt worden; es kann sich also jetzt nur noch um die Frage handeln, ob die Gesetze von Helmholtz und Weber beide den gegenwärtig bekannten experimentellen Thatsachen genügen, ob sie also diesen gegenüber als gleichberechtigt zu betrachten sind, oder ob wir gegenwärtig schon gewisse Erscheinungen nachweisen können, welche die Alternative zwischen den beiden Gesetzen entscheiden. Der von Clausius erhobene Einwand gründet sich auf eine Folgerung aus dem Weber'schen Gesetze. auf welche ich bereits einige Jahre früher aufmerksam gemacht hatte und welche darin besteht, dass eine um ihre Axe gedrehte und von einem galvanischen Strom durchflossene Spirale nach dem Weber'schen Gesetze auf einen benachbarten Conductor eine vertheilende Wirkung ausübt, ganz ebenso wie sie von einem elektrisch geladenen Conductor ausgehen würde. Die Prüfung dieser Folgerung schien mir die Sache einer erst anzustellenden experimentellen Untersuchung zu sein, während Clausius aus dem Umstande, dass diese Wirkung bisher der Beobachtung sich entzogen hat, die Unzulässigkeit des Weber'schen Gesetzes folgern zu müssen glaubte. Clausius hat dann ein anderes Grundgesetz der elektrischen Wirkung aufgestellt, nach welchem jene elektrostatische Wirkung nicht eintreten würde.

Es möge mir nun gestattet sein, einen Ueberblick über den Inhalt der Abhandlung, welche ich der K. G. vorzulegen die Ehre hatte und eine kurze Charakterisirung der Stellung, welche dieselbe den im Vorhergehenden erwähnten Arbeiten gegenüber einnimmt, zu geben. Nach einer Vorbemerkung über diejenigen Anforderungen, welche sich aus dem Princip der Gleichheit von Action und Reaction für die elektrodynamischen Wechselwirkungen ergeben, liefert der erste Abschnitt der Abhandlung einen auf möglichst sicheren Grundlagen ruhenden und zugleich möglichst einfachen Beweis des Ampère'schen Gesetzes. Derselbe schliesst sich unmittelbar an die von Stefan über das Grundgesetz der Elektrodynamik angestellten Untersuchungen an, indem er zu den von Stefan

gemachten Annahmen nur noch das Princip der Gleichheit von Action und Reaction in seiner strengen Fassung hinzufügt. Es ergiebt sich gleichzeitig, dass das von Stefan aufgestellte Gesetz jenem Princip nur mit Bezug auf translatorische Verschiebungen genügt, während das Gesetz von Clausius, welches als ein specieller Fall in dem Gesetz von Stefan enthalten ist, mit jenem Princip unter allen Umständen in Widerspruch sich befindet. Der zweite Abschnitt bespricht einen ähnlichen von C. Neumann gegebenen Beweis des Ampère'schen Gesetzes und zeigt dass derselbe von einer gewissen speciellen von Neumann gemachten Annahme unabhängig ist. Während die beiden erwähnten Beweise des Ampère'schen Gesetzes synthetischer Natur sind, d. h. von einer Reihe gegebener Bedingungen aus das Gesetz allmälig zu konstruiren suchen, enthält der folgende Abschnitt eine analytische Zerlegung des Ampère'schen Gesetzes in einzelne Kraftcomponenten, welche im Wesentlichen identisch ist mit der in den Abhandlungen d. K. G. d. W. vom Jahre 1875 von mir mitgetheilten Zerlegung. Will man nun auf Grund dieser Zerlegung einen Beweis dafür gewinnen, dass das Ampère'sche Gesetz die in Wirklichkeit zwischen zwei Stromelementen vorhandene ponderomotorische Kraft darstellt, so wird einmal zu zeigen sein, dass allen jenen Kraftcomponenten, in welche die Ampère'sche Kraft sich auflösen lässt, messbare elektrodynamische Wirkungen entsprechen, und zweitens, dass keine ausserhalb des Ampère'schen Gesetzes stehenden Wirkungen existiren d. h. es muss nachgewiesen werden, dass das Ampère'sche Gesetz nicht allein der wirkliche, sondern auch der vollständige Ausdruck der elektrodynamischen Kräfte ist. Es ergiebt sich, dass unter der Voraussetzung rein translatorischer Wirkungen zwischen zwei Stromelementen die Verbindung der Gesetze der Wechselwirkung geschlossener Ströme, mit den Erscheinungen der elektrodynamischen Rotationen einerseits oder mit den Erscheinungen, welche die elektrische Entladung in Geissler'schen Röhren unter magnetischer Einwirkung darbietet, andererseits zum Beweise des Ampère'schen Gesetzes genügt. Die angeführte Zerlegung des Ampère'schen Gesetzes stellt eine eigenthümliche Beziehung zwischen demselben und dem Gesetze von Helmholtz her, eine Beziehung, welche

mir schon früher zum Bewusstsein gekommen war, zu deren weiterer Verfolgung ich aber erst durch ein genaueres Studium der zweiten Abhandlung von Helmholtz veranlasst wurde, in welcher dieselbe Beziehung nur von dem entgegengesetzten Standpunkte aus sich bereits entwickelt fand. Die Beziehung ist einfach die, dass bei meiner Zerlegung des Ampère'schen Gesetzes das Helmholtz'sche sich als ein Theil des Ampère'schen ergab, während Helmholtz umgekehrt gezeigt hatte, dass das Ampère'sche Gesetz einen Theil des seinigen bildet. Diese Bemerkung wird nun benützt um aus der im dritten Abschnitt gegebenen Theorie des Ampère'schen Gesetzes eine entsprechende Theorie des Helmholtz'schen Gesetzes abzuleiten, in welcher einige Punkte consequenter und vollständiger durchgeführt zu sein scheinen, als in der von Helmholtz selber der Oeffentlichkeit übergebenen Theorie. Es folgt aus dieser Theorie, dass die von Zoellner zur Widerlegung des Helmholtz'schen Gesetzes angestellten Experimente in der That keine Beweiskraft gegen dasselbe Dagegen ergiebt sich, dass die bereits erwähnten Erscheinungen der elektrischen Entladung in Geissler'schen Röhren mit dem Gesetze von Helmholtz sich in Widerspruch befinden, so dass also durch diese Erscheinungen die Alternative zwischen den Gesetzen von Weber und Helmholtz zu Gunsten des Weber'schen Gesetzes entschieden wird. Das von Helmholtz vorgeschlagene Gesetz ist ein Potentialgesetz, d.h. es giebt unmittelbar nicht die zwischen zwei Stromelementen wirkenden Kräfte, sondern die Arbeit, welche von diesen Kräften bei einer beliebigen relativen Verschiebung der beiden Elemente geleistet wird. In diesem Sinne besitzt nun auch das Weber'sche Grundgesetz der elektrischen Wechselwirkung ein Potential, und daraus schien mit Nothwendigkeit hervorzugehen, dass auch nach dem Weber'schen Gesetze ein Potential zweier Stromelemente existiren müsse. Dieses Potential wird im fünften Abschnitte wirklich aufgestellt und es zeigt sich, dass dasselbe identisch ist mit dem Helmholtz'schen Potentiale; nur die Regel, nach welcher die wirksamen Kräfte aus dem Potentiale abzuleiten sind, ist nach dem Weber'schen Grundgesetze eine andere als die von Helmholtz befolgte. Mit Rücksicht auf dieses Resultat könnte man also sagen, dass das Helm-

holtz'sche Gesetz sich nicht in Widerspruch befinde mit dem Weber'schen, sondern vielmehr eine Folge des letzteren sei, dass aber aus dieser Zurückführung des Helmholtz'schen Gesetzes auf seine tiefer liegende Quelle eine von den gewöhnlichen Vorschriften abweichende Behandlung desselben resultire, bei deren Befolgung alle aus dem Helmholtz'schen Gesetze gezogenen nicht zulässigen Folgerungen verschwinden. Der letzte Abschnitt der Abhandlung enthält einige Bemerkungen über das Gesetz von Clausius. Dieses Gesetz steht nicht in Widerspruch mit irgend welchen bekannten Thatsachen, aber in Widerspruch mit dem Princip der Gleichheit von Action und Reaction. Der schwerwiegende Einwand, welcher sich hieraus gegen das Gesetz von Clausius ergeben würde, wird dadurch gehoben, dass dasselbe ein fragmentarisches Gesetz ist, da nach der Vorstellung von Clausius die Wechselwirkung zweier elektrischer Theilchen keine unmittelbare ist, sondern vermittelt durch ein unbekanntes den Zwischenraum zwischen denselben erfüllendes Medium; das Gesetz von Clausius bestimmt nur die auf die elektrischen Theilchen resultirende Wirkung und lässt die auf jenes vermittelnde Medium wirkenden Kräfte ganz unbestimmt. Doch dürfte von unserem gegenwärtigen Standpunkte aus die Wahl zwischen den Gesetzen von Weber und Clausius nicht zweifelhaft sein, da zwar beide mit den beobachteten Erscheinungen in Uebereinstimmung sich befinden, aber das Gesetz von Weber diese Erscheinungen nur von bekannten Verhältnissen abhängig macht, während das Gesetz von Clausius eines vermittelnden Körpers bedarf, von dessen Existenz und Eigenschaften wir nicht die mindeste Kenntniss besitzen.

Die seit einer Reihe von Jahren über das Weber'sche Gesetz geführte Controverse hat das eigenthümliche Resultat gehabt, dass gerade da, wo die Gegner desselben eine schwache Stelle, einen Widerspruch mit den Principien der Mechanik zu entdecken glaubten, ein unerwarteter Reichthum und eine vollkommene Harmonie mit jenen Principien durch die Abhandlungen von Weber enthüllt wurde. In diesem Sinne dürften auch die in der vorliegenden Abhandlung mitgetheilten Untersuchungen einen Beitrag zu unserer Kenntniss des Weber'schen Gesetzes enthalten.

### I. Beweis des Ampère'schen Gesetzes.

Bei dem folgenden Beweise des Ampère'schen Gesetzes wird das Princip der Gleichheit von Action und Reaction bezogen auf die Wechselwirkung zwischen zwei gleichartigen Elementen A und B. von welchen angenommen wird, dass sie nur durch translatorische Kräfte auf einander wirken. Das Princip sagt aus, dass die von dem Elemente B auf das Element A ausgeübte Kraft stets gleich und entgegengesetzt ist derienigen, welche von A ausgeübt wird auf B. Wenn also A und B zu einem starren Systeme verbunden sind, so wird die ihnen in Folge der Trägheit inwohnende gemeinsame Bewegung durch die Wirkung der inneren Kräfte keine Aenderung erleiden können. Diess muss, wenn das Princip der Gleichheit von Action und Reaction eine allgemeine Gültigkeit besitzen soll, auch in dem Falle gelten, dass die beiden verbundenen Elemente um irgend eine Axe drehbar sind. Man sieht aber sofort, dass in diesem Falle die zwischen A und B vorhandenen inneren Kräfte ein Drehungsmoment um jene Axe ausüben werden, wenn nicht die Richtungen der beiden Kräfte zusammenfallen und dieselben gleich gross und entgegengesetzt sind. Wenn aber, wie diess bei einer Elementarwirkung zwischen zwei vollkommen gleichartigen Elementen kaum anders dürfte angenommen werden, der Angriffspunkt der auf A ausgeübten Kraft in das Element A, der Angriffspunkt der auf B ausgeübten in das Element B verlegt wird, so können die Richtungen dieser beiden Kräfte nur zusammenfallen, wenn sie gleichzeitig zusammenfallen mit der Richtung der Entfernung A-B. Wenn also irgend zwei Elemente pur durch translatorische Kräfte auf einander wirken, so besitzt das Princip der Gleichheit von Action und Reaction für diese Wirkung nur dann allgemeine Gültigkeit, wenn jene Kräfte einfache Anziehungs- oder Abstossungskräfte sind; transversale Wirkungen zwischen gleichartigen Elementen sind nicht möglich.

Der im Folgenden entwickelte Beweis des Ampère'schen Gesetzes erhebt nicht den Anspruch, ein wesentlich neuer Beweis dieses Gesetzes D. PONDEROMOTORISCHE ELEMENTARGESETZ D. ELEKTRODYNAMIK. 11

zu sein; ich wurde zu demselben ursprünglich dadurch geführt, dass ich das Princip der Gleichheit von Action und Reaction in der im Vorhergehenden gegebenen strengeren Fassung auf den von Stefan für die ponderomotorische Elementarwirkung aufgestellten Ausdruck in Anwendung brachte; es fielen dadurch von vornherein die in dem Stefan'schen Gesetze enthaltenen transversalen Kräfte weg und die übrigbleibenden Constanten konnten entweder unmittelbar mit Hülfe des F. Neumann'schen Potentialgesetzes, oder auch mit Benützung derjenigen Relationen bestimmt werden, welche Stefan für die 4 in seinem Gesetze enthaltenen Constanten aus dem Potentialgesetze abgeleitet hat. Andererseits schliesst sich der Beweis bis auf einen gewissen Punkt einem von C. Neumann gegebenen Beweise des Ampère'schen Gesetzes 1) an und ich habe daher im Folgenden die Bezeichnungen in Uebereinstimmung mit den von C. Neumann gebrauchten gewählt.

Die Grundlage des Beweises wird gebildet durch die folgenden Annahmen.

- 1. Die ponderomotorische Wechselwirkung zweier Stromelemente ist eine rein translatorische.
- 2. Diese Wirkung genügt dem Princip der Gleichheit von Action und Reaction.
- 3. Die Wirkung zwischen zwei Stromelementen IDs und  $I_1Ds_1$  ist proportional mit

$$IDs.I_1Ds_1.$$

- 4. Abgesehen von dem Factor  $IDs.I_1Ds_1$  ist die Wirkung nur abhängig von der relativen Lage der beiden Elemente.
- 5. Die Kraft R, welche die beiden Stromelemente auf einander ausüben, ist ersetzbar durch diejenigen Kräfte, welche die Componenten von IDs und die Componenten von  $I_1Ds_4$  auf einander ausüben.
- 6. Die ponderomotorische Wirkung zwischen zwei geschlossenen Stromkreisen ist bestimmt durch das Gesetz des elektrodynamischen Potentiales.

<sup>1)</sup> C. Neumann: Ueber die Zuverlässigkeit des Ampère'schen Gesetzes. Math. Ann. Bd. XI. S. 309.

7. Die Kraft R zwischen zwei Stromelementen IDs und  $I_1Ds_1$  ist umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung.

Wir legen die  $\chi$ Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems  $\chi$ ,  $\eta$ ,  $\chi$  in die Verbindungslinie der beiden Elemente; die Componenten derselben nach den Axen dieses Systems mögen bezeichnet werden durch  $\alpha$ ,  $\beta$ , c, und  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $c_1$ ; dieselben Betrachtungen welche von Stefan¹) und C. Neumann²) bei der Ableitung des ponderomotorischen Elementargesetzes benutzt worden sind, führen dann auf Grund der Annahmen 1 bis 5 zu folgenden Kräften zwischen den Componenten der beiden Stromelemente.

1) Zwischen a und a, eine Kraft

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{a} \mathfrak{a}_1 \Phi(r)$$

2) Zwischen b und b, eine Kraft

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{b} \mathfrak{b}, \Psi(r)$$

3) Zwischen c und c, eine Kraft

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{cc}_{\mathfrak{l}} \Psi(r).$$

Transversale Kräfte parallel den Axen nund 3 sind ausgeschlossen durch das Princip der Gleichheit von Action und Reaction; longitudinale Kräfte zwischen einer transversalen und einer longitudinalen Componente oder zwischen zwei zu einander senkrechten transversalen Componenten sind ausgeschlossen durch die Annahme 4.

Für die gesammte abstossende Wirkung der beiden Elemente IDs und  $I_1Ds_1$  aufeinander ergiebt sich somit der Werth

$$\begin{split} R &= (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1)\,\Phi(r) + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1)\,\Psi(r) \\ &= \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,[\Phi(r) - \Psi(r)] + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1)\,\Psi(r). \end{split}$$

Der 7ten Annahme zu Folge ist aber diese Wirkung dem Quadrate der Entfernung der beiden Elemente umgekehrt proportional; wir

<sup>1)</sup> Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 59 zweite Abtheilung pag. 693.

<sup>2)</sup> Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze S. 470.

D. PONDEROMOTORISCHE ELEMENTARGESETZ D. ELEKTRODYNAMIK. 13

können somit mit Einführung zweier unbekannter Constanten x und λ den Ansatz machen:

$$\frac{3 \times}{r^2} = \Phi(r) - \Psi(r); \frac{2 \lambda}{r^2} = \Psi(r)$$

und erhalten dann:

$$R = 3 \times \frac{\alpha \alpha_1}{r^2} + 2 \lambda \frac{\alpha \alpha_1 + b b_1 + c c_1}{r^2}$$

An Stelle des im Vorhergehenden benützten Coordinatensystems möge nun ein ganz beliebiges rechtwinkliges System x, y, z treten; mit Bezug auf dasselbe gebrauchen wir dieselben Bezeichnungen, welche von C. Neumann in seiner Abhandlung über die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze eingeführt worden sind. Es seien:

x, y, z und  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  die Coordinaten der Anfangspunkte der beiden Elemente IDs und  $I_1Ds_1$ .

A, B,  $\Gamma$  und  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $\Gamma_1$  seien die Richtungscosinus der beiden Elemente.

 $\vartheta$  und  $\vartheta_1$  seien die Winkel, unter welchen die Elemente Ds und  $Ds_1$  geneigt sind gegen die Richtung  $r(Ds_1 - Ds)$ .

e der Winkel, welchen die Elemente mit einander einschliessen.

