Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien.

Zweite Abhandlung.

Von

Alfred Enneper.

Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellsch. d. Wiss. am 3. Juli 1880.

In dieser zweiten Abhandlung über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien ist der Versuch gemacht, für die Flächen mit sphärischen Krümmungslinien eine ähnliche ausführliche Darstellung zu geben, wie solche die erste Abhandlung für plane Krümmungslinien enthält. In Beziehung auf die gebrauchten Bezeichnungen schliesst sich die zweite Abhandlung eng an die erste an, namentlich bei solchen Problemen, deren analytische Behandlung eine Art Parallelismus zeigt. Im Allgemeinen unterscheiden sich die Probleme, deren Lösungen in der vorliegenden Abhandlung angestrebt sind, von den entsprechenden Problemen der früheren Untersuchungen, sowohl durch die gebrauchten Hülfsmittel, als durch grössere Complication der Formeln. Was die Hülfsmittel betrifft, so war der Verfasser gezwungen, wenn nicht die Deutlichkeit der Darstellung wesentlich leiden sollte, bei einigen Gelegenheiten Sätze aus der allgemeinen Theorie der Flächen anführen, respective ableiten zu müssen. Es betrifft dieses den Abschnitt VIII und den Anfang des Anhangs B. In beiden Fällen war es für den Zweck der Abhandlung unumgänglich nöthig, aus der allgemeinen Theorie der Flächen einige Formeln zu entwickeln, welche sich zu den gemachten Anwendungen eignen. Von diesem Gesichtspunkt aus sind in VIII eine Anzahl von Entwicklungen über die sogenannte Transformation durch reciproke Radii vectores zusammengestellt, die namentlich in X zur

Verwendung gekommen sind und in XI den Grund zu einer neuen Transformation von Flächen gelegt haben. In IX sind einige Bemerkungen über Flächen mit sphärischen Krümmungslinien vereinigt, namentlich mit Beziehung auf zwei besondere Fälle, die sich mit Hülfe früherer Untersuchungen erledigen lassen. Sind die Kugelflächen eines Systems sphärischer Krümmungslinien concentrisch, so ist das andere System von Krümmungslinien plan. Gehn die Kugelflächen des sphärischen Systems durch einen festen Punkt, so ist für die transformirte Fläche durch reciproke Radii vectores bekanntlich das transformirte System plan. Diese beiden Fälle sind bei den späteren Untersuchungen ausgeschlossen. Am Ende des Abschnitts ist eine Bemerkung gemacht, die auf den ersten Blick von weniger Bedeutung erscheint, deren Vortheil aber bei den allgemeinen Untersuchungen sehr prägnant hervortritt. Besteht ein System sphärischer Krümmungslinien aus Kreisen, so ist die Fläche die Enveloppe einer Kugelfläche von variabelem Radius, deren Mittelpunkt eine Curve doppelter Krümmung beschreibt. Es ist diese Curve doppelter Krümmung, welche für die Betrachtung der bemerkten Enveloppe von besonderem Interesse ist. Auf der Tangentenfläche der Curve der Mittelpunkte der enveloppirten Kugelflächen liegt die Curve, gebildet aus den Mittelpunkten der Kugelflächen des sphärischen Systems. Ein ähnliches Verhältniss findet im allgemeinen Falle statt. Die Mittelpunkte der Kugelflächen eines Systems sphärischer Krümmungslinien bilden eine Curve doppelter Krümmung, deren geometrische Elemente sich für die Behandlung des allgemeinen Falls nicht geeignet erweisen. An Stelle der erwähnten Curve ist eine andere einzuführen, auf deren Tangentenfläche sie liegt.

In X ist, wie der Verfasser glaubt, der erste vollständige Beweis des Satzes enthalten, dass alle Flächen mit zwei Systemen sphärischer Krümmungslinien als Parallelflächen solcher Flächen anzusehen sind, für welche die Anwendung der Transformation durch reciproke Radii vectores, wenigstens ein System sphärischer Krümmungslinien in plane Curven transformirt. Die für alle Specialfälle durchgeführten Rechnungen haben den Beweis von der Existenz eines reellen Centrums der Transformation geliefert. Um diesen Abschnitt nicht durch Detailuntersuchungen zu überladen, sind in einer Anmerkung eine Reihe von Flächen zusammengestellt, für welche das eine der beiden Systeme sphärischer Krümmungslinien aus Kreisen besteht. Die in VIII gegebenen Entwicklungen haben in XI die Aufstellung der Flächen, welche ein System sphärischer Krümmungslinien besitzen und von den Kugelflächen dieses Systems orthogonal geschnitten werden, auf eine besondere Transformation von Flächen reducirt.

Eine besondere Beachtung darf der Abschnitt XII beanspruchen, wegen der möglichst allgemeinen Lösung des Problems: Die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien analytisch zu definiren, d. h. die Coordinaten eines Punktes einer solchen Fläche als explicite Functionen zweier Variabelen darzustellen. Es sind die betreffenden Untersuchungen für die verschiedenen Specialfälle durchgeführt, welche die Curve der Mittelpunkte der Kugelflächen des sphärischen Systems darbieten kann, oder besser, für die Curve, auf deren Tangentenfläche die erstgenannte Curve liegt. Hierdurch ist es gelungen, ein Problem zu lösen, welches von den ersten Bearbeitern, den Hn. Bonnet und Serret entweder unerledigt geblieben war, oder in ungenügender Weise behandelt worden ist.

Im Anhang sind einige Untersuchungen vereinigt, die sich auf Flächen mit planen Krümmungslinien beziehn, namentlich solche, deren Krümmungslinien auch geodätische Linien sind. Es erschien wünschenswerth, diese Flächen, in Anbetracht ihres häufigen Auftretens bei allgemeinen geometrischen Problemen, einer eingehenderen Darstellung zu unterwerfen.

VIII.

Bemerkungen über die Transformation durch reciproke Radii vectores oder die inversen Flächen. Anwendung auf Flächen mit sphärischen Krümmungslinien.

Die Untersuchung der Flächen mit sphärischen Krümmungslinien lässt sich durch Zuziehung einer geometrischen Transformation in einigen Punkten sehr vereinfachen, wobei namentlich längere und complicirte Rechnungen umgangen werden können. Die in Rede stehende Transformation ist bekannt unter dem Namen der *Transformation durch reciproke Radii vectores*, oder Aufstellung der *inversen Fläche.* Der Uebersicht wegen mögen einige bekannte Resultate kurz mit angeführt werden, unter Anwendung der in II gegebenen Gleichungen. Es treten dabei eine Anzahl analytischer Beziehungen auf, die sich unmittelbar für die Flächen mit sphärischen Krümmungslinien verwenden lassen. Der eingeschlagene Weg verfolgt das Ziel: die neuen Untersuchungen mit den in I—VII enthaltenen in möglichst enge Verbindung zu setzen. Daneben hat das hier befolgte Verfahren in XI zu einer Erweiterung der, in diesem Abschnitt aufgestellten, Resultate Veranlassung gegeben.

Zwei Flächen S und S_1 mögen sich in Beziehung auf einen festen Punkt O so entsprechen, dass zwei correspondirende Punkte P und P_1 beider Flächen mit dem Punkte O auf derselben Geraden liegen und die Relation $OP\,.\,OP_1 = g^2$ besteht, wo g eine Constante bedeutet. Es heisst dann die Fläche S_1 in Beziehung auf die Fläche S nach Hn. Liouville die *transformirte Fläche S durch reciproke Radii vectores*, wobei der feste Punkt O den Namen: *Centrum der Transformation* führt. Kürzer nennt Hr. Stubbs, der Erfinder der bemerkten Transformation, die Fläche S_1 die *inverse Fläche S* in Beziehung auf den *Pol O**). Die

*) In Beziehung auf die Literatur der im Text bemerkten Transformation sind die nachstehend bemerkten Aufsätze von Interesse. Stubbs: »On the application of a new Method to the Geometry of Curves and Curve Surfaces.« (The London,

Fläche S steht zur Fläche S_1 in demselben Verhältniss, wie umgekehrt, die Fläche S_1 zur Fläche S. Die wesentlichste Eigenschaft der Trans-

---

Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Volume XXIII. p. 338—347. London 1843). Auf p. 338 findet sich folgende Definition, welche später auch auf Flächen angewandt ist: If in the plane of a curve we take any point as a pole and produce the radius vector, so that the rectangle under radius vector to the original curve on the whole produced radius be constant or equal to k^2, we may call the locus of the extremity of this produced line the inverse curve to the one from which it is produced, and the extremity of the produced radius the inverse point to the extremity of the original: as an exemple, the cardioide is the inverse of the parabola, the focus being the pole; the lemniscata is the inverse of the equilateral hyperbola.« Auf p. 343 findet sich der Satz: »Hence the normals of inverse points of surfaces are in the same plane and equally inclined to the common radius.« Endlich auf p. 344 wird bemerkt — »or the inverse of a line of curvature on a surface is the line of curvature of the inverse surface; or if the line of curvature of a surface be known, that of its inverse surface is had by describing a cone with the pole as vertex and passing through the line of curvature on direct surface, the line in which it pierces the inverse surface is a line of curvature.« Die vorstehenden Resultate finden sich einige Jahre später im »Journal de Mathématiques« reproducirt. In dem »Extrait d'une lettre de M. William Thomson â M. Liouville« (Tome X. Année 1845 p. 364—367) findet sich folgende Definition: »Soient C le centre d'une sphère S; Q, Q' deux points pris sur un même rayon CA et sur son prolongement, de telle manière que

$$CQ\,.\,CQ' = CA^2$$

et P un point quelconque sur la surface S. On a comme on sait,

$$\frac{PQ}{PQ'} = \frac{AQ}{AQ'}.$$

On peut à cause de ce théorème, appeler Q et Q' *points réciproques relatifs à la sphère* S, dont chacun est *l'image* de l'autre sur la sphère.« In einer weiteren Mittheilung: »Extraits de deux lettres adressées a M. Liouville par M. William Thomson« (T. XII. Année 1847, p. 256—264) wird die Lage eines Punktes im Raume als Schnittpunkt dreier, zu einander gegenseitig orthogonalen Kugelflächen bestimmt und die Transformation auf physikalische Probleme angewandt. Zu diesen Mittheilungen hat Hr. Liouville u. d. T.: »Note au sujet de l'article précédent« (T. XII, p. 265—290) eine Reihe von Entwicklungen beigefügt. Man findet dort formation, welche im Folgenden in Betracht kommt, besteht darin, dass den Krümmungslinien der Fläche S auf der Fläche S_1 ebenfalls Krümmungslinien entsprechen. Ein Beweis dieses bekannten Satzes ergiebt sich im Folgenden von selbst, bei Aufstellung einiger nothwendigen Formeln.

Es seien x_0, y_0, z_0; x, y, z und x_1, y_1, z die Coordinaten der Punkte O, P und P_1, zwischen denselben bestehen dann die Gleichungen:

$$1)\quad \frac{x_1-x_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{y-y_0}=\frac{z_1-z_0}{z-z_0}=\frac{g^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Zur Vereinfachung der Formeln führe man folgende, abkürzende Bezeichnungen ein:

$$2)\quad \begin{aligned}(x-x_0)\cos a+(y-y_0)\cos b+(z-z_0)\cos c &= Q,\\ (x-x_0)\cos a'+(y-y_0)\cos b'+(z-z_0)\cos c' &= Q',\\ (x-x_0)\cos a''+(y-y_0)\cos b''+(z-z_0)\cos c'' &= Q'',\\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 &= N,\end{aligned}$$

also auch:

$$3)\quad Q^2+Q'^2+Q''^2=N.$$

Es seien u und v die Argumente der Krümmungslinien der Fläche S, die Anwendung der Gleichungen 2) und 3) von II giebt durch Differentiation der Gleichungen 1) folgende Differentialquotienten, wobei die, durch Gleichungen 3), definirten Abkürzungen gebraucht sind.

(p. 276) »Nous donnerons à cette transformation le nom de transformation *par rayons vecteurs réciproques*, relativement a l'origine O. Die sämmtlichen angeführten Aufsätze der Hn. Thomson und Liouville finden sich 25 Jahre später abgedruckt mit der Ueberschrift »Electric images« im »Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism by Sir William Thomson.« (London 1872, p. 144—177). Wegen der allgemeinen Annahme der Bezeichnung des Hn. Liouville findet sich dieselbe auch in diesen Untersuchungen beibehalten, wenn auch der von Hn. Stubbs gewählten Bezeichnung in Beziehung auf Priorität und Kürze der Vorzug gebührt.

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{du} = \left(\cos a' - 2\,\dfrac{x-x_0}{N}\,Q'\right)\dfrac{g^2\sqrt{E}}{N}, \\ \dfrac{dy_1}{du} = \left(\cos b' - 2\,\dfrac{y-y_0}{N}\,Q'\right)\dfrac{g^2\sqrt{E}}{N}, \\ \dfrac{dz_1}{du} = \left(\cos c' - 2\,\dfrac{z-z_0}{N}\,Q'\right)\dfrac{g^2\sqrt{E}}{N}, \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dv} = \left(\cos a'' - 2\,\dfrac{x-x_0}{N}\,Q''\right)\dfrac{g^2\sqrt{G}}{N}, \\ \dfrac{dy_1}{dv} = \left(\cos b'' - 2\,\dfrac{y-y_0}{N}\,Q''\right)\dfrac{g^2\sqrt{G}}{N}, \\ \dfrac{dz_1}{dv} = \left(\cos c'' - 2\,\dfrac{z-z_0}{N}\,Q''\right)\dfrac{g^2\sqrt{G}}{N}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben:

$$6)\quad \frac{dx_1}{du}\,\frac{dx_1}{dv} + \frac{dy_1}{du}\,\frac{dy_1}{dv} + \frac{dz_1}{du}\,\frac{dz_1}{dv} = 0.$$

Setzt man:

$$7)\quad \left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{du}\right)^2 = E_1,\ \left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dv}\right)^2 = G_1,$$

so findet man mittelst der Gleichungen 2), 3), 4) und 5):

$$E_1 = \frac{g^4 E}{N^2},\ G_1 = \frac{g^4 G}{N^2},$$

woraus:

$$8)\quad \sqrt{E_1} = \frac{g^2\sqrt{E}}{N},\ \sqrt{G_1} = \frac{g^2\sqrt{G}}{N},$$

folgt. Die erste Gleichung 4) nach v differentiirt giebt, mit Hülfe der Gleichungen 2)—9) von II, die folgende:

$$\frac{d^2 x_1}{du\,dv} = \left(\cos a' - 2\,\frac{x-x_0}{N}\,Q'\right) d\,\frac{\frac{g^2\sqrt{E}}{N}}{dv} + \left(\cos a'' - 2\,\frac{x-x_0}{N}\,Q''\right) d\,\frac{\frac{g^2\sqrt{G}}{N}}{du}$$

Wegen der Gleichungen 4), 5) und 8) reducirt sich die vorstehende auf:

$$\frac{d^2 x_1}{du\,dv} = \frac{dx_1}{du}\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{d\sqrt{E_1}}{dv} + \frac{dx_1}{dv}\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{d\sqrt{G_1}}{du}.$$

Vertauscht man hierin x_1 mit y_1 und z_1, so ergeben sich zwei weitere Gleichungen, welche in Verbindung mit der vorstehenden Gleichung und der Gleichung 6) zeigen, dass u und v auch die Argumente der Krümmungslinien der Fläche S_1 sind. Die Normale zur Fläche S_1 bilde im Punkte P_1 die Winkel a_1, b_1, c_1 mit den Coordinatenaxen. Es ist dann:

$$\cos a_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dy_1}{du} & \frac{dz_1}{du} \\ \frac{dx_1}{dv} & \frac{dy_1}{dv} & \frac{dz_1}{dv} \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}},$$

oder, in Folge der Gleichungen 4), 5) und 8):

$$\cos a_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos a' - 2\frac{x-x_0}{N}Q' & \cos b' - 2\frac{y-y_0}{N}Q' & \cos c' - 2\frac{z-z_0}{N}Q' \\ \cos a'' - 2\frac{x-x_0}{N}Q'' & \cos b'' - 2\frac{y-y_0}{N}Q'' & \cos c'' - 2\frac{z-z_0}{N}Q'' \end{vmatrix}.$$

Zur Reduction werde diese Gleichung mit der Gleichung 13) von II multiplicirt, d. h. mit der folgenden:

$$1 = \begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ \cos a', & \cos b', & \cos c' \\ \cos a'', & \cos b'', & \cos c'' \end{vmatrix}.$$

Das bemerkte Produkt lässt sich, mit Rücksicht auf die in 2) aufgestellten Bezeichnungen, schreiben:

$$\cos a_1 = \begin{vmatrix} \cos a & \cos a' & \cos a'' \\ -\frac{2QQ'}{N} & 1-\frac{2Q'^2}{N} & -\frac{2Q'Q''}{N} \\ -\frac{2QQ''}{N} & -\frac{2Q'Q''}{N} & 1-\frac{2Q''^2}{N} \end{vmatrix},$$

d. i.

$$\cos a_1 = \left(1 - 2\frac{Q'^2 + Q''^2}{N}\right)\cos a + 2\frac{Q'\cos a' + Q''\cos a''}{N} Q,$$

oder auch:

$$9)\quad \cos a_1 = \left(1 - 2\frac{Q^2 + Q'^2 + Q''^2}{N}\right)\cos a + 2\frac{Q\cos a + Q'\cos a' + Q''\cos a''}{N} Q.$$

In Folge der Gleichungen 2) und 3) ist:

$$Q^2 + Q'^2 + Q''^2 = N,\quad Q\cos a + Q'\cos a' + Q''\cos a'' = x - x_0.$$

Die Gleichung 9) reducirt sich hierdurch auf:

$$\cos a_1 = -\cos a + 2\frac{x - x_0}{N} Q.$$

Auf analoge Weise lassen sich die folgenden Gleichungen aufstellen:

$$10)\quad \begin{cases} \cos a_1 = -\cos a + 2\frac{x - x_0}{N} Q, \quad \cos b_1 = -\cos b + 2\frac{y - y_0}{N} Q, \\ \cos c_1 = -\cos c + 2\frac{z - z_0}{N} Q. \end{cases}$$

Bedient man sich für die Fläche S_1 ähnlicher Bezeichnungen wie die in II für die Fläche S gebrauchten, so sei:

$$11)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{dx_1}{du} = \cos a'_1, \quad \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{dy_1}{du} = \cos b'_1, \quad \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{dz_1}{du} = \cos c'_1, \\ &\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{dx_1}{dv} = \cos a''_1, \quad \frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{dy_1}{dv} = \cos b''_1, \quad \frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{dz_1}{dv} = \cos c''_1. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 4) und 5) lassen sich dann nach 8) und 11) auf folgende Art schreiben:

$$12)\qquad \cos a'_1 = \cos a' - 2\frac{x - x_0}{N}Q',\ \cos b'_1 = \cos b' - 2\frac{y - y_0}{N}Q',$$
$$\cos c'_1 = \cos c' - 2\frac{z - z_0}{N}Q'.$$

$$13)\qquad \cos a''_1 = \cos a'' - 2\frac{x - x_0}{N}Q'',\ \cos b''_1 = \cos b'' - 2\frac{y - y_0}{N}Q'',$$
$$\cos c''_1 = \cos c'' - 2\frac{z - z_0}{N}Q''.$$

Werden die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche S_1 im Punkte P_1 durch r'_1 und r''_1 bezeichnet, so kann man zu deren Berechnung sich der folgenden Gleichungen bedienen:

$$-\frac{1}{r'_1}\frac{dx_1}{du} = \frac{d\cos a_1}{du},\ -\frac{1}{r'_1}\frac{dy_1}{du} = \frac{d\cos b_1}{du},\ -\frac{1}{r'_1}\frac{dz_1}{du} = \frac{d\cos c_1}{du},$$
$$-\frac{1}{r''_1}\frac{dx_1}{dv} = \frac{d\cos a_1}{dv},\ -\frac{1}{r''_1}\frac{dy_1}{dv} = \frac{d\cos b_1}{dv},\ -\frac{1}{r''_1}\frac{dz_1}{dv} = \frac{d\cos c_1}{dv}.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen leitet man durch Multiplication mit $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ und Addition die folgenden ab:

$$-\frac{1}{r'_1}\left[(x - x_0)\frac{dx_1}{du} + (y - y_0)\frac{dy_1}{du} + (z - z_0)\frac{dz_1}{du}\right]$$
$$= (x - x_0)\frac{d\cos a_1}{du} + (y - y_0)\frac{d\cos b_1}{du} + (z - z_0)\frac{d\cos c_1}{du}$$
$$= d\frac{(x - x_0)\cos a_1 + (y - y_0)\cos b_1 + (z - z_0)\cos c_1}{du}$$
$$-\left(\frac{dx}{du}\cos a_1 + \frac{dy}{du}\cos b_1 + \frac{dz}{du}\cos c_1\right).$$

$$-\frac{1}{r''_1}\left[(x - x_0)\frac{dx_1}{dv} + (y - y_0)\frac{dy_1}{dv} + (z - z_0)\frac{dz_1}{dv}\right]$$
$$= (x - x_0)\frac{d\cos a_1}{dv} + (y - y_0)\frac{d\cos b_1}{dv} + (z - z_0)\frac{d\cos c_1}{dv}$$
$$= d\frac{(x - x_0)\cos a_1 + (y - y_0)\cos b_1 + (z - z_0)\cos c_1}{dv}$$
$$-\left(\frac{dx}{dv}\cos a_1 + \frac{dy}{dv}\cos b_1 + \frac{dz}{dv}\cos c_1\right).$$

Verbindet man die vorstehenden Gleichungen mit den Gleichungen 4), 5) und 10), bedient sich der in II gegebenen Formeln, so sind die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche S_1 auf folgende Art bestimmt:

$$14)\qquad -\frac{g^2}{r'_1}=\frac{N}{r'}+2Q,\quad -\frac{g^2}{r''_1}=\frac{N}{r''}+2Q.$$

Von den Gleichungen 8), 10), 12), 13), und 14) lassen sich auf die Flächen mit einem Systeme planer oder sphärischer Krümmungslinien folgende Anwendungen machen. Eine Ebene oder eine Kugelfläche geht durch Anwendung der Transformation durch reciproke Radii vectores allgemein in eine Kugelfläche über, die in besonderen Fällen eine Ebene sein kann. Hat die primitive Fläche ein System sphärischer Krümmungslinien, so hat die transformirte Fläche dieselbe Eigenschaft. Man kann auch, was analytisch nicht ohne Interesse ist, von der transformirten Fläche ausgehn und sich die Frage stellen: welche Bedingungen muss die primitive Fläche erfüllen, wenn für die transformirte Fläche durch reciproke Radii vectores ein System von Krümmungslinien plan oder sphärisch ist? Die Lösung dieser Aufgabe lässt sich mit ziemlich einfachen Rechnungen durchführen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Ist für eine Fläche S das System der Krümmungslinien (v) sphärisch, so hat man in Folge der Gleichungen 2) und 3) von III:

$$15)\qquad \begin{aligned}\xi_2^*&=x+R_2(\cos a\cos\sigma-\cos a'\sin\sigma),\\ \eta_2^*&=y+R_2(\cos b\cos\sigma-\cos b'\sin\sigma),\\ \zeta_2^*&=z+R_2(\cos c\cos\sigma-\cos c'\sin\sigma).\end{aligned}$$

$$16)\qquad \frac{1}{R_2}=\frac{\cos\sigma}{r''}+\frac{\sin\sigma}{\sqrt{EG}}\,\frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

Es ist $(\xi_2^*, \eta_2^*, \zeta_2^*)$ der Mittelpunkt, R_2 der Radius der osculatorischen Kugelfläche der sphärischen Krümmungslinie (v), welche durch den Punkt (x, y, z) der Fläche S geht; σ ist der Winkel, welchen der Radius R_2 mit der Normalen zur Fläche S im Punkte (x, y, z) einschliesst. Die sämmtlichen Quantitäten ξ_2^*, η_2^*, ζ_2^*, R_2 und σ sind nur von u abhängig.

Ist das System der Krümmungslinien (v) für die Fläche S plan, wobei Kreise ausgeschlossen sein mögen, so ist in der Gleichung 16) $R_2 = \infty$ zu nehmen. An Stelle der Gleichungen 15) tritt folgende, unter 3) in IV aufgestellte, Gleichung der Ebene der planen Krümmungslinie:

17) $$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = \Omega,$$

wo $\cos\alpha$. $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und Ω nur von u abhängen. In den Gleichungen 15) subtrahire man auf beiden Seiten x_0, y_0, z_0, setze also:

18) $$\begin{cases} \xi_2^* - x_0 = x - x_0 + R_2 (\cos a \cos\sigma - \cos a' \sin\sigma), \\ \eta_2^* - y_0 = y - y_0 + R_2 (\cos b \cos\sigma - \cos b' \sin\sigma), \\ \zeta_2^* - z_0 = z - z_0 + R_2 (\cos c \cos\sigma - \cos c' \sin\sigma). \end{cases}$$

Man bilde die Summe der Quadrate der vorstehenden Gleichungen unter Anwendung der in den Gleichungen 2) gebrauchten Bezeichnungen. Die bemerkte Summe giebt:

$$(\xi_2^* - x_0)^2 + (\eta_2^* - y_0)^2 + (\zeta_2^* - z_0)^2 = N + 2R_2 (Q \cos\sigma - Q' \sin\sigma) + R_2^2.$$

Hieraus folgt:

19) $$N + 2R_2 (Q \cos\sigma - Q' \sin\sigma) = (\xi_2^* - x_0)^2 + (\eta_2^* - y_0)^2 + (\zeta_2^* - z_0)^2 - R_2^2.$$

Wird für eine Fläche S das System der Krümmungslinien (v) auf der transformirten Fläche S_1 sphärisch oder plan, so findet für die Fläche S_1 eine ähnliche Gleichung, wie die Gleichung 16) statt, nämlich:

$$\frac{1}{R'_2} = \frac{\cos\sigma'}{r''_1} + \frac{\sin\sigma'}{\sqrt{E_1 G_1}} \frac{d\sqrt{G_1}}{du},$$

wo R'_2 und σ' nur von u abhängen. Setzt man für E_1, G_1 und r''_1 ihre Werthe aus den Gleichungen 8) und 14) ein, so folgt:

20) $$\frac{g^2}{R'_2} = -\left(\frac{N}{r''} + 2Q\right) \cos\sigma' + \left(\frac{N}{\sqrt{EG}} \frac{d\sqrt{G}}{du} - 2Q'\right) \sin\sigma'.$$

Wird diese Gleichung nach v differentiirt, so hat man nach den Gleichungen von II:

$$\frac{dN}{dv} = 2Q''\sqrt{G},\ \frac{dQ}{dv} = -\frac{Q''\sqrt{G}}{r''},\ \frac{dQ'}{dv} = \frac{Q''}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

Mit Weglassung des Factors N führt die bemerkte Differentiation auf folgende Gleichung:

$$0 = -\frac{d\frac{1}{r''}}{dv}.\cos\sigma' + d\frac{\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}}{dv}\sin\sigma'.$$

Bezeichnet R_2 eine Function von u allein, so kann man setzen:

21) $$\frac{1}{R_2} = -\frac{\cos\sigma'}{r''} + \frac{\sin\sigma'}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass auch für die Fläche S das System (v) sphärisch ist. Die beiden Gleichungen 16) und 21) fallen zusammen für $-\cos\sigma' = \cos\sigma$ und $\sin\sigma' = \sin\sigma$, d. i. $\sigma' = \pi - \sigma$, was die Relation zwischen den Winkeln σ und σ' ist. Für $\sigma' = \pi - \sigma$ wird die Gleichung 20):

22) $$\frac{g^2}{R'_2} = \left(\frac{N}{r''} + 2Q\right)\cos\sigma + \left(\frac{N}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du} - 2Q'\right)\sin\sigma.$$

Durch Anwendung der Gleichung 16) wird die vorstehende Gleichung einfacher:

23) $$\frac{g^2}{R'_2} = \frac{N}{R_2} + 2\,(Q\cos\sigma - Q'\sin\sigma),$$

oder:

$$g^2\frac{R_2}{R'_2} = N + 2R_2\,(Q\cos\sigma - Q'\sin\sigma),$$

d. i. nach 19):

24) $$g^2\frac{R_2}{R'_2} = (\xi_2^* - x_0)^2 + (\eta_2^* - y_0)^2 + (\zeta_2^* - z_0)^2 - R_2^2.$$

Man kann umgekehrt die Gleichung 20) oder 22) als Folge der Gleichungen 16) und 18) deduciren, wenn der Werth von R'_2 dabei durch die Gleichung 24) bestimmt ist. Ist das System (v) für die Fläche S plan, so findet die Bedingung statt:

25) $$0 = \frac{\cos\sigma}{r''} + \frac{\sin\sigma}{\sqrt{EG}} \frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

Die Gleichung 22) wird dann einfacher:

26) $$\frac{g^2}{R'_2} = 2(Q\cos\sigma - Q'\sin\sigma).$$

Für ein planes System finden die in IV aufgestellten Gleichungen 1) statt, nämlich:

27) $$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos a\cos\sigma - \cos a'\sin\sigma, \\ \cos\beta &= \cos b\cos\sigma - \cos b'\sin\sigma, \\ \cos\gamma &= \cos c\cos\sigma - \cos c'\sin\sigma. \end{aligned}$$

Die vorstehenden Gleichungen respective mit $x - x_0$, $y - y_0$ und $z - z_0$ multiplicirt und addirt geben, mit Rücksicht auf 2):

$$(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma = Q\cos\sigma - Q'\sin\sigma,$$

d. i. nach 17):

$$\Omega - (x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma) = Q\cos\sigma - Q'\sin\sigma.$$

Hierdurch lässt sich die Gleichung 26) auf die Form:

28) $$\frac{g^2}{2R'_2} = \Omega - (x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma)$$

bringen. Die Gleichung 26) ist auch umgekehrt eine Folge der Gleichungen 17), 25) und 27), wenn R'_2 durch die Gleichung 28) bestimmt ist.

Die Gleichungen 15) geben als Gleichung der osculatorischen Kugelfläche einer sphärischen Krümmungslinie (v):

29) $$(\xi_2^* - x)^2 + (\eta_2^* - y)^2 + (\zeta_2^* - z)^2 = R_2^2.$$

Geht diese Kugelfläche durch einen festen Punkt (x_0, y_0, z_0) so ist:

$$(\xi_2^* - x_0)^2 + (\eta_2^* - y_0)^2 + (\zeta_2^* - z_0)^2 = R_2^2.$$

Findet diese Gleichung statt, so verschwindet die rechte Seite der Gleichung 24), es ist dann $R'_2 = \infty$, d. h. die transformirte Krümmungslinie ist plan. Ist die primitive Krümmungslinie plan, geht ihre Ebene durch einen festen Punkt (x_0, y_0, z_0), so hat man nach 17):

$$x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma = \Omega.$$

In der Gleichung 28) verschwindet dann die rechte Seite, es ist wieder $R'_2 = \infty$, d. h. die transformirte Krümmungslinie ist plan. Aus dem Vorstehenden ergeben sich folgende Resultate. Wird ein System von Krümmungslinien einer Fläche S mittelst der Transformation durch reciproke Radii vectores sphärisch, so ist das primitive System der Fläche S ebenfalls sphärisch oder plan. Wird ein System von Krümmungslinien einer Fläche S mittelst der Transformation durch reciproke Radii vectores plan, so ist das primitive System ebenfalls plan oder sphärisch, wobei entweder die Ebenen der planen Krümmungslinien oder die osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien durch einen festen Punkt O gehen. Der Punkt O ist das Centrum der Transformation. Bei der Deduction dieser Resultate ist die transformirte Fläche zu Grunde gelegt, ein Verfahren, welches gestattet einige Sätze unmittelbar umzukehren. Man kann auch für die primitive Fläche S direct die Gleichung 16) oder 25) zu Grunde legen und dann mit Hülfe der in II aufgestellten Gleichungen die transformirte Fläche untersuchen; der im Obigen eingeschlagene Weg ist für den vorliegenden Zweck etwas einfacher und von mehr Interesse.

Zur Vervollständigung der für die Fläche S_1 aufgestellten Gleichungen mögen noch für diese Fläche einige geometrische Elemente bestimmt werden. Für die Fläche S_1 findet die Gleichung 20) statt. Es sei (ξ', η', ζ') der Mittelpunkt der osculatorischen Kugelfläche der sphärischen Krümmungslinie (v) auf der Fläche S_1. Analog den Gleichungen 18) hat man die folgenden:

$$\begin{aligned}
\xi' - x_0 &= x_1 - x_0 + R'_2(\cos a_1 \cos\sigma' - \cos a'_1 \sin\sigma'),\\
\eta' - y_0 &= y_1 - y_0 + R'_2(\cos b_1 \cos\sigma' - \cos b'_1 \sin\sigma'),\\
\zeta' - z_0 &= z_1 - z_0 + R'_2(\cos c_1 \cos\sigma' - \cos c'_1 \sin\sigma').
\end{aligned}$$

Man setze rechts die Werthe von $x_1, y_1\ z_1$ aus 1), $\cos a_1$, $\cos b_1$, $\cos c_1$ aus 10); $\cos a'_1$, $\cos b'_1$, $\cos c'_1$ aus 12) ein und setze wieder $\sigma' = \pi - \sigma$. Es folgt dann:

30)
$$\left\{\begin{aligned}
\xi' - x_0 &= \left[g^2 - 2R'_2(Q\cos\sigma - Q'\sin\sigma)\right]\frac{x - x_0}{N} + R'_2(\cos a\cos\sigma - \cos a'\sin\sigma),\\
\eta' - y_0 &= \left[g^2 - 2R'_2(Q\cos\sigma - Q'\sin\sigma)\right]\frac{y - y_0}{N} + R'_2(\cos b\cos\sigma - \cos b'\sin\sigma),\\
\zeta' - z_0 &= \left[g^2 - 2R'_2(Q\cos\sigma - Q'\sin\sigma)\right]\frac{z - z_0}{N} + R'_2(\cos c\cos\sigma - \cos c'\sin\sigma),
\end{aligned}\right.$$

Findet die Gleichung 23) statt, so ist:

$$g^2 - 2R'_2(Q\cos\sigma - Q'\sin\sigma) = \frac{R'_2}{R_2}N.$$

Die erste Gleichung 30) wird dann einfacher:

$$\xi' - x_0 = \left[x - x_0 + R_2(\cos a\cos\sigma - \cos a'\sin\sigma)\right]\frac{R'_2}{R_2},$$

d. i. nach 18):

$$\xi' - x_0 = (\xi^*_2 - x_0)\frac{R'_2}{R_2}.$$

An Stelle des Systems 30) lässt sich folgendes setzen, in welchem der Werth von $\frac{R'_2}{R_2}$ aus der Gleichung 24) eingesetzt ist:

$$\frac{\xi' - x_0}{\xi^*_2 - x_0} = \frac{\eta' - y_0}{\eta^*_2 - y_0} = \frac{\zeta' - z_0}{\zeta^*_2 - z_0} = \frac{R'_2}{R_2} = \frac{g^2}{(\xi^*_2 - x_0)^2 + (\eta^*_2 - y_0)^2 + (\zeta^*_2 - z_0)^2 - R_2^2}.$$

Ist die primitive Krümmungslinie (v) plan, so ist nach 26):

$$g^2 = 2R'_2(Q\cos\sigma - Q'\sin\sigma).$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung, die Gleichungen 27) und 28) erhält man aus 30):

$$\frac{\xi' - x_0}{\cos\alpha} = \frac{\eta' - y_0}{\cos\beta} = \frac{\zeta' - z_0}{\cos\gamma} = R'_2 = \frac{g^2}{2[\Omega - x_0\cos\alpha - y_0\cos\beta - z_0\cos\gamma]}.$$

IX.