Ferner werde gesetzt:

$$\cos \vartheta = \theta, \cos \vartheta_1 = \theta_1, \cos \varepsilon = E$$

Für die X Componente der von dem Element  $Ds_1$  auf das Element Ds ausgeübten Kraft ergiebt sich dann der Ausdruck:

$$X = IDs.I_1Ds_1 \frac{3 \times \theta \theta_1 + 2 \lambda E}{r^2} \cdot \frac{x - x_1}{r}$$

Zur Bestimmung der Constanten x und  $\lambda$  dient jetzt das Gesetz des elektrodynamischen Potentials und zwar nur in so weit durch dasselbe die translatorische und rotatorische Wirkung bestimmt wird, welche ein starrer und fest aufgestellter Stromring B ausübt auf einen ebenfalls starren aber beweglichen Stromring A. In diesem Falle ist die auf den letzteren ausgeübte translatorische Wirkung gleich dem negativen Diffe-

rentialquotienten des Potentials nach der Richtung der Translation; die rotatorische Wirkung gleich dem negativen Differentialquotienten nach dem Winkel der Rotation. Das elektrodynamische Potential selbst kann durch einen Ausdruck von folgender Form dargestellt werden:

$$P = -A^2 II_1 \sum \sum Ds Ds_1 \left( \frac{1+k}{2} \cdot \frac{E}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{\Theta \Theta_1}{r} \right)$$

wo k eine Constante von unbestimmtem Werthe bezeichnet. Um zu untersuchen, welche Bestimmungen sich aus diesem Satze für die beiden unbekannten Constanten  $\varkappa$  und  $\lambda$  ergeben, transformiren wir zunächst den oben gegebenen Ausdruck für die X Componente der von dem Element  $Ds_1$  auf das Element Ds ausgeübten Wirkung durch Addition der mit  $\varkappa DsDs_1$  multiplicirten identischen Gleichung:

$$0 = 8 \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \partial s_1} \cdot \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x} - \frac{3 \Theta \Theta_1 - 2 E}{r^2} \cdot \frac{x - x_1}{r}$$

und erhalten dadurch

$$X = IDs.I_{1}Ds_{1}\left\{8 \times \frac{\partial^{2} \sqrt{r}}{\partial s \partial s_{1}} \cdot \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x} + 2(x+\lambda)\frac{E}{r^{2}} \cdot \frac{x-x_{1}}{r}\right\}$$

oder

$$X = 8 \times IDs. I_1Ds_1 \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \partial s_1} \cdot \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x} - 2(x+\lambda)IDsI_1Ds_1 \cdot E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$$

Es zerfällt somit die X Componente in zwei Theile; von diesen genügt aber der erste für sich allein schon dem Potentialgesetze, wenn man setzt

$$k = A^2$$

Soll also das Potentialgesetz für die ganze durch den vorhergehenden Ausdruck bestimmte Componente richtig sein, so muss auch der zweite Theil derselben

$$-2 (x + \lambda) IDs. I_1 Ds_1 E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$$

für sich allein dem Potentialgesetze genügen. In der That ist dies der Fall für solche Verschiebungen des Elementes Ds, durch welche der Werth von E nicht geändert wird, d. h. für Parallelverschiebungen, nicht aber für solche Verschiebungen, bei denen der Werth von E in Abhängigkeit tritt von den Coordinaten x, y, z, d. h. nicht für rotatorische Verschiebungen. Es ergiebt sich somit, dass das Potentialgesetz nur dann allgemeine Gültigkeit besitzt, wenn der zweite Theil der X Componente verschwindet, d. h. wenn

$$\lambda = -x = -A^2$$

ist; substituiren wir aber diese Werthe in dem Ausdruck für die zwischen den Elementen IDs und I, Ds, vorhandene Abstossung, so ergiebt sich

$$R \, = \, A^{\,2} \, I \, D \, s \, . \, I_{1} \, D s_{1} \, \frac{3 \, \theta \, \theta_{1} \, - 2 \, \mathrm{E}}{r^{\,2}}$$

d. h. es ergiebt sich das Ampère'sche Gesetz.

Wenn man die zweite der Annahmen, welche als Grundlage bei der vorhergehenden Deduction benützt worden sind, unterdrückt, so gelangt man zu demjenigen Ausdrucke, welcher von Stefan für die von dem Elemente Ds, auf das Element Ds ausgeübte X Componente aufgestellt worden ist.

$$X = IDs.I_1Ds_1\left\{m\frac{\partial^2\frac{(x-x_1)}{r}}{\partial s\partial s_1} + n\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}.\frac{dx_1}{ds_1} + p\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s_1}.\frac{dx}{ds} + q\frac{E}{r^2}.\frac{x-x_1}{r}\right\}$$

In diesem Ausdruck ist der dem Grundgesetze von Clausius entsprechende als specieller Fall enthalten; er geht in diesen letzteren über, wenn für die Constanten m, n, p und q die folgenden Werthe angenommen werden

$$m = 0, n = -k, p = 0, q = -k$$

Mit Hülfe der bekannten Formeln:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \theta, \ \frac{\partial r}{\partial s_1} = -\theta_1, \ r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} = \theta \theta_1 - E$$

$$\frac{dx}{ds} = A, \dots, \frac{dx_1}{ds_1} = A_1, \dots.$$

kann der Stefan'sche Ausdruck auf die folgende Form gebracht werden:

$$X =$$

$$IDs.\,I_1Ds_1.\left\{\frac{3\,m\,\theta\,\,\theta_1+(q-m)\,\mathcal{E}}{r^2}\cdot\frac{x-x_1}{r}+(m-n)\frac{\theta}{r^{\,2}}\mathcal{A}_1+(m+p)\frac{\theta_1}{r^2}\,\mathcal{A}\right\}$$

Sollte wenigstens für translatorische Wirkungen das Princip der Gleichheit von Action und Reaction gewahrt sein, so müsste

$$p = -n$$

gesetzt werden, woraus sich ergiebt, dass das Gesetz von Clausius nicht einmal für diesen Fall mit jenem Principe im Einklang sich befindet. Die Betrachtung des zuletzt für die Stefan'sche Componente aufgestellten Ausdrucks zeigt aber weiter, dass die beiden letzten Theile desselben Kräften entsprechen, welche den beiden Elementen Ds und  $Ds_1$  parallel gerichtet sind und demnach den Charakter von transversalen Kräften besitzen. Schliessen wir in Uebereinstimmung mit der strengen Fassung des Princips der Gleichheit von Action und Reaction solche Wirkungen aus, so reducirt sich der Stefan'sche Ausdruck auf den von uns in dem vorhergehenden Beweise des Ampère'schen Gesetzes benützten.

## II. Ueber einen von C. Neumann gegebenen Beweis des Ampère'schen Gesetzes.

Durch die Benützung der ersten fünf von den im vorhergehenden Abschnitt aufgeführten Annahmen gelangten wir zu einem Ausdruck für die abstossende Wirkung des Elementes  $I_1 Ds$ , auf das Element IDs, welchen wir in folgender Form schreiben können

$$R = IDs.I_1Ds_1\{\rho\theta\theta_1 + \overline{\rho}E\}$$

Es besitzt dieser Ausdruck den Typus des Ampère'schen Gesetzes, un-

terscheidet sich aber von dem letzteren dadurch, dass an der Stelle der bestimmten dem Ampère'schen Gesetz eigenthümlichen Functionen der Entfernung' zwei unbekannte Functionen  $\rho$  und  $\overline{\rho}$  sich befinden. Diese beiden unbekannten Functionen bestimmt Neumann direct mit Hülfe des Potentialgesetzes, so dass also durch seinen Beweis die siebte der von uns gemachten Voraussetzungen als überflüssig, oder als im Potentialgesetze schon mitenthalten sich erweist.

Der Gang des Neumann'schen Beweises ist der folgende. Neumann berechnet aus dem Potentiale

$$P = -A^2 I I_1 \sum \sum \frac{\cos \varepsilon}{r} D s D s_1$$

welches zwei geschlossene Stromringe auf einander ausüben, die Arbeit, welche bei einer beliebigen Verschiebung der Ringe gegeneinander geleistet wird. Es ergiebt sich, dass diese Arbeit sich zerfällen lässt in zwei Theile, von welchen wir den einen als den wesentlichen Arbeitsantheil, den anderen als den unwesentlichen Antheil bezeichnen wollen. Die wesentliche Arbeit ist dargestellt durch ein über die Elemente der beiden Ringe hinerstrektes Doppelintegral, in welchem der Zuwachs dr., den die Entfernung irgend zweier Elemente bei der Verschiebung erleidet, multiplicirt ist mit dem Ausdruck

$$IDs. I_1Ds_1 \frac{3\Theta\Theta_1 - 2E}{r^2}$$

also mit derjenigen Kraft, welche nach dem Ampère'schen Gesetz zwischen den beiden Elementen wirksam ist. Der unwesentliche Arbeitsantheil ist gegeben durch zwei über die beiden Stromringe hinerstreckte Integrale, in welchen das Product zweier Elemente des einen und anderen Ringes multiplicirt ist mit einem vollständigen Differentialquotienten nach der Bogenlänge des einen oder anderen Ringes. Der durch diese beiden Integrale dargestellte Arbeitsantheil verschwindet also jederzeit, wenn es sich um die Bewegung zweier geschlossener Ringe handelt und ist eben desshalb als der unwesentliche bezeichnet. Den beiden so unterschiedenen Arbeitsantheilen werden nun auch zwei ver-

C

Mathem. Classe. XXIV. 1.

beiden Ringe entsprechen. Eine wesentliche Wirkung, welche identisch ist mit der durch das Ampère'sche Gesetz gegebenen; eine unwesentliche, welche durch Ausdrücke von vollständig abweichendem Charakter bestimmt wird. Die Existenz der Ampère'schen Kraft wird durch das Potentialgesetz gefordert, die Existenz jener unwesentlichen Wirkung ist mit demselben verträglich, aber nicht nothwendig. Nun hat aber die Ausbeutung der ersten fünf Annahmen zu dem Resultat geführt, dass die Wirkung zwischen zwei Stromelementen erschöpfend dargestellt wird durch einen einzigen Ausdruck von Ampère'schem Typus. Es können somit jene unwesentlichen Wirkungen, welche nach einem ganz abweichenden Typus aufgebaut sind, in Wirklichkeit nicht existiren, und es ist die ganze Wirkung zwischen zwei Stromelementen gegeben durch das Ampère'sche Gesetz.

Dieser Beweis kann nach einer Richtung hin noch vervollständigt werden. Neumann geht bei demselben aus von einer gewissen speciellen Form des elektrodynamischen Potentiales. Man kann dieselbe ersetzen durch den allgemeinen Ausdruck:

$$P = -A^2 I I_1 \sum \sum \frac{\Theta \Theta_1}{r} D s D s_1 - A^2 I I_1 \sum \sum \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial s_1} D s D s_1$$

in welchem w eine willkürliche Function der Entfernung bezeichnet, und man kann im Hinblick auf diesen Ausdruck an die Möglichkeit denken, dass bei der Entwickelung der einer beliebigen Verschiebung der beiden Stromringe entsprechenden Arbeit ausser dem Ampère'schen Ausdrucke selbst noch andere Glieder sich einstellen könnten, welche nur dem allgemeinen Typus des Ampère'schen Gesetzes angehören. Dadurch würde die Möglichkeit der Bestimmung der beiden unbekannten Functionen  $\rho$  und  $\overline{\rho}$  verloren gehen. Indessen zeigt die folgende Rechnung, dass dieser Fall in Wirklichkeit nicht eintritt. Für die während einer kleinen Zeit dt von den elektrodynamischen Kräften geleistete Arbeit ergiebt sich zunächst:

D. PONDEROMOTORISCHE ELEMENTARGESETZ D. ELEKTRODYNAMIK. 19

$$dT = A^{2} I I_{1} \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\Theta \Theta_{1}}{r}\right) D s D s_{1} dt + A^{2} I I_{1} \sum \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial^{2} w}{\partial s \partial s_{1}} D s D s_{1} dt$$

$$= dp + d\pi$$

Nun ist:

$$\frac{\theta \theta_1}{r} = -4 \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\theta \theta_1}{r} = +8 \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \partial s_1} \cdot \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t} - 4 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t} \right) - 4 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t} \right)$$

Der erste Theil des für die geleistete Arbeit gegebenen Ausdruckes reducirt sich somit auf das dem Ampère'schen Gesetze entsprechende Glied:

$$8\,A^2\,II_1\,\Sigma\Sigma\,\frac{\partial^2\,\sqrt{r}}{\partial\,s\,\partial\,s_1}\,\frac{\partial\,\sqrt{r}}{\partial\,t}\,D\,s\,D\,s_1\,d\,t$$

und auf zwei Integralausdrücke, von welchen wir in demselben Sinne wie früher sagen können, dass sie einem unwesentlichen Arbeitsantheile entsprechen. Der zweite Theil  $d\pi$  der elektrodynamischen Arbeit kann auf folgende Form gebracht werden:

$$d\pi = -A^2 I I_1 \frac{d}{dt} \sum \sum \left\{ \left( w'' - \frac{w'}{r} \right) \Theta \Theta_1 + \frac{w'}{r} E \right\} D s D s_1 dt$$

oder wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\begin{split} \frac{w'}{r} &= \varphi \text{ und } w'' - \frac{w'}{r} = \psi \\ d\pi &= -A^2 I I_1 \frac{d}{dt} \Sigma \Sigma (\varphi E + \psi \Theta \Theta_1) D s D s_1 d t. \end{split}$$

Mit Hülfe einer von Neumann¹) angegebenen Transformation ergiebt sich weiter:

<sup>1)</sup> Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze S. 447.

$$\begin{split} d\pi &= -A^2 I I_1 \, \Sigma \, \Xi \left\{ \! \left( \varphi' - \frac{\psi}{r} \right) 2 \, \Xi + \left( \frac{2 \, \psi}{r} - \psi' - \varphi' - r \, \varphi'' \right) \Theta \, \Theta_1 \! \right\} dr \\ &\quad + A^2 \, I I_1 \, \Sigma \, \Xi \, \frac{\partial}{\partial \, s} \left[ \frac{d\, r}{d\, t} \! \left\{ \! \overline{\varphi} + \psi \, \frac{\partial\, r}{\partial \, s_1} - \frac{\partial\, r \, \varphi}{\partial \, s_1} \! \right\} \right] D\, s \, D\, s_1 \, d\, t \\ &\quad + A^2 \, I I_1 \, \Sigma \, \Xi \, \frac{\partial}{\partial \, s_1} \left[ \frac{d\, r}{d\, t} \! \left\{ \! \overline{\varphi} + \psi \, \frac{\partial\, r}{\partial \, s} - \frac{\partial\, r \, \varphi}{\partial \, s} \! \right\} \right] D\, s \, D\, s_1 \, d\, t \\ &\quad + A^2 \, I I_1 \, \Sigma \, \Xi \, \frac{\partial^2}{\partial \, s \, \partial \, s_1} \left( r \, \varphi \, \frac{d\, r}{d\, t} \right) D\, s \, D\, s_1 \, d\, t \end{split}$$

Hiernach scheint es also in der That, dass in dem Ausdrucke für die Arbeit  $d\pi$  ein Glied enthalten ist, welches den Ampère'schen Typus besitzt, während im übrigen nur Integrale auftreten, welche bei der Ausdehnung der Integration über die beiden geschlossenen Ringe verschwinden, welche also als unwesentlich zu betrachten sind. Wenn wir aber in jenem ersten Gliede an Stelle von  $\varphi$  und  $\psi$  ihre wirklichen Werthe wieder herstellen, so ergiebt sich:

$$\varphi' - \frac{\psi}{r} = 0$$

$$\frac{2\psi}{r} - \psi' - \varphi' - r\varphi'' = 0$$

es verschwindet somit das erste dem Ampère'schen Typus entsprechende Glied identisch. Damit ist aber der Beweis geliefert, dass auch die allgemeine Form des elektrodynamischen Potentials zu keinem anderen Elementargesetze hinführt, als dem Ampère'schen.

## III. Analytische Untersuchung des Ampère'schen Gesetzes.

Die im Vorhergehenden besprochenen Beweise des Ampère'schen Gesetzes besitzen einen mehr oder weniger ausgesprochen synthetischen Charakter; d. h. sie gehen aus von einer Reihe gegebener Bedingungen, welche theils durch hypothetische Annahmen, theils durch Thatsachen der Erfahrung gebildet werden und suchen den allgemeinsten für die Wechselwirkung zweier Stromelemente denkbaren Ausdruck durch diese

Bedingungen successive genauer zu bestimmen, bis er schliesslich auf das Ampère'sche Gesetz sich reducirt. Man kann nun auch umgekehrt das Ampère'sche Gesetz zum Ausgangspunkt der Betrachtung machen, indem man dasselbe zunächst in seine einzelnen Componenten aufzulösen Wenn sich dann bei einer Vergleichung dieser Zerlegung mit den Thatsachen der Erfahrung zeigt, dass allen jenen Componenten messbare elektrodynamische Wirkungen entsprechen, so wird daraus folgen, dass das Ampère'sche Gesetz der Ausdruck wirklich vorhandener Wirkungen ist. Wenn sich überdiess nachweisen lässt, dass ausser den durch das Ampère'sche Gesetz bestimmten keine weiteren elektrodynamischen Wirkungen existiren, so wird das Ampère'sche Gesetz auch den erschöpfenden Ausdruck für diese Wirkungen bilden. Von diesem Gesichtspunkt aus ist das Ampère'sche Gesetz von mir untersucht worden in einer in den Abhandlungen der K. G. d. W. im Jahre 1875 veröffentlichen Arbeit, deren Inhalt, in so weit er sich auf das Ampère'sche Gesetz bezieht, im Folgenden in etwas veränderter Form reproducirt werden möge.

Wenn wir die im Vorhergehenden gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, so wird die XComponente der Kraft, welche von einem Stromelement  $I_1Ds_1$  ausgeübt wird auf das Element  $IDs_2$ , nach dem Ampère'schen Gesetz dargestellt durch folgenden Ausdruck:

$$X = 8 A^2 I D s I_1 D s_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial s_1}$$
 I.

Dieser Ausdruck geht durch eine einfache Umformung über in folgenden:

$$\begin{split} \mathbf{X} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + 4\,A^2\,\frac{\partial}{\partial s} \Big( II_1\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s_1} \cdot \frac{\partial\,\psi}{\partial\,x} \Big) D\,s\,D\,s_1 \\ &\quad + 4A^2\,\frac{\partial}{\partial s_1} \Big( II_1\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s} \cdot \frac{\partial\,\psi}{\partial\,x} \Big) D\,s\,D\,s_1 \\ &\quad + 4\,A^2\,I_1\,\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial t}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s_1} \cdot \frac{\partial\,\psi}{\partial\,x} \cdot D\,s\,D\,s_1 \\ &\quad + 4\,A^2\,I\,\frac{\partial\,\varepsilon_1}{\partial t}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s} \cdot \frac{\partial\,\psi}{\partial\,x} \cdot D\,s\,D\,s_1 \end{split}$$

Hier bezeichnen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  die Dichtigkeiten der freien Elektricitäten in den Elementen Ds und  $Ds_1$ ; P ist das elektrodynamische Potential der beiden Elemente aufeinander und hat den Werth:

II'. 
$$P = 4 A^2 I D s I_1 D s_1 \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_1}$$

Ist das Element Ds drehbar um irgend eine Axe, so wird das von dem Element  $Ds_1$  auf Ds ausgeübte Drehungsmoment gegeben durch:

IIa. 
$$\Delta = -\frac{\partial P}{\partial \varphi} + 4 A^2 \frac{\partial}{\partial s} \left( II_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) Ds Ds_1$$
$$+ 4 A^2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( II_1 \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) Ds Ds_1$$
$$+ 4 A^2 I_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot Ds Ds_1$$
$$+ 4 A^2 I \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot Ds Ds_1$$

wo \varphi den Drehungswinkel bezeichnet.