Einige Bemerkungen über Flächen mit sphärischen Krümmungslinien.

Zur Vermeidung von Wiederholungen und der besseren Uebersicht wegen, sollen in diesem Abschnitt einige besondere Fälle von Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien zusammengestellt werden. Sind die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen eines Systems sphärischer Krümmungslinien concentrisch, so ist das andere System plan, die Fläche hat dann einige merkwürdige geometrische Eigenschaften, wie weiter unten dargethan ist. Gehen die bemerkten osculatorischen Kugelflächen durch einen festen Punkt, so gestattet die in VIII gegebene Untersuchung eine Reduction des Problems auf die in IV gefundenen Resultate.

Setzt man zur Abkürzung:

1) $R_2\cos\sigma = p_2,\ R_2\sin\sigma = q_2$ 2) $R_1\cos\tau = p_1,\ R_1\sin\tau = q_1,$

so lassen sich die Gleichungen 2), 3), 10) und 11) von III einfacher auf folgende Art schreiben:

3) $$\begin{cases} \xi_2^* = x + p_2\cos a - q_2\cos a', \\ \eta_2^* = y + p_2\cos b - q_2\cos b', \\ \zeta_2^* = z + p_2\cos c - q_2\cos c', \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \xi_1^* = x + p_1\cos a - q_1\cos a'', \\ \eta_1^* = y + p_1\cos b - q_1\cos b'', \\ \zeta_1^* = z + p_1\cos c - q_1\cos c''. \end{cases}$$

5) $$1 = \frac{p_2}{r''} + \frac{q_2}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

6) $$1 = \frac{p_1}{r'} + \frac{q_1}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}.$$

Es sind ξ_2^*, η_2^*, ζ_2^*, p_2 und q_2 nur von u, ξ_1^*, η_1^*, ζ_1^*, p_1 und q_1 nur von v abhängig. Je nachdem die Gleichungen 3) oder 4) stattfinden, ist das System (v) oder (u) sphärisch. Die Gleichung 5) kann als Folge der Gleichungen 3) angesehen werden, wie sich unmittelbar durch Differentiation der Gleichungen 3) nach v ergiebt. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die Gleichung 6) in Beziehung auf die Gleichungen 4).

Es mögen die Gleichungen 4) stattfinden, also das System (u) sphärisch sein. Durch Differentiation der Gleichungen 4) nach v erhält man, unter Zunahme der in II aufgestellten Formeln,:

$$
7)\left\{\begin{aligned}
\frac{d\xi_1^*}{dv} &= \left(\frac{dp_1}{dv} - q_1\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)\cos a + \frac{q_1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}\cos a' + \left(\sqrt{G} - p_1\frac{\sqrt{G}}{r''} - \frac{dq_1}{dv}\right)\cos a'',\\
\frac{d\eta_1^*}{dv} &= \left(\frac{dp_1}{dv} - q_1\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)\cos b + \frac{q_1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}\cos b' + \left(\sqrt{G} - p_1\frac{\sqrt{G}}{r''} - \frac{dq_1}{dv}\right)\cos b'',\\
\frac{d\zeta_1^*}{dv} &= \left(\frac{dp_1}{dv} - q_1\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)\cos c + \frac{q_1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}\cos c' + \left(\sqrt{G} - p_1\frac{\sqrt{G}}{r''} - \frac{dq_1}{dv}\right)\cos c''.
\end{aligned}\right.
$$

Sind die osculatorischen Kugelflächen des sphärischen Systems concentrisch, so haben ξ_1^*, η_1^*, ζ_1^* constante Werthe. In den Gleichungen 7) verschwinden dann die linken Seiten, hierdurch reduciren sich diese Gleichungen auf:

$$
8)\ \frac{dp_1}{dv} - q_1\frac{\sqrt{G}}{r''} = 0, \qquad 9)\ \frac{q_1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du} = 0, \qquad 10)\ \sqrt{G} - p_1\frac{\sqrt{G}}{r''} - \frac{dq_1}{dv} = 0.
$$

Nimmt man in der Gleichung 9) $q_1 = 0$, so giebt die Gleichung 8) $\frac{dp_1}{dv} = 0$, also $p_1 = k$, wo k eine Constante bedeutet. Für $p_1 = k$ und $q_1 = 0$ geben die Gleichungen 4):

$$
\xi_1^* - x = k\cos a,\ \eta_1^* - y = k\cos b,\ \zeta_1^* - z = k\cos c.
$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt:

$$
(\xi_1^* - x)^2 + (\eta_1^* - y)^2 + (\zeta_1^* - z)^2 = k^2,
$$

was die Gleichung einer Kugelfläche ist. Die Gleichung 9) giebt ferner:

$$\frac{d\sqrt{G}}{du} = 0,$$

das System der Krümmungslinien (v) ist dann plan, die Ebenen des Systems enthalten die Normalen zur Fläche. In diesem Falle hat man in den Gleichungen 10), 11) und 12) von IV $\sigma = \frac{\pi}{2}$ zu nehmen*). Wegen der in IV B enthaltenen Ausführungen ist ferner $\theta = \omega + \psi$, die Gleichungen 10), 11) und 12) von IV gehen dann in folgende über:

$$11)\ \begin{cases} \cos a = \cos l \cos(\omega+\psi) - \cos\lambda \sin(\omega+\psi), \\ \cos b = \cos m \cos(\omega+\psi) - \cos\mu \sin(\omega+\psi), \\ \cos c = \cos n \cos(\omega+\psi) - \cos\nu \sin(\omega+\psi), \end{cases} \qquad 12)\ \begin{cases} \cos a' = -\cos\alpha, \\ \cos b' = -\cos\beta, \\ \cos c' = -\cos\gamma. \end{cases}$$

$$13)\ \begin{cases} \cos a'' = \cos l \sin(\omega+\psi) + \cos\lambda \cos(\omega+\psi), \\ \cos b'' = \cos m \sin(\omega+\psi) + \cos\mu \cos(\omega+\psi), \\ \cos c'' = \cos n \sin(\omega+\psi) + \cos\nu \cos(\omega+\psi). \end{cases}$$

Legt man die Gleichungen 50) von IV zu Grunde, so führt die Bedingung:

$$\frac{d\sqrt{G}}{du} = 0$$

zu folgenden Bestimmungen der Coordinaten:

$$14)\ \begin{cases} (x-\xi)\cos\alpha + (y-\eta)\cos\beta + (z-\zeta)\cos\gamma = 0, \\ (x-\xi)\cos\lambda + (y-\eta)\cos\mu + (z-\zeta)\cos\nu = \dfrac{dV}{d\psi}\cos(\omega+\psi) + V\sin(\omega+\psi), \\ (x-\xi)\cos l + (y-\eta)\cos m + (z-\zeta)\cos n = \dfrac{dV}{d\psi}\sin(\omega+\psi) - V\cos(\omega+\psi). \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Fläche, es ist V eine beliebige Function von ψ oder v, alle übrigen Quantitäten beziehen sich auf eine Curve doppelter Krümmung unter

*) In den bemerkten Gleichungen von IV hat σ eine andere Bedeutung wie in den Gleichungen 1) dieses Abschnitts, was indessen zu keiner Verwechselung Veranlassung giebt.

Zugrundelegung der in I gebrauchten Bezeichnungen. Die erste Gleichung 14) giebt nach u differentiirt:

$$(\cos a' \cos\alpha + \cos b' \cos\beta + \cos c' \cos\gamma)\sqrt{E} - \frac{ds}{du}$$
$$+ \frac{(x-\xi)\cos\lambda + (y-\eta)\cos\mu + (z-\zeta)\cos\nu}{\varrho}\frac{ds}{du} = 0.$$

Wegen der Gleichungen 12) und der zweiten Gleichung 14) folgt:

$$15)\qquad \sqrt{E} = \left[\frac{\frac{dV}{d\psi}\cos(\omega+\psi) + V\sin(\omega+\psi)}{\varrho} - 1\right]\frac{ds}{du}.$$

Die letzte Gleichung 14) nach v differentiirt giebt:

$$(\cos a'' \cos l + \cos b'' \cos m + \cos c'' \cos n)\sqrt{G} = \left(\frac{d^2 V}{d\psi^2} + V\right)\sin(\omega+\psi)\frac{d\psi}{dv},$$

d. i. nach 13):

$$16)\qquad \sqrt{G} = \left(\frac{d^2 V}{d\psi^2} + V\right)\frac{d\psi}{dv}.$$

Es ist:

$$\frac{d\cos a}{du} = -\frac{\sqrt{E}}{r'}\cos a', \qquad \frac{d\cos a}{dv} = -\frac{\sqrt{G}}{r''}\cos a''.$$

Mittelst der Gleichungen 11), 12) und 13) findet man:

$$17)\qquad \frac{\sin(\omega+\psi)}{\varrho}\frac{ds}{du} = \frac{\sqrt{E}}{r'}, \qquad 18)\qquad \frac{d\psi}{dv} = \frac{\sqrt{G}}{r''}.$$

Aus 16) und 18) erhält man noch:

$$19)\qquad r'' = \frac{d^2 V}{d\psi^2} + V.$$

Die Substitution der Werthe von $\sqrt{G}$ und $\frac{\sqrt{G}}{r''}$ aus den Gleichungen 16) und 18) in die Gleichungen 8) und 10) geben folgende Relationen zwischen p_1 und q_1:

$$\frac{dp_1}{dv} = q_1\frac{d\psi}{dv}, \qquad \left(\frac{d^2 V}{d\psi^2} + V\right)\frac{d\psi}{dv} - p_1\frac{d\psi}{dv} - \frac{dq_1}{dv} = 0,$$

oder, wenn ψ zur unabhängigen Variabeln genommen wird:

$$\frac{dp_1}{d\psi} = q_1. \tag{20}$$

$$\frac{d^2V}{d\psi^2} + V - p_1 - \frac{dq_1}{d\psi} = 0. \tag{21}$$

Setzt man den Werth von q_1 aus der Gleichung 20) in die Gleichung 21) so folgt:

$$d^2 \frac{V - p_1}{d\psi^2} + V - p_1 = 0,$$

also:

$$V - p_1 = A\cos\psi - B\sin\psi, \tag{22}$$

wo A und B Constanten sind. In den Gleichungen 4) nehme man einfacher $\xi_1^* = 0$, $\eta_1^* = 0$, $\zeta_1^* = 0$. Die erste dieser Gleichungen wird dann:

$$0 = x + p_1 \cos a - q_1 \cos a'',$$

d. i. nach 11), 13) und 20):

$$0 = x + p_1 \Big[\cos l \cos(\omega + \psi) - \cos\lambda \sin(\omega + \psi)\Big]$$
$$- \frac{dp_1}{d\psi}\Big[\cos l \sin(\omega + \psi) + \cos\lambda\cos(\omega + \psi)\Big].$$

Setzt man hierin für x seinen Werth aus den Gleichungen 14) ein, so ergiebt sich:

$$0 = \xi + \Big[d\frac{V - p_1}{d\psi}\cos(\omega + \psi) + (V - p_1)\sin(\omega + \psi)\Big]\cos\lambda$$
$$+ \Big[d\frac{V - p_1}{d\psi}\sin(\omega + \psi) + (V - p_1)\cos(\omega + \psi)\Big]\cos l,$$

d. i. wegen 22):

$$0 = \xi + (A\sin\omega - B\cos\omega)\cos\lambda - (A\cos\omega + B\sin\omega)\cos l.$$

Aus dieser Gleichung entwickele man den Werth von ξ und füge die analogen Gleichungen für η und ζ hinzu. Es ergiebt sich dann folgendes System:

$$23)\quad \begin{cases} \xi = (B\cos\omega - A\sin\omega)\cos\lambda + (B\sin\omega + A\cos\omega)\cos l, \\ \eta = (B\cos\omega - A\sin\omega)\cos\mu + (B\sin\omega + A\cos\omega)\cos m, \\ \zeta = (B\cos\omega - A\sin\omega)\cos\nu + (B\sin\omega + A\cos\omega)\cos n. \end{cases}$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = B^2 + A^2,$$

d. h. der Punkt (ξ, η, ζ) liegt auf einer Kugelfläche. Man kann zu diesem Resultate auch auf folgende Art gelangen. Die Gleichungen 15) und 16) geben:

$$24)\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv} = \frac{\cos(\omega+\psi)}{\varrho}\frac{ds}{du}.$$

Die Gleichung 6) multiplicire man mit $\sqrt{E}$, setze also:

$$\sqrt{E} = p_1\frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{q_1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}.$$

Werden hierin die Werthe von:

$$\sqrt{E},\quad \frac{\sqrt{E}}{r'},\quad q_1,\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv},$$

aus den Gleichungen 15), 17), 20) und 24) substituirt, so ist die erhaltene Gleichung durch $\frac{ds}{du}$ theilbar, mit Weglassung dieses Factors folgt:

$$d\frac{V-p_1}{d\psi}\cos(\omega+\psi) + (V-p_1)\sin(\omega+\psi) = \varrho$$

d. i. nach 22):

$$A\sin\omega - B\cos\omega = \varrho,$$

durch welche Gleichung allgemein eine sphärische Curve characterisirt ist. In die Gleichungen 14) führe man die Werthe von ξ, η, ζ aus den Gleichungen 23) ein, es lassen sich dann die Gleichungen 14) durch folgendes System ersetzen:

$$
25)\quad \begin{cases} x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0, \\ x(\cos l \sin\omega + \cos\lambda\cos\omega) + y(\cos m\sin\omega + \cos\mu\cos\omega) \\ \qquad + z(\cos n\sin\omega + \cos\nu\cos\omega) = B + \dfrac{dV}{d\psi}\cos\psi + V\sin\psi, \\ x(\cos l\cos\omega - \cos\lambda\sin\omega) + y(\cos m\cos\omega - \cos\mu\sin\omega) \\ \qquad + z(\cos n\cos\omega - \cos\nu\sin\omega) = A + \dfrac{dV}{d\psi}\sin\psi - V\cos\psi. \end{cases}
$$

Die erste dieser Gleichungen ist diejenige der Normalebene einer sphärischen Curve. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich folgendes

Theorem:

Sind die osculatorischen Kugelflächen eines Systems sphärischer Krümmungslinien concentrisch, so sind die Krümmungslinien des andern Systems plan. Die Ebenen des planen Systems sind die Normalebenen einer beliebigen sphärischen Curve und enthalten gleichzeitig die Normalen der Fläche.

Soll das System (v) ebenfalls sphärisch sein, so findet die Gleichung 5) statt. Dieselbe reducirt sich wegen $\dfrac{d\sqrt{G}}{du} = 0$ auf $r'' = p_2$ d. i. nach 19):

$$\frac{d^2V}{d\psi^2} + V = p_2.$$

Da die linke Seite nur von ψ oder v, die rechte nur von u abhängt, so muss jede Seite der vorstehenden Gleichung constant sein. Es ist also $p_2 = k$, mithin auch $r'' = k$, wo k constant ist. Die Gleichung:

$$\frac{d^2V}{d\psi^2} + V = k$$

giebt:

$$V = k - A_0\cos\psi + B_0\sin\psi,$$

wo A_0 und B_0 Constanten sind. Für diesen Werth von V werden die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen 25):

$$B+\frac{dV}{d\psi}\cos\psi+V\sin\psi=B+B_0+k\sin\psi,$$

$$A+\frac{dV}{d\psi}\sin\psi-V\cos\psi=A+A_0-k\cos\psi.$$

Die Constanten A_0 und B_0 vereinigen sich mit den Constanten A und B, man kann, unbeschadet der Allgemeinheit, $A_0=0$, $B_0=0$, also $V=k$ nehmen. Für $V=k$ geben aber die Gleichungen 14):

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=k^2,$$

$$(x-\xi)\cos\alpha+(y-\eta)\cos\beta+(z-\zeta)\cos\gamma=0.$$

Da die zweite dieser Gleichungen sich auch schreiben lässt:

$$(x-\xi)\frac{d\xi}{du}+(y-\eta)\frac{d\eta}{du}+(z-\zeta)\frac{d\zeta}{du}=0,$$

so erhält man unmittelbar folgendes

Theorem:

Sind die osculatorischen Kugelflächen eines Systems sphärischer Krümmungslinien concentrisch, soll das zweite System ebenfalls sphärisch sein, so ist die Fläche die Enveloppe einer Kugelfläche von constantem Radius, deren Mittelpunkt eine beliebige sphärische Curve beschreibt.

Aus den Gleichungen 3) ergiebt sich als Gleichung der osculatorischen Kugelfläche einer sphärischen Krümmungslinie (v):

26) $$(\xi_2^*-x)^2+(\eta_2^*-y)^2+(\zeta_2^*-z)^2=p_2^2+q_2^2.$$

Geht diese Kugelfläche durch den festen Punkt (x_0, y_0, z_0), so findet die Bedingung statt:

27) $$(\xi_2^*-x_0)^2+(\eta_2^*-y_0)^2+(\zeta_2^*-z_0)^2=p_2^2+q_2^2,$$

mit deren Hülfe sich die Gleichung 26) auf folgende Form bringen lässt:

28) $$2(x-x_0)(\xi_2^*-x_0)+2(y-y_0)(\eta_2^*-y_0)+2(z-z_0)(\zeta_2^*-z_0)$$
$$=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2.$$

Man wende hierin die Transformation durch reciproke Radii vectores an, nehme den festen Punkt zum Centrum der Transformation und setze:

$$29)\qquad \frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}=\frac{2}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}.$$

Die Gleichung 27) geht dann in folgende Gleichung einer Ebene über, welche Ebene eine plane Krümmungslinie der transformirten Fläche bestimmt, in welche die sphärische Krümmungslinie der primitiven Fläche übergeht:

$$30)\qquad (x_1-x_0)(\xi_2^*-x_0)+(y_1-y_0)(\eta_2^*-y_0)+(z_1-z_0)(\zeta_2^*-z_0)=1.$$

An Stelle der Functionen ξ_2^*, η_2^*, ζ_2^* führe man drei Winkel α, β, γ, und eine Function Ω durch folgende Gleichungen ein:

$$31)\qquad \begin{gathered}\sqrt{(\xi_2^*-x_0)^2+(\eta_2^*-y_0)^2+(\zeta_2^*-z_0)^2}=\frac{1}{\Omega},\\ \frac{\xi_2^*-x_0}{\cos\alpha}=\frac{\eta_2^*-y_0}{\cos\beta}=\frac{\zeta_2^*-z_0}{\cos\gamma}=\frac{1}{\Omega}.\end{gathered}$$

Wegen der Gleichungen 31) lässt sich die Gleichung 30) auch schreiben:

$$32)\qquad (x_1-x_0)\cos\alpha+(y_1-y_0)\cos\beta+(z_1-z_0)\cos\gamma=\Omega.$$

Hierdurch ist die Bestimmung der Fläche mit einem System sphärischer Krümmungslinien, deren osculatorische Kugelflächen durch einen festen Punkt gehn, auf die Bestimmung der allgemeinsten Fläche mit einem System planer Krümmungslinien reducirt. Man kann immer α, β, γ als die Winkel ansehn, welche die Tangente einer beliebigen Curve doppelter Krümmung mit den Coordinatenaxen bildet. Vertauscht man in den Gleichungen 3) von IV x, y, z respective mit x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0, so fällt die bemerkte Gleichung mit der obigen Gleichung 32) zusammen. Um die allgemeinsten Werthe von x, y und z zu erhalten, welche den Gleichungen 3), 5) und 27) genügen, setze man in den Gleichungen 40) von IV x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0 statt x, y, z, darauf entwickele man die Werthe von x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0 aus den so erhaltenen Gleichungen und substituire dieselben in die Gleichungen 29); wodurch sich unmittelbar die gesuchten Werthe von x, y und z ergeben.

Man kann zu diesem Zweck auch einfach in den Gleichungen 40) von IV x, y, z respective ersetzen durch:

$$2\frac{x-x_0}{\varDelta},\quad 2\frac{y-y_0}{\varDelta},\quad 2\frac{z-z_0}{\varDelta},$$

wo $\varDelta=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$. Für den Fall, dass $\zeta_2^*=z_0$ oder $\cos\gamma=0$ ist, sind die Gleichungen 67) von IV zu Grunde zu legen. Eine weitere Ausführung der Rechnungen bietet keine Schwierigkeiten, so dass es unnöthig erscheint, dieselben hier weiter auszuführen.

Für den Fall, dass in den Gleichungen 3) oder 4) eine der Quantitäten p_2 oder p_1 constant ist, bildet die gesuchte Fläche eine Parallelfläche zu derjenigen, für welche p_2 oder p_1 verschwindet. Diese Bemerkung erlaubt einige der folgenden Betrachtungen zu vereinfachen.

Bewegt sich der Mittelpunkt einer Kugelfläche von variabelem Radius auf einer Curve doppelter Krümmung, so hat die Enveloppe der Kugelfläche ein System von Krümmungslinien, welches aus Kreisen besteht, also gleichzeitig sphärisch und plan ist. Dieses ist das einfachste Beispiel einer Fläche mit einem System sphärischer Krümmungslinien, aus diesem Grunde sollen einige Entwickelungen über diesen Fall beigefügt werden, welche gleichzeitig zur Motivirung einiger Rechnungen für den allgemeinen Fall sphärischer Krümmungslinien gelten können. Ist das System (v) sphärisch, so besteht die Gleichung 5), dieselbe mit r'' multiplicirt giebt:

$$r''=p_2+q_2\frac{r''}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}. \tag{33}$$

Ist das System (v) gleichzeitig plan, so hat man weiter:

$$\frac{r''}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}=-\cot\sigma_0, \tag{34}$$

wo σ_0 eine Function von u allein bezeichnet. Die Gleichungen 33) und 34) geben:

$$r''=p_2-q_2\cot\sigma_0,$$

oder:

35) $$p_2 - r'' = q_2 \cot \sigma_0.$$

Die zweite Gleichung 10) von II, nämlich:

$$d\frac{\frac{\sqrt{G}}{r''}}{du} = \frac{1}{r'}\frac{d\sqrt{G}}{du}$$

giebt entwickelt:

$$\left(1 - \frac{r''}{r'}\right)\frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{G}}{du} = \frac{dr''}{du}.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung 34) folgt:

$$-\left(1 - \frac{r''}{r'}\right)\sqrt{E}\cot\sigma_0 = \frac{dr''}{du}$$

oder:

36) $$\left(1 - \frac{r''}{r'}\right)\sqrt{E} = -\frac{dr''}{du}\tang\sigma_0.$$

Aus den Gleichungen 3) und 5) von II findet man leicht:

$$\frac{dx}{dv} = -r''\frac{d\cos a}{dv}, \quad \frac{dy}{dv} = -r''\frac{d\cos b}{dv}, \quad \frac{dz}{dv} = -r''\frac{d\cos c}{dv}.$$

Da r'' nur von u abhängt, so geben die vorstehenden Gleichungen integrirt:

37) $$x = \xi - r''\cos a, \quad y = \eta - r''\cos b, \quad z = \zeta - r''\cos c,$$

wo ξ, η, ζ nur von u abhängen, folglich als Coordinaten eines Punktes einer Curve doppelter Krümmung angesehen werden können, auf welche sich die Formeln von I anwenden lassen. Die Gleichungen 37) finden sich schon in III aufgestellt. Aus der ersten der bemerkten Gleichungen folgt:

$$\xi = x + r''\cos a.$$

Diese Gleichung nach u differentiirt, giebt nach 2) und 4) von II:

$$\frac{d\xi}{du} = \frac{dr''}{du}.\cos a + \left(1 - \frac{r''}{r'}\right)\sqrt{E}\cos a',$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung 36):

$$\frac{d\xi}{du} = \frac{dr''}{du}.(\cos a - \cos a' \operatorname{tang} \sigma_0) = \frac{1}{\cos\sigma_0}\frac{dr''}{du}(\cos a \cos \sigma_0 - \cos a' \sin \sigma_0).$$

Auf die angegebene Art erhält man aus 37) folgende Gleichungen:

38)
$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{du} &= \frac{1}{\cos\sigma_0}\frac{dr''}{du}.(\cos a \cos \sigma_0 - \cos a' \sin \sigma_0),\\
\frac{d\eta}{du} &= \frac{1}{\cos\sigma_0}\frac{dr''}{du}.(\cos b \cos \sigma_0 - \cos b' \sin \sigma_0),\\
\frac{d\zeta}{du} &= \frac{1}{\cos\sigma_0}\frac{dr''}{du}.(\cos c \cos \sigma_0 - \cos c' \sin \sigma_0).
\end{aligned}$$

Ist ds das Bogenelement der Curve, welcher der Punkt (ξ, η, ζ) angehört, so geben die Gleichungen 38):

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\sigma_0}\frac{dr''}{du}\right)^2.$$

Sei:

39)
$$\frac{ds}{du} = \frac{1}{\cos\sigma_0}\frac{dr''}{du}.$$

Wird s als unabhängige Variabele genommen, so lassen sich die Gleichungen 38) nach 39) einfacher schreiben:

40)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\xi}{ds} &= \cos a \cos \sigma_0 - \cos a' \sin \sigma_0,\\
\frac{d\eta}{ds} &= \cos b \cos \sigma_0 - \cos b' \sin \sigma_0,\\
\frac{d\zeta}{ds} &= \cos c \cos \sigma_0 - \cos c' \sin \sigma_0.
\end{aligned}\right.$$

Aus der Gleichung 39) folgt noch:

$$\frac{dr''}{ds} = \cos\sigma_0.$$

Es ist dieses dieselbe Gleichung wie die Gleichung 18) in III, wenn dort $S = r''$ und σ_0 statt σ gesetzt wird, da im vorliegenden Falle

σ eine andere Bedeutung hat. Durch Einsetzung der Werthe von x, y und z aus den Gleichungen 37) in die Gleichungen 3) und des Werthes von $p_2 - r''$ aus 35) erhält man:

$$\xi_2^* = \xi + \frac{q_2}{\sin\sigma_0}(\cos a \cos\sigma_0 - \cos a' \sin\sigma_0),$$

$$\eta_2^* = \eta + \frac{q_2}{\sin\sigma_0}(\cos b \cos\sigma_0 - \cos b' \sin\sigma_0),$$

$$\zeta_2^* = \zeta + \frac{q_2}{\sin\sigma_0}(\cos c \cos\sigma_0 - \cos c' \sin\sigma_0).$$

Unter Zuziehung der Gleichungen 40) lassen sich die vorstehenden Gleichungen durch folgende ersetzen:

41) $$\frac{\xi_2^* - \xi}{\frac{d\xi}{ds}} = \frac{\eta_2^* - \eta}{\frac{d\eta}{ds}} = \frac{\zeta_2^* - \zeta}{\frac{d\zeta}{ds}} = \frac{q_2}{\sin\sigma_0}.$$

Setzt man für p_2 und q_2 ihre Werthe aus 1) ein, so giebt die Gleichung 35):

$$r'' = R_2 \frac{\sin(\sigma_0 - \sigma)}{\sin\sigma_0},$$

oder:

$$R_2 = \frac{r''.\sin\sigma_0}{\sin(\sigma_0 - \sigma)}$$

und:

$$\frac{q_2}{\sin\sigma_0} = R_2 \frac{\sin\sigma}{\sin\sigma_0} = \frac{r''\sin\sigma}{\sin(\sigma_0 - \sigma)}.$$

Der Punkt (ξ, η, ζ) gehört einer Curve Γ an, welche der Mittelpunkt der Kugelfläche von variabelem Radius $(= r'')$ beschreibt. Der Mittelpunkt $(\xi_2^*, \eta_2^*, \zeta_2^*)$ der osculatorischen Kugelfläche einer sphärischen Krümmungslinie liegt auf einer Curve Γ_2^*. Aus den Gleichungen 41) folgt, dass die Curve Γ_2^* auf der Tangentenfläche der Curve Γ liegt. Für die Untersuchung der Enveloppe einer Kugelfläche erscheint die Beibehaltung der Curve Γ_2^* wenig geeignet, die Formeln gewinnen an

Einfachheit, wenn die geometrischen Elemente der Curve Γ eingeführt werden. Eine ganz ähnliche Erscheinung wiederholt sich in XI bei einer anderen Gattung von Flächen, so dass es geboten erscheint; die geometrischen Elemente der Curve Γ_2^* im Allgemeinen nicht in die vorkommenden Formeln einzuführen. Diese Bemerkungen, welche auf speciellen Fällen beruhn, sind geeignet, einige in den allgemeinen Untersuchungen von XII vorkommende Anschauungen zu motiviren und die Einführung neuer Quantitäten an Stelle von ξ_2^*, η_2^* und ζ_2^* a priori zu rechtfertigen.

X.

Flächen, für welche beide Systeme von Krümmungslinien sphärisch sind.

Die Flächen, für welche beide Systeme von Krümmungslinien sphärisch sind, lassen sich geometrisch sehr einfach aus den Resultaten von V und VI herleiten, mit Hülfe eines Satzes, dessen Beweis im Folgenden gegeben ist. Transformirt man die Flächen, für welche beide Systeme von Krümmungslinien plan sind, oder das eine System plan das andere sphärisch ist, durch reciproke Radii vectores, so erhält man im Allgemeinen offenbar Flächen, deren Krümmungslinien sämmtlich sphärisch sind. Dieser Satz lässt sich nun umkehren, woraus eine einfache Herleitung der in der Ueberschrift dieses Abschnitts genannten Flächen sich ergiebt. Für eine Parallelfläche bleiben die planen Krümmungslinien plan, die sphärischen bleiben sphärisch. Man kann also auch die zu Anfang bemerkten Flächen als Parallelflächen solcher ansehn, für welche durch die Transformation durch reciproke Radii vectores wenigstens ein System von Krümmungslinien plan wird. Diese Bemerkung, welche sich zuerst bei den Hn. Bonnet (Journal de l'École Polytechnique. Trente-Cinquième Cahier, p. 248) und Serret (Journal de Mathématiques. Année 1853, p. 161) findet, bildet im Folgenden den Gegenstand einer genaueren Untersuchung, welche bisher zu einer vollständigen Begründung des Satzes fehlte. Die Flächen mit nur sphärischen Krümmungslinien zerfallen in zwei Classen. In der ersten Classe liegen die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen jedes Systems in je einer festen Ebene, die beiden Ebenen, welche sich so ergeben, sind orthogonal zu einander. In der zweiten Classe liegen die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen des einen Systems auf einer Geraden, während für das andere System die Mittelpunkte auf einer beliebigen Curve liegen. Die zweite Classe gehört unter die in VI betrachteten Flächen, ein System von Krümmungslinien besteht nämlich aus Kreisen.

Für den Fall nur sphärischer Krümmungslinien finden die Gleichungen 3) und 4) von IX gleichzeitig statt. Die osculatorischen Kugelflächen beider Systeme sind in folgenden Gleichungen enthalten:

$$1) \qquad (\xi_1^* - x)^2 + (\eta_1^* - y)^2 + (\zeta_1^* - z)^2 = p_1^2 + q_1^2.$$

$$2) \qquad (\xi_2^* - x)^2 + (\eta_2^* - y)^2 + (\zeta_2^* - z)^2 = p_2^2 + q_2^2.$$

Durch Elimination von x, y und z zwischen den Gleichungen 3) und 4) von IX folgt:

$$3) \qquad \begin{aligned} \xi_1^* - \xi_2^* &= (p_1 - p_2)\cos a + q_2 \cos a' - q_1 \cos a'', \\ \eta_1^* - \eta_2^* &= (p_1 - p_2)\cos b + q_2 \cos b' - q_1 \cos b'', \\ \zeta_1^* - \zeta_2^* &= (p_1 - p_2)\cos c + q_2 \cos c' - q_1 \cos c''. \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt:

$$4) \qquad (\xi_1^* - \xi_2^*)^2 + (\eta_1^* - \eta_2^*)^2 + (\zeta_1^* - \zeta_2^*)^2 = (p_1 - p_2)^2 + q_1^2 + q_2^2,$$

wo also ξ_1^*, η_1^*, ζ_1^*, p_1 und q_1 nur von v, ξ_2^*, η_2^*, ζ_2^*, p_2 und q_2 nur von u abhängen. Die Gleichung 4) nach v und u differentiirt giebt:

$$5) \qquad \frac{d\xi_1^*}{dv}\frac{d\xi_2^*}{du} + \frac{d\eta_1^*}{dv}\frac{d\eta_2^*}{du} + \frac{d\zeta_1^*}{dv}\frac{d\zeta_2^*}{du} = \frac{dp_1}{dv}\frac{dp_2}{du}.$$

Aus dieser Gleichung leitet man leicht die folgende mit Hülfe successiver Differentiationen ab:

$$6) \qquad \begin{vmatrix} \frac{d\xi_1^*}{dv} & \frac{d\eta_1^*}{dv} & \frac{d\zeta_1^*}{dv} \\ \frac{d^2\xi_1^*}{dv^2} & \frac{d^2\eta_1^*}{dv^2} & \frac{d^2\zeta_1^*}{dv^2} \\ \frac{d^3\xi_1^*}{dv^3} & \frac{d^3\eta_1^*}{dv^3} & \frac{d^3\zeta_1^*}{dv^3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{d\xi_2^*}{du} & \frac{d\eta_2^*}{du} & \frac{d\zeta_2^*}{du} \\ \frac{d^2\xi_2^*}{du^2} & \frac{d^2\eta_2^*}{du^2} & \frac{d^2\zeta_2^*}{du^2} \\ \frac{d^3\xi_2^*}{du^3} & \frac{d^3\eta_2^*}{du^3} & \frac{d^3\zeta_2^*}{du^3} \end{vmatrix} = 0.$$

Man kann nach 5) noch analoge Gleichungen zur Gleichung 6) aufstellen, wenn gleichzeitig zwei entsprechende Coordinaten z. B. ζ_1^* und ζ_2^* respective durch p_1 und p_2 ersetzt werden. Verschwindet in der Gleichung 6) der erste Factor, so sind bekanntlich ξ_1^*, η_1^* und ζ_1^* durch eine lineare Relation mit constanten Coefficienten unter einander verbunden, d. h. der Punkt $(\xi_1^*, \eta_1^*, \zeta_1^*)$ liegt in einer festen Ebene. Wird dieselbe zur Ebene der y und z genommen, so ist $\xi_1^* = 0$. Die Gleichungen 4) und 5) nehmen dann folgende einfachere Formen an:

7) $$\xi_2^{*2} + (\eta_1^* - \eta_2^*)^2 + (\zeta_1^* - \zeta_2^*)^2 = (p_1 - p_2)^2 + q_1^2 + q_2^2.$$

8) $$\frac{d\eta_1^*}{dv}\,\frac{d\eta_2^*}{du} + \frac{d\zeta_1^*}{dv}\,\frac{d\zeta_2^*}{du} = \frac{dp_1}{dv}\,\frac{dp_2}{du}.$$

Es soll angenommen werden, dass keine der Quantitäten p_1 oder p_2 constant ist. Durch Differentiationen nach v erhält man weiter aus 8):

$$\begin{vmatrix} \frac{d\eta_1^*}{dv} & \frac{d\zeta_1^*}{dv} & \frac{dp_1^*}{dv} \\ \frac{d^2\eta_1^*}{dv^2} & \frac{d^2\zeta_1^*}{dv^2} & \frac{d^2p_1}{dv^2} \\ \frac{d^3\eta_1^*}{dv^3} & \frac{d^3\zeta_1^*}{dv^3} & \frac{d^3p_1^*}{dv^3} \end{vmatrix} = 0.$$

Sind A, B, C und C_0 Constanten, so giebt die vorstehende Gleichung:

9) $$Ap_1 + B\eta_1^* + C\zeta_1^* = C_0.$$

Die Constanten B und C können nicht gleichzeitig verschwinden, weil sonst p_1 constant wäre, was gegen die Voraussetzung ist. Ist in 9) $A = 0$, so liegt der Punkt $(\xi_1^*, \eta_1^*, \zeta_1^*)$ auf einer festen Geraden, nimmt man neben $\xi_1^* = 0$ noch $\eta_1^* = 0$, so wird die Gleichung 9) für $A = 0$, $C = 0$ und $C_0 = 0$ identisch. Dieser Fall, soll, als der weniger allgemeine, nachher behandelt werden.

In der Gleichung 9) seien die Factoren A und C von Null verschieden.

Durch Elimination von p_1 zwischen den Gleichungen 8) und 9) folgt:

$$10)\qquad \frac{d\eta_1^*}{dv}\left(A\frac{d\eta_2^*}{du}+B\frac{dp_2}{du}\right)+\frac{d\zeta_1^*}{dv}\left(A\frac{d\zeta_2^*}{du}+C\frac{dp_2}{du}\right)=0.$$

Die Gleichung 10) giebt zu folgenden Annahmen Veranlassung. Es seien η_1^* und ζ_1^* constant, da nun $\xi_1^* = 0$, so ist dieser Fall in IX schon behandelt und nicht weiter in Betracht zu ziehn. Zwischen η_1^* und ζ_1^* besteht eine lineare Relation mit constanten Coefficienten, der Punkt $(\xi_1^*, \eta_1^*, \zeta_1^*)$ liegt auf einer festen Geraden. Wird dieselbe zur Axe der z genommen, so ist $\xi_1^* = 0$, $\eta_1^* = 0$, die Gleichung 10) reducirt sich dann auf:

$$11)\qquad A\frac{d\zeta_2^*}{du}+C\frac{dp_2}{du}=0.$$

Endlich wird die Gleichung 10) identisch für:

$$12)\qquad A\frac{d\eta_2^*}{du}+B\frac{dp_2}{du}=0,\quad A\frac{d\zeta_2^*}{du}+C\frac{dp_2}{du}=0.$$

Es mögen zuerst die Gleichungen 12) discutirt werden. Sind B_0 und C'_0 Constanten, so geben die Gleichungen 12) integrirt:

$$13)\qquad A\eta_2^*+Bp_2=B_0,\quad A\zeta_2^*+Cp_2=C'_0.$$

Wird p_2 zwischen diesen Gleichungen eliminirt, so besteht zwischen η_2^* und ζ_2^* die Gleichung:

$$AC\eta_2^*-AB\zeta_2^*=B_0C-BC'_0.$$

Der Punkt $(\xi_2^*, \eta_2^*, \zeta_2^*)$ liegt in einer festen Ebene, welche zur Ebene der y und z senkrecht ist. Nimmt man diese Ebene zur Coordinatenebene der x und z, so ist $\eta_2^* = 0$. Da p_2 nicht constant ist, so muss die linke Seite der ersten Gleichung 13) identisch verschwinden, es ist dann $B = 0$ und $B_0 = 0$. Die Gleichungen 9) und 13) werden nun:

$$Ap_1+C\zeta_1^*=C_0,\quad A\zeta_2^*+Cp_2=C'_0,$$

oder:

$$A = -Ck, \quad C_0 = C\zeta_0, \quad C'_0 = Cp_0,$$

gesetzt:

14) $$kp_1 = \zeta_1^* - \zeta_0, \quad k\zeta_2^* = p_2 - p_0.$$

Wird der Anfangspunkt der Coordinaten in der Richtung der z-Axe verschoben, so kann man $\zeta_0 = 0$ nehmen. Setzt man in den Gleichungen 3) von IX aus 14) $p_2 = p_0 + k\zeta_2^*$ ein, so folgt unmittelbar, dass die Fläche, welche diesen Gleichungen genügt, eine Parallelfläche zu derjenigen ist, welche $p_0 = 0$ entspricht. Man setze also einfacher in den Gleichungen 14) $\zeta_0 = 0$ und $p_0 = 0$, wodurch dieselben in:

15) $$kp_1 = \zeta_1^*, \quad k\zeta_2^* = p_2,$$

übergehn. In der Gleichung 4) nehme man $\xi_1^* = 0$, $\eta_2^* = 0$ und nach Gleichung 15) $\zeta_1^* \zeta_2^* = p_1 p_2$, es ist dann:

$$\xi_2^{*2} + \eta_1^{*2} + \zeta_1^{*2} + \zeta_2^{*2} = p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2.$$

Diese Gleichung zerfällt nothwendig in die beiden folgenden, in denen h eine Constante bedeutet:

16) $$\begin{aligned} \eta_1^{*2} + \zeta_1^{*2} &= p_1^2 + q_1^2 \mp h^2, \\ \xi_2^{*2} + \zeta_2^{*2} &= p_2^2 + q_2^2 \pm h^2. \end{aligned}$$

Mit Hülfe der Gleichungen 16) und $\xi_1^* = 0$, $\eta_2^* = 0$ geben die Gleichungen 1) und 2) entwickelt:

17) $$x^2 + y^2 + z^2 - 2y\eta_1^* - 2z\zeta_1^* = \pm h^2,$$

18) $$x^2 + y^2 + z^2 - 2x\xi_2^* - 2z\zeta_2^* = \mp h^2.$$

Die Gleichungen 17) und 18) sind nur unwesentlich von einander verschieden, sie geben zu analogen Transformationen durch reciproke Radii vectores Veranlassung. Findet das obere Zeichen statt, so setze man in 17) $x = x - x_0 + x_0$, wo $x_0^2 = h^2$. Die Gleichung 17) lässt sich dann schreiben:

19) $$(x - x_0)^2 + y^2 + z^2 + 2(x - x_0)x_0 - 2y\eta_1^* - 2z\zeta_1^* = 0.$$

Diese Gleichung einer Kugelfläche geht durch Transformation durch reciproke Radii vectores, in Beziehung auf das Centrum $(x_0, 0, 0)$ der Transformation in eine Ebene über, das System der Krümmungslinien (u) wird dann plan. Findet in den Gleichungen 17) und 18) das untere Zeichen statt, so setze man in der Gleichung 18) $y = y + y_0 - y_0$, wo $y_0^2 = h^2$. Durch Entwickelung folgt dann:

20) $$x^2 + (y - y_0)^2 + z^2 - 2x\xi_2^* + 2(y - y_0)y_0 - 2z\zeta_2^* = 0.$$

Wendet man auf 20) die Transformation durch reciproke Radii vectores, in Beziehung auf das Centrum $(0, y_0, 0)$, an, so ergiebt sich wieder die Gleichung einer Ebene. Da die Gleichungen 19) und 20) zu demselben Resultate führen, so genügt es, eine dieser Gleichungen zu transformiren. Mittelst der Substitution:

21) $$\frac{x}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z}{z_1} = \frac{2h^2}{x_1^2 + (y_1 - y_0)^2 + z_1^2}$$

folgt:

$$h^2 - x_1\xi_2^* + (y_1 - y_0)y_0 - z_1\zeta_2^* = 0,$$

oder da $y_0^2 = h^2$:

22) $$x_1\xi_2^* - y_1 y_0 + z_1\zeta_2^* = 0.$$

Das System der sphärischen Krümmungslinien (v) wird durch die Transformation plan, die Ebenen des planen Systems gehn alle durch einen festen Punkt. Da $y_0^2 = h^2$, also $y_0 = \pm h$, so existiren zwei Centra der Transformation durch reciproke Radii vectores. Nimmt man in der Gleichung 17) das untere Zeichen und wendet die, durch 21) bestimmte, Transformation an, so folgt, wegen $h^2 = y_0^2$:

$$\left(1 - \frac{\eta_1^*}{y_0}\right)[x_1^2 + (y_1 - y_0)^2 + z_1^2] - 2(y_1 - y_0)(\eta_1^* - y_0) - 2z_1\zeta_1^* + 2y_0^2 = 0,$$

oder:

23) $$x_1^2 + y_1^2 + \left(z_1 - \frac{\zeta_1^*}{1 - \frac{\eta_1^*}{y_0}}\right)^2 = \frac{\eta_1^{*2} + \zeta_1^{*2} - y_0^2}{\left(1 - \frac{\eta_1^*}{y_0}\right)^2}.$$

Nimmt man in der ersten Gleichung 16) das untere Zeichen, setzt $h^2 = y_0^2$, so ist $\eta_1^{*2} + \zeta_1^{*2} - y_0^2 = p_1^2 + q_1^2$. Die Gleichungen 2) von IX geben $p_1^2 + q_1^2 = R_1^2$, hierdurch lässt sich die Gleichung 23) auch auf folgende Art darstellen:

$$x_1^2 + y_1^2 + \left(z_1 - \frac{\zeta_1^*}{1 - \frac{\eta_1^*}{y_0}}\right)^2 = \frac{R_1^2}{\left(1 - \frac{\eta_1^*}{y_0}\right)^2}.$$

Das sphärische System bleibt also nach der Transformation sphärisch. Für $h = 0$ geben die Gleichungen 17) und 18):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2y\eta_1^* - 2z\zeta_1^* &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x\xi_2^* - 2z\zeta_2^* &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Für:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{2}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

werden die Gleichungen 24):

$$y_1 \eta_1^* + z_1 \zeta_1^* = 1, \quad x_1 \xi_2^* + z_1 \zeta_2^* = 1, \tag{25}$$

was die Gleichungen zweier Ebenen sind

Ist von den beiden Quantitäten p_1 und p_2 eine constant, so sei dieses mit p_2 der Fall. Wäre nämlich p_1 constant, so gäbe die Gleichung 9) zwischen η_1^* und ζ_1^* eine lineare Relation, welche sich auf $\eta_1^* = 0$ reduciren lässt, welcher Fall, wie sich nachher ergiebt, Kreisen als Krümmungslinien entspricht. Ist p_2 constant, so ist dieses nach 12) auch mit η_2^* und ζ_2^* der Fall. Man kann einfach $\eta_2^* = 0$, $\zeta_2^* = 0$ setzen und die gesuchte Fläche als Parallelfläche derjenigen ansehn, für welche $p_2 = 0$ ist. Für $\zeta_2^* = 0$ reducirt sich die Gleichung 22) auf:

$$x_1 \xi_2^* - y_1 y_0 = 0.$$

Die Ebenen der transformirten Krümmungslinien gehn sämmtlich durch eine feste Gerade.

Die Gleichung 10) lässt noch die Annahme $\xi_1^* = 0$, $\eta_1^* = 0$ zu, zu welchen Relationen dann die Gleichung 11) tritt. Die Gleichungen

14) bleiben ungeändert, die gesuchte Fläche ist wieder eine Parallelfläche zu derjenigen, für welche die Gleichungen 15) bestehn.

Die Gleichungen 7) von IX multiplicire man respective mit $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$, die Summe der Producte giebt dann:

$$\text{26)} \qquad \frac{d\xi_1^*}{dv}\cos a + \frac{d\eta_1^*}{dv}\cos b + \frac{d\zeta_1^*}{dv}\cos c = \frac{dp_1}{dv} - q_1\frac{\sqrt{G}}{r''}.$$

Auf analoge Weise folgt:

$$\text{27)} \qquad \frac{d\xi_1^*}{dv}\cos a' + \frac{d\eta_1^*}{dv}\cos b' + \frac{d\zeta_1^*}{dv}\cos c' = \frac{q_1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

Die Gleichung 27) lässt sich auch direct aus der Gleichung 26) durch Differentiation nach u herleiten. Für $\xi_1^* = 0$, $\eta_1^* = 0$ und $\zeta_1^* = kp_1$ reduciren sich die Gleichungen 26) und 27) auf:

$$k\frac{dp_1}{dv}\cos c = \frac{dp_1}{dv} - q_1\frac{\sqrt{G}}{r''}, \qquad k\frac{dp_1}{dv}\cos c' = \frac{q_1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

Die Elimination von $\frac{dp_1}{dv}$ zwischen diesen Gleichungen giebt:

$$\text{28)} \qquad \frac{k\cos c'}{1-k\cos c} = \frac{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}}{\frac{\sqrt{G}}{r''}} = \frac{r''}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

Nun ist nach II:

$$\frac{d\cos c'}{dv} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}\cos c'', \qquad \frac{d\cos c}{dv} = -\frac{\sqrt{G}}{r''}\cos c''.$$

Wird die Gleichung 28) rechts mit $k\cos c''$ multiplicirt und dividirt, so lässt sich dieselbe schreiben:

$$\frac{k\cos c'}{1-k\cos c} = \frac{\frac{dk\cos c'}{dv}}{d\frac{1-k\cos c}{dv}}$$

oder:

$$d\frac{\frac{k\cos c'}{1-k\cos c}}{dv} = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung 28) ist also von v unabhängig, kann also nur Function von u allein sein, folglich ist auch:

$$\frac{r''}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}$$

nur von u abhängig, zu Folge der Gleichung 5) von IX ist dann r'' ebenfalls Function von u allein, das System der Krümmungslinien (v) besteht aus Kreisen, das betreffende System ist also plan. Die hierhin gehörigen Flächen sind in einer Anmerkung zu diesem Abschnitt analytisch definirt. Sieht man von diesen Flächen ab, so ergeben sich aus dem Vorstehenden die folgenden Resultate. Die Gleichung 20) wird identisch für $x = 0$, $y = y_0$ und $z = 0$. Mit Rücksicht auf die Gleichungen $\xi_1^* = 0$ und $\eta_2^* = 0$, folgt, dass die Mittelpunkte der Kugelflächen zweier Systeme sphärischer Krümmungslinien in zwei Ebenen liegen, die zu einander normal sind. Die Flächen, welche beide Systeme von Krümmungslinien sphärisch haben, sind Parallelflächen zu anderen Flächen, welche dieselbe Eigenschaft besitzen und für welche die Kugelflächen des einen Systems durch einen festen Punkt gehn. Wird dieser feste Punkt zum Centrum der Transformation durch reciproke Radii vectores genommen, so gehn die Kugelflächen in Ebenen über, welche durch einen zweiten festen Punkt gehn, der im Allgemeinen nicht mit dem gemeinsamen Schnittpunkt der Kugelflächen coincidirt. Das zweite System von Krümmungslinien bleibt sphärisch. Es kann bei den bemerkten Parallelflächen auch der Fall eintreten, dass die Kugelflächen der beiden sphärischen Systeme durch denselben Punkt gehn. In Beziehung auf diesen Punkt lassen sich die Kugelflächen durch reciproke Radii vectores in zwei Systeme von Ebenen transformiren, jedes der beiden Systeme ist einer festen Richtung parallel. Die beiden festen

Richtungen sind senkrecht zu einander. Dieses Resultat entspricht den Gleichungen 25) von V, so wie das allgemeinere Resultat den Gleichungen 45) von VI entspricht. Man gelangt wieder zu dem Satze, welcher zu Anfang dieses Abschnitts angeführt ist. Die Flächen, für welche beide Systeme von Krümmungslinien sphärisch sind, bilden Parallelflächen zu denjenigen, welche mit Hülfe der Transformation durch reciproke Radii vectores aus den Flächen folgen, die ein System planer und ein System sphärischer Krümmungslinien haben, oder, für welche alle Krümmungslinien plan sind.

Anmerkung zu X.

Ueber einige Flächen, für welche ein System von Krümmungslinien aus Kreisen besteht.

Die zweite Classe der in X betrachteten Flächen, deren geometrische Definition, als Parallelflächen der Enveloppen einer Kugelfläche, sehr einfach ist, bieten ein besonderes Interesse dar, als auch die Ausführungen der analytischen Rechnungen mit Hülfe der oben gefundenen Resultate sich ohne grosse Weitläufigkeiten bewerkstelligen lassen. Man kann hierbei einen doppelten Weg einschlagen, indem man sich erstens das Problem stellt, die Enveloppen einer Kugelfläche von variabelem Radius zu finden, welche ausser den Kreisen noch ein System sphärischer Krümmungslinien besitzen. Zweitens lassen sich die in VI aufgestellten Resultate für Flächen mit einem System planer und einem System sphärischer Krümmungslinien benutzen, indem man das plane System der Bedingung unterwirft, aus Kreisen zu bestehn. Da der erste der angedeuteten Wege eine Wiederholung schon in VI ausgeführter Rechnungen erfordert, so scheint es von selbst geboten, die in VI gegebenen Gleichungen zu Grunde zu legen. Das Problem reducirt sich dann einfach auf Herstellung der Bedingungen, dass in den Gleichungen von VI r'' von v unabhängig ist.

Mit Rücksicht auf die gewählten Bezeichnungen gilt die Gleichung 6) von IV, nämlich:

1) $$\sin\sigma\frac{d\theta}{dv}=\frac{\sqrt{G}}{r''},$$

für alle Flächen mit einem System planer Krümmungslinien. Sind die Ebenen der planen Krümmungslinien den Normalebenen einer planen Curve parallel, so geben die Gleichungen 57) und 58) von IV:

2) $$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=e^{2V+2\int\cot\sigma\,d\varepsilon}$$ 3) $$\frac{d\theta}{dV}=\cos\theta.$$

Es ist V eine beliebige Function von v. In Folge der Gleichung 53) von IV ist $\cos c''=\sin\theta$, folglich:

$$\frac{dz}{dv}=\sqrt{G}\,.\sin\theta.$$

Durch Elimination von $\sqrt{G}$ zwischen dieser Gleichung und der Gleichung 1) folgt:

$$\frac{dz}{dv}=r''\sin\sigma\sin\theta\frac{d\theta}{dv}.$$

Wird V als unabhängige Variabele genommen, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichung 3):

4) $$\frac{dz}{dV}=r''\sin\sigma\sin\theta\cos\theta.$$

Zu den vorstehenden Gleichungen nehme man die Gleichungen 51) von IV, d. i. die folgenden:

5) $$\begin{cases}\cos a = \sin\varepsilon\cos\sigma-\cos\varepsilon\sin\sigma\sin\theta,\\ \cos b = -\cos\varepsilon\cos\sigma-\sin\varepsilon\sin\sigma\sin\theta,\\ \cos c = \sin\sigma\cos\theta.\end{cases}$$

Für den ersten Fall der in VI behandelten Flächen finden die dort gegebenen Gleichungen 27) statt. Man setze in denselben:

$$R_1\sin\tau=-\frac{dW}{dV},\quad \zeta_1^*=W^{*}),$$

*) Hierbei ist auf pag. 66 ein Druckfehler zu verbessern. In Gleichung 28) und der vorhergehenden muss ζ_1^* statt ξ_1^* stehn.

wodurch sich folgende Gleichungen ergeben:

6)
$$\begin{cases} x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = -k\cos\sigma, \\ x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon = k\sin\sigma\sin\theta - \dfrac{dW}{dV}\cos\theta, \\ z = W - k\sin\sigma\cos\theta - \dfrac{dW}{dV}\sin\theta. \end{cases}$$

Es ist W eine beliebige Function von V. Die letzte der vorstehenden Gleichungen differentiire man nach V, mit Rücksicht auf die Gleichungen 3) und 4) folgt,:

$$r''\sin\sigma\cos\theta = k\sin\sigma\cos\theta + \frac{dW}{dV}\sin\theta - \frac{d^2W}{dV^2},$$

oder:

7)
$$(r'' - k)\sin\sigma = \frac{dW}{dV}\operatorname{tang}\theta - \frac{d^2W}{dV^2}\,\frac{1}{\cos\theta}.$$

Diese Gleichung nach V differentiirt giebt, wegen 3),:

$$\frac{dr''}{dV}\sin\sigma = \left(\frac{dW}{dV} - \frac{d^3W}{dV^3}\right)\frac{1}{\cos\theta}.$$

Soll nun r'' von v, also auch von V unabhängig sein, so verschwindet die linke Seite der vorstehenden Gleichung, es ist dann also:

$$\frac{dW}{dV} - \frac{d^3W}{dV^3} = 0,$$

oder:

8)
$$W = C - Ae^{V} - Be^{-V}.$$

wo C, A und B Constanten sind. Setzt man aus 2):

9)
$$\begin{cases} \operatorname{tang}\theta = \dfrac{e^{V+\int\cot\sigma\,d\varepsilon} - e^{-V-\int\cot\sigma\,d\varepsilon}}{2}, \\ \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{e^{V+\int\cot\sigma\,d\varepsilon} + e^{-V-\int\cot\sigma\,d\varepsilon}}{2}, \end{cases}$$

so ist nach 7), 8) und 9) r'' durch folgende Gleichung bestimmt:

10) $$(r''-k)\sin\sigma = Ae^{-\int\cot\sigma\,d\varepsilon}+Be^{\int\cot\sigma\,d\varepsilon}.$$

Setzt man:

11) $$X = x+r''\cos a,\qquad Y = y+r''\cos b,\qquad Z = z+r''\cos c,$$

so ist (X, Y, Z) der Mittelpunkt der Kugelfläche vom Radius r'', deren Enveloppe durch die Gleichungen 6), 8) und 9) bestimmt ist. Fügt man zu den bemerkten Gleichungen noch die Gleichung 10) hinzu, so sind die Coordinaten X, Y und Z aus 11) durch folgende Gleichungen bestimmt:

12) $$\begin{cases} X\sin\varepsilon - Y\cos\varepsilon = \cot\sigma\left[Ae^{-\int\cot\sigma\,d\varepsilon}+Be^{\int\cot\sigma\,d\varepsilon}\right],\\ X\cos\varepsilon + Y\sin\varepsilon = Ae^{-\int\cot\sigma\,d\varepsilon}-Be^{\int\cot\sigma\,d\varepsilon},\\ Z = C. \end{cases}$$

Es gehört der Punkt (X, Y, Z) einer beliebigen planen Curve an.

Die erste Annahme des zweiten Falls der in VI betrachteten Flächen ist dort in den Gleichungen 32) und 33) enthalten. Diese Gleichungen sind folgende:

13) $$\begin{cases} x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = 0,\\ x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon = -\cos\theta\dfrac{dW}{dV},\\ z = W-\sin\theta\dfrac{dW}{dV}, \end{cases}$$

wo:

14) $$\cos\sigma = k\cos\varepsilon.$$

Es gelten für den Winkel θ wieder die Gleichungen 9). Für die in Rede stehenden Flächen ist auch das System (u) aus Kreisen gebildet.

Für die zu bestimmenden Flächen sind also beide Systeme von Krümmungslinien Kreise. Hält man die Gleichungen 13) mit den Gleichungen 6) zusammen, so ist ohne weitere Rechnung ersichtlich, dass W wieder durch die Gleichung 8) bestimmt ist, wenn r'' nur von u abhängt. Für X, Y und Z gelten wieder die Gleichungen 12), an Stelle der Gleichung 10) tritt die folgende:

15) $$r'' \sin\sigma = Ae^{-\int \cot\sigma\, d\varepsilon} + Be^{\int \cot\sigma\, d\varepsilon}.$$

Zwischen den Winkeln σ und ε besteht die Gleichung 14). Setzt man:

$$\sin\sigma = \sqrt{1 - k^2 \cos^2\varepsilon},$$

also:

$$\int \cot\sigma\, d\varepsilon = \log[\sqrt{1 - k^2\cos^2\varepsilon} + k\sin\varepsilon],$$

so geben die Gleichungen 12), 14) und 15):

16) $$\begin{cases} X = \dfrac{A - B(1-k^2)}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}}\cos\varepsilon, \\ Y(1-k^2) + kA + kB(1-k^2) = \dfrac{A - B(1-k^2)}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}}\sin\varepsilon \\ Z = C. \end{cases}$$

$$r''(1-k^2) - A - B(1-k^2) = -k\frac{A - B(1-k^2)}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varepsilon}}\sin\varepsilon.$$

Die beiden Gleichungen für Y und r'' geben:

17) $$r'' + kY = A + B(1-k^2).$$

Durch Elimination von ε zwischen den Gleichungen für X und Y erhält man:

18) $$X^2 + (1-k^2)\left[Y + k\frac{A + B(1-k^2)}{1-k^2}\right]^2 = \frac{[A - B(1-k^2)]^2}{1-k^2},$$

welche Gleichung eine Curve zweiten Grades, die einen Mittelpunkt hat, repräsentirt. Wenn $k = 1$, so hat man nach 14) $\sigma = \varepsilon$. An Stelle der Gleichungen 16), 17) und 18) treten die folgenden:

$$X = 2A\cot\varepsilon, \qquad Y + B = A(1 - \cot^2\varepsilon), \qquad Z = C.$$

$$r'' + Y = 2A.$$

$$4A(Y + B - A) + X^2 = 0.$$

Die Curve, welche der Mittelpunkt der Kugelfläche beschreibt, ist eine Parabel. Die verschiedenen Flächen, welche der Bedingung 14) genügen, sind bekanntlich in den Enveloppen einer Kugelfläche enthalten, die drei gegebene Kugelflächen berührt, welche Enveloppen von Dupin mit dem Namen „Cycliden" belegt worden sind*).

Zu allgemeineren Resultaten geben die Flächen von VI Veranlassung, für welche die dort bemerkte Gleichung 44), nämlich:

$$\cos\sigma = k\cos\gamma \tag{19}$$

gilt. Der besseren Uebersicht halber sollen die Gleichungen 45), 62), 67) und 69) von VI in folgenden Formen reproducirt werden:

$$\left\{\begin{aligned} &x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma = 0,\\ &x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu = (k\cos\nu+\sin\theta\sin\sigma)R_1\cos\tau+\cos\theta R_1\sin\tau,\\ &x\cos l+y\cos m+z\cos n = (k\cos n-\cos\theta\sin\sigma)R_1\cos\tau+\sin\theta R_1\sin\tau,\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Bedeutet ψ eine Function von v, so ist:

$$R_1\sin\tau = \sqrt{1-k^2}\,\frac{dR_1\cos\tau}{d\psi}. \tag{21}$$

Für den Winkel θ bestehn die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\theta\cos\nu-\cos\theta\cos n = \sin\gamma\,\frac{-k\sin\gamma+\sin\sigma\sin(\psi-t)}{\sin\sigma-k\sin\gamma\sin(\psi-t)},\\ &\sin\theta\cos n+\cos\theta\cos\nu = \sin\gamma\,\frac{\cos(\psi-t)\,.\sqrt{1-k^2}}{\sin\sigma-k\sin\gamma\sin(\psi-t)}.\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Es hängt der Winkel t nur von s mittelst der Gleichung:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\cos\gamma\cos n}{\varrho\sin\sigma\sin^2\gamma}\sqrt{1-k^2}. \tag{23}$$

---

*) Diese Benennung findet sich in Dupin: »Applications de Géométrie et de Mechanique«. Paris 1822, p. 200, in dem Abschnitt« Propriétés des surfaces cyclides ainsi des courbes et des surfaces du second degré. Die Bestimmung der Krümmungslinien der Cyclide, welche von Dupin herrührt, hat zuerst Hachette in der »Correspondance sur l'École Polytechnique (t. I pag. 22—25, Paris 1808) mitgetheilt. Eine eigene Notiz von Dupin findet sich in der bemerkten Correspondance, t. II p. 420—425 (Paris 1813) u. d. T. »Mémoire sur la Sphère tangente à trois ou quatre autres«.

ab. Durch Differentiation einer der Gleichungen 22) nach ψ folgt, da nach 19) $\sin^2\sigma - k^2\sin^2\gamma = 1 - k^2$:

24) $$\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sin\sigma - k\sin\gamma\sin(\psi - t)}.$$

Aus den in IV aufgestellten Gleichungen 10) und 12) findet man leicht:

25) $$\begin{cases} \cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma = \cos\sigma, \\ \cos a\cos\lambda + \cos b\cos\mu + \cos c\cos\nu = -\sin\sigma\sin\theta, \\ \cos a\cos l + \cos b\cos m + \cos c\cos n = \sin\sigma\cos\theta. \end{cases}$$

26) $$\begin{cases} \cos a''\cos\lambda + \cos b''\cos\mu + \cos c''\cos\nu = \cos\theta, \\ \cos a''\cos l + \cos b''\cos m + \cos c''\cos n = \sin\theta. \end{cases}$$

Die zweite und dritte Gleichung 20) differentiire man nach v. Mit Rücksicht auf die beiden Gleichungen 26) folgt:

$$\sqrt{G}\cos\theta = (\cos\theta\sin\sigma R_1\cos\tau - \sin\theta R_1\sin\tau)\frac{d\theta}{dv} + (k\cos\nu + \sin\theta\sin\sigma)\frac{dR_1\cos\tau}{dv} + \cos\theta\frac{dR_1\sin\tau}{dv},$$

$$\sqrt{G}\sin\theta = (\sin\theta\sin\sigma R_1\cos\tau + \cos\theta R_1\sin\tau)\frac{d\theta}{dv} + (k\cos n - \cos\theta\sin\sigma)\frac{dR_1\cos\tau}{dv} + \sin\theta\frac{dR_1\sin\tau}{dv}.$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen werde mit $\cos\theta$, die zweite mit $\sin\theta$ multiplicirt, die Summe der so erhaltenen Produkte führt auf:

$$\sqrt{G} = \sin\sigma R_1\cos\tau\frac{d\theta}{dv} + k(\cos\nu\cos\theta + \cos n\sin\theta)\frac{dR_1\cos\tau}{dv} + \frac{dR_1\sin\tau}{dv}.$$

Setzt man hierin nach 1):

$$\sqrt{G} = r''\sin\sigma\frac{d\theta}{dv},$$

führt darauf ψ statt v als unabhängige Variabele ein, so besteht für r'' die Gleichung:

$$r''\sin\sigma\frac{d\theta}{d\psi} = \sin\sigma R_1\cos\tau\frac{d\theta}{d\psi} + k(\cos\nu\cos\theta + \cos n\sin\theta)\frac{dR_1\cos\tau}{d\psi} + \frac{dR_1\sin\tau}{d\psi}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 21), 22) und 24) lässt sich die vorstehende Gleichung auf folgende Form bringen:

27) $$r'' \sin\sigma = \sin\sigma R_1 \cos\tau + k \sin\gamma \cos(\psi - t) \frac{dR_1 \cos\tau}{d\psi} + \left[\sin\sigma - k \sin\gamma \sin(\psi - t)\right] \frac{d^2 R_1 \cos\tau}{d\psi^2}.$$

Soll r'' unabhängig von v, also auch von ψ sein, so erhält man durch Differentiation nach ψ:

$$0 = \left[\sin\sigma - k \sin\gamma \sin(\psi - t)\right] \left[\frac{dR_1 \cos\tau}{d\psi} + \frac{d^3 R_1 \cos\tau}{d\psi^3}\right],$$

d. i.

$$\frac{dR_1 \cos\tau}{d\psi} + \frac{d^3 R_1 \cos\tau}{d\psi^3} = 0.$$

Sind A, B und C Constanten, so folgt:

28) $$R_1 \cos\tau = A + B \cos\psi + C \sin\psi,$$

also nach 27):

29) $$r'' = A + \frac{-B \sin t + C \cos t}{\sin\sigma} k \sin\gamma.$$

Haben X, Y und Z wieder dieselben Bedeutungen, wie in den Gleichungen 11), so findet man aus den Gleichungen 20)—29):

30)
$$\left\{\begin{aligned}
&X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = \cos\sigma\left[A + \frac{-B\sin t + C\cos t}{\sin\sigma} k \sin\gamma\right],\\
&X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu = Ak\cos\nu + B\frac{\cos n \cos t\sqrt{1-k^2} - \cos\nu \sin t \sin\sigma}{\sin\gamma}\\
&\qquad + C\frac{\cos n \sin t\sqrt{1-k^2} + \cos\nu \cos t \sin\sigma}{\sin\gamma},\\
&X\cos l + Y\cos m + Z\cos n = Ak\cos n + B\frac{-\cos n \sin t \sin\sigma - \cos\nu \cos t\sqrt{1-k^2}}{\sin\gamma}\\
&\qquad + C\frac{\cos n \cos t \sin\sigma - \cos\nu \sin t\sqrt{1-k^2}}{\sin\gamma}.
\end{aligned}\right.$$

Bei der Herstellung dieser Gleichungen ist die Relation $\cos\sigma = k\cos\gamma$ in Betracht zu ziehn, diese Gleichung giebt nach s differentiirt:

31) $$-\sin\sigma\frac{d\sigma}{ds} = \frac{k\cos\nu}{\varrho}.$$

Es ist ferner:

32) $$\frac{d\sin\gamma}{ds} = -\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\frac{d\cos\gamma}{ds} = -\frac{\cos\gamma\cos\nu}{\varrho\sin\gamma}.$$

Mit Rücksicht auf $\cos\sigma = k\cos\gamma$ erhält man aus 31) und 32):

33) $$d\frac{\frac{\sin\sigma}{\sin\gamma}}{ds} = \frac{(1-k^2)\cos\nu\cos\gamma}{\varrho\sin\sigma\sin^3\gamma}, \quad d\frac{\frac{1}{\sin\gamma}}{ds} = \frac{\cos\nu\cos\gamma}{\varrho\sin^3\gamma}.$$

Wird die Gleichung 29) nach s differentiirt, und dann durch $\cos\sigma = k\cos\gamma$ dividirt, so folgt, unter Zuziehung der Gleichungen 31) und 32):

34) $$\frac{1}{\cos\sigma}\frac{dr''}{ds} = \frac{(B\sin t - C\cos t)\cos\nu.(1-k^2)}{\varrho\sin\gamma\sin^3\sigma} - \frac{(B\cos t + C\sin t)\cos n\sqrt{1-k^2}}{\varrho\sin\gamma\sin^2\sigma}.$$

Die Gleichungen 30) differentiire man nach s, wobei der Werth von $\frac{dt}{ds}$ durch 23) bestimmt ist. Wegen der Gleichungen 31) — 34) erhält man das folgende, sehr einfache, System:

$$\frac{dX}{ds}\cos\alpha + \frac{dY}{ds}\cos\beta + \frac{dZ}{ds}\cos\gamma = \frac{1}{\cos\sigma}\frac{dr''}{ds},$$

$$\frac{dX}{ds}\cos\lambda + \frac{dY}{ds}\cos\mu + \frac{dZ}{ds}\cos\nu = 0,$$

$$\frac{dX}{ds}\cos l + \frac{dY}{ds}\cos m + \frac{dZ}{ds}\cos n = 0.$$

Diese Gleichungen geben:

35) $$\frac{\frac{dX}{ds}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{dY}{ds}}{\cos\beta} = \frac{\frac{dZ}{ds}}{\cos\gamma} = \frac{\frac{dr''}{ds}}{\cos\sigma}$$

und hieraus:

$$\left(\frac{dr''}{ds}\right)^2 = \left[\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2\right] \cos^2\sigma.$$

Zwischen X, Y, Z und r'' leitet man aus 29) und 30) folgende Gleichung ab:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = r''^2 + (1-k^2)(B^2 + C^2 - A^2). \tag{36}$$