Eine dritte Form der X Componente ergiebt sich dadurch, dass wir auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung II. das erste, zweite und vierte Glied zusammenfassen. Bezeichnen wir die durch die Summe dieser drei Glieder dargestellte Componente durch  $\Xi$ , so ergiebt sich:

III. 
$$\Xi = 4 A^{2} I \frac{dy}{ds} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( I_{1} \frac{\partial \psi}{\partial s_{1}} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( I_{1} \frac{\partial \psi}{\partial s_{1}} \right) \right\} Ds Ds_{1}$$

$$+ 4 A^{2} I \frac{dz}{ds} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( I_{1} \frac{\partial \psi}{\partial s_{1}} \right) - \frac{\partial \psi}{dz} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( I_{1} \frac{\partial \psi}{\partial s_{1}} \right) \right\} Ds Ds_{1}$$

und

III'. 
$$X = \Xi + 4 A^{2} \frac{\partial}{\partial s_{1}} \left\{ II_{1} \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} Ds Ds_{1} + 4 A^{2} \frac{d \varepsilon_{1}}{d t} I \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} Ds Ds_{1}.$$

Entsprechende Gleichungen gelten natürlich für die Y und Z-Componente der Gesammtwirkung:

$$Y = H + \ldots; Z = Z + \ldots$$

Die Componenten E, H, Z genügen der Gleichung:

$$\Xi dx + H dy + Z dz = 0$$

sie entsprechen somit einer auf dem Elemente Ds senkrechten Kraft.

Zu der vierten Form der dem Ampère'schen Gesetz entsprechenden X Componente gelangen wir mit Hülfe der Gleichungen:

$$4\frac{\partial \psi}{\partial s_{1}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial s_{1}} \cdot \frac{\partial \psi^{2}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{dx_{1}}{ds_{1}}$$
$$4\frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_{1}} + \frac{\partial^{2} \psi^{2}}{\partial s \partial s_{1}} = -\frac{E}{r}$$

Benützt man dieselben zu der Umformung des Ausdruckes

$$\begin{split} &-4\,A^2\,\frac{\partial}{\partial\,x}\Big(I\,I_1\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s}\,\cdot\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s_1}\Big)\,D\,s\,D\,s_1\\ &+4\,A^2\,\frac{\partial}{\partial\,s}\Big(I\,I_1\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s_1}\,\cdot\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,x}\Big)\,D\,s\,D\,s_1 + 4\,A^2\,I_1\,\frac{d\,\varepsilon}{d\,t}\,\cdot\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s_1}\,\cdot\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,x}\,\cdot\,D\,s\,D\,s_1 \end{split}$$

so ergiebt sich:

$$\begin{split} & 4\,A^2\frac{\partial}{\partial s}\left\{\!II_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\!\right\}Ds\,Ds_1 + 4\,A^2\,I_1\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}Ds\,Ds_1 \\ & = -A^2\,Ds\,Ds_1\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2\,II_1\psi^2}{\partial s\,\partial s_1} + \frac{d\varepsilon}{dt}\cdot\frac{d\varepsilon_1}{dt}\psi^2 \\ + \frac{d\varepsilon_1}{dt}\frac{\partial}{\partial s}\left(I\psi^2\right) + \frac{d\varepsilon}{dt}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(I_1\psi^2\right) \end{array} \right\} & \text{IV.} \\ & -A^2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{II_1}{r}\cdot\frac{dx_1}{ds_1}\right)Ds\,Ds_1 - A^2\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{I_1}{r}\frac{dx_1}{ds_1}Ds\,Ds_1 \end{split}$$

und

$$X = IV'.$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -A^{2} I I_{1} D s D s_{1} \frac{E}{r} \right\} - A^{2} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{I I_{1}}{r} \cdot \frac{d x_{1}}{d s_{1}} \right) D s D s_{1} - A^{2} \frac{d \varepsilon}{d t} \frac{I_{1}}{r} \frac{d x_{1}}{d s_{1}} D s D s_{1}$$

$$+ 4 A^{2} \frac{\partial}{\partial s_{1}} \left( I I_{1} \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) D s D s_{1} + 4 A^{2} I \frac{d \varepsilon_{1}}{d t} \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot D s D s_{1}$$

Machen wir nun die vereinfachende Annahme, dass die in den beiden Elementen vorhandenen Strömungen gleichförmig, dass also  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  und  $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$  gleich Null sind, so können die Resultate der vorhergehenden Umformungen des Ampère'schen Gesetzes in folgenden Sätzen ausgesprochen werden. Hiebei sind die Endpunkte der beiden Elemente bezeichnet durch  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  und zwar so, dass unter  $\alpha$  und  $\alpha_1$  diejenigen Enden zu verstehen sind, gegen welche die positive Elektricität hinströmt.

- I. Die erste Zerlegung des Ampère'schen Gesetzes, entsprechend den Gleichungen II. und II'., giebt folgende Componenten:
- I, 1. Eine von  $Ds_1$  auf Ds ausgeübte Kraft, welche bestimmt ist durch die negativen Differentialquotienten des Potentiales:

$$4\,A^{2}\,ID\,s\,I_{1}\,D\,s_{1}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s}.\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s_{1}}$$

I, 2. Zwei abstossende Kräfte, welche von dem Elemente  $Ds_1$  ausgeübt werden auf die Endpunkte  $\alpha$ ,  $\beta$  von Ds; und zwar hat die auf  $\alpha$  ausgeübte Repulsivkraft den Werth:

$$-A^2\,II_1\,.\frac{\theta_1\,Ds_1}{r_a}$$

die auf β ausgeübte Abstossung ist gleich:

$$A^2 II_1 \frac{\theta_1 Ds_1}{r_{\rm B}}$$

I, 3. Zwei ebensolche Kräfte, welche von den Endpunkten des Elementes  $Ds_1$  ausgeübt werden auf das Element Ds. Die von  $a_1$  ausgehende Repulsivkraft hat den Werth:

$$A^2 II_1 \frac{\Theta Ds}{r_{a_1}}$$

die von β<sub>1</sub> ausgehende den Werth:

$$-A^2\,I\,I_1\,\frac{\theta\,D\,s}{r_{\beta_1}}$$

II. Die der zweiten Zerlegung entsprechenden Kräfte sind folgende.

- II, 1. Eine auf der Richtung des Elementes Ds senkrechte Kraft, welche identisch ist mit der von Grassmann angenommenen aus dem Clausius'schen Gesetze sich ergebenden Wirkung.
- II, 2. Zwei von den Enden von  $Ds_1$  auf Ds ausgeübte Repulsiv-kräfte, welche identisch sind mit den bei der vorhergehenden Zerlegung unter I, 3 genannten.
- III. Die dritte Zerlegung entsprechend der Gleichung IV'. giebt folgende Kräfte.
- III, 1. Eine von dem Element  $Ds_1$  auf Ds ausgeübte Wirkung, deren Componenten bestimmt sind durch das Potential:

$$-A^2 II_1 \frac{\mathrm{E}}{r} Ds Ds_1$$

- III, 2. Ein von  $Ds_1$  auf die Endpunkte von Ds ausgeübtes Kräftepaar, welches das Element Ds dem Element  $Ds_1$  entgegengesetzt parallel zu stellen, beziehungsweise in der Richtung des letzteren zu verschieben sucht. Die auf a ausgeübte Kraft ist mit dem Elemente  $Ds_1$  entgegengesetzt gerichtet und hat den Werth  $A^2 \frac{II_1 Ds_1}{r_a}$  die auf  $\beta$  ausgeübte Kraft ist dem Elemente  $Ds_1$  gleich gerichtet und hat den Werth  $A^2 \frac{II_1 Ds_1}{r_3}$ .
- III, 3. Die noch übrigen Componenten sind dieselben wie die bei den vorhergehenden Zerlegungen unter I, 3 und II, 2 genannten.

Hier ist wie früher zur Abkürzung gesetzt:

$$\cos \theta = \theta, \cos \theta_1 = \theta_1, \cos \varepsilon = E$$

wo dann θ, θ, und ε die Ampère'schen Winkel bezeichnen,

Wir gehen nun über zu der Erledigung des zweiten Theiles der vorliegenden Untersuchung, nemlich der Frage, in wie weit den im Vorhergehenden ausgeführten Zerlegungen des Ampère'schen Gesetzes messbare elektrodynamische Wirkungen entsprechen, in wie weit also die Verglei-

chung dieser Zerlegungen mit den experimentell gegebenen Thatsachen zu dem Beweise des Ampère'schen Gesetzes hinreichend erscheint.

Die erste Gruppe von Erscheinungen, an welche wir hierbei anknüpfen können, wird gebildet durch die Bewegungen zweier starrer Stromringe unter der Wirkung der wechselseitig ausgeübten elektrodynamischen Kräfte. Diese Bewegungen werden beherrscht durch das Gesetz des elektrodynamischen Potentials und es wird somit durch dieselben die Existenz derjenigen Componente des Ampère'schen Gesetzes bewiesen, welche durch das elementare Potential dargestellt wird. Ueber die specielle Form desselben kann jedoch aus den experimentellen Thatsachen kein Schluss gezogen werden, so dass es völlig unbestimmt bleibt, ob das elementare Potential die durch I, 1 oder durch III, 1 gegebene Form besitzt.

Die zweite Gruppe von Erscheinungen, welche wir zu der Entscheidung unserer Frage heranziehen können, besteht in den Rotationen starrer Leiter unter der Wirkung geschlossener Ströme oder galvanischer Spiralen. Wenn wir hierbei voraussetzen, dass die ganze Wirkung bedingt ist durch Kräfte, welche auf die Elemente des rotirenden Bügels wirken, so ergiebt sich, dass das elementare elektrodynamische Potential keine wirksame Kraftcomponente zu liefern im Stande ist. Die Rotation muss also hervorgerufen werden durch die übrigbleibenden Componenten des Ampère'schen Gesetzes, d. h. je nachdem wir von der ersten oder dritten Zerlegung ausgehen, durch die Componenten I, 2 oder III, 2. der That ist leicht zu zeigen, dass die einen und die anderen dieser Componenten zu demselben Ausdruck für das auf den rotirenden Bügel ausgeübte Drehungsmoment hinführen. Ergiebt sich also quantitative Uebereinstimmung zwischen den mit Hülfe der Ausdrücke I, 2 oder III, 2 berechneten Drehungsmomenten und den beobachteten Rotationserscheinungen, so wird damit der Nachweis für die Existenz der Componenten I, 2 oder der Componenten III, 2 geliefert sein. Im ersten Fall wird dann aus dem Princip der Gleichheit von Action und Reaction die Existenz der unter I, 3 genannten Wirkungen sich ergeben; im zweiten Falle die Existenz eines zweiten Kräftepaares, welches dem Elemente Ds parallel D. PONDEROMOTORISCHE ELEMENTARGESETZ D. ELEKTRODYNAMIK. 27 gerichtet ist, während das unter III, 2 genannte Kräftepaar parallel ist dem Elemente  $Ds_4$ .

Fassen wir diese Resultate zusammen, so ergiebt sich, dass die beiden im Vorhergehenden betrachteten Gruppen von Erscheinungen zu einem unzweideutigen Nachweise des Ampère'schen Gesetzes nicht hinreichen; denn die experimentellen Thatsachen lassen uns vollkommen freie Wahl, welche der einzelnen möglichen Componenten wir mit einander combiniren wollen. Das Ampère'sche Gesetz ohne jeden weiteren Zusatz ergiebt sich durch Combination der Componenten I, 1, I, 2 und I, 3. Die Combination von III, 1, III, 2 und dem nach dem Princip der Gleichheit von Action und Reaction noch hinzukommenden Kräftepaar dagegen erfüllt nicht ganz den Inhalt des Ampère'schen Gesetzes; vielmehr ist, um das Ampère'sche Gesetz zu erhalten, noch eine Kraft hinzuzufügen, deren Potential durch den Ausdruck:

$$A^2 IDs I_{\scriptscriptstyle 1} Ds_{\scriptscriptstyle 1} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_{\scriptscriptstyle 1}}$$

gegeben wird. Wird ferner, was von experimentellem Standpunkt aus natürlich ebenso berechtigt ist, die Componente III, 1 kombinirt mit I, 2 und I, 3, so wird wieder nicht das Ampère'sche Gesetz resultiren, sondern es wird zu der Ampère'schen noch eine weitere Kraft hinzukommen, welche ebenfalls das oben angegebene Potential besitzt. Endlich führt die Combination von I, 1, III, 2 und von dem durch das Princip der Gleichheit von Action und Reaction geforderten Kräftepaar zu einem Ausdrucke, welchem zu dem Ampère'schen Gesetze noch eine Componente fehlt, deren Potential gleich:

$$2\,A^2\,ID\,s\,.\,I_{{}_{\scriptstyle 1}}\,D\,s\,{}_{{}_{\scriptstyle 1}}\,\frac{\partial^2\,r}{\partial\,s\,\partial s\,{}_{{}_{\scriptstyle 1}}}$$

ist. Unter allen Umständen wird also zu dem Beweise des Ampère'schen Gesetzes auf den im Vorhergehenden gewählten Grundlagen noch eine weitere Annahme nothwendig sein. Diese Annahme ergiebt sich durch Beachtung des Umstandes, dass diejenigen Kräfte, welche bei den verschiedenen im Vorhergehenden untersuchten Combinationen entweder noch

fehlten oder im Ueberschusse vorhanden waren, alle durch ein Potential von der Form:

$$k \cdot A^2 IDs \cdot I_1 Ds_1 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}$$

bestimmt waren. Diese Kräfte entsprechen somit nicht einer rein translatorischen Wirkung der beiden Elemente auf einander, sondern schliessen nothwendig auch rotatorische Wirkungen derselben ein. Wenn wir also die Annahme machen, dass die Wechselwirkung zweier Stromelemente eine rein translatorische ist, so fallen die störenden Glieder, auf welche die vorhergehende Betrachtung geführt hatte, weg und es ergiebt sich das Ampère'sche Gesetz ohne allen Zusatz als der reine Ausdruck der Wechselwirkung zweier Stromelemente<sup>1</sup>).

Wir gehen nun über zu der Betrachtung der zweiten der von uns angegebenen Zerlegungen des Ampère'schen Gesetzes. Dieselbe ist ausgezeichnet dadurch, dass in ihr alle diejenigen Componenten, welche bei der Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein einzelnes Stromelement

<sup>1)</sup> Die quantitative Bestimmung der rotatorischen Wirkung, welche eine galvanische Spirale auf einen um ihre Axe drehbaren von einem galvanischen Strome durchflossenen Bügel ausübt, bildet den Gegenstand einer experimentellen Untersuchung, mit welcher ich gegenwärtig beschäftigt bin. Die Ablenkung des an dem Zuleitungsdrahte unifilar aufgehängten Bügels kann berechnet werden aus den mit Hülfe zweier Tangentenboussolen bestimmten Stromstärken in der Spirale und dem Bügel und der bekannten Torsionskraft des Suspensionsdrahtes. Für einige im Laufe dieses Sommers ausgeführte provisorische Versuche, sind die beobachteten Ablenkungen im Folgenden mit den berechneten zusammengestellt; die einzelnen Angaben beziehen sich auf drei verschieden gestaltete Bügel.

Ablenkung						
beobachtet	17,5'	16,4'	23,9'	13,3′	11,8′	11,4'
berechnet	16,7'	15.5'	22,2'	12,2'	11,0'	10,5'

Eine ausführliche Mittheilung dieser Untersuchung wird erfolgen, wenn es mir gelungen ist, die störenden Einflüsse, in Folge derer die beobachteten Ablenkungen durchweg grösser sind als die berechneten, zu beseitigen.

29

zur Geltung gelangen, zu einer einzigen Resultante vereinigt sind. möge nun A ein beweglicher Theil eines von einem galvanischen Strom durchflossenen Ringes sein, welcher den von einem zweiten fest aufgestellten Stromringe B ausgehenden elektrodynamischen Kräften unterworfen ist. Es fragt sich, ob ein Fall denkbar ist, in welchem alle iene auf die einzelnen Elemente des Leiters A ausgeübten Componenten auch wirklich zur Geltung gelangen können. Diess ist natürlich nicht der Fall, wenn die einzelnen Elemente des Leiters A durch Molecularkräfte mit einander verbunden sind, wie sie dem festen Aggregatzustand entsprechen; vielmehr wird die ganze auf ein solches Element ausgeübte elektrodynamische Kraft nur dann zur Wirkung gelangen können, wenn dasselbe vollkommen frei gegen die übrigen Elemente beweglich ist. Nun leuchtet aber ein, dass ein solcher aus lauter vollkommen frei beweglichen Elementen bestehender Leiter, selbst wenn er in irgend einem Augenblick existirt, doch schon im nächsten durch die Wirkung der elektrodynamischen Kräfte selbst zerstört sein würde. Nur in einem Falle ist es denkbar, dass einem solchen Leiter eine gewisse Beständigkeit zukömmt, dann nemlich, wenn die auf die einzelnen Elemente desselben wirkenden elektrodynamischen Kräfte gleich Null sind, oder bei nicht vollkommen freier Beweglichkeit dieser Elemente, wenn wenigstens die wirksamen Componenten jener Kräfte gleich Null sind. Der erste Fall tritt ein, wenn die Elemente des Leiters A mit den Elementen einer und derselben magnetischen Kraftlinie zusammenfallen. Bei vollkommen freier Beweglichkeit der Elemente wird also der Leiter A im Gleichgewichte sich befinden können, wenn seine Endpunkte einer und derselben magnetischen Kraftlinie angehören und seine Elemente dieser Linie sich anschmiegen. Der zweite Fall tritt ein, wenn die Elemente des Leiters A genöthigt sind auf einer Oberfläche zu bleiben, welche in den Endpunkten von A von zwei magnetischen Kraftlinien berührt wird. Bestimmt man in diesem Falle alle diejenigen Punkte, in welchen die gegebene Fläche von der Schaar der magnetischen Kraftlinien berührt wird, so werden die Berührungspunkte auf der Oberfläche eine Curve bestimmen, welche die Endpunkte des Leiters A mit einander verbindet und diese von Plücker sogenannte epibolisch-magnetische Curve wird eine Gleichgewichtscurve des Leiters A sein.