Die vorhergehenden Resultate erfordern eine Modification für den Fall $k = 1$, oder $\sigma = \gamma$. Es sind dann die Gleichungen 76), 77) und 79) von VI zu nehmen, welche Gleichungen sich auf folgende Weise darstellen lassen:

$$\tag{37} \begin{cases} x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0, \\ x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = (\cos\nu + \sin\theta\sin\gamma)R_1\cos\tau - \cos\theta\dfrac{dR_1\cos\tau}{dV}, \\ x\cos l + y\cos m + z\cos n = (\cos n - \cos\theta\sin\gamma)R_1\cos\tau - \sin\theta\dfrac{dR_1\cos\tau}{dV}. \end{cases}$$

Es ist der Winkel θ durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\tag{38} \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{-\left[(V+M)^2\sin^2\gamma - 1\right]\dfrac{\cos\nu}{\sin\gamma} + 2(V+M)\cos n}{(V+M)^2\sin^2\gamma + 1}, \\ \cos\theta = \dfrac{\left[(V+M)^2\sin^2\gamma - 1\right]\dfrac{\cos n}{\sin\gamma} + 2(V+M)\cos\nu}{(V+M)^2\sin^2\gamma + 1}. \end{cases}$$

Es bedeutet V eine beliebige Function von v, M ist nur von s abhängig mittelst der Gleichung:

$$\frac{dM}{ds} = \frac{\cos n\cos\gamma}{\varrho\sin^3\gamma}. \tag{39}$$

Für die Gleichungen 37) gelten wieder die Gleichungen 25) und 26). Wird die zweite und dritte Gleichung von 37) nach v differentiirt, so folgt, mit Rücksicht auf die Gleichungen 26),:

$$\sqrt{G}\cos\theta = \left(\cos\theta\sin\gamma R_1\cos\tau + \sin\theta\frac{dR_1\cos\tau}{dV}\right)\frac{d\theta}{dv}$$
$$+(\cos\nu+\sin\theta\sin\gamma)\frac{dR_1\cos\tau}{dV}\frac{dV}{dv}-\cos\theta\frac{d^2R_1\cos\tau}{dV^2}\frac{dV}{dv},$$
$$\sqrt{G}\sin\theta = \left(\sin\theta\sin\gamma R_1\cos\tau - \cos\theta\frac{dR_1\cos\tau}{dV}\right)\frac{d\theta}{dv}$$
$$+(\cos n-\cos\theta\sin\gamma)\frac{dR_1\cos\tau}{dV}\frac{dV}{dv}-\sin\theta\frac{d^2R_1\cos\tau}{dV^2}\frac{dV}{dv}.$$

Die beiden vorstehenden Gleichungen respective mit $\cos\theta$ und $\sin\theta$ multiplicirt und addirt geben:

40) $$\sqrt{G} = \sin\gamma R_1\cos\tau\frac{d\theta}{dv}+(\cos\nu\cos\theta+\cos n\sin\theta)\frac{dR_1\cos\tau}{dV}\frac{dV}{dv}$$
$$-\frac{d^2R_1\cos\tau}{dV^2}\frac{dV}{dv}.$$

Für $\sigma=\gamma$ giebt die Gleichung 1):

$$\sqrt{G} = r''\sin\gamma\frac{d\theta}{dv}.$$

Dieser Werth von $\sqrt{G}$ werde in die Gleichung 40) substituirt und V statt v zur unabhängigen Variabeln genommen. Es ist dann r'' durch folgende Gleichung bestimmt:

$$r''\sin\gamma\frac{d\theta}{dV} = \sin\gamma R_1\cos\tau\frac{d\theta}{dV}+(\cos\nu\cos\theta+\cos n\sin\theta)\frac{dR_1\cos\tau}{dV}-\frac{d^2R_1\cos\tau}{dV^2}.$$

Durch Einführung des Werthes von θ mittelst der Gleichungen 38) folgt endlich:

41) $$r''\sin\gamma = \sin\gamma R_1\cos\tau-(V+M)\sin\gamma\frac{dR_1\cos\tau}{dV}$$
$$+\frac{(V+M)^2\sin^2\gamma+1}{2\sin\gamma}\frac{d^2R_1\cos\tau}{dV^2}.$$

Die Bedingung, dass r'' von v oder V unabhängig ist, wird ausgedrückt durch:

$$\frac{d^3R_1\cos\tau}{dV^3} = 0.$$

Hieraus folgt:

42) $$R_1 \cos\tau = A + 2BV + CV^2.$$

Die Gleichung 41) wird nach 42):

43) $$r'' = A - 2BM + CM^2 + \frac{C}{\sin^2\gamma}.$$

Haben X, Y und Z dieselben Bedeutungen wie in 11), setzt man $\sigma = \gamma$, so findet man mittelst der Gleichungen 25), 37), 38), 42) und 43):

44) $$\begin{cases} X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = \cos\gamma\left(A - 2BM + CM^2 + \frac{C}{\sin^2\gamma}\right), \\ X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu = A\cos\nu + 2B\left(-M\cos\nu + \frac{\cos n}{\sin\gamma}\right) \\ \qquad + C\left[\frac{-2M\cos n}{\sin\gamma} + \left(M^2 - \frac{1}{\sin^2\gamma}\right)\cos\nu\right], \\ X\cos l + Y\cos m + Z\cos n = A\cos n + 2B\left(-M\cos n - \frac{\cos\nu}{\sin\gamma}\right) \\ \qquad + C\left[\frac{2M\cos\nu}{\sin\gamma} + \left(M^2 - \frac{1}{\sin^2\gamma}\right)\cos n\right]. \end{cases}$$

Durch Differentiation nach s erhält man aus den Gleichungen 39) und 43):

45) $$\frac{1}{\cos\gamma}\frac{dr''}{ds} = \frac{2(-B + CM)\cos n}{\varrho\sin^3\gamma} + \frac{2C\cos\nu}{\varrho\sin^4\gamma}.$$

Werden die Gleichungen 44) nach s differentiirt, so folgt nach 39) und 44):

$$\frac{dX}{ds}\cos\alpha + \frac{dY}{ds}\cos\beta + \frac{dZ}{ds}\cos\gamma = \frac{1}{\cos\gamma}\frac{dr''}{ds},$$

$$\frac{dX}{ds}\cos\lambda + \frac{dY}{ds}\cos\mu + \frac{dZ}{ds}\cos\nu = 0,$$

$$\frac{dX}{ds}\cos l + \frac{dY}{ds}\cos m + \frac{dZ}{ds}\cos n = 0.$$

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich ersetzen durch:

46)
$$\frac{\frac{dX}{ds}}{\cos\alpha}=\frac{\frac{dY}{ds}}{\cos\beta}=\frac{\frac{dZ}{ds}}{\cos\gamma}=\frac{\frac{dr''}{ds}}{\cos\gamma}.$$

Es ist also:

$$\left(\frac{dr''}{ds}\right)^2=\left[\left(\frac{dX}{ds}\right)^2+\left(\frac{dY}{ds}\right)^2+\left(\frac{dZ}{ds}\right)^2\right]\cos^2\gamma.$$

Die Summe der Quadrate der Gleichungen 44) liefert, wegen des Werthes von r'', die Relation:

47)
$$X^2+Y^2+Z^2=r''^2+4(B^2-AC).$$

Die Gleichungen 46) und 47) können als besondere Fälle der Gleichungen 35) und 36) angesehn werden, wenn $\sigma=\gamma$ genommen wird, die in 36) und 47) auftretenden Constanten sind keiner Beschränkung unterworfen. Nach 11) und 25) ist:

48)
$$\begin{aligned}&(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2=r''^2,\\&(x-X)\cos\alpha+(y-Y)\cos\beta+(z-Z)\cos\gamma=-r''\cos\sigma.\end{aligned}$$

Wegen der Gleichungen 35) kann man α, β, γ als die Winkel ansehn, welche die Tangente zur Curve der Mittelpunkte der enveloppirten Kugelflächen mit den Coordinatenaxen einschliesst. Wird statt s eine Function von s als unabhängige Variabele eingeführt, die nachher wieder einfach durch s bezeichnet werden möge, so kann man in den Gleichungen 48) $X=\xi$, $Y=\eta$, $Z=\zeta$ setzen, wo ξ, η, ζ dieselben Bedeutungen, wie in den Gleichungen 16) und 17) von III haben, vertauscht man noch r'' mit S, so gelten für die oben betrachteten Fälle wieder die Gleichungen 19) von III.

XI.

Ausdehnung der Transformation durch reciproke Radii vectores. Anwendung auf die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien, deren Kugelflächen die betreffenden Flächen orthogonal schneiden.

Bei der in VIII dargestellten Transformation durch reciproke Radii vectores entsprechen sich zwei Punkte P und P_1 zweier geometrischen Gebilde S und S_1 derart, dass die beiden Punkte P und P_1 mit einem festen Punkte O auf einer Geraden liegen und ihre Distanzen durch die Relation $OP.OP_1 = g^2$ verbunden sind, wo g eine Constante bedeutet. Man kann statt eines festen Punktes O zwei feste Punkte O und Π nehmen und die Punkte P und P_1 sich so entsprechen lassen, dass die Verbindungslinien OP_1 und ΠP parallel sind und die Gleichung $OP_1.\Pi P = g^2$ besteht, wo wieder g eine Constante ist. Für die in VIII ausgeführten analytischen Rechnungen ist es ohne Belang, ob in Beziehung auf einen festen Punkt, oder zwei feste Punkte, die Transformation einer Fläche S in eine Fläche S_1 ausgeführt wird. Es werde nun der Punkt Π und die Quantität g variabel angenommen, und zwar unter den folgenden Bedingungen. Für eine bestimmte Curve K möge der Punkt Π eine bestimmte Lage und g einen bestimmten Werth haben. Die Transformation der Curve K in eine Curve K_1 geschieht dann auf die oben bemerkte Weise in Beziehung auf die Punkte O und Π. Die Curve K liege auf einer Fläche und gehöre einem bestimmten System an, für welches von den beiden Variabeln u und v nur u variire. Da im Folgenden nur von Krümmungslinien die Rede ist, so sei K einfach eine Linie des Systems (u). Einem bestimmten Werthe $u = u_0$ entspricht eine bestimmte Curve K_0, ferner ein bestimmter Punkt Π_0 und ein Werth g_0 von g. Lässt man u variiren, so nimmt der Punkt Π verschiedene Lagen an, die eine Curve Γ bilden, ebenso nimmt g eine Reihe von Werthen an, die von u abhängen. Werden alle Krümmungslinien der Fläche S transformirt, oder einfacher die Fläche S_1 in Beziehung auf eine Curve Γ und einen variabelen Radius der Transformation, definirt durch die Gleichung:

$$OP_1 . \Pi P = U,$$

so ergiebt eine, weiter unten ausgeführte Untersuchung, folgendes

Theorem:

Entsprechen bei der angegebenen Transformation den Krümmungslinien der Fläche S auf S_1 ebenfalls Krümmungslinien, so ist das System (v) der Krümmungslinien auf der Fläche S sphärisch und die Kugelflächen des Systems schneiden die Fläche S orthogonal. Auf der Fläche S_1 ist dann das System (v) sphärisch oder plan, die osculatorischen Kugelflächen oder die Krümmungsebenen des Systems schneiden die Fläche S_1 ebenfalls orthogonal.

Da man in der Rechnung mehrere Functionen von u hat, so lässt sich zwischen denselben, wie weiter unten gezeigt ist, eine derartige Verbindung herstellen, dass die sphärischen Krümmungslinien von S, deren Kugelflächen die Fläche S orthogonal schneiden, auf der Fläche S_1 in ebene Curven übergehen. Ist die Fläche S_1 bekannt, so lässt sich aus derselben umgekehrt sehr leicht die Fläche S deduciren. Wegen seiner Einfachheit und der Möglichkeit alle Rechnungen durchführen zu können, verdient dieser Fall von Flächen mit einem Systeme sphärischer Krümmungslinien eine besondere Darstellung.

Die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes Π einer Curve doppelter Krümmung seien Functionen einer Variabeln u, oder von s, wo s von u abhängig ist und ds das Bogenelement der Curve bezeichnet. Der Einfachheit halber werde der Punkt O zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen. Bezeichnet U eine Function von u, so entspreche der Punkt (x_1, y_1, z_1) einer Fläche S_1 dem Punkte (x, y, z) einer Fläche S durch folgende Gleichungen:

$$1)\qquad x_1 = U\frac{x-\xi}{N}, \quad y_1 = U\frac{y-\eta}{N}, \quad z_1 = U\frac{z-\zeta}{N},$$

wo:

$$2)\qquad N = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Zur Abkürzung setze man ähnlich wie in VIII:

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-\xi)\cos a+(y-\eta)\cos b+(z-\zeta)\cos c = Q,\\ &(x-\xi)\cos a'+(y-\eta)\cos b'+(z-\zeta)\cos c' = Q',\\ &(x-\xi)\cos a''+(y-\eta)\cos b''+(z-\zeta)\cos c'' = Q'',\\ &\qquad Q^2+Q'^2+Q''^2 = N. \end{aligned}\right.$$

Die letzte der Gleichungen 3) ist natürlich wieder mit der Gleichung 2) identisch. Wendet man die Gleichungen von II an, so geben die Gleichungen 1) nach v differentiirt:

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dv} &= \left(\cos a''-2\frac{x-\xi}{N}Q''\right)\frac{U\sqrt{G}}{N},\\ \frac{dy_1}{dv} &= \left(\cos b''-2\frac{y-\eta}{N}Q''\right)\frac{U\sqrt{G}}{N},\\ \frac{dz_1}{dv} &= \left(\cos c''-2\frac{z-\zeta}{N}Q''\right)\frac{U\sqrt{G}}{N}. \end{aligned}\right.$$

Zur Vereinfachung der folgenden Formeln setze man:

$$5)\quad \frac{d\xi}{du}=\xi',\quad \frac{d\eta}{du}=\eta',\quad \frac{d\zeta}{du}=\zeta',\quad \frac{dU}{du}=U'.$$

Die Gleichungen 1) nach u differentiirt geben:

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{du} &= \left(\cos a'-2\frac{x-\xi}{N}Q'\right)\frac{U\sqrt{E}}{N}\\ &\quad+\left[U'+2U\frac{(x-\xi)\xi'+(y-\eta)\eta'+(z-\zeta)\zeta'}{N}\right]\frac{x-\xi}{N}-\frac{U\xi'}{N},\\ \frac{dy_1}{du} &= \left(\cos b'-2\frac{y-\eta}{N}Q'\right)\frac{U\sqrt{E}}{N}\\ &\quad+\left[U'+2U\frac{(x-\xi)\xi'+(y-\eta)\eta'+(z-\zeta)\zeta'}{N}\right]\frac{y-\eta}{N}-\frac{U\eta'}{N},\\ \frac{dz_1}{du} &= \left(\cos c'-2\frac{z-\zeta}{N}Q'\right)\frac{U\sqrt{E}}{N}\\ &\quad+\left[U'+2U\frac{(x-\xi)\xi'+(y-\eta)\eta'+(z-\zeta)\zeta'}{N}\right]\frac{z-\zeta}{N}-\frac{U\zeta'}{N}. \end{aligned}\right.$$

Sollen für die Fläche S_1 wieder u und v die Argumente der Krümmungslinien sein, so hat man wegen der Orthogonalität dieser Curven:

7) $$\frac{dx_1}{du}\frac{dx_1}{dv}+\frac{dy_1}{du}\frac{dy_1}{dv}+\frac{dz_1}{du}\frac{dz_1}{dv}=0.$$

Wegen der Gleichungen 5) und 6) reducirt sich die vorstehende Bedingung auf:

8) $$U(\xi'\cos a''+\eta'\cos b''+\zeta'\cos c'')+U'Q''=0.$$

Setzt man:

$$\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dv}\right)^2=G_1,$$

so geben die Gleichungen 4):

9) $$\sqrt{G_1}=\frac{U\sqrt{G}}{N}.$$

Die erste Gleichung 4) lässt sich nach 9) schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{dx_1}{dv}=\cos a''-2\frac{x-\xi}{N}Q''.$$

Diese Gleichung werde nach u differentiirt, wegen des Ausdrucks für $\frac{dx_1}{du}$ aus 6) lässt sich der bemerkte Differentialquotient auf folgende Form bringen:

$$d\frac{\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{dx_1}{dv}}{du}=-\frac{2Q''}{U}\frac{dx_1}{du}+\left(\cos a'-2\frac{x-\xi}{N}Q'\right)\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}$$
$$+\left[U(\xi'\cos a''+\eta'\cos b''+\zeta'\cos c'')+U'Q''\right]2\frac{x-\xi}{UN}.$$

Wegen der Gleichung 8) reducirt sich die vorstehende Gleichung auf:

$$d\frac{\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{dx_1}{dv}}{du}=-\frac{2Q''}{U}\frac{dx_1}{du}+\left(\cos a'-2\frac{x-\xi}{N}Q'\right)\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}.$$

Sind aber u und v die Argumente der Krümmungslinien, so ist die rechte Seite der vorstehenden Gleichung durch $\frac{dx_1}{du}$ theilbar. Hieraus folgt, dass

$$\cos a' - 2\frac{x-\xi}{N}Q'$$

proportional zu $\frac{dx_1}{du}$ sein muss. Dann ist auch, wegen der ersten Gleichung 6):

$$\left[U' + 2U\frac{(x-\xi)\xi' + (y-\eta)\eta' + (z-\zeta)\zeta'}{N}\right]\frac{x-\xi}{N} - \frac{U\xi'}{N}$$

proportional zu $\frac{dx_1}{du}$, also auch proportional zu:

$$\cos a' - 2\frac{x-\xi}{N}Q'.$$

Bezeichnet A eine Unbestimmte, so lassen sich die folgenden Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned}
&(U' + 2U\Psi)(x-\xi) - U\xi' = A\left(\cos a' - 2\frac{x-\xi}{N}Q'\right),\\
10)\quad &(U' + 2U\Psi)(y-\eta) - U\eta' = A\left(\cos b' - 2\frac{y-\eta}{N}Q'\right),\\
&(U' + 2U\Psi)(z-\zeta) - U\zeta' = A\left(\cos c' - 2\frac{z-\zeta}{N}Q'\right),
\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung:

$$11)\qquad \Psi = \frac{(x-\xi)\xi' + (y-\eta)\eta' + (z-\zeta)\zeta'}{N}$$

gesetzt ist. Die Gleichungen 10) multiplicire man respective mit $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$, bilde darauf die Summe der Producte. Analog verfahre man mit den Factoren $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$. Es ergeben sich dann die beiden folgenden Gleichungen, in denen die Bezeichnungen der Gleichungen 3) und 11) angewandt sind,:

$$(U'+2U\Psi)\,Q-U(\xi'\cos a+\eta'\cos b+\zeta'\cos c)=-\varLambda\frac{2QQ'}{N}$$
$$(U'+2U\Psi)\,N-UN\Psi \qquad =-\varLambda Q'.$$

Eliminirt man $\varLambda$ zwischen diesen beiden Gleichungen, so fällt auch Ψ weg, es bleibt einfach:

12) $$U(\xi'\cos a+\eta'\cos b+\zeta'\cos c)+U'Q=0.$$

Die Gleichung 8) folgt auch durch Differentiation der Gleichung 12) nach v. Die Gleichung 8) weiter nach v differentiirt giebt, wegen 12):

13) $$-\left[U(\xi'\cos a'+\eta'\cos b'+\zeta'\cos c')+U'Q'\right]\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}+U'\sqrt{G}=0.$$

Man setze zur Vereinfachung:

14) $$\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}=\frac{1}{R_2}.$$

Aus der Gleichung 13) folgt dann:

15) $$U(\xi'\cos a'+\eta'\cos b'+\zeta'\cos c')+U'Q'=U'R_2.$$

Wird die Gleichung 12) nach v differentiirt, so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung 8) einfach:

$$\frac{dR_2}{dv}=0,$$

d. h. es hängt R_2 nur von u ab. Nimmt man in den Gleichungen 1) und 5) von IX, $\cos\sigma=0$, $\sin\sigma=1$, also $p_2=0$ und $q_2=R_2$, so erhält man wieder die Gleichung 14). Die in der Gleichung 12) enthaltene Bedingung drückt also geometrisch aus, dass das System der Krümmungslinien (v) der Fläche S sphärisch ist und die Kugelflächen dieses Systems die Fläche S orthogonal schneiden.

Die Gleichungen 12), 15) und 8) bringe man auf folgende Formen:

16) $$\begin{aligned} U'Q &= -U(\xi'\cos a+\eta'\cos b+\zeta'\cos c),\\ U'(Q'-R_2) &= -U(\xi'\cos a'+\eta'\cos b'+\zeta'\cos c'),\\ U'Q'' &= -U(\xi'\cos a''+\eta'\cos b''+\zeta'\cos c''). \end{aligned}$$

Die vorstehenden Gleichungen respective mit Q, Q' und Q'' multiplicirt und addirt geben nach 2) und 3):

17) $$U'(N - Q'R_2) = -U\left[(x-\xi)\xi' + (y-\eta)\eta' + (z-\zeta)\zeta'\right].$$

Aus der Summe der Quadrate der Gleichungen 16) folgt:

$$U'^2(N - 2Q'R_2 + R_2^2) = U^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)$$

oder:

18) $$N - 2Q'R_2 = U^2\frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{U'^2} - R_2^2.$$

Wird E_1 durch die Gleichung:

$$E_1 = \left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{du}\right)^2$$

definirt, stellt man mittelst der Gleichungen 6) den Werth von E_1 auf, so lässt sich derselbe, wegen der Gleichungen 15), 17) und 18) wie folgt schreiben:

$$E_1 = \left(\frac{U\sqrt{E} - U'R_2}{N}\right)^2,$$

oder:

19) $$\sqrt{E_1} = \frac{U\sqrt{E} - U'R_2}{N}.$$

Die Gleichung 9) werde nach u differentiirt, in dem erhaltenen Resultate setze man aus 14):

$$\frac{d\sqrt{G}}{du} = \frac{\sqrt{EG}}{R_2}$$

ein, ferner wende man die Gleichung 17) an, dann folgt:

$$\frac{d\sqrt{G_1}}{du} = \sqrt{G}\,\frac{U\sqrt{E} - U'R_2}{N^2}\cdot\frac{N - 2Q'R_2}{R_2}.$$

Wird diese Gleichung durch das Product der Gleichungen 9) und 19) dividirt, so ist weiter:

$$\frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \frac{d\sqrt{G_1}}{du} = \frac{N - 2Q'R_2}{UR_2}$$

oder nach 18):

$$20)\qquad \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \frac{d\sqrt{G_1}}{du} = \left[U^2 \frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{U'^2} - R_2^2\right] \frac{1}{UR_2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nur von u abhängig, das System der Krümmungslinien (v) ist also für die Fläche S_1 sphärisch; die Kugelflächen gehn in Ebenen über, wenn zwischen U und R_2 die Gleichung:

$$21)\qquad U^2 \frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{U'^2} = R_2^2$$

angenommen wird, welche Gleichung immer möglich ist, da die Function U in den Gleichungen 1) keiner Beschränkung unterworfen ist. Die Gleichungen 1) respective mit ξ', η', ζ' multiplicirt und addirt geben nach 17):

$$22)\qquad x_1 \xi' + y_1 \eta' + z_1 \zeta' = \frac{Q'R_2 - N}{N} U'.$$

Findet aber die Gleichung 21) statt, so giebt die Gleichung 18) $N = 2Q'R_2$, die Gleichung 22) wird hierdurch:

$$23)\qquad x_1 \xi' + y_1 \eta' + z_1 \zeta' = -\frac{1}{2} U'.$$

Bezeichnet man durch ds das Bogenelement der Curve, welcher der Punkt (ξ, η, ζ) angehört, so kann man u als Function von s ansehn, folglich auch U und R_2. Die Gleichung 21) giebt dann:

$$24)\qquad \left(\frac{dU}{ds}\right)^2 = \left(\frac{U}{R_2}\right)^2.$$

Nach den in I gebrauchten Bezeichnungen lässt sich die Gleichung 23) schreiben:

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = -\frac{1}{2} \frac{dU}{ds}.$$

Setzt man hierin:

25) $$-\frac{1}{2}\frac{dU}{ds} = \Omega,$$

so ist:

26) $$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = \Omega.$$

Dieses ist die Gleichung der Ebene einer planen Krümmungslinie (v) der Fläche S_1, welche Ebene gleichzeitig die Normale zur Fläche S_1 im Punkte (x_1, y_1, z_1) enthält. Zu Folge der Gleichung 21) reducirt sich nämlich die Gleichung 20) auf:

$$\frac{d\sqrt{G_1}}{du} = 0.$$

Die Combination der Gleichungen 24) und 25) giebt:

$$U^2 = (2R_2\Omega)^2.$$

Man nehme hieraus:

27) $$U = 2R_2\Omega.$$

Für den vorstehenden Werth von U erhält man aus den Gleichungen 1) die folgenden Gleichungen zur Bestimmung von x, y und z:

28) $$\begin{cases} x = \xi + 2R_2\Omega\dfrac{x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \\ y = \eta + 2R_2\Omega\dfrac{y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \\ z = \zeta + 2R_2\Omega\dfrac{z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}. \end{cases}$$

Die Gleichung 26) fällt mit der ersten der in IV B aufgestellten Gleichungen 44) zusammen, wenn dort x, y und z durch x_1, y_1 und z_1 ersetzt werden. Man hat also nur nöthig in den Resultaten von IV B x, y, z durch x_1, y_1, z_1 zu ersetzen, darauf die Werthe von x_1, y_1, z_1 zu entwickeln und dieselben in die Gleichungen 28) zu substituiren. Man erhält dann direct die Gleichungen für x, y und z. Für $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ist in den Gleichungen 3) von IX $p_2 = 0$ und $q_2 = R_2$. Die bemerkten Gleichungen werden dann einfacher:

29) $$\xi_2^* = x - R_2 \cos a', \quad \eta_2^* = y - R_2 \cos b', \quad \zeta_2^* = z - R_2 \cos c'.$$

Es bleibt noch übrig die Curve der Mittelpunkte der Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien zu bestimmen. Substituirt man in den Gleichungen 16) die Werthe von Q, Q' und Q'', so werden dieselben:

$$\begin{aligned}
&[(x-\xi)U' + U\xi']\cos a + [(y-\eta)U' + U\eta']\cos b + [(z-\zeta)U' + U\zeta']\cos c = 0,\\
&[(x-\xi)U' + U\xi']\cos a' + [(y-\eta)U' + U\eta']\cos b' + [(z-\zeta)U' + U\zeta']\cos c' = U'R_2,\\
&[(x-\xi)U' + U\xi']\cos a'' + [(y-\eta)U' + U\eta']\cos b'' + [(z-\zeta)U' + U\zeta']\cos c'' = 0.
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen sehe man $(x-\xi)U' + U\xi'$ etc. als Unbekannte an. Es ergeben sich dann für dieselben folgende Werthe:

$$(x-\xi)U' + U\xi' = U'R_2 \cos a', \quad (y-\eta)U' + U\eta' = U'R_2 \cos b',$$
$$(z-\zeta)U' + U\zeta' = U'R_2 \cos c'.$$

Diese Gleichungen mit den Gleichungen 29) verbunden geben:

30) $$\xi_2^* = \xi - \frac{U\xi'}{U'}, \quad \eta_2^* = \eta - \frac{U\eta'}{U'}, \quad \zeta_2^* = \zeta - \frac{U\zeta'}{U'}.$$

Man nehme wieder s als unabhängige Variabele, setze aus 25) und 27):

$$U = -R_2 \frac{dU}{ds}.$$

Die Gleichungen 30) werden hierdurch:

31) $$\xi_2^* = \xi + R_2 \frac{d\xi}{ds}, \quad \eta_2^* = \eta + R_2 \frac{d\eta}{ds}, \quad \zeta_2^* = \zeta + R_2 \frac{d\zeta}{ds}.$$

Der Punkt $(\xi_2^*, \eta_2^*, \zeta_2^*)$ liegt folglich auf der Tangentenfläche der Curve Γ, welche zur Transformation der Fläche S in die Fläche S_1 dient. Die zu Ende des Abschnitts IX gemachten Bemerkungen finden eine Illustration in den Entwickelungen dieses Abschnitts, dass die Mittelpunktscurve der Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien für die analytischen Bemerkungen nicht die einfachsten Verhältnisse giebt.

Mittelst der vorhergehenden Entwickelungen, oder einfacher mit Hülfe der Relationen 10), lassen sich die Gleichungen 6) durch folgendes einfachere System ersetzen:

$$
32) \quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{dx_1}{du} &= \cos a' - 2 \frac{x - \xi}{N} Q', \\
\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{dy_1}{du} &= \cos b' - 2 \frac{y - \eta}{N} Q', \\
\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{dz_1}{du} &= \cos c' - 2 \frac{z - \zeta}{N} Q',
\end{aligned} \right.
$$

wo $\sqrt{E_1}$ durch die Gleichung 19) bestimmt ist. Die Gleichungen 4), 9) und 32) zeigen, dass für die transformirte Fläche S_1 die Richtungen der Normalen und der Tangenten zu den Hauptschnitten genau durch dieselben Formeln wie bei der Transformation durch reciproke Radii vectores bestimmt sind. Man hat in den Gleichungen 10), 12) und 13) von VIII nur x_0, y_0, z_0 respective durch ξ, η, ζ zu ersetzen. Sind r_1' und r''_1 die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche S_1 im Punkte (x_1, y_1, z_1), so findet man, durch ähnliche Rechnungen wie in VIII:

$$
\left(\frac{U}{r'_1} + 2Q\right)\left(\sqrt{E} - \frac{R_2 U'}{U}\right) + \frac{N\sqrt{E}}{r'} = 0, \quad -\frac{U}{r''_1} = \frac{N}{r''} + 2Q.
$$

XII.

Flächen, für welche ein System von Krümmungslinien sphärisch ist.

A. Die Mittelpunkte der Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien liegen auf einer Curve doppelter Krümmung.

Die Lösung des Problems, die Coordinaten eines Punktes einer Fläche mit einem Systeme sphärischer Krümmungslinien, in Function zweier Variabelen darzustellen, lässt sich auf analoge Weise durchführen, wie bei den Flächen mit einem Systeme planer Krümmungslinien. Das Problem für plane Krümmungslinien ist indessen, in analytischer Beziehung, viel einfacher, wie für die entsprechenden sphärischen Curven. In der Einleitung zu dieser Abhandlung ist schon erwähnt, dass Hr. Bonnet im vierten Theile seines „Mémoire", welches den Titel trägt: „Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont sphériques" (Journal de l'École Polytechnique t. XX p. 277—306) sich auf zwei besondere Fälle beschränkt hat. Die allgemeinere Lösung ist von Hn. Serret angebahnt, wenn auch unvollständig durchgeführt worden (Comptes Rendus, 1856. t. XLII pag. 109—110 und 190—194). Die Resultate des Hn. Serret basiren auf der Integration einer Differentialgleichung dritter Ordnung, welche Integration drei Parameter involvirt, wobei a priori bekannt ist, dass die Lösung des geometrischen Problems nur zwei arbiträre Constanten erfordert. Die vorkommenden Parameter sind keine absoluten Constanten, sondern Functionen einer Variabeln. Es ist einleuchtend, dass die bemerkte Bedingung die Aufstellung einer Relation zwischen den drei Parametern erfordert. Um die Lösung des Problems möglichst zu vereinfachen, hat Hr. Serret, gleich bei einer ersten Integration, welche die Differentialgleichung gestattet, die auftretende Constante annullirt. Hierdurch ist es dann gekommen, dass die von Hn. Serret schliesslich gegebene Lösung, an Stelle zweier Functionen einer Variabelen, eigentlich nur noch die Variabele enthält. Die vollständige Behandlung der Differentialgleichung dritter Ordnung ist zuerst in den „Nachrichten v. d. K. G. d. W." (Göttingen, 1872) durchgeführt worden. Die dabei gefundenen Resultate bilden einen Theil des vorliegenden Abschnitts, zu dessen Vorarbeiten sie gedient haben.

Die oben erwähnte Arbeit des Hn. Serret enthält mehrere ungemein scharfsinnige Bemerkungen dieses ausgezeichneten Analytikers über die Integration eines besondern Systems simultaner Differentialgleichungen. Diese Bemerkungen haben später eine Verallgemeinerung erfahren in Bonnet: „Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles simultanées" (Comptes Rendus, 1861. T. LIII pag. 971—974). Die Verallgemeinerung des Hn. Bonnet besteht darin, p Functionen x, y, z, . . . t, u, v zu bestimmen, welche den $p-1$ Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c} = \dots = \frac{dt}{t-l} = \frac{du}{u-m} = \frac{dv}{v-n}$$

und der endlichen Gleichung:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \dots + (t-l)^2 + (u-m)^2 + (v-n)^2 = r^2,$$

genügen, wo a, b, c . . . l, m, n, r als Functionen einer Variabelen ω angesehn werden. Das obige System lässt sich nach Hn. Bonnet auf ein ähnliches System reduciren, welches zwei Variabele weniger enthält. Man kann die Anzahl der Variabelen um zwei Einheiten so oft verringern, wie man will, und gelangt so schliesslich zu den einfachsten Fällen, welche sich integriren lassen. Es ist selbstverständlich, dass diese Methode der Reduction für das Problem der sphärischen Krümmungslinien, als einfachsten Fall, von keiner Anwendung sein konnte.

Da in den vorhergehenden Abschnitten schon einige besondere Fälle von Flächen mit sphärischen Krümmungslinien behandelt sind, so sollen die in IX und XI behandelten Flächen bei den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen bleiben, nämlich: 1) die Kugelflächen des sphärischen Systems sind concentrisch, 2) die Kugelflächen gehn durch einen festen Punkt, 3) die Kugelflächen schneiden die Fläche orthogonal. Was die Bezeichnungen betrifft, so sind natürlich die in II und III gebrauchten consequent durchgeführt, ausserdem sind theils dieselben, theils ähnliche Bezeichnungen wie in IV gebraucht worden, wenn die rein analytischen Probleme mit den in IV behandelten übereinstimmten.

Ist das System der Krümmungslinien (v) sphärisch, so hat man, in Folge der Gleichungen 1), 3) und 5) von IX:

1) $$R_2 \cos\sigma = p_2, \quad R_2 \sin\sigma = q_2.$$

2) $$\xi_2^* = x + p_2 \cos a - q_2 \cos a', \quad \eta_2^* = y + p_2 \cos b - q_2 \cos b',$$
$$\zeta_2^* = z + p_2 \cos c - q_2 \cos c'.$$

3) $$1 = \frac{p_2}{r''} + \frac{q_2}{\sqrt{EG}} \frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

Es ist (ξ_2^*, η_2^*, ζ_2^*) der Mittelpunkt, R_2 der Radius der Kugelfläche der sphärischen Krümmungslinie, welche durch den Punkt (x, y, z) der

Fläche geht. Der Winkel, welchen R_2 mit der Normalen zur Fläche im Punkte (x, y, z) einschliesst, ist durch σ bezeichnet. Die sämmtlichen definirten Quantitäten hängen nur von u ab. Da $\cos\sigma$ von Null verschieden angenommen wird, so ist es einfacher mittelst der Gleichungen 1) p_2 und q_2 statt R_2 und σ einzuführen.