In der That scheinen nun nach den Untersuchungen von Plücker über die Einwirkung magnetischer Kräfte auf die positiven Entladungen in Geissler'schen Röhren die magnetischen Kraftlinien und die epibolischmagnetischen Linien Gleichgewichtscurven für diese Entladungen zu sein. Es würde also dadurch bewiesen, einmal dass die vorhergehenden Betrachtungen auf die Erscheinungen der positiven Entladungen in verdünnten Gasen anwendbar sind und zweitens, dass durch die in II, 1 angeführte Componente in der That die ganze Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein einzelnes Stromelement dargestellt ist. sem Resultate können wir nun den Satz verbinden, dass die durch das elementare Potential bestimmte Componente des Ampère'schen Gesetzes durch die Versuche über die Wechselwirkung geschlossener Stromringe als unzweifelhaft existirend nachgewiesen ist. Nehmen wir nun für dieses Potential die in I, 1 gegebene Form, so führt die gleichzeitige Existenz der Componenten I, 1 und II, 1 in Verbindung mit dem Princip der Gleichheit von Action und Reaction unmittelbar hin zu dem Ampère'schen Gesetz, wenn wir dagegen für das Potential den unter III, 1 angegebenen Ausdruck wählen, so ergiebt sich ausser dem Ampère'schen Gesetz noch eine weitere Kraft zwischen zwei Stromelementen, welche bestimmt ist durch das Potential:

$$A^{_{2}}\,ID\,s$$
 .  $I_{_{1}}\,D\,s_{_{1}}rac{\partial^{_{2}}r}{\partial\,s\,\partial\,s_{_{1}}}$ 

Es genügt also die Verbindung der Plücker'schen Versuche mit dem Potentialgesetze nicht zu dem Beweise des Ampère'schen Gesetzes, sondern wir müssen ebenso wie im vorhergehenden Falle noch die hypothetische Annahme hinzufügen, dass die Wirkung zweier Stromelemente auf einander eine rein translatorische ist und dass diese Wirkung dem Principe der Gleichheit von Action und Reaction genügt.

Fassen wir nun das Resultat der in dem vorliegenden Abschnitt durchgeführten Analyse noch einmal zusammen, so ergeben sich zwei neue Beweise des Ampère'schen Gesetzes, deren Grundlagen durch die

- D. PONDEROMOTORISCHE ELEMENTARGESETZ D. ELEKTRODYNAMIK. 31 folgenden Annahmen gebildet werden. Gemeinsam sind den beiden Beweisen die Annahmen:
- I. Die Wirkung zweier Stromelemente auf einander ist eine rein translatorische.
- II. Dieselbe genügt dem Principe der Gleichheit von Action und Reaction.
- III. Die Wirkung zweier geschlossener Stromringe auf einander ist bestimmt durch das Gesetz des elektrodynamischen Potentials.

Zu diesen Annahmen fügt der erste Beweis als IV. hinzu das Gesetz der elektrodynamischen Rotationen, der zweite Beweis die Plücker'schen Gesetze über die Einwirkung des Magnets auf die positive Entladung in Geissler'schen Röhren.

Es fragt sich nun schliesslich noch, ob diese beiden Beweise auch den Character der Vollständigkeit besitzen, d. h. ob nicht die Möglichkeit offen bleibt, dass zwei Stromelemente ausser den durch das Ampère'sche Gesetz angezeigten Wirkungen noch irgend welche andere Kräfte auf einander ausüben. Mit Bezug hierauf können wir bemerken, dass diese Kräfte nur solche sein könnten, welche in der Gesammtwirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement verschwinden; Kräfte von dieser Art lassen sich aber stets zerlegen in Componenten, die von den Enden eines Stromelements ausgeübt werden auf ein anderes Stromelement, oder auf die Enden eines solchen Elementes. Solche Kräfte würden aber nicht allein translatorische, sondern auch rotatorische Wirkungen hervorbringen und sind daher durch die erste unserer Annahmen ausgeschlossen.

#### IV. Ueber das elementare Potential von Helmholtz.

Mit Hülfe der im vorhergehenden Abschnitt mitgetheilten Transformationen des Ampère'schen Gesetzes kann man ohne grosse Schwierigkeiten den Nachweis liefern, dass die Gültigkeit des Potentialgesetzes nicht beschränkt ist auf den Fall, dass die beiden auf einander wirkenden Ströme in starren geschlossenen Ringen sich bewegen, sondern dass dieses

Gesetz auch dann noch gilt, wenn die beiden Stromringe mit Gleitstellen behaftet sind, oder zum Theil aus Drähten bestehen, welche in Folge ihrer Biegsamkeit irgend welche Deformationen unter der Wirkung der elektrodynamischen Kräfte erleiden.

In dem speciellen Falle, wo der eine der beiden Stromringe,  $S_1$ , starr und fest aufgestellt, der andere S aus zwei Theilen A und B zusammengesetzt ist, von welchen der erste bewegliche mit seinen Endpunkten  $\alpha$  und  $\beta$  auf dem zweiten starren und unbeweglichen Theil B gleitet, ergiebt sich die Gültigkeit des Potentialgesetzes mit Hülfe der Formeln II. und II'. in folgender Weise. Das gleitende Stück A möge unter der Wirkung der von  $S_1$  ausgeübten Kräfte eine Bewegung erleiden, bei welcher seine Endpunkte auf dem festliegenden Leitertheil B sich von  $\alpha$ ,  $\beta$  verschieben nach  $\alpha'$ ,  $\beta'$ . Dann wird die Arbeit, welche hiebei auf das Gleitstück A ausgeübt wird, gegeben sein durch:

$$\begin{split} d\,T &= -\,4\,A^{2}\,II_{_{1}}\frac{d}{dp}\Big\{\!\Sigma\,D\,s\!\int\!\frac{\partial\psi}{\partial\,s}.\frac{\partial\psi}{\partial\,s_{_{1}}}\,D\,s_{_{1}}\!\Big\}\,dp\\ &+ 4\,A^{2}\,II_{_{1}}\int\!\frac{\partial\psi_{a}}{\partial\,s_{_{1}}}.\frac{\partial\psi_{a}}{\partial\,p}D\,s_{_{1}}\,dp\\ &+ 4\,A^{2}\,II_{_{1}}\int\!\frac{\partial\psi_{\beta}}{\partial\,s_{_{1}}}.\frac{\partial\psi_{\beta}}{\partial\,p}.\,D\,s_{_{1}}\,dp \end{split}$$

Hier erstreckt sich die Summe über alle Elemente Ds des Gleitstückes A; die Integration über alle Elemente  $Ds_1$  des Stromringes  $S_1$ ; ferner bezeichnet p denjenigen Parameter, von welchem die Bewegung des Leiters A als abhängig gedacht wird. Der Ausdruck  $\frac{\partial \psi_a}{\partial p} \cdot dp$  stellt die Aenderung dar, welche die von der Entfernung r des Punktes a von einem Elemente  $Ds_1$  abhängende Funktion  $\psi_a$  bei der Verschiebung des Gleitstückes von  $a\beta$  nach  $a'\beta'$  erleidet. Wir können nun die Punkte a und a' auch auffassen als Punkte des festliegenden Leitertheils B; je nach der Bewegungsrichtung des Leiters A wird dann das zwischen a und a' liegende Element a0 ein in den Stromkreis ein- oder austretendes Element von a1 repräsentiren und wir können nun die Aenderung der Funktion a2 beim Uebergang von a2 zu a'3 auch ermitteln, wenn wir sie

D. PONDEROMOTORISCHE ELEMENTARGESETZ D. ELEKTRODYNAMIK. 33

als abhängig von der Bogenlänge des Leitertheiles B betrachten. Wir erhalten dann für den Fall, dass das Element Ds ein in den Stromkreis eintretendes Element ist:

$$\frac{\partial \psi_a}{\partial p} \cdot dp = -\frac{\partial \psi_a}{\partial s} \cdot \Delta s$$

und ebenso:

$$\frac{\partial \psi_{\beta}}{\partial p} \cdot dp = \frac{\partial \psi_{\beta}}{\partial s} \cdot \Delta s'$$

wenn wir durch  $\Delta s'$  das Element  $\beta \beta'$  des Leiters B bezeichnen. Substituiren wir diese Werthe in dem Ausdruck für die geleistete Arbeit, so ergiebt sich:

$$\begin{split} d\,T &=\, -\frac{d}{dp} \Big\{ \!\!\!\! 4\,A^2\,II_1\,\Sigma\,D\,s \!\int\! \frac{\partial\,\psi}{\partial\,s}\,.\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s_1}\,D\,s_1 \Big\}\,dp \\ &- 4\,A^2\,II_1\,\Delta\,s \!\int\! \frac{\partial\,\psi}{\partial\,s}\,.\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s_1}\,D\,s_1\,.\,dp \\ &- 4\,A^2\,II_1\,\Delta\,s' \!\int\! \frac{\partial\,\psi}{\partial\,s}\,.\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s_1}\,D\,s_1\,dp. \end{split}$$

Beachten wir, dass der Ausdruck  $\frac{\partial \psi}{\partial s}$ .  $\frac{\partial \psi}{\partial s_1}$  für alle schon in der anfänglichen Configuration vom Strome durchflossenen Elemente des Leitertheils B durch die Verschiebung von A keine Aenderung erleidet, so können wir das in der letzten Gleichung enthaltene Resultat dahin aussprechen, dass die geleistete Arbeit gleich ist dem negativen ganzen Zuwachs, welchen das über sämmtliche Elemente der beiden Stromringe hinerstreckte Doppelintegral:

$$4A^{2}II_{1}\int\int\frac{\partial\psi}{\partial s}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s_{1}}DsDs_{1}$$

während der Verschiebung erleidet, d. h. gleich dem negativen Zuwachs des elektrodynamischen Potentials der beiden Stromringe aufeinander. Ganz allgemein für zwei mit beliebig vielen Gleitstellen behaftete Stromringe ist dieser Satz von C. Neumann 1) bewiesen worden.

<sup>1)</sup> Das Weber'sche Gesetz in seiner Anwendung auf Gleitstellen; Berichte d. math.-phys. Classe der K. sächs. Ges. d. Wiss. 1875. 9ten Januar.

Das Problem, die Gestalt zu bestimmen, welche ein biegsamer aber unausdehnsamer von einem galvanischen Strom durchflossener Faden unter der Wirkung elektrodynamischer Kräfte annimmt, kann bezeichnet werden als das Problem der elektrodynamischen Kettenlinie. Dass dieses Problem ebenfalls nur abhängig ist von dem elektrodynamischen Potential ergiebt sich aus den unter I. und III. im vorhergehenden Abschnitt gegebenen Zerlegungen des Ampère'schen Gesetzes. Hiernach reducirt sich die Wirkung, welche ein geschlossener Strom auf ein einzelnes Stromelement ausübt auf eine Componente, welche gegeben ist durch das elektrodynamische Potential und auf ein Kräftepaar, welches in den Endpuncten des Elementes seine Angriffspuncte hat. Ist aber dieses Element mit anderen Elementen zu einem unausdehnsamen Faden verbunden, so heben sich die auf die Endpuncte der aneinanderhängenden Elemente ausgeübten Kräfte gegenseitig auf, und es bleiben nur die dem Potential entsprechenden Componenten übrig.

Bei der Wechselwirkung geschlossener Stromringe, welche mit Gleitstellen behaftet, oder zum Theil aus biegsamen aber unausdehnsamen Drähten zusammengesetzt sind, kommen demnach immer nur diejenigen Componenten des Ampère'schen Gesetzes zur Geltung, welche durch das elementare Potential bestimmt sind; alle an solchen Stromringen zu beobachtenden Bewegungserscheinungen verhalten sich gerade so, wie wenn nur jene von dem Potential abhängenden Componenten existirten. Man kann daher vermuthen, dass das Potentialgesetz nicht blos einen Theil der ponderomotorischen Wechselwirkung zweier Stromelemente repräsentire, sondern dass die ganze elementare Wechselwirkung durch das elektrodynamische Potential bestimmt sei und von dieser Vermuthung geleitet hat Helmholtz das elementare Potentialgesetz zu einem Grundgesetze der Elektrodynamik erhoben. Der fundamentale Unterschied der von Helmholtz vorgeschlagenen Theorie von den durch Ampère, Stefan, Clausius aufgestellten Gesetzen beruht einmal darin, dass die Theorie des elementaren Potentials zwischen zwei Stromelementen nicht allein translatorische, sondern auch rotatorische Wirkungen annimmt, ferner darin, dass das Potentialgesetz zu der Annahme gezwungen ist, dass das Entstehen eines neuen Stromelementes, beziehungsweise die Verlängerung eines schon vorhandenen Elementes unter der Wirkung eines anderen unveränderlichen Elementes eine Arbeit consumirt, welche gleich dem negativen Zuwachs des elementaren Potentiales ist. Hiernach hebt also das Potentialgesetz diejenige Voraussetzung, welche wir bei all den im Vorhergehenden gegebenen Beweisen des Ampère'schen Gesetzes an die Spitze gestellt haben, auf, und setzt an Stelle derselben den folgenden Satz:

Zwei Stromelemente üben auf einander translatorische und rotatorische Kräfte aus, welche bestimmt sind durch die negativen Differentialquotienten eines Potentiales; dieses Potential kann dargestellt werden durch einen der beiden Ausdrücke:

$$-A^{2} ID s I_{1} D s_{1} \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta_{1}}{r} \text{ oder } -A^{2} ID s I_{1} D s_{1} \frac{\cos \varepsilon}{r}$$

Was nun die rotatorische Wirkung zweier Stromelemente auf einander anbelangt, so kann unter allen Umständen ein in den Endpuncten der Elemente angreifendes Paar von Kräften bestimmt werden, dessen Drehungsmoment gleich der aus dem Potential sich ergebenden rotatorischen Kraft ist. Wir können also die allgemeine Natur des Potentialgesetzes auch dadurch characterisiren, dass wir sagen: Nach dem Potentialgesetze üben zwei Stromelemente auf einander zwei verschiedene Wirkungen aus, einmal eine in der Mitte des Elementes angreifende translatorische Kraft, und zweitens ein Kräftepaar, dessen Angriffspuncte in den Endpuncten des Elementes liegen, und welchem sowohl eine translatorische, als eine rotatorische Wirkung entspricht. Zur Bestimmung dieser einzelnen Kräfte steht uns beim Potentialgesetz derselbe Weg offen, welchen wir im vorhergehenden Abschnitte bei dem Ampère'schen Gesetz eingeschlagen haben, die analytische Zerlegung des für die Gesammtwirkung zweier Stromelemente auf einander sich ergebenden Ausdrucks in einzelne Componenten. Aber während wir bei dem Ampère'schen Gesetz nur translatorische Wirkungen in diesem Sinne zu untersuchen hatten, werden wir bei dem Potentialgesetz die Untersuchung

auch auf die rotatorischen Kräfte ausdehnen können, und wir werden dann in erster Linie die Anforderung stellen, dass beide Zerlegungen dasselbe System von Componenten der ganzen dem Potentialgesetz entsprechenden Wirkung liefern müssen. Der Nachweis, dass das Potentialgesetz dieser Bedingung in der That genügt, erscheint um so weniger überflüssig, als die zu diesem Zwecke anzustellenden Betrachtungen auch für die im vorhergehenden Abschnitt für das Ampère'sche Gesetz aufgestellten Zerlegungen von Interesse sind.

Die Zerlegung der der ersten Form des elementaren Potentiales:

$$-\,A^2\,ID\,s\,.\,I_1\,D\,s_1\frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r}$$

entsprechenden translatorischen Wirkung ergiebt sich unmittelbar durch eine Umkehrung der analogen Zerlegung des Ampère'schen Gesetzes. Man erhält somit folgende Componenten des Potentialgesetzes:

- 1. Die durch das Ampère'sche Gesetz gegebene translatorische Kraft.
- 2. Ein von  $Ds_1$  auf die Endpuncte von Ds ausgeübtes Kräftepaar, welches das Element Ds der Richtung der Entfernung  $Ds_1 Ds$  parallel zu stellen sucht. Die auf das Ende a ausgeübte Repulsivkraft ist gleich  $A^2 II_1 \frac{Ds_1}{r_a} \frac{\theta_1}{r_a}$ , die auf  $\beta$  ausgeübte gleich  $A^2 II_1 \frac{Ds_1}{r_\beta} \frac{\theta_1}{r_\beta}$ .
- 3. Zwei analoge Kräfte, welche von den Endpuncten von  $Ds_1$  ausgeübt werden auf die Mitte von Ds. Diese Kräfte sind entgegengesetzt gleich den bei der Zerlegung des Ampère'schen Gesetzes unter I, 3 angeführten.

Um die rotatorische Wirkung zu bestimmen, welche das Element  $Ds_1$  auf das Element Ds ausübt, legen wir durch den Anfangspunct von Ds ein Hülfscoordinatensystem  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , dessen Axen parallel sind den Axen x, y, z; wir bezeichnen die Projectionen des Elementes Ds auf jene Hülfsaxen durch Dx, Dy, Dz, die Drehungsmomente um die Axen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  mit  $M_{\xi}$ ,  $M_{\eta}$ ,  $M_{\zeta}$ . Die Drehung um die Axe  $\xi$  werde als positiv betrachtet, wenn sie von der Axe  $\eta$  gegen die Axe  $\zeta$  gerichtet

37

ist. Bezeichnen wir unter diesen Umständen den Drehungswinkel gerechnet von der  $Axe \eta$  ab durch  $\varphi$ , so ergiebt sich:

$$\begin{split} M_{\xi} &= A^2 I I_1 D s_1 \frac{\cos \vartheta_1}{r} \cdot \frac{d (\cos \vartheta D s)}{d \varphi} \\ &= A^2 I I_1 D s_1 \frac{\cos \vartheta_1}{r} \left\{ \frac{z - z_1}{r} D y - \frac{y - y_1}{r} D z \right\} \end{split}$$

Ebenso:

$$M_{\eta} = A^{2} I I_{1} D s_{1} \frac{\cos \vartheta_{1}}{r} \left\{ \frac{x - x_{1}}{r} D z - \frac{z - z_{1}}{r} D x \right\}$$
 $M_{\zeta} = A^{2} I I_{1} D s_{1} \frac{\cos \vartheta_{1}}{r} \left\{ \frac{y - y_{1}}{r} D x - \frac{x - x_{1}}{r} D y \right\}$ 

Das ganze auf Ds ausgeübte Koppelmoment wird:

$$M = \pm A^2 IDs. I_1 Ds_1 \frac{\cos \vartheta_1}{r}. \sin \vartheta$$

Die Richtung dieses Moments wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$M_{\xi} \cdot \frac{x-x_1}{r} + M_{\eta} \frac{y-y_1}{r} + M_{\zeta} \frac{z-z_1}{r} = 0$$

und

$$M_{\xi}Dx + M_{\eta}Dy + M_{\zeta}Dz = 0$$

Die Axe des Koppelmomentes steht somit auf der durch Ds und  $r(Ds_1 - Ds)$  gelegten Ebene senkrecht, die Kräfte selbst liegen in jener Ebene. Endlich ergiebt sich der Sinn des Drehungsmomentes daraus, dass die Determinante:

einen positiven Werth besitzt. Die Drehung findet darnach in der Richtung von Ds gegen die Richtung  $r(Ds_1 - Ds)$  hin statt; die Grösse des in diesem Sinne ausgeübten Drehungsmomentes ist:

$$A^2 ID s I_1 D s_1 \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta}{r}$$

Man sieht aber leicht, dass ein Drehungsmoment von ganz derselben Richtung und Grösse auch ausgeübt wird durch das bei der Zerlegung der translatorischen Kraft gefundene Kräftepaar. Hiernach herrscht also die geforderte Uebereinstimmung zwischen der translatorischen und rotatorischen Wirkung.

Dasselbe ergiebt sich nun auch für die andere Form des Potentials:

$$-A^2 IDs. I_1 Ds_1 \frac{\cos \varepsilon}{r}$$

Die Zerlegung der entsprechenden translatorischen Wirkung ergiebt sich durch eine Combination der Gleichungen IV. und III. des vorhergehenden Abschnitts. Wir erhalten folgende Kräfte zwischen den beiden Stromelementen.

- 1. Eine auf dem Element Ds senkrechte translatorische Kraft, welche gegeben ist durch den Grassmann'schen Ausdruck.
- 2. Ein von  $Ds_1$  auf die Endpunkte  $\alpha$  und  $\beta$  von Ds ausgeübtes Kräftepaar, welches das Element Ds dem Elemente  $Ds_1$  parallel zu stellen sucht. Die auf  $\alpha$  ausgeübte Kraft ist dem Elemente  $Ds_1$  parallel und hat den Werth  $\frac{A^2 I I_1 Ds_1}{r_\alpha}$ ; die auf  $\beta$  ausgeübte ist dem Element  $Ds_1$  entgegengesetzt und gleich  $\frac{A^2 I I_1 Ds_1}{r_\beta}$ .

Die Bestimmung des elementaren Drehungsmomentes ergiebt sich in ganz derselben Weise wie in dem vorhergehenden Fall. Führen wir wieder die Hülfsaxen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  ein, so ergiebt sich für die entsprechenden Koppelmomente:

$$\begin{split} M_{\xi} &= A^2 I I_1 \frac{D z_1 D y - D y_1 D z}{r} \\ M_{\eta} &= A^2 I I_1 \frac{D x_1 D z - D z_1 D x}{r} \\ M_{\zeta} &= A^2 I I_1 \frac{D y_1 D z - D x_1 D y}{r} \end{split}$$

Es ergiebt sich hieraus ein von Ds, auf Ds ausgeübtes Drehungsmoment, welches das Element Ds parallel zu stellen sucht mit Ds, und welches den Werth hat:

$$A^2 ID s I_1 D s_1 \frac{\sin \varepsilon}{r}$$
.

Ein ganz ebensolches Drehungsmoment wird aber ausgeübt durch das bei der Zerlegung der translatorischen Wirkung gefundene Kräftepaar. so dass also auch hier vollkommene Harmonie zwischen den beiden Arten von Wirkungen vorhanden ist.

Wir haben ferner bemerkt, dass nach dem Gesetz des elementaren Potentials auch dann eine gewisse Arbeit geleistet wird, wenn ein ausdehnsames Stromelement unter der Wirkung eines unveränderlichen Stromelementes eine Verlängerung erleidet, und dass auch diese Arbeit durch den negativen Zuwachs des elektrodynamischen Potentials gegeben wird. Es ist nachzuweisen, dass dieser Satz sich ebenfalls in Uebereinstimmung mit den gegebenen Zerlegungen des Potentiales befindet und zwar für beide Formen, die wir hiebei betrachtet haben. Bei der ersten Form:

$$=A^2\,IDs\,.\,I_1\,D\,s_1\,\frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r}$$

ergiebt sich eine auf das Element Ds ausgeübte longitudinale Wirkung, aus den in zweiter Stelle angegebenen Kräften. Die Componenten dieser Kräfte nach der Richtung des Elementes Ds haben die Werthe:

$$\begin{aligned} &A^2 \, II_1 \, Ds_1 \, \frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r_a} \\ &-A^2 \, II_1 \, Ds_1 \, \frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r_\beta} \end{aligned}$$

Erleidet das Element unter der Wirkung dieser Kräfte eine Verlängerung  $\Delta s$ , so ist die hiebei geleistete Arbeit gleich:

$$A^2\,I\Delta\,s\,I_1\,D\,s_1\,\frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r}$$

in Uebereinstimmung mit der aus dem Potentialgesetz folgenden Annahme.

Ebenso führt das aus der zweiten Form des Potentiales abgeleitete Kräftepaar auf zwei longitudinale Componenten,

$$A^{\,2}\,II_{1}\,D\,s_{\,1}\,\frac{\cos\varepsilon}{r_{\alpha}}\,\,\mathrm{und}\,\,-A^{\,2}\,II_{1}\,D\,s_{\,1}\,\frac{\cos\varepsilon}{r_{\beta}}$$

Die bei einer Verlängerung  $\Delta s$  des Elementes D s geleistete Arbeit ist somit:

$$A^2\,I\,\Delta\,s\,I_1\,D\,s_1\,\frac{\cos\varepsilon}{r}$$

d. h. gleich dem negativen Zuwachs des elektrodynamischen Potentiales.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen geht hervor, dass das Potentialgesetz ein in sich vollständig geschlossenes System elektrodynamischer Wirkungen darstellt. Wir wenden uns nun zu der Frage, ob dasselbe auch mit den experimentell gegebenen Thatsachen in Uebereinstimmung sich befindet, und wir werden es zu diesem Zweck auf dieselben Gruppen elektrodynamischer Erscheinungen in Anwendung bringen, welche wir auch bei der Untersuchung des Ampère'schen Gesetzes betrachtet haben, d. h. auf die elektrodynamischen Wechselwirkungen unausdehnsamer Stromringe, auf die elektrodynamischen Rotationen und auf die Wirkungen des Magnetismus auf die positive Entladung der Elektricität in Geissler'schen Röhren.

Was zunächst die Wechselwirkung starrer geschlossener Stromringe anbelangt, so ergiebt sich aus den vorhergehenden Untersuchungen vollkommene Uebereinstimmung zwischen dem Ampère'schen Gesetz und dem Potentialgesetz; gehen wir aus von dem Potentialgesetz, so ist die bei diesen Erscheinungen allein wirksame Componente desselben identisch mit der Ampère'schen Kraft, oder umgekehrt; es ist die allein wirksame Componente der Ampère'schen Kraft identisch mit der durch das Potentialgesetz bestimmten Wirkung. Dasselbe gilt auch dann, wenn die beiden Stromringe zum Theil aus vollkommen biegsamen aber nicht ausdehnsamen Drähten zusammengesetzt sind. Auch in diesem Falle

sind die wirksamen Componenten für beide Gesetze dieselben; denn die Kräfte, durch welche sich die Gesetze unterscheiden, bestehen in Kräftepaaren, deren Angriffspuncte in den Endpuncten der Stromelemente liegen, so zwar, dass die auf den Endpunct eines ersten Elementes ausgeübte Kraft entgegengesetzt gleich ist der auf den Anfangspunct des zweiten ausgeübten u. s. f. Wenn diese Elemente zu einem unausdehnsamen Faden vereinigt sind, so werden somit die Wirkungen jener Kräfte sich gegenseitig aufheben, es bleiben also nur diejenigen Kräfte übrig, welche den beiden Gesetzen gemeinsam sind.

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn die beiden Stromringe mit Gleitstellen behaftet sind. Auch in diesem Falle ist zwar die bei einer beliebigen gleitenden Verschiebung der Stromringe geleistete Gesammtarbeit dieselbe nach beiden Gesetzen; aber sie vertheilt sich in ganz verschiedener Weise auf die einzelnen Elemente. Diese Verschiedenheit der Stellen, welche den eigentlichen Sitz der geleisteten Arbeit bilden, tritt in sehr eigenthümlicher Weise hervor bei der zweiten Gruppe der elektrodynamischen Bewegungserscheinungen, bei den elektrodynamischen Rotationen.

Es möge zuerst der folgende Fall betrachtet werden; der eine der beiden Stromringe sei gegeben durch eine in verticaler Richtung fest aufgestellte galvanische Spirale; das positive Ende derselben sei nach oben gerichtet, so dass für einen von oben herab sehenden Beobachter der Strom in der der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Richtung die Spirale durchläuft. Der zweite Stromring enthalte einen um die Axe der Spirale drehbaren Bügel, dessen eines Ende in der Drehungsaxe liege, während das andere Ende a in eine mit leitender Flüssigkeit gefüllte Schaale tauche. Diese letztere besitze die Form eines mit der Spirale concentrischen Kreisringes. Wir wollen ferner, um unsere Vorstellung zu vereinfachen, annehmen, jene Schaale enthalte an irgend einer Stelle eine isolirende Zwischenwand, so dass der durch die Flüssigkeit dem unteren Ende des Bügels zugeführte und in diesem aufsteigende Strom immer nur von einer Seite her in den Bügel eintritt. Im Inneren der Flüssigkeit werden die Stromfäden eine gewisse Ausbreitung erfah- $\mathbf{F}$ Mathem. Classe. XXIV. 1.

ren, so dass die positive Strömung von den verschiedensten Richtungen her in das Ende  $\alpha$  des Bügels eintritt. Von all diesen Zuleitungsfäden werden wir im Folgendem nur einen einzigen betrachten, nemlich denjenigen, welcher durch einen mit den Spiralwindungen concentrischen Kreisbogen repräsentirt ist. In Wirklichkeit wird allerdings kein einziger der vorhandenen Stromfäden einem solchen Kreisbogen genau sich anschliessen; es ist aber leicht zu sehen, welche Modificationen die folgenden Betrachtungen durch eine Abweichung von der Kreisform erleiden, sowie dass diese Abweichungen keine wesentliche Bedentung für unsere Untersuchung besitzen. Der in die Flüssigkeit tauchende Endpunct des Bügels wurde von uns bezeichnet durch  $\alpha$ ; räumlich betrachtet stellt derselbe Punct auch das Ende des bogenförmigen Stromfadens dar, durch welchen der galvanische Strom dem Bügel zugeführt wird; soweit nun das physische Ende dieses Stromfadens durch jenen Punct bestimmt wird, möge er bezeichnet werden durch  $\beta$ .

Nach dem Ampère'schen Gesetz ergiebt sich nun in diesem Falle die Theorie der Rotation des Bügels in folgender Weise. Die auf die Elemente des flüssigen Stromfadens ausgeübten Kräfte sind vertical gerichtet, können also eine Rotation des Bügels nicht hervorrufen. Wirksam sind allein die auf die Elemente des starren Bügels ausgeübten Kräfte, und diese setzen sich, wie sich aus der dritten Zerlegung des Ampère'schen Gesetzes ergiebt, zusammen zu einer im unteren Endpunct  $\alpha$  des Bügels angreifenden Resultante, welche gegen den nach  $\alpha$  gehenden Radius Vector senkrecht gerichtet den Bügel in demselben Sinne zu drehen sucht, in welchem die Spirale von dem Strome durchflossen wird.

Was die Theorie der betrachteten Rotation vom Standpuncte des Potentialgesetzes aus anbelangt, so können wir bemerken, dass wir, so bald es sich um die Wirkung eines geschlossenen Stroms auf ein Stromelement handelt, eben so gut die zweite wie die erste Form des elementaren Potentials benützen können, da beide sich nur durch Glieder unterscheiden, welche bei der Integration über einen geschlossenen Stromring verschwinden. Bei der Rotation eines Bügels um die Axe eines Solenoides sind nun die auf die Elemente des Bügels ausgeübten Kräfte

nach dem Potentialgesetze jedenfalls gleich Null. Es kann also die Rotation nur hervorgerufen werden durch Kräfte, welche auf die Elemente Ds des flüssigen Stromfadens wirken. Die auf eines dieser Elemente Ds ausgeübte Wirkung zerfällt aber nach der für die zweite Form des Potentiales gegebenen Zerlegung in zwei Theile. Der erste Theil ist gegeben durch die dem Grassmann'schen Gesetze entsprechende Kraft, welche gegen Ds senkrecht gerichtet auf die Rotation von keinem Einflusse sein kann. Der zweite Theil rührt her von den Kräftepaaren, welche die Elemente Ds. des Solenoides auf Ds ausüben. Diese Kräftepaare setzen sich zusammen zu einer Resultanten, d. h. zu einem einzigen Kräftepaar, dessen Angriffspuncte in den Endpuncten von Ds gelegen sind, und welches auf dem von der Axe des Solenoides nach Ds hingehenden Radius Vector senkrecht steht, also mit Bezug auf das Element Ds eine longitudinale Richtung besitzt. Die auf das Ende von Ds ausgeübte Kraft hat dieselbe Richtung, wie die in welcher das Solenoid von dem galvanischen Strome durchflossen wird, die auf den Anfangspunct ausgeübte die entgegengesetze. Betrachten wir nun die Kräftepaare, welche auf die Endpuncte der aufeinanderfolgenden Elemente des flüssigen Bogens wirken, so werden sich alle auf die inneren Elemente ausgeübten Einzelkräfte gegen einander aufheben, so dass nur die auf das Ende β des Bogens ausgeübte Kraft übrigbleibt. Diese Kraft sucht das Ende \( \beta \) in derselben Richtung zu treiben, in welcher der galvanische Strom das Solenoid durchfliesst. Nehmen wir nun an. dass zwischen den Theilchen des flüssigen Leiters und den Theilchen des starren Bügels moleculare Adhäsionskräfte wirken, in Folge deren das Ende \beta des flüssigen Bogens an dem Ende \alpha des Bügels fest haftet, so wird sich die unmittelbar auf \beta ausgeübte Kraft auf den Bügel übertragen und dieser wird somit im Sinne der auf β ausgeübten Kraft in Rotation versetzt werden. Die hierdurch bestimmte Rotationsrichtung ist dieselbe, wie nach dem Ampère'schen Gesetz; überdiess aber ist die auf β ausgeübte Kraft ebenso gross, wie die nach dem Ampère'schen Gesetz auf den rotirenden Bügel ausgeübte, so dass also auch in quantitativer Hinsicht Uebereinstimmung zwischen den beiden Gesetzen vorhanden ist.

Grössere Schwierigkeiten bietet für die Erklärung durch das Potentialgesetz der Fall, dass auch der Bogen, durch welchen der Strom dem unteren Ende des Bügels zugeleitet wird, durch einen vollkommen starren Leiter dargestellt wird, also etwa durch einen dicken horizontalen Kupferring, auf welchem das untere Ende des Bügels ohne Reibung gleitet. Zwar wird auch in diesem Falle die bei einer beliebigen Drehung des Bügels geleistete Arbeit gleich sein dem durch die neueintretenden Stromelemente bedingten Zuwachs des elektrodynamischen Potentials. Aber die mechanische Interpretation dieses Satzes vom Standpunct der Potentialtheorie aus macht gewisse Annahmen über den Uebergang der Elektricität von dem Kupferring zu dem Bügel nothwendig, welche einer directen Prüfung sich entziehen, da sie auf die molecularen Verhältnisse an jener Uebergangsstelle Bezug haben. Das Potentialgesetz bestimmt zunächst nur die Kräfte, welche die Elemente ponderabler Körper auf einander ausüben, wenn sie von galvanischen Strömen durchflossen werden, nicht die Wirkungen, welche die elektrischen Theilchen selbst auf einander ausüben. Würde also der Uebergang der Elektricität von dem zuleitenden Kupferring in das Ende des rotirenden Bügels durch einen intramolecularen von ponderablen Stoffen leeren Raum hindurch erfolgen, so würde das Potentialgesetz unmittelbar gar keinen Aufschluss über die zu erwartenden Wirkungen gewähren können. Würde hingegen der Uebergang der Elektricität durch einen von glühenden Metalldämpfen gebildeten Bogen vermittelt, so würde man auf diesen Bogen die vorhergehenden Betrachtungen übertragen können; es würde also die Rotation zu erklären sein durch die Annahme, dass das Ende jenes von leitenden Dämpfen gebildeten Bogens an dem unteren Ende des rotirenden Bügels fest haftet, so dass die auf das Ende jenes Bogens ausgeübte Kraft sich auf das untere Ende des Bügels überträgt, ganz ebenso, wie wir diess im Vorhergehenden für den Fall eines flüssigen Zuleitungsbogens annehmen mussten.

Es bleibt nun schliesslich noch die Betrachtung modificirter Gleitstellen übrig, wie sie Zöllner bei seinen Rotationsversuchen in Anwendung gebracht hat. Die mannigfaltigen Aenderungen, welche Zöllner

in der Anordnung seiner Versuche eintreten liess, dürften sich auf drei principiell verschiedene Anordnungen reduciren, für welche die durch die Fig. 2, 4 und 6 der ersten Tafel des zweiten Bandes der wissenschaftlichen Abhandlungen dargestellten Versuche als typische Repräsentanten betrachtet werden können.

Wir untersuchen zuerst den durch Fig. 2 dargestellten Versuch. Dabei werden wir ebenso, wie bisher, stets voraussetzen, dass der positive Strom dem Bügel durch die Gleitstelle zugeführt werde. Die Anordnung der letzteren ist die folgende: die Enden des starren rotirenden Bügels tauchen nicht direct in die zuleitende Flüssigkeit, sondern durch Vermittlung zweier längerer Kupferdrähtchen, welche in die hakenförmig umgebogenen Enden des Bügels leicht beweglich eingehängt sind. auf dieses System wirkenden Kräfte sind nach dem Potentialgesetz die folgenden:

- 1. Auf die Elemente des starren Bügels wirkt gar keine Kraft.
- Auf die Elemente des beweglichen Kupferdrähtchens wirken die dem Ampère'schen Gesetz entsprechenden Kräfte.
- 3. Auf den Endpunct des Drähtchens, d. h. auf denjenigen Punct. durch welchen der positive Strom aus demselben austritt, wirkt eine Kraft, welche auf dem zugehörigen Radius Vector senkrecht steht und dieselbe Richtung besitzt, wie der positive Strom in den Windungen der Spirale.
- 4. Auf den Anfangspunct des beweglichen Drähtchens wirkt eine Kraft, welche auf dem zugehörigen Radius Vector ebenfalls senkrecht steht, aber mit der auf den Endpunct ausgeübten entgegengesetzt gerichtet Das von dieser Kraft ausgeübte Drehungsmoment ist gleich der Summe der Drehungsmomente, welche von den auf den Endpunct und die inneren Elemente des Drähtchens wirkenden Kräften herrühren.
- 5. Auf das mit dem Anfangspuncte des Drähtchens zusammenfallende Ende des zuleitenden Stromfadens wirkt eine Kraft, welche der unter 4. angegebenen gleich und entgegengesetzt gerichtet ist.