Die zweite Gleichung 10) von II, nämlich:

$$d\frac{\frac{\sqrt{G}}{r''}}{du} = \frac{1}{r'}\frac{d\sqrt{G}}{du},$$

giebt entwickelt:

$$\left(1-\frac{r''}{r'}\right)\frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{G}}{du} = \frac{dr''}{du}.$$

Wird $\frac{d\sqrt{G}}{du}$ zwischen dieser Gleichung und der Gleichung 3) eliminirt, so folgt:

4) $$\frac{dr''}{du} = (r''-p_2)H,$$

wo zur Abkürzung:

5) $$H = \left(1-\frac{r''}{r'}\right)\frac{\sqrt{E}}{q_2}$$

gesetzt ist. Der Endpunkt des Hauptkrümmungsradius r'' sei (X, Y, Z), also durch folgende Gleichungen bestimmt:

6) $$X = x + r''\cos a, \quad Y = y + r''\cos b, \quad Z = z + r''\cos c.$$

Die Gleichungen 2) von den respectiven Gleichungen 6) subtrahirt geben:

7) $$\begin{cases} X-\xi_2^* = (r''-p_2)\cos a + q_2\cos a', \\ Y-\eta_2^* = (r''-p_2)\cos b + q_2\cos b', \\ Z-\zeta_2^* = (r''-p_2)\cos c + q_2\cos c'. \end{cases}$$

Die Summe der Quadrate der Gleichungen 7) giebt:

8) $$(X-\xi_2^*)^2 + (Y-\eta_2^*)^2 + (Z-\zeta_2^*)^2 = (r''-p_2)^2 + q_2^2.$$

Werden die Gleichungen 6) nach v differentiirt, so ist nach II 5):

9) $$\frac{dX}{dv} = \frac{dr''}{dv}\cos a, \quad \frac{dY}{dv} = \frac{dr''}{dv}\cos b, \quad \frac{dZ}{dv} = \frac{dr''}{dv}\cos c.$$

Sind X, Y, Z und r'' bekannt, so ist dieses auch nach 6) und 9) mit x, y und z der Fall. Ausser der endlichen Relation 8) lassen sich auf folgende Weise zwischen X, Y, Z und r'' Differentialgleichungen herstellen. Die erste Gleichung 6) werde nach u differentiirt. Unter Zuziehung der Gleichungen 2) und 4) von II folgt:

$$\frac{dX}{du} = \frac{dr''}{du}\cos a + \left(1 - \frac{r''}{r'}\right)\sqrt{E}\,.\cos a'.$$

Man substituire für $\frac{dr''}{du}$ seinen Werth aus 4), setze nach 5):

$$\left(1 - \frac{r''}{r'}\right)\sqrt{E} = q_2 H,$$

es ist dann einfacher:

$$\frac{dX}{du} = \left[(r'' - p_2)\cos a + q_2 \cos a'\right] H,$$

oder, wegen der ersten Gleichung 7):

$$\frac{dX}{du} = (X - \xi_2^*) H.$$

Man erhält so aus den Gleichungen 6) die folgenden:

10) $$\frac{dX}{du} = (X - \xi_2^*) H, \quad \frac{dY}{du} = (Y - \eta_2^*) H, \quad \frac{dZ}{du} = (Z - \zeta_2^*) H.$$

Die Gleichungen 4) und 10) geben noch:

11) $$\frac{\frac{dX}{du}}{X - \xi_2^*} = \frac{\frac{dY}{du}}{Y - \eta_2^*} = \frac{\frac{dZ}{du}}{Z - \zeta_2^*} = \frac{\frac{dr''}{du}}{r'' - p_2}.$$

Dieses sind die Differentialgleichungen zwischen X, Y, Z und r'' zu denen noch die endliche Relation 8) tritt. Der leichteren Schreibweise wegen sollen die Gleichungen 10) beibehalten werden. Man differentiire die Gleichung 8) unter Zuziehung der Gleichungen 4) und 10) nach u, mit Rücksicht auf die Gleichung 8) selbst folgt dann:

$$12)\qquad (X-\xi_2^*)\frac{d\xi_2^*}{du}+(Y-\eta_2^*)\frac{d\eta_2^*}{du}+(Z-\zeta_2^*)\frac{d\zeta_2^*}{du}-(r''-p_2)\frac{dp_2}{du}$$
$$=q_2^2H-q_2\frac{dq_2}{du}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 10) und 12) lässt sich zwischen X, Y, Z und r'' eine solche lineare Relation aufstellen, dass dieselbe proportional ihrem Differentialquotienten nach u ist. Zu diesem Ende führe man statt ξ_2^*, η_2^*, ζ_2^* und p_2 andere Functionen ein, welche auf folgende Art definirt sind:

$$13)\quad \frac{d\xi_2^*}{du}=q_2U\frac{d\xi^*}{du},\quad \frac{d\eta_2^*}{du}=q_2U\frac{d\eta^*}{du},\quad \frac{d\zeta_2^*}{du}=q_2U\frac{d\zeta^*}{du},\quad \frac{dp_2}{du}=q_2U\frac{dp^*}{du}.$$

Es ist U eine vorläufig unbestimmte Function von u. Die Gleichung 12) lässt sich nach 13) schreiben:

$$14)\qquad U\left[(X-\xi_2^*)\frac{d\xi^*}{du}+(Y-\eta_2^*)\frac{d\eta^*}{du}+(Z-\zeta_2^*)\frac{d\zeta^*}{du}-(r''-p_2)\frac{dp^*}{du}\right]$$
$$=q_2H-\frac{dq_2}{du}.$$

Setzt man:

$$15)\quad (X-\xi_2^*+q_2U\xi^*)\xi^*+(Y-\eta_2^*+q_2U\eta^*)\eta^*+(Z-\zeta_2^*+q_2U\zeta^*)\zeta^*$$
$$-(r''-p_2+q_2Up^*)p^*=\varDelta,$$

so lässt sich der Differentialquotient von $\varDelta$ nach u, wegen der Gleichungen 10), 13) und 14) auf folgende Form bringen:

$$16)\qquad \frac{d\varDelta}{du}=[\varDelta-q_2U\Phi]H+\Phi\frac{dq_2U}{du}+\frac{q_2U}{2}\frac{d\Phi}{du},$$

wo:

$$\Phi=\xi^{*2}+\eta^{*2}+\zeta^{*2}-p^{*2}-\frac{1}{U^2}.$$

Bestimmt man U durch die Gleichung $\Phi = 0$, setzt also:

17) $$\xi^{*2} + \eta^{*2} + \zeta^{*2} - p^{*2} = \frac{1}{U^2},$$

so reducirt sich die Gleichung 16) auf:

18) $$\frac{d\Delta}{du} = \Delta H.$$

Nach 10) und 13) ist nun:

$$d\frac{X - \xi_2^* + q_2 U\xi^*}{du} = (X - \xi_2^*)H + \frac{dq_2 U}{du}\xi^*.$$

Mittelst der Gleichung 18) folgt hieraus:

19) $$d\frac{\dfrac{X - \xi_2^* + q_2 U\xi^*}{\Delta}}{du} = \xi^*\left[\frac{1}{\Delta}\frac{dq_2 U}{du} - \frac{q_2 UH}{\Delta}\right] = \xi^* d\frac{\dfrac{q_2 U}{\Delta}}{du}.$$

Man setze zur Abkürzung:

20) $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{X - \xi_2^* + q_2 U\xi^*}{\Delta}, & y_1 = \dfrac{Y - \eta_2^* + q_2 U\eta^*}{\Delta}, \\ z_1 = \dfrac{Z - \zeta_2^* + q_2 U\zeta^*}{\Delta}, & T_1 = \dfrac{r'' - p_2 + q_2 Up^*}{\Delta}. \end{cases}$$

Die linke Seite der Gleichung 19) ist der Differentialquotient von x_1 nach u. Aehnliche Gleichungen ergeben sich für die Derivirten von y_1, z_1 und T_1 nach u. Man findet so:

21) $$\frac{\dfrac{dx_1}{du}}{\xi^*} = \frac{\dfrac{dy_1}{du}}{\eta^*} = \frac{\dfrac{dz_1}{du}}{\zeta^*} = \frac{\dfrac{dT_1}{du}}{p^*} = d\frac{\dfrac{q_2 U}{\Delta}}{du}.$$

Die Gleichungen 20) respective mit ξ^*, η^*, ζ^* und $-p^*$ multiplicirt und addirt geben, wegen der Bedeutung von Δ aus 15),:

22) $$x_1\xi^* + y_1\eta^* + z_1\zeta^* - T_1 p^* = 1.$$

An Stelle der Gleichungen 11) und 8) sind die Gleichungen 21) und 22) getreten, aus denen sich die Werthe von x_1, y_1, z_1 und T_1

mit Hülfe einer Differentialgleichung dritter Ordnung bestimmen lassen. Man kann umgekehrt X, Y, Z und r'' auf folgende Art durch x_1, y_1, z_1 und T_1 ausdrücken. Die Gleichungen 20) geben in Verbindung mit den Gleichungen 8), 15) und 17):

$$22^*)\qquad x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2=\frac{2q_2U}{\Delta}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung entwickele man aus den Gleichungen 20) die Werthe von X, Y, Z und r'', setze in die erhaltenen Gleichungen aus 6) die Werthe von X, Y und Z ein. Hierdurch erhält man:

$$23)\qquad \begin{cases} x+r''\cos a-\xi_2^*+q_2U\xi^* = \dfrac{2q_2Ux_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}, \\ y+r''\cos b-\eta_2^*+q_2U\eta^* = \dfrac{2q_2Uy_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}, \\ z+r''\cos c-\zeta_2^*+q_2U\zeta^* = \dfrac{2q_2Uz_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}, \\ r''-p_2+q_2Up^* = \dfrac{2q_2UT_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind x_1, y_1, z_1 und T_1 vier zu bestimmende Functionen von u und v. In Beziehung auf v geben die Gleichungen 23) differentiirt:

$$24)\qquad \begin{aligned} &\frac{dr''}{dv}\cos a=\frac{2q_2U}{D_1}\left(\frac{dx_1}{dv}-\frac{2x_1D'}{D_1}\right), \quad \frac{dr''}{dv}\cos b=\frac{2q_2U}{D_1}\left(\frac{dy_1}{dv}-\frac{2y_1D'}{D_1}\right), \\ &\frac{dr''}{dv}\cos c=\frac{2q_2U}{D_1}\left(\frac{dz_1}{dv}-\frac{2z_1D'}{D_1}\right), \quad \frac{dr''}{dv}=\frac{2q_2U}{D_1}\left(\frac{dT_1}{dv}-\frac{2T_1D'}{D_1}\right), \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung:

$$25)\qquad D_1=x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2,\quad D'=x_1\frac{dx_1}{dv}+y_1\frac{dy_1}{dv}+z_1\frac{dz_1}{dv}-T_1\frac{dT_1}{dv},$$

gesetzt ist. Von der Summe der Quadrate der drei ersten Gleichungen 24) werde das Quadrat der vierten Gleichung abgezogen; da

$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c-1=0$$

ist, so folgt:

$$26)\qquad \left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dv}\right)^2-\left(\frac{dT_1}{dv}\right)^2=0.$$

Die Bestimmung der Werthe von x_1, y_1, z_1 und T_1 lässt sich auf wiederholte Differentiation der Gleichung 22) nach u basiren. Sieht man x_1, y_1, z_1 als Coordinaten eines Punktes einer Fläche an, so sind für dieselbe u und v nicht mehr die Argumente der Krümmungslinien. Dieses ergiebt sich durch folgende einfache Betrachtung. Die Gleichungen 21) geben:

$$27)\qquad \frac{dx_1}{du}=\frac{\xi^*}{p^*}\frac{dT_1}{du},\quad \frac{dy_1}{du}=\frac{\eta^*}{p^*}\frac{dT_1}{du},\quad \frac{dz_1}{du}=\frac{\zeta^*}{p^*}\frac{dT_1}{du}.$$

Die vorstehenden Gleichungen nach v differentiirt geben:

$$\frac{d^2x_1}{du\,dv}=\frac{\xi^*}{p^*}\frac{d^2T_1}{du\,dv},\quad \frac{d^2y_1}{du\,dv}=\frac{\eta^*}{p^*}\frac{d^2T_1}{du\,dv},\quad \frac{d^2z_1}{du\,dv}=\frac{\zeta^*}{p^*}\frac{d^2T_1}{du\,dv}.$$

Aus diesen Gleichungen und den Gleichungen 27) schliesst man unmittelbar:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x_1}{du\,dv} & \frac{d^2y_1}{du\,dv} & \frac{d^2z_1}{du\,dv} \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dy_1}{du} & \frac{dz_1}{du} \\ \frac{dx_1}{dv} & \frac{dy_1}{dv} & \frac{dz_1}{dv} \end{vmatrix}=0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 22) geben die Gleichungen 27):

$$\frac{dx_1}{du}\frac{dx_1}{dv}+\frac{dy_1}{du}\frac{dy_1}{dv}+\frac{dz_1}{du}\frac{dz_1}{dv}$$
$$=\left(\xi^*\frac{dx_1}{dv}+\eta^*\frac{dy_1}{dv}+\zeta^*\frac{dz_1}{dv}\right)\frac{1}{p^*}\frac{dT_1}{du}=\frac{dT_1}{du}\frac{dT_1}{dv}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet nicht, nur wenn T_1 von u abhängig ist, dann ist nach 21) $p^*=0$, die letzte Gleichung 13) zeigt weiter, dass p_2 von u unabhängig, also constant ist. Die Fläche ist eine Parallelfläche zu derjenigen, für welche $p_2=0$ ist.

Die Gleichung 22) giebt zu analogen Rechnungen, wie die in IV ausgeführten, Veranlassung. Um die nachfolgenden, allerdings complicirteren, Entwickelungen mit denen von IV parallel gehn zu lassen, dividire man die Gleichung 22) durch:

$$\sqrt{\xi^{*2}+\eta^{*2}+\zeta^{*2}}$$

und setze:

28) $$\frac{\xi^*}{\cos\alpha}=\frac{\eta^*}{\cos\beta}=\frac{\zeta^*}{\cos\gamma}=\frac{p^*}{\cos w}=\sqrt{\xi^{*2}+\eta^{*2}+\zeta^{*2}},\quad \frac{1}{\sqrt{\xi^{*2}+\eta^{*2}+\zeta^{*2}}}=\Omega.$$

Die Gleichung 17) giebt wegen der vorstehenden Gleichungen:

28*) $$\frac{1}{U}=\frac{\sin w}{\Omega}.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung und die Gleichungen 28) nehmen die Gleichungen 13) folgende Formen an:

29) $$\frac{d\xi_2^*}{du}=\frac{q_2\,\Omega}{\sin w}\,\frac{d\,\frac{\cos\alpha}{\Omega}}{du},\quad \frac{d\eta_2^*}{du}=\frac{q_2\,\Omega}{\sin w}\,\frac{d\,\frac{\cos\beta}{\Omega}}{du},$$
$$\frac{d\zeta_2^*}{du}=\frac{q_2\,\Omega}{\sin w}\,\frac{d\,\frac{\cos\gamma}{\Omega}}{du},\quad \frac{dp_2}{du}=\frac{q_2\,\Omega}{\sin w}\,\frac{d\,\frac{\cos w}{\Omega}}{du},$$

Die Gleichungen 21) geben nach 28) zu den folgenden Veranlassung:

30) $$\frac{dx_1}{du}=\frac{\cos\alpha}{\cos w}\,\frac{dT_1}{du},\quad \frac{dy_1}{du}=\frac{\cos\beta}{\cos w}\,\frac{dT_1}{du},\quad \frac{dz_1}{du}=\frac{\cos\gamma}{\cos w}\,\frac{dT_1}{du}.$$

Die oben bemerkte Umformung der Gleichung 22) giebt:

31) $$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma=\Omega+T_1\cos w.$$

Da $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ nur von u abhängen und nach 28) die Gleichung $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ stattfindet, so kann man α, β, γ als die Winkel ansehn, welche die Tangente im Punkte (ξ, η, ζ) einer Curve doppelter Krümmung mit den Coordinatenaxen bildet. Man bezeichne wieder wie in I durch λ, μ, ν die Winkel, welche die Hauptnormale, durch l, m, n die Winkel, welche die Binormale des Punktes (ξ, η, ζ) bestimmen. In dem bemerkten Punkte sei ϱ der Radius des osculatorischen Kreises und r der Torsionsradius. Durch ds werde wieder allgemein das Bogenelement der Curve bezeichnet, man kann dann s als eine unbestimmte Function von u, oder umgekehrt, ansehn. Die weitere Discussion der Gleichung 31) besteht wesentlich darin, dass nach einer einmaligen und einer dreimaligen Differentiation nach u die Terme auf der linken Seite, welche x_1, y_1 und z_1 enthalten, dieselben sind. Es ergiebt sich dann eine Differentialgleichung für T_1, die zunächst aufgestellt und dann integrirt werden soll.

In den Gleichungen 30) kann man einfach s an Stelle von u als unabhängige Variabele setzen. Differentiirt man dann die Gleichung 31) nach s, so folgt:

$$(x_1 \cos\lambda + y_1 \cos\mu + z_1 \cos\nu)\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\cos w}\frac{dT_1}{ds} = \frac{d\Omega}{ds} + d\frac{T_1 \cos w}{ds},$$

oder auch:

$$x_1 \cos\lambda + y_1 \cos\mu + z_1 \cos\nu = \varrho\frac{d\Omega}{ds} - \frac{\varrho \sin w}{\cos w}\frac{dT_1 \sin w}{ds}. \tag{32}$$

Man führe ω statt s als unabhängige Variabele durch:

$$\frac{ds}{r} = d\omega \tag{33}$$

ein. Ferner werde zur Vereinfachung:

$$\frac{r \cot w}{\varrho} = p \tag{34}$$

und

$$T_1 \sin w = T \tag{35}$$

gesetzt. Mit Rücksicht auf diese Bezeichnungen lassen sich die Gleichungen 31) und 32) wie folgt schreiben:

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = \Omega + T\cot w. \tag{36}$$

$$x_1 \cos\lambda + y_1 \cos\mu + z_1 \cos\nu = \frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega} - \frac{1}{p}\frac{dT}{d\omega}. \tag{37}$$

Die Gleichung 37) werde nach s differentiirt, dann ω als unabhängige Variabele durch $ds = r d\omega$ eingeführt. Aus 34) setze man:

$$\frac{\cot w}{\varrho} = \frac{p}{r}$$

ein. Mit Rücksicht, dass nach 30) für eine Variabele u:

$$\frac{dx_1}{du}\cos\lambda + \frac{dy_1}{du}\cos\mu + \frac{dz_1}{du}\cos\nu = 0,$$

giebt die Gleichung 37):

$$38)\quad -(x_1\cos l + y_1\cos m + z_1\cos n) = d\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega} - \frac{1}{p}\frac{dT}{d\omega}}{d\omega} + \frac{r\Omega}{\varrho} + pT.$$

Es ist nach 30) allgemein:

$$\frac{dx_1}{du}\cos l + \frac{dy_1}{du}\cos m + \frac{dz_1}{du}\cos n = 0.$$

Man differentiire die Gleichung 38) nach ω, addire dann die Gleichung 37). Hierdurch ergiebt sich zur Bestimmung von T die folgende Differentialgleichung:

$$39)\quad d\frac{d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT}{d\omega}}{d\omega} - pT}{d\omega} + \frac{1}{p}\frac{dT}{d\omega} = d\frac{d\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega} + \frac{r\Omega}{\varrho}}{d\omega} + \frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}.$$

Zur Integration dieser Gleichung nehme man zuerst die folgende:

$$40)\quad d\frac{d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}}{d\omega} - pT_0}{d\omega} + \frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega} = 0.$$

Diese Gleichung mit:

$$d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}}{d\omega} - pT_0$$

multiplicirt und integrirt giebt:

$$\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}}{d\omega} - pT_0\right]^2 + \left[\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}\right]^2 - T_0^2 = C_0, \tag{41}$$

wo C_0 eine Constante bedeutet, die auch verschwinden kann, da von den links stehenden Quadraten eins negativ ist. Man setze $C_0 = 0$ und

$$\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega} = T_0 \sin\varphi. \tag{42}$$

Die Gleichung 41) wird dann:

$$(T_0 \cos\varphi)^2 \left[\left(\frac{d\varphi}{d\omega} - p\cos\varphi\right)^2 - 1\right] = 0.$$

Es ist also:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\omega} - p\cos\varphi\right)^2 = 1,$$

oder:

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = 1 + p\cos\varphi. \tag{43}$$

Aus dieser Gleichung ist φ in Function von ω zu bestimmen, wobei es genügt, einen Werth von φ zu kennen, welcher keine arbiträre Constante enthält. Setzt man zur Vereinfachung:

$$\int p \sin\varphi \, d\omega = q, \tag{44}$$

so ist nach 42) für:

$$t = e^q, \tag{45}$$

$T_0 = t$ ein particuläres Integral der Gleichung 40). Man setze in 40) $T_0 = M_0 e^q$. Da nach 44) $\frac{dq}{d\omega} = p\sin\varphi$, so erhält man, mit Rücksicht auf 43):

$$d\frac{d\frac{\frac{e^q}{p}\frac{dM_0}{d\omega}}{d\omega} + \sin\varphi\, e^q \frac{dM_0}{d\omega}}{d\omega} + \frac{e^q}{p}\frac{dM_0}{d\omega}(1 + p\cos\varphi) = 0.$$

Für:

46)
$$\frac{e^q}{p}\frac{dM_0}{d\omega} = M_1$$

wird die obige Gleichung einfacher:

47)
$$d\frac{\frac{dM_1}{d\omega} + p\sin\varphi\, M_1}{d\omega} + M_1(1 + p\cos\varphi) = 0.$$

Aus 43) folgt unmittelbar, dass dieser Gleichung durch $M_1 = \cos\varphi$ genügt wird. Man hat also nach 46):

$$\frac{e^q}{p}\frac{dM_0}{d\omega} = \cos\varphi,$$

oder $M_0 = M$, wo:

48)
$$M = \int e^{-q} p\cos\varphi\, d\omega.$$

Setzt man also:

49)
$$t_1 = Me^q,$$

so ist $T_0 = t_1$ ein zweites particuläres Integral der Differentialgleichung 40). Um das zweite Integral der Gleichung 47) darzustellen, setze man in der bemerkten Gleichung:

50)
$$M_1 = M_2\cos\varphi.$$

Es folgt dann:

51)
$$d\frac{\frac{dM_2}{d\omega}\cos\varphi}{d\omega} = \frac{dM_2}{d\omega}\sin\varphi = \frac{dM_2}{d\omega}\cos\varphi\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi.$$

Da nun nach 43) und 44):

$$d\frac{\log e^q\cos\varphi}{d\omega} = -\,\mathrm{tang}\,\varphi,$$

so giebt die Gleichung 51) integrirt:

$$\frac{dM_2}{d\omega}\cos\varphi = \frac{e^{-q}}{\cos\varphi}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{dM_2}{d\omega} = \frac{e^{-q}}{\cos^2\varphi}.$$

Diese Gleichung nach 43) mit

$$1 = \frac{d\varphi}{d\omega} - p\cos\varphi$$

multiplicirt giebt:

$$\frac{dM_2}{d\omega} = \frac{e^{-q}}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{d\omega} - \frac{pe^{-q}}{\cos\varphi} = e^{-q}\frac{d\operatorname{tang}\varphi}{d\omega} - \frac{pe^{-q}}{\cos\varphi}.$$

Durch Integration folgt:

$$M_2 = \int e^{-q}\frac{d\operatorname{tang}\varphi}{d\omega}\,d\omega - \int\frac{pe^{-q}}{\cos\varphi}\,d\omega.$$

Die Anwendung der Integratio per partes giebt nach 44):

$$\int e^{-q}\frac{d\operatorname{tang}\varphi}{d\omega}\,d\omega = e^{-q}\operatorname{tang}\varphi + \int\frac{pe^{-q}\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,d\omega.$$

Es ist also:

$$M_2 = e^{-q}\operatorname{tang}\varphi - \int e^{-q}p\cos\varphi\,d\omega,$$

welche Gleichung nach 48) sich auch schreiben lässt:

$$M_2 = e^{-q}\operatorname{tang}\varphi - M.$$

Man substituire diesen Werth von M_2 in die Gleichung 50), dieselbe giebt dann:

$$M_1 = e^{-q}\sin\varphi - M\cos\varphi.$$

Mit Hülfe dieses zweiten particulären Integrals der Gleichung 47) erhält man nach 44) und 48):

$$pM_1e^{-q} = e^{-2q}p\sin\varphi - Me^{-q}p\cos\varphi = e^{-2q}\frac{dq}{d\omega} - M\frac{dM}{d\omega},$$

d. i. nach 46):

$$-2\frac{dM_0}{d\omega} = d\frac{e^{-2q}+M^2}{d\omega},$$

also:

$$-2M_0 = e^{-2q}+M^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit e^q, so ergiebt sich, wenn:

52) $$t_2 = e^{-q}+M^2 e^q$$

gesetzt wird, $T_0 = t_2$ als drittes particuläres Integral der Differentialgleichung 40). Die Zusammenstellung der obigen Resultate giebt also:

53) $$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\omega} = 1+p\cos\varphi, \quad q = \int p\sin\varphi\, d\omega, \quad M = \int e^{-q} p\cos\varphi\, d\omega. \\ t = e^q, \quad t_1 = Me^q, \quad t_2 = e^{-q}+M^2 e^q. \end{cases}$$

Aus den vorstehenden Gleichungen leitet man leicht die folgenden ab:

54) $$\begin{cases} \dfrac{1}{p}\dfrac{dt}{d\omega} = e^q\sin\varphi, \quad \dfrac{1}{p}\dfrac{dt_1}{d\omega} = Me^q\sin\varphi+\cos\varphi, \\ \dfrac{1}{p}\dfrac{dt_2}{d\omega} = M^2 e^q\sin\varphi+2M\cos\varphi - e^{-q}\sin\varphi. \\ d\dfrac{\frac{1}{p}\frac{dt}{d\omega}}{d\omega} - pt = e^q\cos\varphi, \quad d\dfrac{\frac{1}{p}\frac{dt_1}{d\omega}}{d\omega} - pt_1 = Me^q\cos\varphi - \sin\varphi, \\ d\dfrac{\frac{1}{p}\frac{dt_2}{d\omega}}{d\omega} - pt_2 = M^2 e^q\cos\varphi - 2M\sin\varphi - e^{-q}\cos\varphi. \end{cases}$$

Das Integral der Gleichung 39) hat nach Lagrange die Form:

55) $$T = Kt+K_1 t_1+K_2 t_2,$$

wo t, t_1, t_2 die particulären Integrale der Gleichung 40) sind. Nach bekannter Methode hat man zur Bestimmung von K, K_1 und K_2 die Gleichungen:

$$
\begin{gathered}
\frac{dK}{d\omega}t+\frac{dK_1}{d\omega}t_1+\frac{dK_2}{d\omega}t_2=0,\\
\frac{dK}{d\omega}\frac{dt}{d\omega}+\frac{dK_1}{d\omega}\frac{dt_1}{d\omega}+\frac{dK_2}{d\omega}\frac{dt_2}{d\omega}=0,\\
\frac{dK}{d\omega}\cdot\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dt}{d\omega}}{d\omega}-pt\right]+\frac{dK_1}{d\omega}\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dt_1}{d\omega}}{d\omega}-pt_1\right]+\frac{dK_2}{d\omega}\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dt_2}{d\omega}}{d\omega}-pt_2\right]=\Omega_1,
\end{gathered}
\tag{56}
$$

wo zur Vereinfachung:

$$
d\frac{d\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega}+\frac{r\Omega}{\varrho}}{d\omega}+\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}=\Omega_1,
\tag{57}
$$

gesetzt ist. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 53) und 54) erhält man aus 56):

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dK}{d\omega}&=-\frac{1}{2}\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dt_2}{d\omega}}{d\omega}-pt_2\right]\Omega_1,\\
\frac{dK_1}{d\omega}&=\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dt_1}{d\omega}}{d\omega}-pt_1\right]\Omega_1,\\
\frac{dK_2}{d\omega}&=-\frac{1}{2}\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dt}{d\omega}}{d\omega}-pt\right]\Omega_1.
\end{aligned}
\right.
\tag{58}
$$

Aus diesen Gleichungen sind K, K_1 und K_2 zu bestimmen. Um einfache Formeln zu erhalten, sollen einige Integrale durch wiederholte Integratio per partes transformirt werden. Genügt T_0 der Gleichung 40), so giebt die Integratio per partes:

$$\int\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}}{d\omega}-pT_0\right]d\frac{d\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega}+\frac{r\Omega}{\varrho}}{d\omega}d\omega=\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}}{d\omega}-pT_0\right]\left[d\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega}+\frac{r\Omega}{\varrho}\right]$$
$$+\int\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}\left[d\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega}+\frac{r\Omega}{\varrho}\right]d\omega.$$

Es ist weiter:

$$\int\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}d\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega}d\omega=\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}-\int d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}}{d\omega}\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}d\omega.$$

Mit Rücksicht auf den Werth von Ω_1 aus 57) geben die beiden vorstehenden Gleichungen:

$$59)\quad\int\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}}{d\omega}-pT_0\right]\Omega_1 d\omega=\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}}{d\omega}-pT_0\right]\Omega_2+\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}$$
$$+\int\frac{r\Omega}{p\varrho}\frac{dT_0}{d\omega}d\omega-\int\frac{p\varrho}{r}T_0\frac{d\Omega}{d\omega}d\omega.$$

Es ist in dieser Gleichung zur Abkürzung:

$$d\frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega}+\frac{r\Omega}{\varrho}=\Omega_2$$

gesetzt. In den beiden Integralen auf der rechten Seite der Gleichung 59) setze man aus der Gleichung 34) für p seinen Werth ein, nämlich:

$$p=\frac{r\cot w}{\varrho}.$$

Eine weitere Anwendung der Integratio per partes giebt dann:

$$\int \frac{r\Omega}{p\varrho}\frac{dT_0}{d\omega}d\omega - \int \frac{p\varrho}{r}T_0\frac{d\Omega}{d\omega}d\omega = \int \Omega \operatorname{tang} w \frac{dT_0}{d\omega}d\omega - \int \cot w\, T_0 \frac{d\Omega}{d\omega}d\omega$$

$$= -\cot w\, T_0\, \Omega + \int \frac{\Omega}{\cos w} d\frac{\frac{T_0}{\sin w}}{d\omega} d\omega.$$

Hierdurch lässt sich die Gleichung 59) auf folgende Form bringen:

$$60)\quad \int \left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}}{d\omega} - pT_0 \right] \Omega_1\, d\omega = \left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}}{d\omega} - pT_0 \right] \Omega_2 + \frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\omega}\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}$$
$$- \cot w\, T_0\, \Omega + \int \frac{\Omega}{\cos w} d\frac{\frac{T_0}{\sin w}}{d\omega} d\omega.$$

Diese Gleichung gilt für die drei particulären Integrale t, t_1 und t_2 der Differentialgleichung 40). Zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen setzte man:

$$61)\quad J = \int \frac{\Omega}{\cos w} d\frac{\frac{t}{\sin w}}{d\omega} d\omega, \quad J_1 = \int \frac{\Omega}{\cos w} d\frac{\frac{t_1}{\sin w}}{d\omega} d\omega,$$
$$J_2 = \int \frac{\Omega}{\cos w} d\frac{\frac{t_2}{\sin w}}{d\omega} d\omega.$$

Die Integration der Gleichungen 58) involvirt drei von ω unabhängige Quantitäten, welche nur v enthalten können und als Functionen dieser Variabelen für K, K_1 und K_2 respective durch V, V_1 und V_2 bezeichnet werden mögen.

Es ist dann:

$$K = \frac{V}{2} - \frac{1}{2}\int\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dt_2}{d\omega}}{d\omega} - pt_2\right]\Omega_1\, d\omega,$$

$$K_1 = V_1 + \int\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dt_1}{d\omega}}{d\omega} - pt_1\right]\Omega_1\, d\omega,$$

$$K_2 = \frac{V_2}{2} - \frac{1}{2}\int\left[d\frac{\frac{1}{p}\frac{dt}{d\omega}}{d\omega} - pt\right]\Omega_1\, d\omega.$$

Auf die rechten Seiten dieser Gleichungen wende man die Gleichung 60) an, setze darauf die erhaltenen Werthe von K, K_1 und K_2 in die Gleichung 55) und führe die abkürzenden Bezeichnungen aus 61) ein. Werden hierbei die Gleichungen 53) und 54) beachtet, aus denen $tt_2 = 1 + t_1^2$ folgt, so lässt sich der Werth von T auf folgende, sehr einfache Art, darstellen:

$$T = \Omega\cot w + \frac{V - J_2}{2}t + (V_1 + J_1)t_1 + \frac{V_2 - J}{2}t_2.$$

Diesen Werth von T substituire man in die Gleichungen 35), 36), 37) und 38), wobei die Gleichungen 53), 54) und 61) zur Anwendung kommen. Es ist ferner nach 34) $\frac{\varrho}{r} = \frac{\cot w}{p}$ gesetzt. Zur Bestimmung von T_1, x_1, y_1 und z_1 bestehn dann folgende Gleichungen:

$$62)\quad \left\{\begin{aligned}
&T_1\sin w = \Omega\cot w + \frac{V - J_2}{2}e^q + (V_1 + J_1)Me^q + \frac{V_2 - J}{2}(M^2e^q + e^{-q}),\\
&x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma = \frac{\Omega}{\sin^2 w}\\
&\qquad + \left[\frac{V - J_2}{2}e^q + (V_1 + J_1)Me^q + \frac{V_2 - J}{2}(M^2e^q + e^{-q})\right]\cot w,\\
&x_1\cos\lambda + y_1\cos\mu + z_1\cos\nu = -\left[V_1 + J_1 + (V_2 - J)M\right]\cos\varphi\\
&\qquad - \left[\frac{V - J_2}{2}e^q + (V_1 + J_1)Me^q + \frac{V_2 - J}{2}(M^2e^q - e^{-q})\right]\sin\varphi,\\
&x_1\cos l + y_1\cos m + z_1\cos n = -\left[V + J_1 + (V_2 - J)M\right]\sin\varphi\\
&\qquad + \left[\frac{V - J_2}{2}e^q + (V_1 + J_1)Me^q + \frac{V_2 - J}{2}(M^2e^q - e^{-q})\right]\cos\varphi.
\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen zur Bestimmung von T_1, x_1, y_1 und z_1 lassen sich auch auf folgende Formen bringen, welche in einigen Fällen zur Vereinfachung von Rechnungen führen:

62*)
$$\left\{\begin{aligned}
&T_1\sin w\\
&\quad=\Omega\cot w+\frac{V-J_2}{2}t+(V_1+J_1)t_1+\frac{V_2-J}{2}t_2,\\
&x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma\\
&\quad=\frac{\Omega}{\sin^2 w}+\left[\frac{V-J_2}{2}t+(V_1+J_1)t_1+\frac{V_2-J}{2}t_2\right]\cot w,\\
&x_1\cos\lambda+y_1\cos\mu+z_1\cos\nu\\
&\quad=-\left[\frac{V-J_2}{2}\frac{1}{p}\frac{dt}{d\omega}+(V_1+J_1)\frac{1}{p}\frac{dt_1}{d\omega}+\frac{V_2-J}{2}\frac{1}{p}\frac{dt_2}{d\omega}\right],\\
&x_1\cos l+y_1\cos m+z_1\cos n\\
&\quad=\frac{V-J_2}{2}\left(\frac{d\frac{1}{p}\frac{dt}{d\omega}}{d\omega}-pt\right)+(V_1+J_1)\left(\frac{d\frac{1}{p}\frac{dt_1}{d\omega}}{d\omega}-pt_1\right)\\
&\qquad+\frac{V_2-J}{2}\left(\frac{d\frac{1}{p}\frac{dt_2}{d\omega}}{d\omega}-pt_2\right).
\end{aligned}\right.$$

Aus den Gleichungen 62) ergiebt eine einfache Rechnung:

63) $$D_1=x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2=\frac{\Omega^2}{\sin^2 w}+(V_1+J_1)^2-(V-J_2)(V_2-J),$$

wodurch der gemeinschaftliche Nenner in den Werthen von x, y, z und r'' der Gleichungen 23) bestimmt ist. Zu Folge der Gleichung 26) können die Functionen V, V_1 und V_2 nicht alle arbiträr sein. Man differentiire die Gleichungen 62) nach v, es ergiebt sich dann, ganz ähnlich wie die Gleichung 63) die folgende:

$$\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dv}\right)^2-\left(\frac{dT_1}{dv}\right)^2=\left(\frac{dV_1}{dv}\right)^2-\frac{dV}{dv}\,\frac{dV_2}{dv}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nach 26) verschwindet, so folgt:

64) $$\left(\frac{dV_1}{dv}\right)^2=\frac{dV}{dv}\cdot\frac{dV_2}{dv}.$$

Durch diese Gleichung ist die Anzahl der willkührlichen Functionen in den Gleichungen 62) auf eine reducirt. Da die bemerkten Gleichungen nur V, V_1 und V_2 enthalten, so kann man zwei derselben als Function der dritten ansehn. Nimmt man z. B. V_1 statt v als unabhängige Variabele, so lässt sich die Gleichung 64) schreiben:

$$1 = \frac{dV}{dV_1} \cdot \frac{dV_2}{dV_1}.$$

Von den beiden Functionen V und V_2 ist also nur eine arbiträr. Die Gleichungen 30) geben:

$$x_1 \frac{dx_1}{du} + y_1 \frac{dy_1}{du} + z_1 \frac{dz_1}{du} - T_1 \frac{dT_1}{du}$$
$$= \frac{x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - T_1 \cos w}{\cos w} \frac{dT_1}{du},$$

d. i. nach 25) und 31):

65) $$\frac{dD_1}{du} = \frac{2\Omega}{\cos w} \frac{dT_1}{du}.$$

Diese Gleichung folgt auch aus der ersten Gleichung 62) und der Gleichung 63).