Wenn nun das Ende des flüssigen Stromfadens an dem Anfangspunct des Kupferdrähtchens adhärirt, so werden die beiden letzteren Kräfte sich gegenseitig in ihren Wirkungen aufheben; als treibende Kräfte bleiben also übrig die auf das obere Ende des Kupferdrähtchens ausgeübte Kraft und die auf seine einzelnen Elemente wirkenden Kräfte, welche übereinstimmen mit den durch das Ampère'sche Gesetz gegebenen. Nun ist aber das Drehungsmoment jener auf das obere Ende des beweglichen Drähtchens ausgeübten Kraft gleich der Summe der Drehungsmomente, welche den auf die Elemente des starren Theils des Bügels nach dem Ampère'schen Gesetz ausgeübten Kräften entsprechen. Es ergiebt sich hieraus, dass mit Bezug auf die betrachtete Rotationserscheinung zwischen dem Potentialgesetz und dem Ampère'schen Gesetz Uebereinstimmung herrscht, nicht allein in qualitativer, sondern auch in quantitativer Hinsicht.

Bei den Modificationen, welche der vorstehende Versuch erleidet, wenn durch grössere oder geringere Länge des starren Theiles des rotirenden Bügels das bewegliche Drähtchen unter den vorherrschenden Einfluss des unteren negativen oder des oberen positiven Endes der Spirale
gebracht wird, kehrt sich in jenen beiden Stellungen nach dem Potentialgesetz ebenso wie nach dem Ampère'schen die Richtung der auf die
inneren Elemente des Drähtchens ausgeübten Kräfte um, während die
Richtung der nach dem Potentialgesetz auf seine Enden ausgeübten
Kräfte dieselbe bleibt. Die wirksamen Componenten der Kräfte sind
also in all diesen Fällen nach dem Ampère'schen Gesetz und dem Potentialgesetz dieselben, sie unterscheiden sich nur durch ihren Ursprung.

Ganz analoge Betrachtungen sind anwendbar auf diejenigen Versuche von Zöllner, welche durch die Fig. 1 und 8 der Tafel I, die Fig. 1 und 2 der Tafel II, des zweiten Bandes der wissenschaftlichen Abhandlungen dargestellt sind.

Die zweite der von Zöllner getroffenen Modificationen der Gleitstellen ist gegeben durch die Fig. 4 und 5 der Tafel I. Auf diese Versuche ist die für den ersten der von uns betrachteten Fälle gegebene Erklärung ohne weiteres anwendbar; man hat nur zu beachten, dass die Richtung der auf das Ende eines flüssigen Stromfadens ausgeübten Kraft gar nicht abhängt von der Richtung dieses Fadens, sondern nur von der Richtung, in welcher der positive Strom das Solenoid durchfliesst.

Was endlich die dritte von Zöllner gewählte Anordnung des Versuches anbelangt, welche durch Fig. 6, Taf, I. dargestellt ist, so sind die Schwierigkeiten, welche sich der Erklärung der Rotation durch das Potentialgesetz in den Weg stellen, dieselben wie in dem zweiten der von uns betrachteten Fälle.

Als das Resultat der Untersuchung ergiebt sich somit, dass die Erscheinungen der elektrodynamischen Rotationen zunächst jedenfalls in so fern in Uebereinstimmung mit dem Potentialgesetz sich befinden, als die bei der Rotation geleistete Arbeit dieselbe ist, wie die aus dem Potentialgesetz berechnete. Aus dieser Uebereinstimmung ergiebt sich aber nur die mathematische Zulässigkeit des Potentialgesetzes als einer einfachen Rechnungsregel, sie entscheidet nichts über seine physikalische Zulässigkeit als eines Elementargesetzes der ponderomotorischen Wechselwirkung der Elektrodynamik. Diese letztere kann nur durch die Bestimmung der einzelnen aus dem Potentialgesetz sich ergebenden Kraftcomponenten und durch die mechanische Deduction der Rotationserscheinungen aus den bei denselben wirkenden Kraftcomponenten erwiesen werden. Die Möglichkeit einer solchen Deduction und damit die Zulässigkeit des Potentialgesetzes als eines wahren Elementargesetzes der Elektrodynamik folgt für die Rotationserscheinungen aus den vorhergehenden Betrachtungen, allein es ist nicht zu verkennen, dass die aus dem Potentialgesetz sich ergebende Theorie dieser Erscheinungen einen complicirten Character besitzt. Es ist nach derselben die Rotation des Bügels gar keine unmittelbare Folge der elektrodynamischen Kräfte, sondern es werden diese letzteren auf den Bügel übertragen durch Molecularwirkungen, welche zwischen den Theilchen seines unteren Endes und zwischen den berührenden Theilchen der den Strom zuleitenden Flüssigkeit vorhanden sind. Die Annahme eines den Uebergang der Elektricität vermittelnden flüssigen Bogens, sowie jener molecularen Adhäsionskräfte erscheint insbesondere dann als eine rein hypothetische, wenn der Uebergang der Elektricität von einem starren Zuleitungsringe zu dem ebenfalls starren Bügel erfolgt. Wäre nun das Potentialgesetz das einzige durch die Wechselwirkung starrer geschlossener Stromringe

bestimmte Gesetz, so würden die Rotationserscheinungen als ein Beweis für die Richtigkeit der in Betreff der Gleitstelle gemachten Annahmen zu betrachten sein, insbesondere also auch für die Annahme, dass bei der Bewegung eines starren Körpers in einer reibenden Flüssigkeit die ihn berührende Flüssigkeitsschichte an seiner Bewegung theilnimmt, eine Annahme, welche ja den hydrodynamischen Untersuchungen über die Bewegung eines starren Körpers in einer reibenden Flüssigkeit zu Grunde liegt. Nun genügt aber das Ampère'sche Gesetz ebenso gut wie das Potentialgesetz den Erscheinungen der Wechselwirkung geschlossener starrer Stromringe; überdiess aber ist die Deduction der elektrodynamischen Rotationen nach dem Ampère'schen Gesetz ein einfaches Problem der Mechanik starrer Körper, da die Elemente des starren Bügels die Angriffspuncte der wirkenden Kräfte sind. Die etwa noch hinzukommenden hydrodynamischen Wirkungen treten lediglich als störende Factoren auf, während die Deduction der elektrodynamischen Rotationen nach dem Potentialgesetz streng genommen ein hydrodynamisches Problem ist, bei welchem es sich um die Bewegung eines starren Körpers in einer reibenden und der Wirkung äusserer Kräfte unterworfenen Flüssigkeit handelt. Hiernach kann also darüber kein Zweifel sein, dass principiell die Anwendung des Ampère'schen Gesetzes auf die elektrodynamischen Rotationen eine einfachere ist, wie die des Potentialgesetzes: aber ebenso ergiebt sich, dass eine experimentelle Entscheidung der Alternative durch die Beobachtung der elektrodynamischen Rotationen nicht herbeigeführt ist.

Die Besprechung der durch die Rotationen gebildeten Gruppe elektrodynamischer Erscheinungen musste eine sehr eingehende sein, weil sich der Erklärung derselben von Seiten der Potentialtheorie eigenthümliche Schwierigkeiten in den Weg legen und man leicht versucht ist, diese Erscheinungen mit der Potentialtheorie für unvereinbar zu betrachten. Um so kürzer kann die dritte Gruppe elektrodynamischer Erscheinungen behandelt werden, welche durch die Einwirkungen des Magnets auf die positive Entladung in Geissler'schen Röhren dargestellt ist. Es genügt, auf die am Schlusse des vorhergehenden Abschnitts aus-

D. PONDEROMOTORISCHE ELEMENTARGESETZ D. ELEKTRODYNAMIK. 4

geführten Betrachtungen hinzuweisen, um zu erkennen, dass die von Plücker aufgestellten Sätze in der That völlig unvereinbar sind mit der Potentialtheorie, so dass also durch diese Erscheinungen die Alternative zwischen den beiden Gesetzen zu Gunsten des Ampère'schen entschieden wird.

## V. Potential zweier Stromelemente nach dem Weber'schen Grundgesetze.

Es seien gegeben zwei Stromelemente IDs und  $JD\sigma$ ; die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Anfangspuncte seien x, y, z und  $\xi, \eta, \zeta$ . Die XComponente der Kraft, welche von dem Elemente  $JD\sigma$  auf das Element IDs nach dem Ampère'schen Gesetze ausgeübt wird, ist dann gegeben durch die Gleichung:

$$X = 8 A^2 IDs JD\sigma \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial \sigma}$$

oder

$$\begin{split} X &= - \, 4 \, A^2 \, IDs \, JD \, \circ \, \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \, \psi}{\partial \, s} \, \cdot \frac{\partial \, \psi}{\partial \, \sigma} \right) \\ &+ 4 \, A^2 \, IDs \, JD \, \circ \, \frac{\partial}{\partial \, s} \left( \frac{\partial \, \psi}{\partial \, x} \, \cdot \frac{\partial \, \psi}{\partial \, \sigma} \right) \\ &+ 4 \, A^2 \, IDs \, JD \, \circ \, \frac{\partial}{\partial \, \sigma} \left( \frac{\partial \, \psi}{\partial \, x} \, \cdot \frac{\partial \, \psi}{\partial \, s} \right) \end{split}$$

Der letztere Ausdruck der X Componente kann nun in folgender Weise umgestaltet werden; es ist:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial (x - \xi)} \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)$$

Ferner:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial (x - \xi)} \cdot \frac{\partial (x - \xi)}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial (y - \eta)} \cdot \frac{\partial (y - \eta)}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial (z - \zeta)} \cdot \frac{\partial (z - \zeta)}{\partial s}$$
$$\frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial s}}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial s}} = \frac{\partial \psi}{\partial (x - \xi)} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

und somit:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}\right)}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial s}}$$

Ebenso:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s}}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial s}}$$

Substituiren wir diese Werthe in der für die X Componente gegebenen Gleichung, so erhalten wir, wenn wir gleichzeitig zur Abkürzung setzen:

$$\Psi = \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}$$

$$X =$$

$$-4 A^2 IDs JD \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial (x-\xi)} + 4 A^2 IDs JD \sigma \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial \frac{\partial (x-\xi)}{\partial s}} + 4 A^2 IDs JD \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \frac{\partial (x-\xi)}{\partial \sigma}}$$

Ziehen wir die von der Differentiation unberührten Factoren unter die Differentialzeichen und setzen wir:

$$\pi = 4 A^2 I D_S J D_S \Psi$$

so wird:

$$X = -\frac{\partial \pi}{\partial (x - \xi)} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \pi}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial s}} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \pi}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial s}}$$

Ebenso ergeben sich für die beiden anderen Componenten die Formeln:

$$Y = -\frac{\partial \pi}{\partial (y - \eta)} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \pi}{\partial \frac{\partial (y - \eta)}{\partial s}} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \pi}{\partial \frac{\partial (y - \eta)}{\partial \sigma}}$$

$$Z = -\frac{\partial \pi}{\partial (z - \zeta)} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \pi}{\partial \frac{\partial (z - \zeta)}{\partial s}} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \pi}{\partial \frac{\partial (z - \zeta)}{\partial \sigma}}$$

Es ergiebt sich hieraus, dass die Componenten der von dem Element  $JD\sigma$  auf das Element IDs ausgeübten Wirkung, durch einen bestimmten Differentiationsprocess abgeleitet werden können aus der Func-

D. PONDEROMOTORISCHE ELEMENTARGESETZ D. ELEKTRODYNAMIK. 51

tion  $\pi$ , welche identisch ist mit der ersten Form des von Helmholtz aufgestellten elementaren Potentiales. In der That kann man also diese Function:

$$\pi = 4 A^2 IDs JD\sigma \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}$$

betrachten als ein von den beiden Stromelementen auf einander ausgeübtes Potential; aber die Componenten der von dem Element  $JD\sigma$  auf IDs ausgeübten Kraft werden dann nicht bestimmt durch die negativen Differentialquotienten des Potentiales, sondern durch die negativen Variationscoëfficienten desselben nach den relativen Coordinaten des Elementes IDs mit Bezug auf das Element  $JD\sigma^{1}$ ).

Da nun das Ampère'sche Gesetz aus dem von Weber für die elektrische Wechselwirkung aufgestellten Grundgesetz abgeleitet werden kann, so leuchtet ein, dass der vorhergehende Satz auch unmittelbar aus jenem Grundgesetze sich deduciren lassen muss. Diese Deduction ergiebt sich auf Grund der von Weber für die Constitution eines constanten Stromelements entwickelten Vorstellung und mit Hülfe des von C. Neumann aufgestellten elektrischen Potentiales in folgender Weise:

Für das Element Ds bezeichnet eDs die Menge der positiven Elektricität, welche sich mit der Geschwindigkeit  $\frac{ds}{dt}$  in der Richtung Ds

<sup>1)</sup> Wie ich erst nach dem Abschlusse der vorliegenden Untersuchungen bemerkt habe, ist der im Vorhergehenden bewiesene Satz bereits von C. Neumann in seiner Abhandlung »Die Principien der Elektrodynamik« (Programm d. Tübinger Universität 1868) ausgesprochen worden. Die betreffenden Stellen der Abhandlung lauten:

<sup>1.</sup> Ist W das effective Potential der beiden Stromelemente auf einander und r ihre Entfernung, so wird jederzeit  $W = \frac{(2n)^2 ds d\sigma es' \eta \sigma'}{2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \text{ sein, } ----$ 

<sup>2.</sup> Die repulsive Kraft  $\Re$ , mit welcher die beiden Stromelemente auf einander einwirken, ist jederzeit gleich dem negativen Variationscoëfficienten des Potentiales W nach r.

<sup>3.</sup> Sind  $d\sigma$  und ds zwei Elemente geschlossener Ströme, und bezeichnet  $\mathfrak{E}$  die von  $d\sigma$  auf ds in der Richtung s ausgeübte elektromotorische Kraft, so wird  $\mathfrak{E}$  Jederzeit gleich sein dem negativen Variationscoëfficienten von W nach s.

bewegt, ebenso bezeichne e'Ds = -eDs die in dem Element Ds sich bewegende Menge negativer Elektricität und  $\frac{ds'}{dt} = -\frac{ds}{dt}$  ihre Geschwindigkeit. Für das Element  $D\sigma$  werden die entsprechenden Grössen bezeichnet durch:

$$\eta \, D \sigma$$
,  $\frac{d \sigma}{d t}$ ,  $\eta' D \sigma = - \eta \, D \sigma$  und  $\frac{d \sigma'}{d t} = - \frac{d \sigma}{d t}$ 

Wir erhalten die von dem Element  $D\sigma$  auf das Element Ds ausgeübte Wirkung, wenn wir die Summe der vier abstossenden Kräfte bilden, welche von den beiden elektrischen Massen in dem Elemente  $D\sigma$  ausgeübt werden auf die beiden Massen in Ds. Wir haben somit der Reihe nach zu betrachten die abstossende Wirkung von

$$+\eta D\sigma$$
 auf  $+eDs$   
von  $\eta'D\sigma$  auf  $+eDs$   
von  $+\eta D\sigma$  auf  $e'Ds$   
von  $\eta'D\sigma$  auf  $e'Ds$ 

Nach dem von C. Neumann aufgestellten Potentialgesetze kann nun die von  $+\eta D\sigma$  auf +eDs ausgeübte Wirkung dargestellt werden durch die negativen Variationscoëfficienten des Ausdruckes:

$$w = eDs. \eta D\sigma \{\varphi + \tilde{\omega}\}$$

in welchem zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\varphi = \frac{1}{r} \text{ und } \tilde{\omega} = 2 A^2 \left(\frac{d\sqrt{r}}{dt}\right)^2$$

Für die X Componente der betrachteten Wirkung ergiebt sich daher folgende Gleichung:

$$X(\eta D \sigma - e D s) = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial w}{\partial x'} = e D s \cdot \eta D \sigma \left\{ -\frac{\partial (\varphi + \tilde{\omega})}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x'} \right\}$$

Nun sind  $\varphi$  und  $\tilde{\omega}$  lediglich Functionen der relativen Coordinaten  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ ,  $z = \zeta$ ; und somit:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi + \tilde{\omega}) = \frac{\partial}{\partial (x - \xi)}(\varphi + \tilde{\omega})$$

Ferner enthält & auch nur die relativen Geschwindigkeiten

$$\frac{d(x-\xi)}{dt}, \frac{d(y-\eta)}{dt}, \frac{d(z-\zeta)}{dt}$$

somit ist:

$$\frac{\partial \, \tilde{\mathbf{w}}}{\partial \, x'} = \frac{\partial \, \tilde{\mathbf{w}}}{\partial \frac{d \, (x - \xi)}{d \, t}}$$

Substituiren wir diese Werthe in dem Ausdruck für die X Componente, so ergiebt sich:

$$X = e D s \eta D \sigma \left\{ -\frac{\partial (\varphi + \tilde{\omega})}{\partial (x - \xi)} + \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \frac{d(x - \xi)}{dt}} \right\}$$

oder auch

$$X = -\frac{\partial w}{\partial (x - \xi)} + \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial w}{\partial \frac{d(x - \xi)}{dt}}$$

Es ergiebt sich somit, dass die Componenten der von  $\eta D \sigma$  auf e D s ausgeübten Wirkung auch dargestellt werden können durch die negativen Variationscoëfficienten des Potentiales nach den relativen Coordinaten des Elementes D s mit Bezug auf das Element  $D \sigma$ .

Es mögen nun die beiden Elemente Ds und  $D\sigma$  selbst in irgend welcher Bewegung begriffen sein; ihre augenblickliche Lage sei bestimmt durch einen Parameter p, der selbst eine Function der Zeit sein wird. Unter diesen Umständen ergiebt sich dann, wenn wir zur Abkürzung wie früher  $\sqrt{r} = \psi$  setzen:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt}$$

Hier ist:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial (x - \xi)} \cdot \frac{\partial (x - \xi)}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial (y - \eta)} \cdot \frac{\partial (y - \eta)}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial (z - \zeta)} \cdot \frac{\partial (z - \zeta)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial (x - \xi)} \cdot \frac{\partial (x - \xi)}{\partial \sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial (y - \eta)} \cdot \frac{\partial (y - \eta)}{\partial \sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial (z - \zeta)} \cdot \frac{\partial (z - \zeta)}{\partial \sigma}$$

Es wird somit mit Rücksicht auf den Werth von  $\tilde{\omega}$ :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \, \tilde{\omega}}{\partial \frac{\partial (x-\xi)}{\partial \, s}} = \, 4 \, A^2 \, \frac{d \, \psi}{d \, t} \cdot \frac{\partial \, \psi}{\partial \, (x-\xi)} \cdot \frac{d \, s}{d \, t} \\ \\ \frac{\partial \, \tilde{\omega}}{\partial \, \frac{\partial \, (x-\xi)}{\partial \, s}} = \, 4 \, A^2 \, \frac{d \, \psi}{d \, t} \cdot \frac{\partial \, \psi}{\partial \, (x-\xi)} \cdot \frac{d \, \sigma}{d \, t} \end{array}$$

und:

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \frac{\partial (x-\xi)}{\partial s}} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \frac{\partial (x-\xi)}{\partial \sigma}} = 4 A^2 \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial (x-\xi)} \right\}$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial \frac{d\psi}{dt}}{\partial \frac{d(x-\xi)}{dt}} = \frac{\partial \psi}{\partial (x-\xi)}$$

$$2\frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{\partial \frac{d\psi}{dt}}{\partial \frac{d(x-\xi)}{dt}} = \frac{\partial \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^{2}}{\partial \frac{d(x-\xi)}{dt}} = 2\frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial (x-\xi)}$$

Somit:

$$2 A^{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial \left(\frac{d\psi}{\partial t}\right)^{2}}{\partial \frac{d(x-\xi)}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \frac{\partial (x-\xi)}{\partial s}} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \frac{\partial (x-\xi)}{\partial \sigma}}$$

oder

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \frac{d(x-\xi)}{dt}} = \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \frac{\partial (x-\xi)}{\partial s}} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \frac{\partial (x-\xi)}{\partial \sigma}}$$

Substituiren wir diesen Werth in dem Ausdruck für die X Componente, so ergiebt sich:

$$X (\eta \, D \, \sigma - e \, D \, s) \; = \; e \, D \, s \, . \, \eta \, D \, \sigma \left\{ -\frac{\partial \, (\varphi + \tilde{\omega})}{\partial \, (x - \xi)} + \frac{\partial}{\partial \, s} \frac{\partial \, \tilde{\omega}}{\partial \, \frac{\partial \, (x - \xi)}{\partial \, s}} + \frac{\partial}{\partial \, \sigma} \frac{\partial \, \tilde{\omega}}{\partial \, \frac{\partial \, (x - \xi)}{\partial \, \sigma}} \right\}$$

oder mit Rücksicht darauf, dass  $\varphi$  von den Differentialquotienten  $\frac{\partial (x-\xi)}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial (x-\xi)}{\partial \sigma}$  . . . unabhängig ist:

$$X(\eta D \sigma - e D s) = -\frac{\partial w}{\partial (x - \xi)} + \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{\partial w}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial s}} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial w}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial \sigma}}$$

Es wird somit auch unter den jetzigen Verhältnissen die von  $\eta D \sigma$  auf eDs ausgeübte X Componente dargestellt durch den negativen Variationscoëfficienten des Potentiales w nach der relativen x Coordinate des Elementes Ds mit Bezug auf  $D\sigma$ . Nur ist das Potential w jetzt aufzufassen als eine Function der drei relativen Coordinaten:

$$x-\xi$$
,  $y-\eta$ ,  $z-\zeta$ 

und der sechs Differentialquotienten:

$$\frac{\partial (x-\xi)}{\partial s}, \frac{\partial (y-\eta)}{\partial s}, \frac{\partial (z-\zeta)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial (x-\xi)}{\partial \sigma}, \frac{\partial (y-\eta)}{\partial \sigma}, \frac{\partial (z-\zeta)}{\partial \sigma}$$

und ist die Variation dieser Abhängigkeit entsprechend auszuführen. Das den beiden Electricitätsmengen  $\eta D \sigma$  und e D s zugehörende Potential w setzt sich zusammen aus dem electrostatischen Theil e D s.  $\eta D \sigma \varphi$  und dem elektrodynamischen Theil e D s.  $\eta D \sigma 2 A^2 \left(\frac{d \psi}{d t}\right)^2$  wo

Gehen wir nun über zu der Wirkung, welche von der negativ electrischen Masse  $\eta'D\sigma$  des Elementes  $D\sigma$  auf eDs ausgeübt wird, so werden die Componenten derselben sich ebenfalls darstellen durch die negativen Variationscoëfficienten eines zwischen den electrischen Massen  $\eta'Ds$  und eDs vorhandenen Potentiales nach den relativen Coordinaten  $x-\xi, y-\eta, z-\zeta$ . Bezeichnen wir dieses Potential durch w', so ergiebt sich für die XComponente der betrachteten Wirkung:

$$X(\eta' D \sigma - e D s) = -\frac{\partial w'}{\partial (x - \xi)} + \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{\partial w'}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial s}} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial w'}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial \sigma}}$$

Den Werth von w' erhalten wir, wenn wir in dem für w gegebenen Ausdruck  $\eta D\sigma$  vertauschen mit  $\eta' D\sigma$ ,  $\frac{d\sigma}{dt}$  mit  $\frac{d\sigma'}{dt}$ ; es wird somit:

$$w' = e D s \cdot \eta' D \sigma \varphi + e D s \cdot \eta' D \sigma \cdot 2 A^{2}$$

$$\cdot \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^{2} \cdot \left( \frac{d s}{d t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)^{2} \cdot \left( \frac{d \sigma'}{d t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)^{2} \cdot \left( \frac{d p}{d t} \right)^{2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \cdot \frac{d s}{d t} \cdot \frac{d \sigma'}{d t} \right\} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac$$

Für die Summe der beiden XComponenten, d. h. für die ganze von dem Stromelement  $D\sigma$  auf die positive Electricität des Elementes Ds ausgeübte XComponente ergiebt sich:

$$X_{p} = -\frac{\partial w_{p}}{\partial x - \xi} + \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{\partial w_{p}}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial s}} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial w_{p}}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial \sigma}}$$

wo  $w_p = w + w'$ . Beachten wir, dass  $\eta' = -\eta$  und  $\frac{d\sigma'}{dt} = -\frac{d\sigma}{dt}$ , so ergiebt sich:

$$w_p \, = \, 8 \, A^2 \, e \, D \, s \, \cdot \, \eta \, D \, \sigma \, \left\{ \! \frac{\partial \, \psi}{\partial \, s} \, \cdot \, \frac{\partial \, \psi}{\partial \, \sigma} \, \cdot \, \frac{d \, s}{d \, t} \, \cdot \, \frac{d \, \sigma}{d \, t} \, + \, \frac{\partial \, \psi}{\partial \, \sigma} \, \cdot \, \frac{\partial \, \psi}{\partial \, p} \, \cdot \, \frac{d \, \sigma}{d \, t} \, \cdot \, \frac{d \, p}{d \, t} \right\}$$

Aus dem für  $X_p$  gegebenen Ausdrucke ergiebt sich dann die auf die negative Masse e'Ds des Elementes Ds ausgeübte X Componente durch Vertauschung von eDs mit e'Ds, von  $\frac{ds}{dt}$  mit  $\frac{ds'}{dt}$ . Wir erhalten somit:

$$X_n = -\frac{\partial w_n}{\partial (x - \xi)} + \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{\partial w_n}{\partial \frac{\partial x - \xi}{\partial s}} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial w_n}{\partial \frac{\partial x - \xi}{\partial \sigma}}$$

WO

$$w_{n} \, = \, 8 \, A^{2} \, e^{\prime} D \, s \, \eta \, D \, \sigma \, \Big\{ \! \frac{\partial \, \psi}{\partial \, s} \cdot \frac{\partial \, \psi}{\partial \, \sigma} \cdot \frac{d \, s^{\prime}}{d \, t} \cdot \frac{d \, \sigma}{d \, t} + \frac{\partial \, \psi}{\partial \, \sigma} \cdot \frac{\partial \, \psi}{\partial \, p} \cdot \frac{d \, \sigma}{d \, t} \cdot \frac{d \, p}{d \, t} \Big\}$$

Die gesammte von dem Element Ds auf das Element Ds ausgeübte X Componente wird daher:

$$X = X_p + X_n = -\frac{\partial w}{\partial (x - \xi)} + \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{\partial w}{\partial \frac{\partial x - \xi}{\partial s}} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial w}{\partial \frac{\partial (x - \xi)}{\partial \sigma}}$$

wo

$$w = w_p + w_n$$
Da  $e' = -e$  und  $\frac{ds'}{dt} = \frac{ds}{dt}$ , so wird:

$$w = 16 A^2 eDs. \eta D\sigma \frac{\partial \psi}{\partial s}. \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}. \frac{ds}{dt}. \frac{d\sigma}{dt}$$

Bezeichnen wir die in den Elementen Ds und  $D\sigma$  vorhandenen Stromstärken durch I und J, so ist:

$$2 e \frac{ds}{dt} = I$$
,  $2 \eta \frac{d\sigma}{dt} = J$ 

und somit:

$$w = 4 A^2 IDs. JD\sigma. \frac{\partial \psi}{\partial s}. \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}.$$

Dies ist aber ganz dasselbe Potential, zu welchem wir oben durch die Transformation des Ampère'schen Gesetzes gelangt waren, und damit ist der Beweis geliefert, dass die Existenz jenes elementaren Potentiales in der That eine unmittelbare Consequenz des Weber'schen Grundgesetzes ist. Dieses Gesetz führt somit zu einem elementaren Potential zweier Stromelemente, welches identisch ist mit der ersten Form des Helmholtz'schen Potentiales; aber es ergiebt sich gleichzeitig, dass nach dem Weber'schen Grundgesetze die Componenten der wirkenden Kraft aus diesem Potential nicht durch eine einfache Differentiation abgeleitet werden dürfen, sondern durch eine Variation nach den relativen Coordinaten des einen Elementes mit Bezug auf das andere.

Lenken wir nun unsere Betrachtung für einen Augenblick zurück zu dem Helmholtz'schen Potentialgesetze, so geht aus der ganzen Untersuchung des vorhergehenden Abschnittes hervor, dass dasselbe in einer sehr nahen Verwandtschaft zu dem Ampère'schen Gesetz steht, und daraus ergiebt sich, dass das Helmholtz'sche Potentialgesetz so wenig wie das Ampère'sche Gesetz den Character eines nicht weiter reducirbaren Grundgesetzes besitzt. Es würde somit an das Potentialgesetz, selbst wenn es mit den experimentellen Thatsachen in Uebereinstimmung sich

befände, doch die weitere Forderung herantreten, die complicirte Gesammtwirkung, für welche es den Ausdruck bildet, aufzulösen in die wahren Grundkräfte, welche zwischen den in galvanischer Strömung begriffenen Theilchen ausgeübt werden. Nur durch eine solche Zurückführung würde der formale Zusammenhang, welchen das Potentialgesetz zwischen den verschiedenen Arten elektrodynamischer Wirkungen herstellt, ersetzt durch einen inneren Zusammenhang, welcher auf die Natur der elektrischen Theilchen und die verschiedenen Zustände der Bewegung, in welchen sie sich befinden, begründet wäre. Die für das Potentialgesetz noch zu lösende Aufgabe wäre die, ein Grundgesetz der elektrischen Wechselwirkung zu entdecken, aus welchem dasselbe ebenso abgeleitet werden könnte, wie das Ampère'sche Gesetz aus dem Weber'schen Grundgesetze. Mit Bezug auf den im Vorhergehenden entwickelten Satz kann man nun sagen, dass dieses gesuchte Grundgesetz kein anderes sei, als das Weber'sche Grundgesetz selbst; dieses führt nemlich in der That hin zu dem Helmholtz'schen Potentialgesetz, aber es folgt aus dem Weber'schen Gesetz überdiess noch eine bestimmte Regel, nach welcher die wirkende Kraft unter allen Umständen in Uebereinstimmung mit dem Grundgesetze aus dem Potential abzuleiten ist, eine Regel. welche nicht etwa aus der Form des Potentiales errathen, sondern nur durch die Ableitung des Potentiales aus dem Grundgesetz gefunden werden kann. Die Nichtbeachtung dieser Regel führt zu den Schwierigkeiten, welche bei der Anwendung des Potentiales hervortreten, und zu dem von uns hervorgehobenen Widerspruch mit den von Plücker beobachteten Thatsachen.

VI. Das Gesetz von Clausius in seiner Anwendung auf die elektrodynamischen Rotationen. Bemerkung über unipolare Induction.

Bei den auf das Ampère'sche Gesetz und das Helmholtz'sche Gesetz des elementaren Potentiales sich beziehenden Untersuchungen trat

D. PONDEROMOTORISCHE ELEMENTARGESETZ D. ELEKTRODYNAMIK. 59

ein wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden Gesetzen hervor in der Theorie der elektrodynamischen Rotationen. Es schien daher nicht ohne Interesse zu sein, auch das von Clausius aufgestellte Gesetz auf die Theorie dieser Erscheinungen hin zu prüfen.

Mit Bezug auf die in dem zweiten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung enthaltenen Bemerkungen ergiebt sich für die XComponente der Kraft, welche nach Clausius von einem Stromelemente  $I_1Ds_1$  auf ein Element IDs ausgeübt wird, der Ausdruck:

$$X = -k I D s I_1 D s_1 \left\{ \frac{E}{r^2} \frac{x - x_1}{r} - \frac{\Theta}{r^2} A_1 \right\}$$

wo die Bezeichnungen dieselben sind, wie an der angeführten Stelle. Bringen wir diesen Ausdruck auf die Form:

$$X = k I D s \cdot I_1 D s_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mathbf{E}}{r} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{dx_1}{ds_1} \right) \right\}$$

und beachten wir, dass für eine rein translatorische Verschiebung E von x unabhängig ist, so ergiebt sich, dass die nach dem Gesetze von Clausius ausgeübte X Componente von zwei verschiedenen Kräften herrührt, welche beziehungsweise identisch sind mit den bei der dritten Zerlegung des Ampère'schen Gesetzes unter III, 1 und III, 2 angeführten Kräften. Mit Rücksicht auf die zweite Zerlegung des Ampère'schen Gesetzes folgt hieraus unmittelbar die Identität der Gesetze von Clausius und Grassmann.

Für die YComponente der von  $I_1\,D\,s_1$  auf  $ID\,s$  ausgeübten Wirkung ergiebt sich die analoge Formel:

$$Y = kIDs \ I_1Ds_1\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathbf{E}}{r}\right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dy_1}{ds_1}\right)\right\}$$

Es sei nun das Element IDs drehbar um die z Axe; rechnen wir die Drehung positiv in der Richtung von der x zur y Axe, so wird das Drehungsmoment:

H 2

$$\begin{split} \Delta &= Yx - Xy = kIDs.I_1Ds_1\left\{x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathbf{E}}{r}\right) - y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{E}}{r}\right)\right\} \\ &- kIDs.I_1Ds_1\left\{\frac{x}{r}.\frac{\partial}{\partial y} - \frac{y}{r}.\frac{\partial}{\partial x}\right\} \\ &- kIDs.I_1Ds_1\left\{xDy_1 - yDx_1\right\}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \end{split}$$

Bezeichnen wir durch \u03c4 den Drehungswinkel, so ist:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -y$$
 und  $\frac{dy}{d\varphi} = x$ 

und daher:

$$\begin{split} \Delta &= kIDs.I_{1}Ds_{1}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{\mathbf{E}}{r}\Big) - kIDs\,I_{1}Ds_{1}\frac{1}{r}.\frac{d\,\mathbf{E}}{d\,\varphi} \\ &- kIDs.I_{1}\frac{\partial}{\partial\,s}\frac{x\,Dy_{1} - y\,Dx_{1}}{r} \\ &+ kII_{1}\frac{Dx\,Dy_{1} - Dy\,Dx_{1}}{r} \end{split}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} DsDs_1 & \to DxDx_1 + DyDy_1 + DzDz_1 \\ DsDs_1 & \to \frac{dE}{d\varphi} &= \frac{dDx}{d\varphi} \cdot Dx_1 + \frac{dDy}{d\varphi} \cdot Dy_1 \\ &= -DyDx_1 + DxDy_1 \end{aligned}$$

Substituiren wir diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung, so ergiebt sich:

$$\Delta = kIDsI_{1}Ds_{1}\frac{d}{d\varphi}\frac{E}{r}-kIDsI_{1}\frac{\partial}{\partial s}\frac{xDy_{1}-yDx_{1}}{r}$$

Mit Benützung der Formeln:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{Dx_1}{Ds_1} = -\frac{\partial}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi^2}{\partial x} - 4 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{Dy_1}{Ds_1} = -\frac{\partial}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi^2}{\partial y} - 4 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$x = \frac{dy}{d\varphi} \text{ und } y = -\frac{dx}{d\varphi}$$

D. PONDEROMOTORISCHE ELEMENTARGESETZ D. ELEKTRODYNAMIK. 6 geht die letzte Gleichung über in:

$$\begin{split} \Delta &= k I D s. I_1 D s_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{E}{r} \\ &+ k I D s. I_1 D s_1 \frac{\partial^2}{\partial s \partial s_1} \frac{\partial \psi^2}{\partial \varphi} \\ &+ 4 k I D s. I_1 D s_1 \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial s_1} . \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right\} \end{split}$$

Das Drehungsmoment, welches von dem Element  $I_1 Ds_1$  auf IDs nach dem Ampère'schen Gesetze ausgeübt wird, ist gegeben durch die Gleichung IIa. des vierten Abschnittes:

$$\begin{split} \Delta \, = \, -\, 4\,A^2\,ID\,s\,.\,I_1\,D\,s_1\,\frac{\partial}{\partial\,\varphi}\left(\!\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s}\,.\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s_1}\!\right) \\ +\, 4\,A^2\,ID\,s\,.\,I_1\,D\,s_1\,\frac{\partial}{\partial\,s}\left(\!\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s_1}\,.\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\varphi}\!\right) \\ +\, 4\,A^2\,ID\,s\,.\,I_1\,D\,s_1\,\frac{\partial}{\partial\,s_1}\left(\!\frac{\partial\,\psi}{\partial\,s}\,.\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\varphi}\!\right). \end{split}$$