Die Berechnung von $\frac{\sqrt{E}}{r'}$ und $\frac{\sqrt{G}}{r''}$ lässt sich auf folgende Art ausführen. Aus den Gleichungen 2) findet man leicht:

$$(\xi_2^* - x)\cos a + (\eta_2^* - y)\cos b + (\zeta_2^* - z)\cos c = p_2,$$
$$(\xi_2^* - x)\cos a' + (\eta_2^* - y)\cos b' + (\zeta_2^* - z)\cos c' = -q_2.$$

Differentiirt man die erste der vorstehenden Gleichungen nach u, so folgt, mit Rücksicht auf die zweite Gleichung,:

$$\cos a \frac{d\xi_2^*}{du} + \cos b \frac{d\eta_2^*}{du} + \cos c \frac{d\zeta_2^*}{du} + q_2 \frac{\sqrt{E}}{r'} = \frac{dp_2}{du},$$

oder:

$$\cos a \frac{d\xi_2^*}{du} + \cos b \frac{d\eta_2^*}{du} + \cos c \frac{d\zeta_2^*}{du} - \frac{dp_2}{du} = -q_2 \frac{\sqrt{E}}{r'}.$$

Wegen der Gleichungen 29) erhält man:

$$66)\quad \cos a\, d\frac{\frac{\cos\alpha}{\Omega}}{du}+\cos b\, d\frac{\frac{\cos\beta}{\Omega}}{du}+\cos c\, d\frac{\frac{\cos\gamma}{\Omega}}{du}-d\frac{\frac{\cos w}{\Omega}}{du}=-\frac{\sin w}{\Omega}\frac{\sqrt{E}}{r'}.$$

Die Gleichungen 24) geben, durch Einsetzung des Werthes von $\frac{dr''}{dv}$,:

$$67)\quad d\frac{\frac{T_1}{D_1}}{dv}\cos a=d\frac{\frac{x_1}{D_1}}{dv},\quad d\frac{\frac{T_1}{D_1}}{dv}\cos b=d\frac{\frac{y_1}{D_1}}{dv},\quad d\frac{\frac{T_1}{D_1}}{dv}\cos c=d\frac{\frac{z_1}{D_1}}{dv}.$$

Multiplicirt man die Gleichung 66) mit:

$$d\frac{\frac{T_1}{D_1}}{dv}$$

so folgt mittelst der Gleichungen 67):

$$68)\quad \begin{aligned} &d\frac{\frac{x_1}{D_1}}{dv}d\frac{\frac{\cos\alpha}{\Omega}}{du}+d\frac{\frac{y_1}{D_1}}{dv}d\frac{\frac{\cos\beta}{\Omega}}{du}+d\frac{\frac{z_1}{D_1}}{dv}d\frac{\frac{\cos\gamma}{\Omega}}{du}-d\frac{\frac{T_1}{D_1}}{dv}d\frac{\frac{\cos w}{\Omega}}{du}\\ &=-\frac{\sin w}{\Omega}d\frac{\frac{T_1}{D_1}}{dv}\cdot\frac{\sqrt{E}}{r'}.\end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Differentialquotient nach v von:

$$69)\quad \begin{aligned} &\frac{x_1}{D_1}d\frac{\frac{\cos\alpha}{\Omega}}{du}+\frac{y_1}{D_1}d\frac{\frac{\cos\beta}{\Omega}}{du}+\frac{z_1}{D_1}d\frac{\frac{\cos\gamma}{\Omega}}{du}-\frac{T_1}{D_1}d\frac{\frac{\cos w}{\Omega}}{du}=\\ &\frac{1}{D_1}d\frac{\frac{x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-T_1\cos w}{\Omega}}{du}\\ &-\frac{1}{D_1\Omega}\left(\frac{dx_1}{du}\cos\alpha+\frac{dy_1}{du}\cos\beta+\frac{dz_1}{du}\cos\gamma-\frac{dT_1}{du}\cos w\right).\end{aligned}$$

Nun ist nach 30) und 31):

$$\frac{dx_1}{du}\cos\alpha+\frac{dy_1}{du}\cos\beta+\frac{dz_1}{du}\cos\gamma-\frac{dT_1}{du}\cos w=\frac{dT_1}{du}\frac{\sin^2 w}{\cos w},$$
$$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-T_1\cos w=\Omega.$$

Die rechte Seite der Gleichung 69) reducirt sich also auf:

$$-\frac{\sin^2 w}{\Omega\cos w}\frac{1}{D_1}\frac{dT_1}{du}.$$

Da nun der Differentialquotient dieses Ausdrucks nach v gleich der linken Seite der Gleichung 68) ist, so hat man zur Bestimmung von $\frac{\sqrt{E}}{r'}$ folgende Gleichung:

70) $$d\frac{\frac{T_1}{D_1}}{dv}\cdot\frac{\sqrt{E}}{r'}=\operatorname{tang} w\, d\frac{\frac{1}{D_1}\frac{dT_1}{du}}{dv}.$$

Diese Gleichung lässt sich mit Hülfe der Gleichung 65) auch schreiben:

$$d\frac{\frac{T_1}{D_1}}{dv}\cdot\frac{\sqrt{E}}{r'}=\frac{\sin w}{2\Omega}d\frac{\frac{1}{D_1}\frac{dD_1}{du}}{dv}.$$

Die Gleichung

$$D_1=x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2$$

zweimal nach v differentiirt, giebt nach 26):

71) $$\frac{d^2 D_1}{dv^2}=2\left(x_1\frac{d^2x_1}{dv^2}+y_1\frac{d^2y_1}{dv^2}+z_1\frac{d^2z_1}{dv^2}-T_1\frac{d^2T_1}{dv^2}\right).$$

Durch Differentiation der Gleichungen 67) in Beziehung auf v erhält man:

$$\left(D_1\frac{d^2T_1}{dv^2}-T_1\frac{d^2D_1}{dv^2}\right)\cos a-\left(D_1\frac{dT_1}{dv}-T_1\frac{dD_1}{dv}\right)\frac{\sqrt{G}}{r''}\cos a''=D_1\frac{d^2x_1}{dv^2}-x_1\frac{d^2D_1}{dv^2},$$

$$\left(D_1\frac{d^2T_1}{dv^2}-T_1\frac{d^2D_1}{dv^2}\right)\cos b-\left(D_1\frac{dT_1}{dv}-T_1\frac{dD_1}{dv}\right)\frac{\sqrt{G}}{r''}\cos b''=D_1\frac{d^2y_1}{dv^2}-y_1\frac{d^2D_1}{dv^2},$$

$$\left(D_1\frac{d^2T_1}{dv^2}-T_1\frac{d^2D_1}{dv^2}\right)\cos c-\left(D_1\frac{dT_1}{dv}-T_1\frac{dD_1}{dv}\right)\frac{\sqrt{G}}{r''}\cos c''=D_1\frac{d^2z_1}{dv^2}-z_1\frac{d^2D_1}{dv^2}.$$

Man bilde die Summe der Quadrate dieser Gleichungen, ziehe auf beiden Seiten

$$\left(D_1\frac{d^2T_1}{dv^2}-T_1\frac{d^2D_1}{dv^2}\right)^2$$

ab. Unter Beinahme der Gleichung 71) folgt dann:

$$72)\quad \left(D_1\frac{dT_1}{dv}-T_1\frac{dD_1}{dv}\right)^2\left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2=D_1^2\left[\left(\frac{d^2x_1}{dv^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y_1}{dv^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z_1}{dv^2}\right)^2-\left(\frac{d^2T_1}{dv^2}\right)^2\right].$$

Die Gleichungen 62) geben:

$$\left(\frac{d^2x_1}{dv^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y_1}{dv^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z_1}{dv^2}\right)^2-\left(\frac{d^2T_1}{dv^2}\right)^2=\left(\frac{d^2V_1}{dv^2}\right)^2-\frac{d^2V}{dv^2}\frac{d^2V_2}{dv^2}.$$

Die Gleichung 64) nach v differentiirt, darauf quadrirt und durch die Gleichung 64) dividirt giebt:

$$\left(\frac{d^2V_1}{dv^2}\right)^2=\frac{\left(\frac{dV}{dv}\frac{d^2V_2}{dv^2}+\frac{dV_2}{dv}\frac{d^2V}{dv^2}\right)^2}{4\frac{dV}{dv}\frac{dV_2}{dv}}$$

also:

$$\left(\frac{d^2V_1}{dv^2}\right)^2-\frac{d^2V}{dv^2}\frac{d^2V_2}{dv^2}=\frac{\left(\frac{dV}{dv}\frac{d^2V_2}{dv^2}-\frac{dV_2}{dv}\frac{d^2V}{dv^2}\right)^2}{4\frac{dV}{dv}\frac{dV_2}{dv}}.$$

Setzt man im Nenner des vorstehenden Ausdrucks wieder:

$$\frac{dV}{dv}\frac{dV_2}{dv} = \left(\frac{dV_1}{dv}\right)^2,$$

so lässt sich die Gleichung 72) auf folgende Art schreiben:

73) $$\left(D_1 \frac{dT_1}{dv} - T_1 \frac{dD_1}{dv}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 = D_1^2 \left(\frac{\frac{dV}{dv}\frac{d^2V_2}{dv^2} - \frac{dV_2}{dv}\frac{d^2V}{dv^2}}{2\frac{dV_1}{dv}}\right)^2.$$

Durch diese Gleichung ist $\frac{\sqrt{G}}{r''}$ bestimmt.

Die Gleichungen 62) geben x_1, y_1, z_1 und T_1; durch die Gleichungen 53) und 61) sind die Werthe von M, q, φ und die Integrale J, J_1, J_2 definirt. Die Relation zwischen den Functionen V, V_1 und V_2 ist in der Gleichung 64) enthalten. Durch die vorhergehenden Quantitäten sind dann nach 67) $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$ bestimmt. Substituirt man in den Gleichungen 23) die Werthe von ξ^*, η^*, ζ^*, p^* und U aus 28) und 28*), zieht die Gleichungen 29) noch in Betracht, so sind die Coordinaten x, y, z eines Punktes einer Fläche mit einem System sphärischer Krümmungslinien vollständig als Functionen zweier Variabelen dargestellt. An Stelle der Gleichungen 23) sind vortheilhafter die weiter unten entwickelten Gleichungen 80) zu nehmen. Die Curve, auf welcher die Mittelpunkte der Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien liegen, lässt sich, analog wie in XI, durch eine andere Curve ersetzen.

Es sei:

74) $$\xi_0 = \xi_2^* - q_2 U\xi^*, \quad \eta_0 = \eta_2^* - q_2 U\eta^*, \quad \zeta_0 = \zeta_2^* - q_2 U\zeta^*,$$

oder nach 28) und 28*):

75) $$\xi_0 = \xi_2^* - \frac{q_2 \cos\alpha}{\sin w}, \quad \eta_0 = \eta_2^* - \frac{q_2 \cos\beta}{\sin w}, \quad \zeta_0 = \zeta_2^* - \frac{q_2 \cos\gamma}{\sin w}.$$

Man kann (ξ_0, η_0, ζ_0) als Punkt Π_0 einer Curve doppelter Krümmung ansehn. In Beziehung auf diese Curve versehe man alle in I definirten Grössen mit dem Index 0. Die Gleichungen 75) geben dann, wegen 29), nach u differentiirt:

$$\cos\alpha_0 \frac{ds_0}{du} = -\frac{\cos\alpha}{\Omega} \frac{d\frac{q_2\Omega}{\sin w}}{du},$$

$$\cos\beta_0 \frac{ds_0}{du} = -\frac{\cos\beta}{\Omega} \frac{d\frac{q_2\Omega}{\sin w}}{du},$$

$$\cos\gamma_0 \frac{ds_0}{du} = -\frac{\cos\gamma}{\Omega} \frac{d\frac{q_2\Omega}{\sin w}}{du}.$$

Nimmt man:

76) $$\frac{ds_0}{du} = \frac{-1}{\Omega} \frac{d\frac{q_2\Omega}{\sin w}}{du},$$

so ist $\cos\alpha_0 = \cos\alpha$, $\cos\beta_0 = \cos\beta$, $\cos\gamma_0 = \cos\gamma$. Hieraus folgt weiter:

$$\lambda_0 = \lambda,\quad l_0 = l,\quad \frac{\varrho_0}{r_0} = \frac{\varrho}{r},\quad d\omega_0 = d\omega \text{ etc.}$$

In den Gleichungen 28), 29), 34) und 62) können alle von s direct abhängigen Grössen mit dem Index 0 versehn und dann als Functionen von s_0 betrachtet werden, wobei die Gleichungen 74) und 75) bestehn. Lässt man der Einfachheit halber den Index 0 wieder weg, so bleiben die Gleichungen 28), 29), 34) und 62) unverändert an Stelle der Gleichungen 74) und 75) treten die folgenden:

77) $$\xi = \xi_2^* - q_2 U\xi^*,\quad \eta = \eta_2^* - q_2 U\eta^*,\quad \zeta = \zeta_2^* - q_2 U\zeta^*.$$

78) $$\xi_2^* = \xi + \frac{q_2\cos\alpha}{\sin w},\quad \eta_2^* = \eta + \frac{q_2\cos\beta}{\sin w},\quad \zeta_2^* = \zeta + \frac{q_2\cos\gamma}{\sin w}.$$

In den Gleichungen 78) sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes ***II*** einer beliebigen Curve doppelter Krümmung, für welche die in I aufgestellten Gleichungen gelten. Der Punkt $(\xi_2^*, \eta_2^*, \zeta_2^*)$ liegt auf der Tangente des Punktes ***II***. Die Gleichungen 78) gehn durch Vertauschung von w mit σ_0 direct in die Gleichungen 41) von IX über, sie entsprechen ebenfalls den Gleichungen 31) von XI, wenn $\sin w = 1$ und $q_2 = R_2$ genommen wird.

Aus den Gleichungen 28), 28*) und 29) folgt durch Differentiation nach u:

$$d\frac{p_2 - q_2\, Up^*}{du} = d\frac{p_2 - q_2 \cot w}{du} = \frac{-\cos w}{\Omega} d\frac{\frac{q_2 \Omega}{\sin w}}{du}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 76) folgt, wenn s statt s_0 gesetzt wird:

$$d\frac{p_2 - q_2\, Up^*}{du} = d\frac{p_2 - q_2 \cot w}{du} = \cos w \frac{ds}{du},$$

oder:

79) $$p_2 - q_2\, Up^* = p_2 - q_2 \cot w = \int \cos w\, ds.$$

Substituirt man in die Gleichungen 23) den Werth von U aus 28*), ferner die Werthe von ξ_2^*, η_2^*, ζ_2^* und p_2 aus 78) und 79), so folgt:

80) $$\begin{cases} x + r'' \cos a - \xi = \dfrac{2 q_2 \Omega}{\sin w} \dfrac{x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - T_1^2}, \\ y + r'' \cos b - \eta = \dfrac{2 q_2 \Omega}{\sin w} \dfrac{y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - T_1^2}, \\ z + r'' \cos c - \zeta = \dfrac{2 q_2 \Omega}{\sin w} \dfrac{z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - T_1^2}, \\ r'' - \int \cos w\, ds = \dfrac{2 q_2 \Omega}{\sin w} \dfrac{T_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - T_1^2}. \end{cases}$$

Die vorstehenden Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen 62) oder 62*) scheinen das einfachste System zu bilden, welches sich für Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien aufstellen lässt.

Da:

$$\frac{d\xi}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{d\eta}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{d\zeta}{ds} = \cos\gamma,$$

so geben die Gleichungen 78) und 79) zu dem folgenden symmetrischen Systeme Veranlassung:

81)
$$\begin{aligned}
\xi_2^* &= \int \cos\alpha\, ds + \frac{q_2}{\sin w} \cos\alpha,\\
\eta_2^* &= \int \cos\beta\, ds + \frac{q_2}{\sin w} \cos\beta,\\
\zeta_2^* &= \int \cos\gamma\, ds + \frac{q_2}{\sin w} \cos\gamma,\\
p_2 &= \int \cos w\, ds + \frac{q_2}{\sin w} \cos w.
\end{aligned}$$

B. Die Mittelpunkte der Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien liegen auf einer planen Curve.

Ist die Curve, gebildet aus den Mittelpunkten der Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien, plan, so können für die Curve, auf welcher der Punkt (ξ, η, ζ) liegt, zwei Fälle eintreten. Die bemerkte Curve bleibt eine beliebige Raumcurve, oder sie ist ebenfalls plan. Im letztgenannten Falle erfordern die in A. aufgestellten Formeln einige Modificationen, welche wesentlich darauf beruhn, dass x_1, y_1, und z_1 nicht mehr, wie im allgemeinen Falle, durch symmetrisch gestaltete Gleichungen bestimmt werden. Diese Modificationen, welche keine weitläufigen Rechnungen erfordern, sollen zuerst untersucht werden. Es seien also ζ_2^* und ζ gleichzeitig constant. Nimmt man die Ebene der planen Curven zur Ebene der x und y, so ist einfacher $\zeta_2^* = 0$ und $\zeta = 0$, also $r = \infty$. Man führe den Winkel ε durch die Gleichung:

$$d\varepsilon = \frac{ds}{\varrho}$$

ein und setze:

82)
$$\begin{aligned}
&\cos\alpha = \sin\varepsilon, \quad \cos\beta = -\cos\varepsilon, \quad \cos\gamma = 0.\\
&\cos\lambda = \cos\varepsilon, \quad \cos\mu = \sin\varepsilon, \quad \cos\nu = 0,
\end{aligned}$$

Für $\zeta^* = 0$ geben die Gleichungen 21) $\dfrac{dz_1}{du} = 0$, d. h. z_1 ist nur von v abhängig. In den Gleichungen 30) werde ε an Stelle von u als unabhängige Variabele genommen, unter Beachtung der Gleichungen 82) folgt dann:

83) $$\frac{dx_1}{d\varepsilon} = \frac{\sin\varepsilon}{\cos w}\frac{dT_1}{d\varepsilon}, \quad \frac{dy_1}{d\varepsilon} = -\frac{\cos\varepsilon}{\sin w}\frac{dT_1}{d\varepsilon}.$$

Die Gleichung 31) reducirt sich auf:

84) $$x_1 \sin\varepsilon - y_1 \cos\varepsilon = \Omega + T_1 \cos w.$$

Wird diese Gleichung nach ε differentiirt, so folgt, unter Anwendung der Gleichungen 83):

$$x_1 \cos\varepsilon + y_1 \sin\varepsilon = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} - \operatorname{tang} w \, d\frac{T_1 \sin w}{d\varepsilon},$$

oder:

85) $$T_1 \sin w = T,$$ 86) $$\cot w = p,$$

gesetzt:

87) $$x_1 \cos\varepsilon + y_1 \sin\varepsilon = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} - \frac{1}{p}\frac{dT}{d\varepsilon}.$$

Eine weitere Differentiation der vorstehenden Gleichung nach ε liefert, in Verbindung mit den Gleichungen 83), 84) und 85), folgende Differentialgleichung für T:

88) $$d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT}{d\varepsilon}}{d\varepsilon} - pT = \frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2} + \Omega.$$

Es sei:

89) $$q = \int p \, d\varepsilon = \int \cot w \, d\varepsilon.$$

Die beiden particulären Integrale von:

$$d\frac{\frac{1}{p}\frac{dT_0}{d\varepsilon}}{d\varepsilon} - pT_0 = 0,$$

oder nach 89) von:

$$\frac{d^2 T_0}{dq^2} - T_0 = 0$$

sind e^q und e^{-q}. In der Gleichung 88) ist also:

90)
$$T = K_1 e^q + K_2 e^{-q},$$

wo für K_1 und K_2 die folgenden Gleichungen stattfinden:

91)
$$\frac{dK_1}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2} + \Omega\right)e^{-q}, \quad \frac{dK_2}{d\varepsilon} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2} + \Omega\right)e^q.$$

Die wiederholte Integratio per partes, nebst $\frac{dq}{d\varepsilon} = \cot w$, giebt:

$$\int \frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2} e^{-q}\,d\varepsilon = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} e^{-q} + \Omega e^{-q}\cot w + \int \frac{\Omega}{\sin^2 w}\left(\cos^2 w + \frac{dw}{d\varepsilon}\right)e^{-q}\,d\varepsilon,$$

$$-\int \frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2} e^{q}\,d\varepsilon = -\frac{d\Omega}{d\varepsilon} e^{q} + \Omega e^{q}\cot w - \int \frac{\Omega}{\sin^2 w}\left(\cos^2 w - \frac{dw}{d\varepsilon}\right)e^{q}\,d\varepsilon.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

92)
$$\int \frac{\Omega}{\sin^2 w}\left(1 + \frac{dw}{d\varepsilon}\right)e^{-q}\,d\varepsilon = J_1, \quad \int \frac{\Omega}{\sin^2 w}\left(1 - \frac{dw}{d\varepsilon}\right)e^{q}\,d\varepsilon = J_2,$$

so geben die Gleichungen 91) integrirt:

$$2K_1 = V_1 + \frac{d\Omega}{d\varepsilon} e^{-q} + \Omega e^{-q}\cot w + J_1,$$

$$2K_2 = V_2 - \frac{d\Omega}{d\varepsilon} e^{q} + \Omega e^{q}\cot w - J_2.$$

Es sind V_1 und V_2 Functionen von v. Die Substitution dieser Werthe von K_1 und K_2 in die Gleichung 90) giebt für T folgenden Ausdruck:

$$T = \Omega\cot w + \frac{V_1 + J_1}{2} e^q + \frac{V_2 - J_2}{2} e^{-q}.$$

Man setze diesen Werth von T in die Gleichungen 84), 85) und

87). Mit Rücksicht auf die Bedeutung der in 92) aufgestellten Integrale J_1 und J_2 folgt:

$$
93)\quad \begin{cases}
T_1 \sin w = \Omega \cot w + \dfrac{V_1 + J_1}{2} e^q + \dfrac{V_2 - J_2}{2} e^{-q}, \\[2ex]
x_1 \sin \varepsilon - y_1 \cos \varepsilon = \dfrac{\Omega}{\sin^2 w} + \left[\dfrac{V_1 + J_1}{2} e^q + \dfrac{V_2 - J_2}{2} e^{-q}\right] \cot w, \\[2ex]
x_1 \cos \varepsilon + y_1 \sin \varepsilon = -\dfrac{V_1 + J_1}{2} e^q + \dfrac{V_2 - J_2}{2} e^{-q}.
\end{cases}
$$

Die vorstehenden Gleichungen geben:

$$
\left(\frac{dT_1}{dv}\right)^2 - \left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2 - \left(\frac{dy_1}{dv}\right)^2 = \frac{dV_1}{dv} \frac{dV_2}{dv}.
$$

Hierdurch nimmt die Gleichung 26) die Form:

$$
94)\quad \left(\frac{dz_1}{dv}\right)^2 = \frac{dV_1}{dv} \frac{dV_2}{dv}
$$

an, wo z_1 eine beliebige Function von v ist. Die Gleichungen 93) und 94) entsprechen den Gleichungen 62) und 64). Setzt man:

$$
D_1 = \frac{\Omega^2}{\sin^2 w} + z_1^2 - (V_1 + J_1)(V_2 - J_2),
$$

so behält die Gleichung 70) ihre Form bei, an Stelle der Gleichung 73) ist folgende zu nehmen:

$$
\left(D_1 \frac{dT_1}{dv} - T_1 \frac{dD_1}{dv}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 = D_1^2 \left(\frac{\dfrac{dV_1}{dv} \dfrac{d^2 V_2}{dv^2} - \dfrac{dV_2}{dv} \dfrac{d^2 V_1}{dv^2}}{\dfrac{dz_1}{dv}}\right)^2.
$$

Für die Gleichungen 93) bleiben die Gleichungen 80) unverändert, nur dass $\zeta = 0$ zu setzen ist.

Nimmt man ζ^* von Null verschieden an, so liegt der Punkt (ξ, η, ζ) auf einer beliebigen Curve doppelter Krümmung, die Gleichungen 62) oder 62*) von A behalten dann ihre Gültigkeit. Es sei $\zeta^* = k$, wo k eine Constante bedeutet, nach den Gleichungen 28) ist dann:

95) $$\cos\gamma = k\Omega.$$

Nimmt man in 21) $\zeta^* = k$, so ist:

$$\frac{dz_1}{du} = k\,d\frac{\frac{q_2 U}{\Delta}}{du},$$

oder nach 22*):

$$2\frac{dz_1}{du} = k\,d\frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - T_1^2}{du}.$$

Bedeutet $F(v)$ eine beliebige Function von v, so liefert die Integration der vorstehenden Gleichung:

96) $$z_1 - F(v) = \frac{k}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - T_1^2).$$

Die Bestimmung der Function $F(v)$ lässt sich, bei einiger Vorsicht, mit mässigem Aufwande analytischer Rechnungen ausführen, wobei sich einige bemerkenswerthe Relationen ergeben. Man substituire in der Gleichung 96) für z_1 und $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - T_1^2$ ihre Werthe aus 62*) und 63). Das Resultat dieser Substitutionen lässt sich schreiben:

97) $$-F(v) - \frac{k}{2}(V_1^2 - V V_2) + \frac{PV}{2} + P_1 V_1 + \frac{P_2 V_2}{2} + P_3 = 0.$$

Es haben P, P_1 und P_2 folgende Bedeutungen:

98) $$\begin{cases} P = t\cot w\cos\gamma - \dfrac{1}{p}\dfrac{dt}{d\omega}\cos\nu + \left(d\dfrac{\frac{1}{p}\frac{dt}{d\omega}}{d\omega} - pt\right)\cos n - kJ, \\[2ex] P_1 = t_1\cot w\cos\gamma - \dfrac{1}{p}\dfrac{dt_1}{d\omega}\cos\nu + \left(d\dfrac{\frac{1}{p}\frac{dt_1}{d\omega}}{d\omega} - pt_1\right)\cos n - kJ_1, \\[2ex] P_2 = t_2\cot w\cos\gamma - \dfrac{1}{p}\dfrac{dt_2}{d\omega}\cos\nu + \left(d\dfrac{\frac{1}{p}\frac{dt_2}{d\omega}}{d\omega} - pt_2\right)\cos n - kJ_2. \end{cases}$$

Was den Werth von P_3 betrifft, so lässt sich derselbe mittelst der vorstehenden Gleichungen auf folgende Form reduciren:

$$P_3 = \frac{\Omega \cos\gamma}{\sin^2 w} - \frac{k\Omega^2}{2\sin^2 w} - \frac{PJ_2}{2} - \frac{P_2 J}{2} + P_1 J_1 + \frac{k}{2}(J_1^2 - JJ_2).$$

Man multiplicire diese Gleichung mit $2k$ und setze rechts nach 95) $k\Omega = \cos\gamma$. Es folgt dann:

$$99)\qquad 2kP_3 = \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2 w} + (kJ_1 + P_1)^2 - (kJ + P)(kJ_2 + P_2) + PP_2 - P_1^2.$$

Multiplicirt man das Integral J aus 61) mit k und setzt dann im Integrale $k\Omega = \cos\gamma$, so ist auch:

$$100)\qquad kJ = k\int \frac{\Omega}{\cos w} \frac{d\frac{t}{\sin w}}{d\omega} d\omega = \int \frac{\cos\gamma}{\cos w} \frac{d\frac{t}{\sin w}}{d\omega} d\omega.$$

Aus der Gleichung 34) ist:

$$\frac{r}{\varrho} = p \operatorname{tang} w,$$

mittelst dieser Gleichung lassen sich die Differentialquotienten von $\cos\gamma$, $\cos\nu$ und $\cos n$ nach ω auf folgende Art schreiben:

$$101)\quad \frac{d\cos\gamma}{d\omega} = p \operatorname{tang} w \cos\nu, \quad \frac{d\cos\nu}{d\omega} = -p \operatorname{tang} w \cos\gamma - \cos n, \quad \frac{d\cos n}{d\omega} = \cos\nu.$$

Es werde nun der Werth von P aus der ersten Gleichung 98) in Beziehung auf ω differentiirt. Es ist t ein particuläres Integral der Differentialgleichung 40), diese Bemerkung genügt, um mit Hülfe der Gleichungen 100) und 101) die Gleichung:

$$\frac{dP}{d\omega} = 0$$

darzuthun. Es ist also P eine absolute Constante. Dasselbe gilt von P_1 und P_2. Weniger einfach lässt sich die Unabhängigkeit des letzten Terms P_3 der Gleichung 97) von ω beweisen. In der Gleichung 99) setze man die Werthe von $kJ + P$, $kJ_1 + P_1$, $kJ_2 + P_2$ aus den Gleichungen 98) ein. Eine, unter Zuziehung der Gleichungen 53) und 54), leicht zu übersehende Rechnung, führt zu folgendem Resultate:

102) $$2kP_3 = 1 + PP_2 - P_1^2.$$

Setzt man hieraus den Werth von P_3 in die Gleichung 97), so ist:

$$2kF(v) = (kV + P_2)(kV_2 + P) - (kV_1 - P_1)^2 + 1,$$

wodurch $F(v)$ in Function von V, V_1 und V_2 bestimmt ist. Aus den Gleichungen 62*) lassen sich die Integrale J, J_1 und J_2 mittelst der Gleichungen 98) eliminiren. Man multiplicire die Gleichungen 62*) mit k, setze dann $k\Omega = \cos\gamma$ und

$$kV - kJ_2 = kV + P_2 - (P_2 + kJ_2),\ kV_1 + J_1 = kV_1 - P_1 + (P_1 + kJ_1),$$
$$kV_2 - kJ = kV_3 + P - (P + kJ).$$

In den so umgeformten Gleichungen sind die Functionen:

$$kV + P_2,\quad kV_1 - P_1,\quad kV_2 + P$$

von v enthalten. Man kann, unbeschadet der Allgemeinheit, $P = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ setzen, wodurch die in 64) enthaltene Relation zwischen V, V_1 und V_2 nicht geändert wird. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 53) und 54) entsprechen dann einer planen Curve der Mittelpunkte der Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien folgende Gleichungen:

$$T_1 \sin w = \frac{Vt}{2} + V_1 t_1 + \frac{V_2 t_2}{2},$$

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + \left(z_1 - \frac{1}{k}\right)\cos\gamma = \left[\frac{Vt}{2} + V_1 t_1 + \frac{V_2 t_2}{2}\right]\cot w,$$

$$x_1 \cos\lambda + y_1 \cos\mu + \left(z_1 - \frac{1}{k}\right)\cos\nu = -\frac{V}{2}\frac{1}{p}\frac{dt}{d\omega} - V_1 \frac{1}{p}\frac{dt_1}{d\omega} - \frac{V_2}{2}\frac{1}{p}\frac{dt_2}{d\omega},$$

$$x_1 \cos l + y_1 \cos m + \left(z_1 - \frac{1}{k}\right)\cos n = \frac{V}{2}\left(\frac{d\,\frac{1}{p}\frac{dt}{d\omega}}{d\omega} - pt\right)$$
$$+ V_1\left(\frac{d\,\frac{1}{p}\frac{dt_1}{d\omega}}{d\omega} - pt_1\right) + \frac{V_2}{2}\left(\frac{d\,\frac{1}{p}\frac{dt_2}{d\omega}}{d\omega} - pt_2\right).$$

Die dritte Gleichung 78) giebt $\zeta_2^* = 0$ gesetzt:

$$\frac{q_2}{\sin w} = -\frac{\zeta}{\cos\gamma}.$$

Die beiden ersten Gleichungen 78) lassen sich hierdurch auf folgende Formen bringen:

$$\xi_2^* = \xi - \zeta\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \xi - \zeta\frac{\frac{d\xi}{ds}}{\frac{d\zeta}{ds}}, \quad \eta_2^* = \eta - \zeta\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \eta - \zeta\frac{\frac{d\eta}{ds}}{\frac{d\zeta}{ds}},$$

oder, wenn ζ zur unabhängigen Variabelen genommen wird:

$$\xi^* = -\zeta^2\frac{d\frac{\xi}{\zeta}}{d\zeta}, \quad \eta^* = -\zeta^2\frac{d\frac{\eta}{\zeta}}{d\zeta}.$$

C. Die Mittelpunkte der Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien liegen auf einer Geraden.

Analog wie bei den in B untersuchten Flächen können zwei Fälle stattfinden, deren jeder eine besondere Ausführung erfordert, je nachdem der Punkt (ξ, η, ζ) ebenfalls, wie die Mittelpunkte der Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien, auf einer Geraden liegt, oder einer beliebigen Curve angehört. Es wird sich ergeben, dass die Curve plan ist. Der Einfachheit halber, soll der erstgenannte Fall zuerst betrachtet werden.