Gehört das Element  $I_1 Ds_1$  einem geschlossenen Stromringe an, so ist das letzte Glied dieses Ausdruckes nicht zu berücksichtigen; die Summe der beiden übrigen Glieder hat aber, wie man leicht zeigen kann, denselben Werth wie der aus dem Gesetze von Clausius für das Drehungsmoment \Delta sich ergebende Ausdruck. Für das Drehungsmoment eines geschlossenen Stromes auf ein bewegliches Stromelement führt somit das Gesetz von Clausius zu genau demselben Resultate wie das Ampere'sche Gesetz, und dasselbe gilt natürlich auch für den speciellen Fall, in welchem der geschlossene Strom durch ein fest aufgestelltes Solenoid dargestellt ist, während die beweglichen Stromelemente einen um die Axe dieses Solenoides drehbaren Bügel bilden. Zu gänzlich verschiedenen Resultaten führen dagegen die beiden Gesetze, wenn man umgekehrt dasjenige Drehungsmoment berechnet, welches von dem Bügel ausgeübt wird auf das Solenoid, wobei dann der Bügel als fest aufgestellt das Solenoid als um seine Axe drehbar angenommen wird. das Gesetz von Ampère dem Princip der Gleichheit von Action und

Reaction genügt, so ist das letztere Drehungsmoment dem Drehungsmomente des Solenoids auf den Bügel entgegengesetzt gleich. Das dem Gesetze von Clausius entsprechende Drehungsmoment ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\begin{split} \Delta &= kIDs.I_{1}Ds_{1}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{E}{r} \\ -kIDs.I_{1}\frac{\partial}{\partial s}\frac{xDy_{1}-yDx_{1}}{r} \end{split}$$

Nur haben wir jetzt, wo es sich um die Berechnung des von dem Bügel auf das Solenoid ausgeübten Drehungsmomentes handelt unter  $I_1 Ds_1$  die Elemente des Bügels unter IDs die Elemente des Solenoides zu verstehen. Es ergiebt sich somit, dass bei der Integration des vorstehenden Ausdruckes über alle Elemente des Solenoides hin, der zweite Term desselben verschwindet, so dass also das von einem einzelnen Elemente  $I_1 Ds_1$  des Bügels auf das Solenoid ausgeübte Drehungsmoment dargestellt wird durch das Integral:

$$kI_1 Ds_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} \int \frac{\mathbf{E} Ds}{r}$$

Wenn die Drehungsaxe zusammenfällt mit der Axe des Solenoides, so wird der Werth des Integrals durch eine Drehung um diese Axe nicht geändert, der Differentialquotient desselben nach dem Drehungswinkel ist gleich Null und wir gelangen somit zu dem Resultate, dass der Bügel nach dem Gesetze von Clausius auf das um seine Axe drehbare Solenoid gar kein Drehungsmoment ausübt.

Mit Hülfe dieser Bemerkungen ist es nun leicht für die verschiedenen Combinationen, welche wir bei der Ausführung der elektrodynamischen Rotationsversuche machen können, die dem Ampère'schen und dem Clausius'schen Gesetze entsprechenden, die Rotation bedingenden Kräfte zu ermitteln. Die beiden Theile des ausser dem Solenoide gegebenen Stromringes werden bezeichnet durch A und B; dieselben seien verbunden durch zwei Gleitstellen, so dass sie unabhängig von einander um die Axe des Solenoids gedreht werden können. Es sei nun das

Solenoid zunächst fest aufgestellt; es sind dann die auf die Leitertheile A und B ausgeübten Drehungsmomente dieselben nach dem Clausius'schen wie nach dem Ampère'schen Gesetze und zwar ist das auf den Theil B ausgeübte Drehungsmoment entgegengesetzt dem auf A ausgeübten. Ist B fest, A drehbar, so wird A in der Richtung des auf dasselbe ausgeübten Drehungsmomentes in Rotation gerathen; wird umgekehrt A festgehalten, B drehbar gemacht, so rotirt B in entgegengesetzter Richtung wie zuvor A. Werden zweitens die beiden Leitertheile A und B festgehalten, während das Solenoid drehbar ist um seine Axe, so wird eine Drehung des Solenoides nach den beiden in Rede stehenden Gesetzen nicht eintreten, nach dem Ampère'schen Gesetze nicht, weil die beiden von A und B rückwärts auf das Solenoid ausgeübten Drehungsmomente entgegengesetzt gleich sind, nach dem Gesetz von Clausius nicht, weil jene beiden Drehungsmomente Null sind. Werden drittens die beiden Leitertheile A und B untereinander verbunden, so dass sie gemeinsam um die Axe des Solenoids rotiren können, so tritt eine Rotation nicht ein, weil nach beiden Gesetzen die von dem Solenoid auf A und B ausgeübten Drehungsmomente entgegengesetzt gleich sind. Es werde endlich einer der beiden Leiter etwa A mit dem Solenoide fest verbunden, so dass er mit dem Solenoide gemeinsam um die Axe des letzteren sich drehen kann, während B fest aufgestellt ist. Nach dem Ampère'schen Gesetz zerstören sich die inneren Drehungsmomente des von dem Solenoid und dem Leitertheil A gebildeten starren Systems und die Rotation wird hervorgerufen durch die Wirkung des Theiles B auf das Solenoid. Nach dem Gesetze von Clausius ist das einzige vorhandene Drehungsmoment das von dem Solenoid auf den damit verbundenen Leiter A ausgeübte, welches dem nach dem Ampère'schen Gesetze von B auf das Solenoid ausgeübten wie man leicht sieht, gleich Es ist also auch in diesem letzten Falle die Grösse des wirksamen Drehungsmomentes für beide Gesetze dieselbe; aber der Ursprung desselben ein verschiedener. Das Gesetz von Clausius führt zu dem Resultat, dass in dem betrachteten Falle das Solenoid zusammen mit dem Leiter A einen starren Körper repräsentirt, der unter der Wirkung eines

inneren zwischen seinen beiden Bestandtheilen vorhandenen Drehungsmomentes in Rotation geräth, einem Resultate in welchem der Widerspruch des von Clausius aufgestellten Gesetzes mit dem Princip der Gleichheit von Action und Reaction in besonders eigenthümlicher Weise hervortritt.

Es ergiebt sich aus den vorhergehenden Sätzen das bemerkenswerthe Resultat, dass die Clausius'sche Theorie der elektrodynamischen Rotationen identisch ist mit derjenigen Theorie, welche sich für die elektromagnetischen Rotationen ergiebt, wenn man von der Annahme der realen Existenz der magnetischen Flüssigkeiten ausgeht und für die Wechselwirkung zwischen den Theilchen dieser Flüssigkeiten und dem Elemente eines galvanischen Stroms das Gesetz von Biot und Savart zu Grunde legt. Aus diesem Gesetze ergiebt sich die Kraft, welche ein einzelnes magnetisches Theilchen auf ein einzelnes in Bewegung begriffenes elektrisches Theilchen ausübt; der Angriffspunct derselben liegt in dem elektrischen Theilchen, ihre Richtung steht senkrecht gegen die Entfernung der beiden Theilchen und gegen die Bewegungsrichtung des elektrischen Theilchens. Wenn man nun den magnetischen Theilchen eine von der Existenz der elektrischen Theilchen unabhängige Realität zuschreibt, so wird eine gewisse Gleichartigkeit der beiden verschiedenen Arten imponderabeler Theilchen eben durch die Thatsache ihrer Wechselwirkung begründet sein, und es wird dann der Angriffspunct der von dem elektrischen Theilchen rückwärts auf das magnetische Theilchen ausgeübten Kraft in dieses letztere zu verlegen sein, während ihre Richtung der von dem magnetischen Theilchen auf das elektrische ausgeübten Kraft entgegengesetzt ist. Man gelangt hiedurch zu der Annahme eines transversalen Kräftepaares, zwischen einem bewegten elektrischen und einem magnetischen Theilchen und durch ein ebensolches Kräftepaar wird dann in vollkommener Uebereinstimmung mit der von Biot und Savart gemachten Annahme auch die Wechselwirkung zwischen einem magnetischen Theilchen und dem Elemente eines galvanischen Stroms dargestellt. Damit ergiebt sich für die elektromagnetischen Rotationen eine Theorie, welche identisch ist mit der Clausius'schen Theorie der elektrodynamischen

Rotationen. Wenn nun andererseits die elektrischen Theilchen sich in einem Leiterelement in Ruhe befinden, während ein Theilchen der magnetischen Flüssigkeiten sich in irgend einer relativen Bewegung gegen jenes Leiterelement befindet, so entspricht die Differenz der nach dem angeführten Gesetze von dem bewegten magnetischen Theilchen auf die ruhenden positiven und negativen elektrischen Theilchen ausgeübten Kräfte einer durch die Bewegung des magnetischen Theilchens in dem Leiterelement inducirten elektromotorischen Kraft. Es ergiebt sich auf diesem Wege ein Gesetz der Magnetinduction, welches in gar keinem inneren Zusammenhange mit den Weber'schen Gesetzen der Voltainduction steht, da das erstere auf der Vorstellung von der gesonderten Realität der magnetischen und elektrischen Flüssigkeiten beruht, die letzteren aus der Betrachtung rein elektrischer Wirkungen sich ergeben. Folgerungen, welche dem auf dem angedeuteten Wege erhaltenen Gesetze der Magnetinduction entsprechen, wurden von Weber im Jahre 1839 in seiner Abhandlung über unipolare Induction entwickelt1). Eine Ergänzung dieser Weber'schen Thecrie wurde von mir in einem Aufsatze »zur Theorie der unipolaren Induction und der Plücker'schen Versuche«2) insbesondere mit Rücksicht auf die von Plücker ausgeführten Versuche gegeben.

Eine solche Ergänzung scheint nothwendig, sobald man die der Weber'schen Theorie zu Grunde liegende Vorstellung, dass die elektrischen Flüssigkeiten an der Bewegung der Molecularmagnete keinen Antheil nehmen, verlässt und dafür die Annahme substituirt, dass die elektrischen Flüssigkeiten sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen, wie die ponderabelen Conductoren in welchen sie enthalten sind. Auch für diese Annahme ergiebt sich aus dem erwähnten Grundgesetze der Magnetinduction eine mit den experimentellen Thatsachen übereinstimmende Theorie derjenigen Erscheinungen, welche man gegenwärtig unter

<sup>1)</sup> Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839. S. 63.

<sup>2)</sup> Annalen der Physik und Chemie von Wiedemann Bd. 1. S. 110. Göttinger Nachr. 1876, 17. Juni.

dem Namen der unipolaren Induction zusammenzusassen pflegt, und wie auf der einen Seite die elektromagnetische Theorie zu dem Resultate führt, dass ein von einem galvanischen Strom durchflossener Magnet unter der Wirkung eines inneren Kräftepaares um seine Axe in Rotation gerathen würde, so ergiebt sich auf der anderen Seite aus jener Theorie der Magnetinduction, dass ein um seine Axe gedrehter Magnet auf seine eigene Masse eine inducirende Wirkung ausüben, auf seiner Oberfläche also eine statische Vertheilung von Elektricität erzeugen würde.

Auch mit Bezug auf diese in dem angeführten Aufsatze mitgetheilten Sätze hat nun Lorberg¹) gezeigt, dass sie sich in Uebereinstimmung befinden mit den Resultaten, die sich aus dem von Clausius aufgestellten Grundgesetze ergeben. Auch auf dem Gebiete der Inductionserscheinungen findet somit Aequivalenz statt zwischen dem Gesetz von Clausius und dem Biot-Savart'schen Gesetze, obwohl das letztere auf einen völlig anderen Kreis von Vorstellungen sich bezieht, auf denjenigen Kreis, in welchem eine gesonderte Realität der elektrischen und magnetischen Flüssigkeiten angenommen wird².

Zu einer Zeit, als die tiefere Begründung der elektrodynamischen Erscheinungen, zu welcher erst durch das Weber'sche Grundgesetz die Bahn gebrochen wurde, noch fehlte, als insbesondere die Gesetze der Voltainduction noch unbekannt waren, schienen die Erscheinungen der unipolaren Induction die Alternative zwischen der Annahme der realen Existenz der magnetischen Flüssigkeiten und der Ampère'schen Theorie des Magnetismus zu Gunsten der ersteren Vorstellung zu entscheiden; dass diess in der That Webers Auffassung von der Bedeutung jener Erscheinungen war, ergiebt sich aus den folgenden Stellen seiner Abhandlung über unipolare Induction.

<sup>1)</sup> Ueber Magnetinduction und über einige Folgerungen aus dem Clausius'schen Grundgesetze der Elektrodynamik. Pogg. Ann. Erg. Bd. VIII, S. 581.

<sup>2)</sup> Es mag bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, dass die von Edlund gegebene Theorie der unipolaren Induction (Recherches sur l'induction unipolaire, l'électricité atmosphérique et l'aurore boréale. — Mémoire présenté à l'académie royale des sciences le 10. Janvier 1878) mit der von mir entwickelten im Principe identisch ist.

»Die Erscheinungen der unipolaren Induction finden zunächst eine interessante Anwendung auf Ampères elektrodynamische Theorie der magnetischen Erscheinungen, oder auf die Frage, ob den beiden magnetischen Fluidis physische Existenz zugeschrieben werden müsse oder ob überall statt ihrer die Annahme fortdauernder galvanischer Ströme im Innern der Magnete zur Erklärung der Erscheinungen genüge. Zur Erklärung der unipolaren Induction scheint die letztere Annahme nicht

zu genügen, während die Annahme von der physischen Existenz zweier magnetischer Fluida nicht allein jene Erklärung zu geben scheint, son-

dern auch zuerst auf die Betrachtung dieser Erscheinungen geführt hat.«

»Es scheint hiernach vergeblich zu sein, eine Erklärung der unipolaren Induction in Ampères elektrodynamischer Theorie zu suchen, so lange wenigstens, als man bei der Zerlegung galvanischer Ströme in solche Elemente stehen bleibt, die einander in der sie verbindenden geraden Linie anziehen oder abstossen.«

Die Entdeckung der Gesetze der Voltainduction und die im Zusammenhange hiermit begründeten Vorstellungen über die Natur der galvanischen Strömung führten aber später zu einer rein elektrodynamischen Theorie jener unipolaren Induction und in der dritten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen S. 558 äussert sich daher Weber über die fraglichen Erscheinungen in folgender Weise:

»Ich habe früher in den »Resultaten aus den Beob. d. magn. V. im Jahre 1839« die Vermuthung zu begründen gesucht, dass die daselbst unter dem Namen der »unipolaren Induction« beschriebenen Erscheinungen zu einer solchen Entscheidung führen könnten. Diess ist aber nicht der Fall, weil eine andere Erklärung von den dort beschriebenen Erscheinungen sich geben lässt, sobald zwischen den im Inneren der Conductoren sich bewegenden elektrischen Fluidis und den ponderabelen Theilen der Conductoren eine solche Verbindung stattfindet, dass jede auf die elektrischen Fluida wirkende Kraft ganz oder fast ganz auf die ponderablen Theile übertragen wird, wie ich diess in den »elektrodynamischen Maassbestimmungen« (Abhandl. bei Begründung der K. S. Gesellschaft der Wissensch. herausgeg. von d. F. Iabl. Ges. Art. 19. S. 309) näher erörtert habe.«

Wenn wir nun gegenwärtig die Vorstellung von der Existenz der magnetischen Flüssigkeiten unter die idealen Vorstellungen verweisen und allein den elektrischen Flüssigkeiten eine reale Existenz zuschreiben, so liegt die Möglichkeit für diese Vereinfachung unserer Vorstellungen in der durch die experimentelle Forschung nachgewiesenen Ersetzbarkeit der Magnete durch geschlossene Ströme. Den einzigen Beweis für die Nothwendigkeit dieser Auffassung hat Weber gegeben in seiner Theorie des Diamagnetismus. Wenn wir nun beachten, dass die Resultate. die wir im Vorhergehenden für das Gesetz von Clausius abgeleitet haben, auch für das Grundgesetz der Wechselwirkung gesondert existirender magnetischer und elektrischer Theilchen gelten würden, so ergiebt sich, dass die Theorie der elektromagnetischen Rotationen eine wesentlich verschiedene ist, je nachdem wir die Existenz besonderer magnetischer Flüssigkeiten annehmen oder nicht, und zwar zeigt sich, dass bei der ersteren Annahme diese Erscheinungen mit einer strengen Fassung des Princips der Gleichheit von Action und Reaction unvereinbar sind. Aehnliches gilt von denjenigen Inductionserscheinungen, welche wir bei der Annahme von der Existenz magnetischer Flüssigkeiten uns durch unipolare Induction entstanden denken müssten. Wenn wir die reale Existenz der magnetischen Flüssigkeiten annehmen, so leuchtet ein, dass eine Drehung eines magnetischen Theilchen um eine durch dasselbe hindurchgehende Axe keine Induction hervorbringen kann, während ein um seine Axe gedrehter Molecularstrom auf einen benachbarten Leiter eine vertheilende Wirkung ausübt, auf welche ich zuerst in einem in den Nachrichten der K. G. d. Wiss. zu Göttingen enthaltenen Aufsatze »das Weber'sche Grundgesetz in seiner Anwendung auf die unitarische Hypothese« 1873, S. 536, aufmerksam gemacht habe. Der Nachweis der Existenz einer solchen vertheilenden Wirkung würde nicht allein die Alternative zwischen der dualistischen und unitarischen Anschauung auf dem Gebiete der reinen Elektricitätslehre entscheiden, sondern er würde auch einen zweiten Beweis für die Nothwendigkeit der Annahme von Molecularströmen an Stelle von Molecularmagneten liefern können.

## Inhalt.

Einle	eitung	S. 3
I.	Beweis des Ampère'schen Gesetzes	10
II.	Ueber einen von Carl Neumann gegebenen Beweis des	
	Ampère'schen Gesetzes	- 16
III.	Analytische Untersuchung des Ampère'schen Gesetzes	- 20
IV.	Das elementare Potential von Helmholtz	- 31
$\mathbf{V}.$	Potential zweier Stromelemente nach dem Weber'schen	
	Grundgesetze	- 49
VI.	Das Gesetz von Clausius in seiner Anwendung auf die	
	elektrodynamischen Rotationen. Bemerkung über uni-	
	polare Induction	58

## ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: <u>Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu</u> Göttingen

Jahr/Year: 1879

Band/Volume: 24

Autor(en)/Author(s): Riecke Eduard

Artikel/Article: <u>Ueber das ponderomotorische Elementargesetz der Elektrodynamik.</u> 3-69