Liegt der Punkt (ξ, η, ζ) auf einer Geraden, wird dieselbe zur Axe der z genommen, so hat man in den Gleichungen 28) $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$ und $\cos\gamma = 1$, also $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$. Die Gleichungen 30) und 31) geben dann:

$$\frac{dx_1}{du} = 0, \quad \frac{dy_1}{du} = 0, \quad \frac{dz_1}{du} = \frac{1}{\cos w}\frac{dT_1}{du}, \quad z_1 = \Omega + T_1\cos w.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen findet man leicht:

$$
\begin{aligned}
&T_1 \sin w = V_1 + \Omega \cot w + \int \frac{\Omega}{\sin^2 w}\, dw, \\
103)\qquad & z_1 = V_1 \cot w + \frac{\Omega}{\sin^2 w} + \cot w \int \frac{\Omega}{\sin^2 w}\, dw.
\end{aligned}
$$

Es ist V_1 eine Function von v. In den beiden rechts stehenden Integralen ist w zur Integrationsvariabelen genommen. Mit Hülfe der beiden vorstehenden Gleichungen reducirt sich die Gleichung 26) auf:

$$\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dv}\right)^2 = \left(\frac{dV_1}{dv}\right)^2.$$

Ist ψ eine Function von v, $F(\psi)$ eine Function von ψ, so lässt sich die vorstehende Gleichung durch die folgenden ersetzen:

$$
\begin{aligned}
104)\qquad x_1 = F''(\psi)\cos\psi + F'(\psi)\sin\psi,\quad & y_1 = F''(\psi)\sin\psi - F'(\psi)\cos\psi, \\
V_1 = F''(\psi) + F(\psi)&,
\end{aligned}
$$

wo $F'(\psi)$ und $F''(\psi)$ die Derivirten erster und zweiter Ordnung von $F(\psi)$ nach ψ sind.

Der zweite Fall, wenn der Punkt (ξ, η, ζ) auf einer Curve liegt, bildet eine Combination der beiden in B geführten Untersuchungen. Um an dieselben direct anschliessen zu können, liege der Mittelpunkt der Kugelfläche der sphärischen Krümmungslinien auf der Axe der y, oder auch auf einer Parallelen zu derselben. Es sind dann ξ^*_2 und ζ^*_2 constant, also nach 13) auch ξ^* und ζ^*. In Folge der Gleichungen 28) ist:

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{\zeta^*}{\xi^*}.$$

Stellt man das linksstehende Verhältniss aus den Gleichungen 78) her, so ist auch:

$$\frac{\zeta^*_2 - \zeta}{\xi^*_2 - \xi} = \frac{\zeta^*}{\xi^*}$$

oder:

$$(\zeta^*_2 - \zeta)\,\xi^* - (\xi^*_2 - \xi)\,\zeta^* = 0.$$

In dieser Gleichung sind nur ξ und ζ variabel. Der Punkt (ξ, η, ζ) liegt also in einer festen Ebene, welche der y-Axe parallel ist. Wird diese Ebene zur Coordinatenebene der x und y genommen, so ist $\zeta_2^* = \zeta = 0$ und $\zeta^* = 0$. In den Gleichungen 21) ist also ξ^* constant und $\zeta^* = 0$. Setzt man $\xi^* = k$, so hat man nach 21) und 22*) die beiden Relationen:

$$\frac{dz_1}{du} = 0.$$

$$\frac{dx_1}{du} = \frac{k}{2} d \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - T_1^2}{du}.$$

Die zweite Gleichung integrirt giebt:

105) $$x_1 - F(v) = \frac{k}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - T_1^2),$$

wo $F(v)$ eine Function von v bedeutet. Da $\zeta = 0$, so gelten wieder die Gleichungen 82) bis 93) von B, zu denen noch die Gleichung 105) zu nehmen ist. Die Gleichungen 28) geben $\xi^* = k$ und $\cos\alpha = \sin\varepsilon$ gesetzt:

106) $$\sin\varepsilon = k\Omega.$$

Wird aus der vorstehenden Gleichung der Werth von Ω in die Gleichungen 92) substituirt, so gehn dieselben über in:

107) $$\int \frac{\sin\varepsilon}{\sin^2 w}\left(1 + \frac{dw}{d\varepsilon}\right) e^{-q}\, d\varepsilon = kJ_1, \quad \int \frac{\sin\varepsilon}{\sin^2 w}\left(1 - \frac{dw}{d\varepsilon}\right) e^{q}\, d\varepsilon = kJ_2.$$

Man setze aus den Gleichungen 93) und 106) die Werthe von x_1, y_1, z_1, T_1 und Ω in die Gleichung 105), wodurch dieselbe sich auf folgende Form bringen lässt:

$$-2kF(v) + (kV_1 + P_1)(kV_2 + P_2) + \frac{\sin^2\varepsilon}{\sin^2 w} + (kJ_1 - P_1)(kJ_2 + P_2) = 0,$$

wo:

108) $$\begin{aligned} P_1 &= (\cot w \sin\varepsilon + \cos\varepsilon)\, e^{-q} + kJ_1, \\ P_2 &= (\cot w \sin\varepsilon - \cos\varepsilon)\, e^{q} \;\; - kJ_2, \end{aligned}$$

Da $\frac{dw}{d\varepsilon} = \cot w$, so geben die Gleichungen 108) nach ε differentiirt, wegen der Werthe von J_1 und J_2 aus den Gleichungen 107):

$$\frac{dP_1}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{dP_2}{d\varepsilon} = 0,$$

d. h. P_1 und P_2 sind absolute Constanten. Mittelst der Gleichungen 108) lassen sich aus 93) die Integrale J_1 und J_2 eliminiren. Setzt man $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$, was unbeschadet der Allgemeinheit geschehn kann, ferner den Werth von Ω aus 106) ein, so ergiebt sich das folgende einfache System für T_1, x_1 und y_1:

$$T_1 \sin w = \frac{1}{2}(V_1 e^q + V_2 e^{-q}),$$

$$\left(x_1 - \frac{1}{k}\right)\sin\varepsilon - y_1 \cos\varepsilon = \frac{1}{2}(V_1 e^q + V_2 e^{-q})\cot w,$$

$$\left(x_1 - \frac{1}{k}\right)\cos\varepsilon + y_1 \sin\varepsilon = \frac{1}{2}(- V_1 e^q + V_2 e^{-q}).$$

Da der Fall, dass die Mittelpunkte der Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien concentrisch sind, in IX ausführlich behandelt ist, so sollen nur einige Bemerkungen für diesen Fall, soweit sich dieselben auf die vorhergehenden Entwickelungen beziehn, angeführt werden. Es muss hierbei erwähnt werden, dass in IX das System (u) sphärisch ist, um die Resultate von IVB unmittelbar anwenden zu können. Im vorliegenden Falle ist das System (v) sphärisch. Sind ξ_2^*, η_2^*, ζ_2^* constant, so ist dieses auch nach 13) mit ξ^*, η^*, ζ^* der Fall. Die Gleichungen 28) zeigen dann, dass

$$\frac{\xi^*}{\zeta^*} = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad \frac{\eta^*}{\zeta^*} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

constant sind. Aus den vorstehenden Gleichungen und den Gleichungen 78) folgt:

$$(\xi_2^* - \xi)\zeta^* - (\zeta_2^* - \zeta)\xi^* = 0, \quad (\eta_2^* - \eta)\zeta^* - (\zeta_2^* - \zeta)\eta^* = 0.$$

Es liegt also der Punkt (ξ, η, ζ) auf einer Geraden. Wird dieselbe zur Axe der z genommen, so ist $\xi = 0$, $\eta = 0$, also $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$ und $\xi_2^* = 0$, $\eta_2^* = 0$. Diesen Annahmen entsprechen die Gleichungen 103) und 104). Nimmt man $\zeta^* = k$, wo k eine Constante bedeutet, so ist nach 28) $\Omega = \frac{1}{k}$. Die Gleichungen 103) reduciren sich für ein constantes Ω auf:

$$T_1 \sin w = V_1, \quad z_1 = \frac{1}{k} + V_1 \cot w.$$

Da $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, also $\cos\gamma = 1$, so giebt die dritte Gleichung 78):

$$\zeta = -\frac{q_2}{\sin w}.$$

Nimmt man in den Gleichungen 104) einfach $\psi = v$, setzt $F(v) = \frac{V}{k}$, so hat man folgende Gleichungen:

$$kx_1 = V'' \cos v + V' \sin v, \quad ky_1 = V'' \sin v - V' \cos v, \quad kV_1 = V'' + V.$$

$$kT_1 \sin w = V'' + V, \quad kz_1 = 1 + (V'' + V) \cot w.$$

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -\frac{q_2}{\sin w}, \quad s = \zeta, \quad k\Omega = 1.$$

$$\int \cos w\, ds = s \,.\, \cos w + \int s \,.\, \sin w\, dw = -q_2 \cot w - \int q_2\, dw.$$

Hierdurch lassen sich die Gleichungen 80) auf folgende Art schreiben:

$$109)\quad \begin{cases} x + r'' \cos a = \dfrac{2q_2}{\sin w}\, \dfrac{V'' \cos v + V' \sin v}{D_1}, \\[2ex] y + r'' \cos b = \dfrac{2q_2}{\sin w}\, \dfrac{V'' \sin v - V' \cos v}{D_1}, \\[2ex] z + r'' \cos c = \dfrac{q_2}{\sin w}\, \dfrac{1 + V^2 - V'^2 + 2VV''}{D_1}, \\[2ex] r'' + \int q_2\, dw = \dfrac{q_2}{\sin w}\, \dfrac{2(V + V'') \sin w - (V'^2 - 2VV'' - V^2 + 1) \cos w}{D_1}, \\[2ex] \qquad D_1 = V'^2 - 2VV'' - V^2 + 1 + 2(V'' + V) \cot w. \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen 109) geben:

$$\frac{dr''}{dv} = \frac{2q_2(V''' + V')}{\sin^2 w \,.\, D_1^2}(1 + V^2 + V'^2).$$

Werden die drei ersten Gleichungen 109) nach v differentiirt, so erhält man mittelst der vorstehenden Gleichung:

$$110)\quad \begin{cases} \cos a = \sin w \cos v + 2\dfrac{\cos w - V \sin w}{1 + V^2 + V'^2}(V \cos v - V' \sin v), \\ \cos b = \sin w \sin v + 2\dfrac{\cos w - V \sin w}{1 + V^2 + V'^2}(V \sin v + V' \cos v), \\ \cos c = \qquad \cos w - 2\dfrac{\cos w - V \sin w}{1 + V^2 + V'^2}. \end{cases}$$

Man differentiire die Gleichungen 110) nach v und setze:

$$\frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{2(V + V'')\cos w + (1 - V^2 + V'^2 - 2VV'')\sin w}{1 + V^2 + V'^2}.$$

Für $\cos a''$, $\cos b''$ und $\cos c''$ ergeben sich dann folgende Gleichungen:

$$\cos a'' = \frac{2VV' \cos v + (1 + V^2 - V'^2)\sin v}{1 + V^2 + V'^2},$$

$$\cos b'' = \frac{2VV' \sin v - (1 + V^2 - V'^2)\cos v}{1 + V^2 + V'^2},$$

$$\cos c'' = \frac{-2V'}{1 + V^2 + V'^2}.$$

Es sind $\cos a''$, $\cos b''$ und $\cos c''$ von u unabhängig, die betreffenden Flächen sind also durch

$$\frac{d\sqrt{E}}{dv} = 0$$

characterisirt. Diese Bedingung ergiebt sich durch Vertauschung von u mit v aus:

$$\frac{d\sqrt{G}}{du} = 0.$$

Die Gleichungen 109) und 110) geben:

$$x^2 + y^2 + z^2 = [\int q_2\, dw]^2 + q_2^2.$$

Ein weiterer Verfolg der Gleichungen 109) und 110) würde wieder auf die in IX gefundenen Resultate führen. Die Aufstellung der Gleichungen 109) und 110) ist in sofern nicht ohne Interesse, als dieselbe auf den allgemeinen Formeln dieses Abschnitts beruht.

Anhang.

A. Bemerkungen über die Flächen, für welche die Krümmungslinien eines Systems gleichzeitig geodätische Linien sind.

Die Flächen mit einem Systeme planer Krümmungslinien, deren Ebenen die Normalen der Flächen enthalten, bieten ein besonderes Interesse, sowohl in Beziehung auf ihre Entstehungsweise, wie durch ihr häufiges Auftreten bei geometrischen Problemen. Aus diesem Grunde sollen die in IV B aufgestellten Gleichungen 48) und 50) noch einige Umformungen erleiden, welche für verschiedene Anwendungen vortheilhaft sind.

Man kann die Gleichungen 48) von IV B auf folgende Weise darstellen, welche zu ziemlich einfachen geometrischen Interpretationen Veranlassung giebt:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned}
&x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \frac{\varrho}{r}\left[f''(\omega) + f(\omega)\right],\\
&x(\cos l\sin\omega + \cos\lambda\cos\omega) + y(\cos m\sin\omega + \cos\mu\cos\omega) + z(\cos n\sin\omega + \cos\nu\cos\omega)\\
&\qquad = -f(\omega)\sin\omega - f'(\omega)\cos\omega + \frac{dV}{d\psi}\cos\psi + V\sin\psi,\\
&x(\cos l\cos\omega - \cos\lambda\sin\omega) + y(\cos m\cos\omega - \cos\mu\sin\omega) + z(\cos n\cos\omega - \cos\nu\sin\omega)\\
&\qquad = -f(\omega)\cos\omega + f'(\omega)\sin\omega + \frac{dV}{d\psi}\sin\psi - V\cos\psi.
\end{aligned}\right.$$

Legt man die Gleichungen 50) von IV B zu Grunde, so lässt sich an Stelle der vorstehenden Gleichungen 1) das folgende System aufstellen:

$$
2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(x-\xi)\cos\alpha+(y-\eta)\cos\beta+(z-\zeta)\cos\gamma=0,\\
&(x-\xi)(\cos l\sin\omega+\cos\lambda\cos\omega)+(y-\eta)(\cos m\sin\omega+\cos\mu\cos\omega)\\
&\qquad\qquad+(z-\zeta)(\cos n\sin\omega+\cos\nu\cos\omega)=\frac{dV}{d\psi}\cos\psi+V\sin\psi,\\
&(x-\xi)(\cos l\cos\omega-\cos\lambda\sin\omega)+(y-\eta)(\cos m\cos\omega-\cos\mu\sin\omega)\\
&\qquad\qquad+(z-\zeta)(\cos n\cos\omega-\cos\nu\sin\omega)=\frac{dV}{d\psi}\sin\psi-V\cos\psi.
\end{aligned}
\right.
$$

In den Gleichungen 2) ist (ξ, η, ζ) ein Punkt einer beliebigen Curve doppelter Krümmung, für welche die in I entwickelten Formeln gelten. Die in IV B gegebene Ableitung setzt voraus, dass $f(\omega)$ nicht der Differentialgleichung:

$$
3)\qquad d\frac{\frac{\varrho}{r}\left[f''(\omega)+f(\omega)\right]}{d\omega}+\frac{r}{\varrho}f'(\omega)=0
$$

genügen darf, wenn man sich der Gleichungen 2) bedienen will. Findet die Gleichung 3) statt, so sind die Gleichungen 1) zu nehmen. Nach den in I gegebenen Formeln, sind $\cos l$, $\cos m$, und $\cos n$ die particulären Integrale der Differentialgleichung 3). Bezeichnen x_0, y_0, z_0 arbiträre Constanten, so ist in 3):

$$
4)\qquad -f(\omega)=x_0\cos l+y_0\cos m+z_0\cos n.
$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt, durch Differentiation nach ω,

$$
-f'(\omega)=x_0\cos\lambda+y_0\cos\mu+z_0\cos\nu,
$$

$$
\frac{\varrho}{r}\left[f''(\omega)+f(\omega)\right]=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma.
$$

Die vorstehenden Gleichungen lassen an Stelle der Gleichungen 1) ein System treten, welches unmittelbar aus 1) für $f(\omega)=0$ und durch Vertauschung von x, y, z respective mit $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ folgt.

Die Constanten x_0, y_0, z_0 beziehn sich nur auf eine Verlegung des Anfangspunkts der Coordinaten. Man kann also, ohne die Allgemeinheit der Formeln zu verringern, $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$, d. i. nach 4) $f(\omega) = 0$ nehmen. Findet also für $f(\omega)$ die Differentialgleichung 3) statt, so setze man in den Gleichungen 1) $f(\omega) = 0$. Die Ebenen des Systems planer Krümmungslinien schneiden sich dann sämmtlich in einem festen Punkte, dem Anfangspunkte der Coordinaten.

In den Gleichungen 1) sind die Ebenen der planen Krümmungslinien den Normalebenen einer Curve doppelter Krümmung Γ parallel. Man kann die bemerkten Ebenen auch den rectificirenden Ebenen einer Curve Γ_1 im Raume parallel nehmen. Es ergeben sich dann sehr einfache und symmetrische Gleichungen. Es verdient indessen hierbei hervorgehoben zu werden, dass diese Vereinfachung nicht für den allgemeinen Fall planer Krümmungslinien stattfindet. In dem allgemeinen Falle werden die Formeln im Gegentheil weitläufiger und dadurch für Anwendungen weniger brauchbar.

Es seien α_1, β_1, γ_1 die Winkel, welche die Tangente im Punkte Π_1 der Curve Γ_1 mit den Coordinatenaxen bildet. Bezeichnet man das Bogenelement der Curve Γ_1 allgemein durch ds_1, so können α_1, β_1, γ_1 als Functionen von s_1 angesehn werden.

Man setze:

$$5)\qquad \cos l \sin\omega + \cos\lambda\cos\omega = \cos\alpha_1, \quad \cos m \sin\omega + \cos\mu\cos\omega = \cos\beta_1$$
$$\cos n \sin\omega + \cos\nu\cos\gamma = \cos\gamma_1.$$

Auf die rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen lassen sich die in I aufgestellten Formeln anwenden, wenn alle dort vorkommenden Quantitäten mit dem Index 1 versehen werden. Unter dieser Voraussetzung geben die Gleichungen 5) differentiirt:

$$-\frac{\cos\alpha\cos\omega}{\varrho}\,ds = \frac{\cos\lambda_1}{\varrho_1}\,ds_1, \quad -\frac{\cos\beta\cos\omega}{\varrho}\,ds = \frac{\cos\mu_1}{\varrho_1}\,ds_1,$$
$$-\frac{\cos\gamma\cos\omega}{\varrho}\,ds = \frac{\cos\nu_1}{\varrho_1}\,ds_1.$$

Nimmt man hierin:

6) $$\frac{\cos\omega\, ds}{\varrho} = \frac{ds_1}{\varrho_1},$$

so finden die Gleichungen statt:

7) $$-\cos\alpha = \cos\lambda_1, \quad -\cos\beta = \cos\mu_1, \quad -\cos\gamma = \cos\nu_1.$$

Nach den Gleichungen I 8) und I 7) ist,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\lambda_1 & \cos\mu_1 & \cos\nu_1 \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \end{vmatrix} = \cos l_1, \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos l & \cos m & \cos n \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix} = 1.$$

Bildet man das Product dieser Gleichungen, so folgt unter Anwendung der Gleichungen 5) und 7):

$$\cos l \cos\omega - \cos\lambda \sin\omega = \cos l_1.$$

Es ergeben sich so die folgenden Gleichungen:

8) $$\cos l \cos\omega - \cos\lambda\sin\omega = \cos l_1, \quad \cos m\cos\omega - \cos\mu\sin\omega = \cos m_1, \\ \cos n\cos\omega - \cos\nu\sin\omega = \cos n_1.$$

Differentiirt man diese Gleichungen, berücksichtigt die Gleichungen 7), so folgt:

9) $$-\frac{\sin\omega\, ds}{\varrho} = \frac{ds_1}{r_1}.$$

Man setze:

10) $$-\frac{\varrho}{r}\left[f''(\omega) + f(\omega)\right] = \Omega_1,$$

wo Ω_1 eine Function von s oder s_1 bedeutet. Mit Hülfe dieses Werthes von Ω_1, sowie der Gleichungen 6) und 9) erhält man einfach durch Differentiation:

$$-d\left[f'(\omega)\cos\omega + f(\omega)\sin\omega\right] = -\left[f''(\omega)+f(\omega)\right]\frac{\cos\omega\, ds}{r} = \frac{\Omega_1\cos\omega ds}{\varrho} = \frac{\Omega_1 ds_1}{\varrho_1},$$

$$d\left[f'(\omega)\sin\omega - f(\omega)\cos\omega\right] = \left[f''(\omega)+f(\omega)\right]\frac{\sin\omega\, ds}{r} = \frac{-\Omega_1\sin\omega ds}{\varrho} = \frac{\Omega_1 ds_1}{r_1}.$$

Durch Integration geben diese Gleichungen:

$$11)\quad \begin{aligned} -[f'(\omega)\cos\omega + f(\omega)\sin\omega] &= h_1 + \int\frac{\Omega_1\, ds_1}{\varrho_1}, \\ f'(\omega)\sin\omega - f(\omega)\cos\omega &= h_2 + \int\frac{\Omega_1\, ds_1}{r_1}, \end{aligned}$$

wo h_1 und h_2 Constanten sind. Die beiden Constanten h_1 und h_2 kann man annulliren. Da die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen 1) mit Hülfe der Gleichungen 11) transformirt werden sollen, so verschwinden h_1 und h_2 wenn V durch $V_1 + h_2\cos\psi - h_1\sin\psi$ ersetzt wird, wo V_1 eine arbiträre Function von v bezeichnet. In die Gleichungen 1) führe man aus den Gleichungen 5) bis 11) die bestimmenden Elemente der Curve Γ_1 ein, wobei noch $h_1 = 0$, $h_2 = 0$ zu setzen ist. Das System 1) lässt sich durch das folgende einfachere System ersetzen:

$$12)\quad \left\{ \begin{aligned} x\cos\lambda_1 + y\cos\mu_1 + z\cos\nu_1 &= \Omega_1, \\ x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 &= \int\frac{\Omega_1}{\varrho_1}\, ds_1 + \frac{dV}{d\psi}\cos\psi + V\sin\psi, \\ x\cos l_1 + y\cos m_1 + z\cos n_1 &= \int\frac{\Omega_1}{r_1}\, ds_1 + \frac{dV}{d\psi}\sin\psi - V\cos\psi. \end{aligned} \right.$$

Bei Anwendungen der Gleichungen 12) kann man den Index 1 einfach weglassen. Dieses ist im Vorstehenden unterlassen, damit nicht dieselben Quantitäten α, l, λ etc. sich auf verschiedene Curven beziehn, wodurch die Vergleichung von Resultaten erschwert wird.

In den Gleichungen 10), 11) und 12) von IV nehme man $\cos\sigma = 0$, $\sin\sigma = 1$ und nach IV B $\theta = \omega + \psi$. Man führe ferner mittelst der obigen Gleichungen 5), 7) und 8) die Winkel α_1, λ_1, l_1 etc. ein. Hierdurch folgt:

$$13)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos a &= -\cos\alpha_1\sin\psi + \cos l_1\cos\psi, \\ \cos b &= -\cos\beta_1\sin\psi + \cos m_1\cos\psi, \\ \cos c &= -\cos\gamma_1\sin\psi + \cos n_1\cos\psi. \end{aligned} \right. \qquad 14)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos a' &= \cos\lambda_1, \\ \cos b' &= \cos\mu_1, \\ \cos c' &= \cos\nu_1. \end{aligned} \right.$$

$$15)\quad \begin{cases} \cos a'' = \cos\alpha_1 \cos\psi + \cos l_1 \sin\psi, \\ \cos b'' = \cos\beta_1 \cos\psi + \cos m_1 \sin\psi, \\ \cos c'' = \cos\gamma_1 \cos\psi + \cos n_1 \sin\psi. \end{cases}$$

Die erste Gleichung 12) gibt nach u differentiirt:

$$\begin{aligned} &(\cos a' \cos\lambda_1 + \cos b' \cos\mu_1 + \cos c' \cos\nu_1)\sqrt{E} \\ &\quad - (x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1)\frac{1}{\varrho_1}\frac{ds_1}{du} \\ &\quad - (x\cos l_1 + y\cos m_1 + z\cos n_1)\frac{1}{r_1}\frac{ds_1}{du} = \frac{d\Omega_1}{du}. \end{aligned}$$

Wegen der Gleichungen 12) und 14) giebt die vorstehende Gleichung:

$$\frac{d\Omega_1}{du} = \frac{d\Omega_1}{ds_1}\frac{ds_1}{du}$$

gesetzt:

$$16)\quad \begin{aligned} \sqrt{E}\frac{du}{ds_1} = \frac{d\Omega_1}{ds_1} &+ \frac{1}{\varrho_1}\left[\int\frac{\Omega_1}{\varrho_1}ds_1 + \frac{dV}{d\psi}\cos\psi + V\sin\psi\right] \\ &+ \frac{1}{r_1}\left[\int\frac{\Omega_1}{r_1}ds_1 + \frac{dV}{d\psi}\sin\psi - V\cos\psi\right]. \end{aligned}$$

Wird die zweite oder dritte Gleichung 12) nach v differentiirt, so erhält man mittelst der Gleichungen 15):

$$17)\quad \sqrt{G}\frac{dv}{d\psi} = \frac{d^2V}{d\psi^2} + V.$$

Durch Differentiation der Gleichungen 13) nach u und v und Zuziehung der Gleichungen 14) und 15) findet man:

$$18)\quad \frac{\sqrt{E}}{r'}\frac{du}{ds_1} = \frac{\sin\psi}{\varrho_1} - \frac{\cos\psi}{r_1}. \qquad 19)\quad \frac{\sqrt{G}}{r''}\frac{dv}{d\psi} = 1.$$

Ist in den Gleichungen 1) $f(\omega) = 0$, so ist nach 10) in den Gleichungen 12) $\Omega_1 = 0$. Wenn $f(\omega)$ nicht verschwindet, so kann man das System der Gleichungen 2) statt der Gleichungen 1) nehmen. In den Gleichungen 2) und 12) setze man:

$$X = \frac{dV}{d\psi}\cos\psi + V\sin\psi, \quad Y = \frac{dV}{d\psi}\sin\psi - V\cos\psi. \tag{20}$$

Man kann X und Y als Coordinaten eines Punktes einer planen Curve C ansehn, es sei O der Anfangspunkt des Systems der X und Y. Die Gleichungen 2) und 12) bestimmen dann dieselbe plane Curve C in beliebig vielen Lagen, wenn die Ebene der Curve sich in einer bestimmten, gleich zu definirenden Weise fortbewegt. Es seien ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes Π einer Curve doppelter Krümmung Γ. Die Curve Γ hat unendlich viele Evoluten, es sei Γ' eine beliebig gewählte Evolute von Γ und Π' der Punkt von Γ', welcher dem Punkte Π entspricht. Es sind dann:

$$\cos l \sin\omega + \cos\lambda\cos\omega, \quad \cos m\sin\omega + \cos\mu\cos\omega, \quad \cos n\sin\omega + \cos\nu\cos\omega,$$

die Cosinus der Winkel, welche die Verbindungslinie der Punkte Π und Π' mit den Coordinatenaxen einschliesst. Die Gleichungen 2) geben folgende Entstehungsweise der durch dieselben analytisch definirten Flächen.

Theorem.

In einer Ebene werde eine feste Curve C angenommen und zwei bestimmte zu einander orthogonale Geraden, welche sich in einem Punkte O schneiden. Es sei Γ eine beliebige Curve doppelter Krümmung, Γ' eine Evolute von Γ, ferner seien Π und Π' zwei Punkte von Γ und Γ', welche einander entsprechen. Die Curve C bewege sich nun so, dass der Punkt O die Curve Γ durchläuft, dass die Ebene von C mit der jedesmaligen Normalebene eines Punktes Π von Γ zusammenfällt und eine der beiden festen Geraden in der Ebene von C auf die Verbindungslinie der Punkte Π und Π' zu liegen kommt. Die Curve C erzeugt dann die allgemeinste Fläche, auf welcher sie gleichzeitig Krümmungslinie und geodätische Curve ist.

Dieser Satz erfordert eine Modification, wenn sich die Curve Γ auf einen Punkt reducirt, oder besser, die Ebene von C immer durch einen festen Punkt geht. Ist die Curve Γ plan, so ist nach IV D die Fläche die Enveloppe einer Rotationsfläche, welche sich so bewegt, dass ihre Axe immer senkrecht zu einer Ebene Π bleibt, und ein fester Punkt der Axe eine beliebige Curve Γ in der Ebene H durchläuft. Geht die Ebene der Curve C durch einen festen Punkt, so sei derselbe der Anfangspunkt der Coordinaten, die Gleichungen 12) geben dann $\Omega_1 = 0$ gesetzt:

$$
21)\quad \begin{cases} x\cos\lambda_1 + y\cos\mu_1 + z\cos\nu_1 = 0, \\ x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 = \dfrac{dV}{d\psi}\cos\psi + V\sin\psi, \\ x\cos l_1 + y\cos m_1 + z\cos n_1 = \dfrac{dV}{d\psi}\sin\psi - V\cos\psi. \end{cases}
$$

Diese Gleichungen geben folgendes

Theorem.

In einer Ebene E werde eine feste Curve C und zwei bestimmte, zu einander orthogonale, Geraden angenommen, welche sich in einem Punkte O schneiden. Die Ebene E drehe sich um den Punkt O derart, dass die beiden festen Geraden den Tangenten und Binormalen der verschiedenen Punkte einer Curve doppelter Krümmung beständig parallel bleiben. Die Curve C erzeugt dann die allgemeinste Fläche mit einem System planer Krümmungslinien, dessen Ebenen die Normalen der Fläche enthalten und beständig durch einen festen Punkt gehn.

Die Gleichungen 21) lassen noch folgende geometrische Deutung zu. Durch Elimination von ψ zwischen der zweiten und dritten der Gleichungen 21) folgt:

$$
22)\quad x\cos l_1 + y\cos m_1 + z\cos n_1 = \Phi(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1),
$$

wo Φ eine beliebige Function ihres Arguments ist. Die vorstehende Gleichung nach s_1 differentiirt, giebt:

$$
\left(\frac{1}{r_1} - \frac{\Phi'}{\varrho_1}\right)(x\cos\lambda_1 + y\cos\mu_1 + z\cos\nu_1) = 0,
$$

d. i.

$$
x\cos\lambda_1 + y\cos\mu_1 + z\cos\nu_1 = 0,
$$

was wieder die erste Gleichung 21) ist. Die in Rede stehende Fläche ist also auch die Enveloppe einer Cylinderfläche, deren Kanten den Hauptnormalen einer Curve doppelter Krümmung parallel sind.

Die Flächen, definirt durch die Gleichungen 21), haben eine geometrische Eigenschaft, die sich unmittelbar auf folgende Art ergiebt. Die Summe der Quadrate der Gleichungen 21), nämlich:

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2+V^2,$$

ist unabhängig von u. Durch Differentiation nach u folgt:

$$23)\qquad x\frac{dx}{du}+y\frac{dy}{du}+z\frac{dz}{du}=0,$$

oder:

$$24)\qquad x\cos a'+y\cos b'+z\cos c'=0.$$

Die Verbindungslinien der Punkte der Fläche mit einem festen Punkte stehn auf den Tangenten zu einem der Hauptschnitte senkrecht. Findet umgekehrt die Gleichung 23) statt, so ist G von u unabhängig. Die Gleichung 24) nach v differentiirt giebt nämlich:

$$25)\qquad (x\cos a''+y\cos b''+z\cos c'')\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}=0.$$

Die Annahme:

$$x\cos a''+y\cos b''+z\cos c''=0,$$

oder:

$$x\frac{dx}{dv}+y\frac{dy}{dv}+z\frac{dz}{dv}=0,$$

zeigt in Verbindung mit der Gleichung 23), dass $x^2+y^2+z^2$ constant ist, der Punkt (x, y, z) also einer Kugelfläche angehört. Von diesem besonderen Falle abgesehn, gibt die Gleichung 25):

$$\frac{d\sqrt{G}}{du}=0,$$

als allgemeine Lösung. Die Gleichung 24) zieht die Gleichung:

$$d\frac{x\cos a + y\cos b + z\cos c}{du} = 0$$

nach sich. Ist eine Gleichung von der Form:

26) $$x\cos a + y\cos b + z\cos c = F\left[\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]$$

gegeben, wo $F(t)$ eine beliebige Function von t ist, so giebt diese Gleichung nach u und v differentiirt:

27) $$\begin{gathered}(x\cos a' + y\cos b' + z\cos c')\left[\frac{1}{r'} + \frac{F'\left[\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]\sqrt{E} = 0,\\ (x\cos a'' + y\cos b'' + z\cos c'')\left[\frac{1}{r''} + \frac{F'\left[\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]\sqrt{G} = 0.\end{gathered}$$

Die Gleichungen 27) geben zu vier Annahmen Veranlassung, von denen zwei auf die Kugelflächen führen, nämlich:

$$x\cos a' + y\cos b' + z\cos c' = 0, \quad x\cos a'' + y\cos b'' + z\cos c'' = 0$$

und:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r''} = -\frac{F'\left[\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Die letzte Doppelgleichung schliesst auch noch die Ebene ein. Mit Beseitigung dieser besonderen Fälle werden die Gleichungen 27) allgemeiner erfüllt durch:

28) $$x\cos a' + y\cos b' + z\cos c' = 0, \quad \frac{1}{r''} + \frac{F'\left[\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0,$$

oder:

$$x\cos a'' + y\cos b'' + z\cos c'' = 0, \quad \frac{1}{r'} + \frac{F'\left[\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0.$$

Die beiden letzten Annahmen gehn durch Vertauschung von u und v in einander über. Die erste der Gleichungen 28) hat wieder:

$$\frac{d\sqrt{G}}{du} = 0$$

zu Folge. Durch die Gleichung 26) sind die Flächen definirt, welche die Eigenschaft haben, dass, in Beziehung auf einen festen Punkt O, für jeden Punkt P der Fläche, die Projection des Radius vectors OP auf die Normale im Punkte P zur Fläche, eine Function des Radius vectors OP ist. Die Gleichung 26) lässt sich auch mit einem photometrischen Problem in Verbindung setzen. Es werde eine Fläche von einem Punkte O aus beleuchtet, die Helligkeit in einem Punkte P der Fläche ist abhängig von der Distanz OP und dem Incidenzwinkel, welchen der einfallende Strahl OP mit der Normalen des Punktes P bildet. Nach den Principien der Photometrie ist das Maass der Helligkeit im Punkte P proportional dem Cosinus des Incidenzwinkels, dividirt durch das Quadrat der Distanz des Punktes P vom leuchtenden Punkte O. Setzt man statt des Quadrats der Distanz eine beliebige Function derselben, so hat allgemeiner die Intensität der Beleuchtung zum Maass den Ausdruck:

$$29)\qquad \frac{x\cos a + y\cos b + z\cos c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\Phi\left[\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right] = T,$$

wo T zur abkürzenden Bezeichnung des links stehenden Ausdrucks gesetzt ist. Soll die Helligkeit in jedem Punkte einer Fläche, welche von einem Punkte aus beleuchtet ist, dieselbe sein, so ist in 29) T constant. Dann findet aber die Gleichung 26) statt, x, y und z sind durch die Gleichungen 21) bestimmt. Setzt man ihre Werthe aus 21) in die Gleichung 29), substituirt ferner die Werthe von $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$ aus den Gleichungen 13), nimmt $Tg = -1$, wo g eine Constante bedeutet, so folgt:

$$30)\qquad \frac{V}{\sqrt{V^2+\left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2}}\,\Phi\left[\sqrt{V^2+\left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2}\right] = \frac{1}{g}.$$

Für eine gegebene Function Φ ist aus dieser Gleichung V als Function von ψ zu bestimmen. Ist V als Function von ψ bekannt, so lässt sich mittelst der Gleichungen 20) die Curve finden, von deren Bestimmung die Aufstellung gleichmässig beleuchteter Flächen abhängt. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich folgendes

Theorem.

Eine Fläche werde von einem Punkte O aus beleuchtet, die Helligkeit in einem Punkte P der Fläche sei dem Product proportional aus dem Cosinus des Incidenzwinkels in eine Function der Distanz der Punkte O und P. Alle Flächen, welche in jedem Punkte dieselbe Helligkeit besitzen, haben die Eigenschaft, dass ein System von Krümmungslinien plan ist, die Ebenen des Systems die Normalen zur Fläche enthalten und sämmtlich durch den Punkt O gehn.

Nimmt man in 30) $\Phi(t) = \frac{1}{t^{2p}}$ und $g = k^{2p}$, so ist:

$$\frac{V}{\left[V^2 + \left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2\right]^{p+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{k^{2p}}.$$

Durch Integration folgt:

$$V = k\left[\sin\frac{2p}{2p+1}(\psi + \psi_0)\right]^{\frac{2p+1}{2p}},$$

wo ψ_0 eine Constante bedeutet, welche auf die Relation zwischen X und Y, d. h. auf die Form der Curve C, von keinem Einfluss ist. Diesem Werthe von V entsprechend hat man in 20):

$$X\cos\psi_0 - Y\sin\psi_0 = k\left[\sin\frac{2p}{2p+1}(\psi+\psi_0)\right]^{\frac{1}{2p}}\cos\frac{\psi+\psi_0}{2p+1},$$

$$X\sin\psi_0 + Y\cos\psi_0 = k\left[\sin\frac{2p}{2p+1}(\psi+\psi_0)\right]^{\frac{1}{2p}}\sin\frac{\psi+\psi_0}{2p+1}.$$

Für den Fall der Natur ist $p = 1$, dann geben die vorstehenden Gleichungen:

$$(X^2+Y^2)^2 = 2k^2(X\cos\psi_0 - Y\sin\psi_0)(X\sin\psi_0 + Y\cos\psi_0).$$

Nimmt man $\psi_0 = \frac{\pi}{4}$, so folgt:

$$(X^2 + Y^2)^2 = k^2 (X^2 - Y^2),$$

was die bekannte Gleichung der Lemniscate ist. Die aus den Gleichungen 29) und 30) erhaltenen Resultate finden sich, soweit dieselben auf Photometrie Bezug haben, zuerst mitgetheilt in den „Nachrichten v. d. K. G. d. W. Aus dem Jahre 1866" (pag. 270 u. f.).

B. Die Flächen der Krümmungscentra, mit besonderer Beziehung auf Flächen mit einem System planer Krümmungslinien.

Die Endpunkte der beiden Hauptkrümmungshalbmesser r' und r'' liegen bekanntlich auf zwei Flächen, welche zuerst von Monge angegeben sind und die Flächen, oder auch die Schalen, der Krümmungscentra heissen mögen*). Diese beiden Flächen geben zu einigen bemerkenswerthen Sätzen Veranlassung, wenn die primitive Fläche ein System planer Krümmungslinien besitzt. Mit Hülfe der in II aufgestellten Gleichungen lassen sich die Untersuchungen für die Flächen der Krümmungscentra ziemlich einfach und leicht durchführen. Für die folgenden Anwendungen ist eine Aufstellung der wesentlichsten Formeln erforderlich, eine Aufstellung, die um so mehr geboten erscheint, als ein nur annäherend befriedigendes analytisches Material, bisher nicht vorhanden war.

Dem Punkte P einer Fläche S mögen die beiden Punkte P_1 und und P_2 durch die folgenden Gleichungen entsprechen:

---

*) Die erste Erwähnung findet sich in der schon früher citirten Abhandlung von Monge: »Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais« in der Histoire de l'Académie pour l'année MDCCLXXXI. (Paris 1784.) Auf pag. 693 ist die Aufgabe gestellt »Trouver les équations de deux surfaces qui sont les lieux géométriques des centres de moindre et de plus grande courbure.« Diese Untersuchungen finden sich erweitert in der »Application de l'analyse à la géométrie.« (Cinquième éd. Paris 1850) pag. 134—139, so wie den §§ XXIII, XXIV und XXV.

$$1)\quad\begin{cases} x_1 = x + r'\cos a, \\ y_1 = y + r'\cos b, \\ z_1 = z + r'\cos c. \end{cases}\qquad 2)\quad\begin{cases} x_2 = x + r''\cos a, \\ y_2 = y + r''\cos b, \\ z_2 = z + r''\cos c. \end{cases}$$

Die beiden Punkte P_1 und P_2 liegen auf den beiden Schalen S_1 und S_2 der Krümmungscentra der Fläche S. Die rechten Seiten der Gleichungen 1) und 2) gestatten directe Anwendungen der in II aufgestellten Gleichungen, wobei es hinreichend ist, diese Anwendungen nur für eins der Systeme 1) oder 2) vollständig durchzuführen. Da die Gleichungen 1) und 2) durch gegenseitige Vertauschung von u und v in einander übergehn, so lassen sich ohne weitere Rechnungen aus Formeln, welche für das eine System gelten, die Formeln für das andere System schliessen.

Analog den in II gebrauchten Bezeichnungen sollen für die Flächen S_1 und S_2 die folgenden stattfinden:

$$3)\quad\begin{cases} \left(\dfrac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dy_1}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dz_1}{du}\right)^2 = E_1, \\ \left(\dfrac{dx_1}{dv}\right)^2 + \left(\dfrac{dy_1}{dv}\right)^2 + \left(\dfrac{dz_1}{dv}\right)^2 = G_1, \\ \dfrac{dx_1}{du}\dfrac{dx_1}{dv} + \dfrac{dy_1}{du}\dfrac{dy_1}{dv} + \dfrac{dz_1}{du}\dfrac{dz_1}{dv} = F_1. \end{cases}$$

$$4)\quad\begin{cases} \left(\dfrac{dx_2}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dy_2}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dz_2}{du}\right)^2 = E_2, \\ \left(\dfrac{dx_2}{dv}\right)^2 + \left(\dfrac{dy_2}{dv}\right)^2 + \left(\dfrac{dz_2}{dv}\right)^2 = G_2, \\ \dfrac{dx_2}{du}\dfrac{dx_2}{dv} + \dfrac{dy_2}{du}\dfrac{dy_2}{dv} + \dfrac{dz_2}{du}\dfrac{dz_2}{dv} = F_2. \end{cases}$$

Die Gleichungen 1) geben nach u und v differentiirt, unter Anwendung der in II aufgestellten Formeln:

$$5)\quad\begin{cases} \dfrac{dx_1}{du} = \dfrac{dr'}{du}\cos a, \\ \dfrac{dy_1}{du} = \dfrac{dr'}{du}\cos b, \\ \dfrac{dz_1}{du} = \dfrac{dr'}{du}\cos c. \end{cases}\qquad 6)\quad\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dv} = \dfrac{dr'}{dv}\cos a + \dfrac{r''-r'}{r''}\sqrt{G}\cos a'', \\ \dfrac{dy_1}{dv} = \dfrac{dr'}{dv}\cos b + \dfrac{r''-r'}{r''}\sqrt{G}\cos b'', \\ \dfrac{dz_1}{dv} = \dfrac{dr'}{dv}\cos c + \dfrac{r''-r'}{r''}\sqrt{G}\cos c''. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die in II aufgestellte Gleichung 13) geben die vorstehenden Gleichungen 5) und 6):

$$7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{du}\frac{dz_1}{dv}-\frac{dy_1}{dv}\frac{dz_1}{du} &= -(r''-r')\frac{dr'}{du}\frac{\sqrt{G}}{r''}\cos a', \\ \frac{dz_1}{du}\frac{dx_1}{dv}-\frac{dz_1}{dv}\frac{dx_1}{du} &= -(r''-r')\frac{dr'}{du}\frac{\sqrt{G}}{r''}\cos b', \\ \frac{dx_1}{du}\frac{dy_1}{dv}-\frac{dx_1}{dv}\frac{dy_1}{du} &= -(r''-r')\frac{dr'}{du}\frac{\sqrt{G}}{r''}\cos c'. \end{aligned}\right.$$

Es ist weiter:

$$8)\quad \begin{vmatrix} \frac{d^2x_1}{du^2} & \frac{d^2y_1}{du^2} & \frac{d^2z_1}{du^2} \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dy_1}{du} & \frac{dz_1}{du} \\ \frac{dx_1}{dv} & \frac{dy_1}{dv} & \frac{dz_1}{dv} \end{vmatrix} = (r''-r')\left(\frac{dr'}{du}\right)^2\frac{\sqrt{EG}}{r'r''}.$$

$$9)\quad \begin{vmatrix} \frac{d^2x_1}{du\,dv} & \frac{d^2y_1}{du\,dv} & \frac{d^2z_1}{du\,dv} \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dy_1}{du} & \frac{dz_1}{du} \\ \frac{dx_1}{dv} & \frac{dy_1}{dv} & \frac{dz_1}{dv} \end{vmatrix} = 0.$$

$$10)\quad \begin{vmatrix} \frac{d^2x_1}{dv^2} & \frac{d^2y_1}{dv^2} & \frac{d^2z_1}{dv^2} \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dy_1}{du} & \frac{dz_1}{du} \\ \frac{dx_1}{dv} & \frac{dy_1}{dv} & \frac{dz_1}{dv} \end{vmatrix} = -(r''-r')\frac{dr'}{du}\frac{dr''}{du}\frac{r'}{\sqrt{E}}\left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^3.$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) findet man:

$$11)\quad E_1 = \left(\frac{dr'}{du}\right)^2, \quad G_1 = \left(\frac{dr'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{r''-r'}{r''}\right)^2 G, \quad F_1 = \frac{dr'}{du}\frac{dr'}{dv}.$$

Sind r'_1 und r''_1 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche S_1 im Punkte P_1, so erhält man aus den Gleichungen 8), 9), 10) und 11):

$$12)\qquad \frac{1}{r'_1 r''_1} = -\frac{\frac{dr''}{du}}{\frac{dr'}{du}} \frac{1}{(r''-r')^2}.$$

$$13)\qquad \left(\frac{1}{r'_1}+\frac{1}{r''_1}\right)(r''-r')^2 \frac{dr'}{du}\frac{\sqrt{E}}{r'}\left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 = \left(\frac{dr'}{dv}\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 + \left[(r''-r')\frac{\sqrt{EG}}{r'r''}\right]^2$$
$$-\frac{dr'}{du}\frac{dr''}{du}\left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2.$$

Sind ferner r'_2 und r''_2 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche S_2 im Punkte P_2, so geben die Gleichungen 11), 12) und 13) durch Vertauschung von u und v, also von E, G, r' und r'' respective mit G, E, r'' und r' die nachstehenden

$$14)\qquad E_2 = \left(\frac{dr''}{du}\right)^2 + \left(\frac{r'-r''}{r'}\right)^2 E,\quad G_2 = \left(\frac{dr''}{dv}\right)^2,\quad F_2 = \frac{dr''}{du}\frac{dr''}{dv}.$$

$$15)\qquad \frac{1}{r'_2 r''_2} = -\frac{\frac{dr'}{dv}}{\frac{dr''}{dv}} \frac{1}{(r'-r'')^2}.$$

$$16)\qquad \left(\frac{1}{r'_2}+\frac{1}{r''_2}\right)(r'-r'')^2 \frac{dr''}{dv}\frac{\sqrt{G}}{r''}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 = \left(\frac{dr''}{du}\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)^2 + \left[(r'-r'')\frac{\sqrt{EG}}{r'r''}\right]^2$$
$$-\frac{dr'}{dv}\frac{dr''}{dv}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2.$$

Die vorstehenden Gleichungen sind auf die Kugelfläche und die developpabeln Flächen nicht anwendbar. Sieht man eine developpabele Fläche als Tangentenfläche einer Curve doppelter Krümmung Γ an, so ist die rectificirende Fläche der Curve Γ die Fläche der Krümmungscentra der endlichen Hauptkrümmungshalbmesser der Tangentenfläche von Γ. Werden bei einer Kegelfläche die Generatricen den Tangenten einer Curve Γ parallel genommen, so ist die Fläche der Krümmungscentra wieder eine Kegelfläche, deren Generatricen den rectificirenden Geraden von Γ parallel sind*).

In der „Application de l'analyse à la géométrie" (V. éd. Paris 1850) finden sich der Reihe nach folgende von Monge sehr detaillirt ausgeführte Untersuchungen in Beziehung auf die Flächen, für welche eine der Schalen der Krümmungscentra gegeben ist.

§ XXIII. De la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à la surface d'une même sphère. (p. 246—286).

§ XXIV. De la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface conique a base arbitraire. (p. 286—321).

§ XXV. De la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque. (p. 322—368).

Die von Monge behandelten Probleme lassen sich in ein Problem zusammenfassen, nämlich in die Bestimmung der Flächen, für welche ein System von Krümmungslinien aus geodätischen Linien besteht.

Ist eine der Schalen der Krümmungscentra eine developpabele Fläche, so sei dieses mit der Fläche S_1 der Fall. In der Gleichung 12) verschwindet die linke Seite, da $r'_1 = \infty$ oder $r''_1 = \infty$, es ist also $\frac{dr''}{du} = 0$, also auch $\frac{dG}{du} = 0$.

---

*) Die Gleichungen 12) und 15) geben, wenn $r' - r''$ constant ist folgendes Theorem.

Ist für eine Fläche in jedem ihrer Punkte die Differenz der Hauptkrümmungshalbmesser constant, so haben die beiden Flächen der Krümmungscentra überall constantes, negatives Krümmungsmaass.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass sich nur besondere Fälle von Flächen von constantem, negativem Krümmungsmaass ergeben können. Nimmt man eine Helikoidfläche, so sind die beiden Flächen der Krümmungscentra wieder Helikoidflächen. Aus der allgemeinsten Helikoidfläche, für welche die Differenz der Hauptkrümmungshalbmesser constant ist, lassen sich nur zwei besondere Helikoidflächen von constantem, negativem Krümmungsmaass herleiten, wie eine Rechnung ergiebt, deren Ausführung hier unterbleiben möge.

Ist eine der Flächen der Krümmungscentra eine Kugelfläche, so sei dieses die Fläche S_2. Bedeutet k eine Constante, wird der Mittelpunkt der Kugelfläche zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen, so ist:

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = k^2,$$

oder die Werthe von x_2, y_2, z_2 aus 2) substituirt:

17) $$(x + r'' \cos a)^2 + (y + r'' \cos b)^2 + (z + r'' \cos c)^2 = k^2.$$

Diese Gleichung nach v differentiirt giebt:

18) $$(x \cos a + y \cos b + z \cos c + r'') \frac{dr''}{dv} = 0.$$

Nimmt man $\frac{dr''}{dv} = 0$, so ist die Fläche S die Enveloppe einer Kugelfläche von variabelem Radius, deren Mittelpunkt eine beliebige Curve beschreibt. Die eine Fläche der Krümmungscentra reducirt sich dann auf die beliebige Curve. Hiervon abgesehn, kann die Gleichung 18) nur die Lösung:

19) $$x \cos a + y \cos b + z \cos c + r'' = 0$$

geben. Die Elimination von r'' zwischen den Gleichungen 18) und 19) giebt:

20) $$x^2 + y^2 + z^2 = k^2 + (x \cos a + y \cos b + z \cos c)^2.$$

Diese Gleichung enthält in der That die Bedingung, dass die Normale des Punktes (x, y, z) der Fläche S eine um den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Radius k beschriebene Kugelfläche berühre. Die Gleichung 20) ist in der allgemeinen Form der Gleichung 26) von Anhang A enthalten. Sie führt wieder auf die Gleichungen:

$$x \cos a' + y \cos b' + z \cos c' = 0, \quad \frac{dG}{du} = 0.$$

Aus den Gleichungen 1) und 7) folgt:

21) $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dy_1}{du} & \frac{dz_1}{du} \\ \frac{dx_1}{dv} & \frac{dy_1}{dv} & \frac{dz_1}{dv} \end{vmatrix} = -(r'' - r') \frac{dr'}{du} \frac{\sqrt{G}}{r''} \cdot (x \cos a' + y \cos b' + z \cos c').$$

Es verschwindet die links stehende Determinante wenn

$$x \cos a' + y \cos b' + z \cos c' = 0,$$

die berührende Ebene zur Schale S_1 im Punkte (x_1, y_1, z_1) geht dann durch einen festen Punkt, den Anfangspunkt der Coordinaten. Die Fläche S_1 ist also allgemein eine Kegelfläche, wenn für die primitive Fläche S die Relation:

$$x \cos a + y \cos b + z \cos c = \Phi(x^2 + y^2 + z^2) \tag{22}$$

besteht, wo Φ eine beliebige Function ist. Umgekehrt, ist die Schale S_1 eine Kegelfläche, so verschwindet die linke Seite der Gleichung 21), es ist dann allgemein:

$$x \cos a' + y \cos b' + z \cos c' = 0$$

Diese Gleichung führt auf:

$$d\frac{x \cos a + y \cos b + z \cos c}{du} = 0, \quad d\frac{x^2 + y^2 + z^2}{du} = 0,$$

oder:

$$x \cos a + y \cos b + z \cos c = V_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = V_2,$$

wo V_1 und V_2 beliebige Functionen von v sind. Die Elimination von v zwischen den vorstehenden Gleichungen reproducirt die Gleichung 22).

Aus den Gleichungen 11) und 14) folgt:

$$E_1\left(\frac{dF_1}{du} - \frac{1}{2}\frac{dE_1}{dv}\right) - \frac{F_1}{2}\frac{dE_1}{du} = 0, \quad G_2\left(\frac{dF_2}{dv} - \frac{1}{2}\frac{dG_2}{du}\right) - \frac{F_2}{2}\frac{dG_2}{dv} = 0$$

oder auch:

$$d\frac{\frac{F_1}{\sqrt{E_1}}}{du} - \frac{d\sqrt{E_1}}{dv} = 0, \quad d\frac{\frac{F_2}{\sqrt{G_2}}}{dv} - \frac{d\sqrt{G_2}}{du} = 0. \tag{23}$$

Den beiden Systemen von Krümmungslinien der Fläche S entsprechen auf den Schalen S_1 und S_2 je zwei Systeme von Curven. Wegen der Gleichungen 23) entsprechen dem System (u) der Fläche S auf S_1 geodätische Linien, dem System (v) von S entsprechen auf S_2 geodätische Linien, wie sich schon bei Monge findet. (Analyse. p, 137). Um die anderen Curven zu untersuchen, sollen folgende Bezeichnungen gebraucht werden. Auf der Fläche S_1, bestimmt durch die Gleichungen 1), entspreche der Krümmungslinie (u) die Curve C'_1, der Krümmungslinie (v) die Curve C''_1. Analog mögen auf der Fläche S_2, bestimmt durch die Gleichungen 2), den Krümmungslinien (u) und (v) der primitiven Fläche S die Curven C''_1 und C''_2 entsprechen. Zur weiteren Discussion der Curven C'_1 und C''_1 hat man in den Gleichungen 1) entweder u allein. oder v allein variabel zu nehmen. Dasselbe gilt für die Gleichungen 2) in Beziehung auf die Curven C'_2 und C''_2. Wie schon bemerkt sind die Curven C'_1 und C''_2 geodätische Linien auf S_1 und S_2.

Sollen die Curven C'_1 und C''_1 zu einander orthogonal sein, so ist $F_1 = 0$, wegen der Gleichung 9) sind die Curven C'_1 und C''_1 dann auch Krümmungslinien. Es giebt die Bedingung $F_2 = 0$ nach 14) $\frac{dr''}{du} = 0$ und umgekehrt. Hieraus schliesst man, dass den Krümmungslinien einer Fläche S nur dann auf einer Fläche ihrer Krümmungscentra wieder Krümmungslinien entsprechen können, wenn auf der Fläche S die betreffenden Curven gleichzeitig geodätische Curven sind. Mit Hülfe der in I aufgestellten Gleichungen lassen sich die Curven C'_1, C''_1, C'_2 und C''_2 untersuchen. Für die Curven C'_1 und C''_1 bezeichne man die in I vorkommenden geometrischen Elemente, soweit dieselben in den Gleichungen 1) bis 8) von I enthalten sind, mit dem unteren Index 1 und einem oder zwei Accenten. Für die Curve C'_1 ist dann ds'_1 das Bogenelement, es sind ferner α'_1, β'_1, γ'_1 die Winkel, welche die Tangente zur Curve im Punkte (x_1, y_1, z_1) mit den Coordinatenaxen bildet. Die analogen Quantitäten für die Curve C''_1 sind durch ds''_1 und α''_1, β''_1, γ''_1 bezeichnet. Für die Curven C'_2 und C''_2 auf S_2 sind die in I vorkommenden geometrischen Elemente mit dem unteren Index 2 und einem oder zwei Accenten versehn.

Unter Zuziehung der Gleichungen von II geben die Gleichungen 1) nach u differentiirt:

$$\frac{dx_1}{du} = \cos\alpha'_1 \frac{ds'_1}{du} = \cos a \frac{dr'}{du}, \quad \frac{dy_1}{du} = \cos\beta'_1 \frac{ds'_1}{du} = \cos b \frac{dr'}{du},$$
$$\frac{dz_1}{du} = \cos\gamma'_1 \frac{ds'_1}{du} = \cos c \frac{dr'}{du}.$$

Nimmt man:

24)
$$\frac{ds'_1}{du} = \frac{dr'}{du},$$

so finden die Gleichungen statt:

25)
$$\cos\alpha'_1 = \cos a, \quad \cos\beta'_1 = \cos b, \quad \cos\gamma'_1 = \cos c.$$

Man differentiire diese Gleichungen wieder nach u. Wird:

26)
$$\frac{1}{\varrho'_1} \frac{ds'_1}{du} = \frac{\sqrt{E}}{r'}$$

genommen, so findet man:

27)
$$\cos\lambda'_1 = -\cos a', \quad \cos\mu'_1 = -\cos b', \quad \cos\nu'_1 = -\cos c'.$$

Die Gleichungen 25) und 27) geben:

28)
$$\cos l'_1 = \cos a'', \quad \cos m'_1 = \cos b'', \quad \cos n'_1 = \cos c''.$$

Die vorstehenden Gleichungen geben nach u differentiirt, mit Rücksicht auf die Gleichungen 27):

29)
$$\frac{1}{r'_1} \frac{ds'_1}{du} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d\sqrt{E}}{dv}.$$

Durch Division der Gleichungen 26) und 29) ergiebt sich:

30)
$$\frac{\varrho'_1}{r'_1} = -\frac{r'}{\sqrt{EG}} \frac{d\sqrt{E}}{dv}.$$

Nach den Untersuchungen von II auf pag. 15 der ersten Abhandlung, ist die rechte Seite gleich der negativen Cotangente des Winkels, welchen die Binormale der Krümmungslinie (u) im Punkte (x, y, z) der Fläche S mit der Normalen desselben Punktes einschliesst. Hieraus ergiebt sich folgendes

Theorem:

Längs einer Krümmungslinie K auf einer Fläche S bilden die Normalen zu S eine developpabele Fläche, deren Wendecurve W sei. Sind P und P_1 zwei correspondirende Punkte auf K und W, so ist das Verhältniss des Krümmungsradius zum Torsionsradius der Wendecurve im Punkte P_1 gleich der negativen Cotangente des Winkels, welchen die Binormale der Krümmungslinie im Punkte P mit der Normalen desselben Punktes zur Fläche S einschliesst.

Für die Curve C''_2 hat man der Gleichung 30) entsprechend:

$$\frac{\varrho''_2}{r''_2} = -\frac{r''}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

Ist das System der Krümmungslinien (v) plan, so ist die rechte Seite der vorstehenden Gleichung nach II 7) gleich $\cot\sigma$, also:

$$\frac{\varrho''_2}{r''_2} = \cot\sigma.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung nur von u abhängt, so ist die Curve C''_2 eine Helix einer beliebigen Cylinderfläche. Man erhält hieraus das

Theorem:

Einem planen System von Krümmungslinien entsprechen auf der betreffenden Fläche der Krümmungscentra Schraubenlinien.

Weniger einfach wie die Formeln für die Curven C'_1 und C''_2 gestalten sich dieselben für die Curven C''_1 und C'_2. Da bei den früheren Untersuchungen das System der Krümmungslinien (v) als plan oder sphärisch angenommen wurde, so soll, um Wiederholungen zu vermeiden, die Curve C'_2 in Beziehung auf die Tangente untersucht werden, es soll also in den Gleichungen 2) nur u variiren.

Mit Rücksicht auf die gewählten Bezeichnungen differentiire man die Gleichungen 2) nach u. Ferner führe man die Bezeichnung aus II 23):

$$\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du} = H_2 \tag{31}$$

ein, und setze dann nach II 10):

$$\frac{dr''}{du} = \left(1 - \frac{r''}{r'}\right) \frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{d\sqrt{G}}{du} = \left(1 - \frac{r''}{r'}\right) \sqrt{E}\, H_2\, r''.$$

Es ergeben sich dann aus den Gleichungen 2) die folgenden:

$$\frac{dx_2}{du} = \cos\alpha'_2 \frac{ds'_2}{du} = \left(1 - \frac{r''}{r'}\right) r'' \sqrt{E} \,.\left(H_2 \cos a + \frac{\cos a'}{r''}\right),$$

$$\frac{dy_2}{du} = \cos\beta'_2 \frac{ds'_2}{du} = \left(1 - \frac{r''}{r'}\right) r'' \sqrt{E} \,.\left(H_2 \cos b + \frac{\cos b'}{r''}\right),$$

$$\frac{dz_2}{du} = \cos\gamma'_2 \frac{ds'_2}{du} = \left(1 - \frac{r''}{r'}\right) r'' \sqrt{E} \,.\left(H_2 \cos c + \frac{\cos c'}{r''}\right).$$

Nimmt man in diesen Gleichungen:

$$-\frac{ds'_2}{du} = \left(1 - \frac{r''}{r'}\right) r'' \sqrt{E} \sqrt{\frac{1}{r''^2} + H_2^2},$$

so sind α'_2, β'_2 und γ'_2 auf folgende Art bestimmt:

32)
$$\begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1}{r''^2} + H_2^2} \,.\cos\alpha'_2 = H_2 \cos a + \dfrac{\cos a'}{r''}, \\ -\sqrt{\dfrac{1}{r''^2} + H_2^2} \,.\cos\beta'_2 = H_2 \cos b + \dfrac{\cos b'}{r''}, \\ -\sqrt{\dfrac{1}{r''^2} + H_2^2} \,.\cos\gamma'_2 = H_2 \cos c + \dfrac{\cos c'}{r''}. \end{cases}$$

Die Gleichungen II 25) und II 27) reduciren die Gleichungen 32) auf:

33) $$\cos\alpha'_2 = \cos l_2, \quad \cos\beta'_2 = \cos m_2, \quad \cos\gamma'_2 = \cos n_2.$$

Es ist also die Tangente im Punkte (x_2, y_2, z_2) der Curve C'_2 parallel der Binormale der Krümmungslinie (v) im Punkte (x, y, z) der Fläche S. Aus dem Vorstehenden schliesst man folgendes

Theorem:

Auf den beiden Flächen der Krümmungscentra einer Fläche S entsprechen den Krümmungslinien von S vier Systeme von Curven.

Zwei dieser Systeme haben die Normalen von S zu Tangenten, die Tangenten der beiden anderen Systeme sind den Binormalen der Krümmungslinien von S parallel.

Ein weiterer Verfolg der Gleichungen 32) oder 33) führt im allgemeinen Falle zu keinen einfachen Resultaten, nur für plane Krümmungslinien ergeben sich einfache Verhältnisse, in den Gleichungen 33) sind dann die rechten Seiten von v unabhängig, da die Binormale einer planen Curve für alle Punkte der Curve dieselbe ist. Substituirt man in die Gleichungen 2) die Werthe von x, y, z und $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ aus den Gleichungen IV 40) und IV 10), ferner den Werth von r'' aus IV 43), so ist die Fläche S_2 der Krümmungscentra durch folgende Gleichungen bestimmt:

34)

$$x_2\cos\alpha+y_2\cos\beta+z_2\cos\gamma=\frac{\Omega}{\sin^2\sigma}$$
$$+\left[-(W+J)e^q+\frac{\sin(\theta-\varphi)}{1-\cos(\theta-\varphi)}d\frac{W+J}{dV}-\frac{e^{-q}}{1-\cos(\theta-\varphi)}d^2\frac{W+J}{dV^2}\right]\cot\sigma,$$

$$x_2(\cos\lambda\cos\varphi+\cos l\sin\varphi)+y_2(\cos\mu\cos\varphi+\cos m\sin\varphi)+z_2(\cos\nu\cos\varphi+\cos n\sin\varphi)$$
$$=-d\frac{W+J}{dV}+\frac{\sin(\theta-\varphi)e^{-q}}{1-\cos(\theta-\varphi)}d^2\frac{W+J}{dV^2},$$

$$x_2(\cos\lambda\sin\varphi-\cos l\cos\varphi)+y_2(\cos\mu\sin\varphi-\cos m\cos\varphi)+z_2(\cos\nu\sin\varphi-\cos n\cos\varphi)$$
$$=(W+J)e^q-\frac{\sin(\theta-\varphi)}{1-\cos(\theta-\varphi)}d\frac{W+J}{dV}+\frac{\cos(\theta-\varphi)e^{-q}}{1-\cos(\theta-\varphi)}d^2\frac{W+J}{dV^2}.$$

Für θ hat man nach IV 20) den Differentialquotienten:

35) $$\frac{d\theta}{dV}=-\left[1-\cos(\theta-\varphi)\right]e^q.$$

Lässt man in den Gleichungen 34) v oder V allein variiren, so erhält man mit Hülfe der Gleichung 35) eine Verification des oben ausgesprochenen Satzes, dass der Punkt (x_2, y_2, z_2) der Curve C'_2 der Helix einer Cylinderfläche angehört.

Man findet:

$$\frac{\cos\alpha\frac{dx_2}{dV}+\cos\beta\frac{dy_2}{dV}+\cos\gamma\frac{dz_2}{dV}}{\sqrt{\left(\frac{dx_2}{dV}\right)^2+\left(\frac{dy_2}{dV}\right)^2+\left(\frac{dz_2}{dV}\right)^2}}=\cos\sigma.$$

Die Generatricen der Cylinderfläche sind der Richtung parallel, welche die Winkel α, β und γ bestimmen. Es ist σ der Winkel, unter welchem die Helix die Generatricen der Cylinderfläche schneidet. Was die Curve C'_2 betrifft, so bietet ihre weitere Untersuchung keine Schwierigkeit. Nach der Gleichung III 7) geben die Gleichungen 32), mit Rücksicht auf den Werth von H_2 aus 31):

$$\begin{aligned}\cos\alpha'_2 &= \cos a\cos\sigma-\cos a'\sin\sigma,\\ \cos\beta'_2 &= \cos b\cos\sigma-\cos b'\sin\sigma,\\ \cos\gamma'_2 &= \cos c\cos\sigma-\cos c'\sin\sigma.\end{aligned}$$

Wegen der Gleichungen IV 1) vereinfachen sich die vorstehenden Gleichungen in:

$$\cos\alpha'_2=\cos\alpha,\quad \cos\beta'_2=\cos\beta,\quad \cos\gamma'_2=\cos\gamma.$$

Die Bestimmung der geometrischen Elemente der Curve C'_2 folgt durch unmittelbare Anwendung der in I gegebenen Formeln auf die vorstehenden Gleichungen. Zu sehr einfachen Verhältnissen für die Curven C'_1, C''_1, C'_2 und C''_2 geben die in A betrachteten Flächen Veranlassung, wesshalb eine Aufstellung der wesentlichsten Formeln ausgeführt werden soll.

Mit Hülfe der in IX aufgestellten Gleichungen 11) bis 19) erhält man aus den Gleichungen 1) und 2) durch leichte Rechnung:

$$36)\quad\left\{\begin{aligned}&(x_1-\xi)\cos\alpha+(y_1-\eta)\cos\beta+(z_1-\zeta)\cos\gamma=0,\\ &(x_1-\xi)\cos\lambda+(y_1-\eta)\cos\mu+(z_1-\zeta)\cos\nu=\varrho,\\ &(x_1-\xi)\cos l+(y_1-\eta)\cos m+(z_1-\zeta)\cos n=\frac{\frac{dV}{d\psi}-\varrho\cos(\omega+\psi)}{\sin(\omega+\psi)}.\end{aligned}\right.$$

$$37)\left\{\begin{aligned}&(x_2-\xi)\cos\alpha+(y_2-\eta)\cos\beta+(z_2-\zeta)\cos\gamma=0,\\&(x_2-\xi)(\cos l\sin\omega+\cos\lambda\cos\omega)+(y_2-\eta)(\cos m\sin\omega+\cos\mu\cos\omega)\\&\qquad+(z_2-\zeta)(\cos n\sin\omega+\cos\nu\cos\omega)=-\frac{d^2V}{d\psi^2}\sin\psi+\frac{dV}{d\psi}\cos\psi,\\&(x_2-\xi)(\cos l\cos\omega-\cos\lambda\sin\omega)+(y_2-\eta)(\cos m\cos\omega-\cos\mu\sin\omega)\\&\qquad+(z_2-\zeta)(\cos n\cos\omega-\cos\nu\sin\omega)=\frac{d^2V}{d\psi^2}\cos\psi+\frac{dV}{d\psi}\sin\psi.\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen 36) lassen sich durch die folgenden ersetzen:

$$38)\quad \frac{x_1-\xi-\varrho\cos\lambda}{\cos l}=\frac{y_1-\eta-\varrho\cos\mu}{\cos m}=\frac{z_1-\zeta-\varrho\cos\nu}{\cos n}=\frac{\frac{dV}{d\psi}-\varrho\cos(\omega+\psi)}{\sin(\omega+\psi)}.$$

Die Fläche S_1 wird aus den Krümmungsaxen der Curve gebildet, deren Normalebenen die Ebenen des planen Systems von Krümmungslinien parallel sind. Die Fläche S_1 ist also developpabel. Hat in den Gleichungen 38) ψ einen bestimmten Werth, so gelten die bemerkten Gleichungen für eine kürzeste Linie der developpabeln Fläche der Krümmungsaxen einer Curve. Einem bestimmten Werthe von s entspricht eine Gerade.

Setzt man:

$$39)\quad\begin{aligned}&X=\frac{dV}{d\psi}\cos\psi+V\sin\psi,\qquad Y=\frac{dV}{d\psi}\sin\psi-V\cos\psi,\\&Y_2=\frac{d^2V}{d\psi^2}\cos\psi+\frac{dV}{d\psi}\sin\psi,\quad X_2=-\frac{d^2V}{d\psi^2}\sin\psi+\frac{dV}{d\psi}\cos\psi,\end{aligned}$$

so kann man X, Y als Coordinaten eines Punktes einer planen Curve ansehn, es sind dann X_2, Y_2 die Coordinaten des entsprechenden Punktes der Evolute. Die Gleichungen 38) haben dieselben Formen, wie die Gleichungen 2) von A, nur dass X und Y respective durch X_2 und Y_2 ersetzt sind. Es ist also die Fläche S_2 von derselben Art wie die Fläche S.

Bedient man sich der in A aufgestellten Gleichungen 12) bis 19) für $\Omega_1=0$, so treten an Stelle der Gleichungen 36) und 37) die folgenden:

$$40)\quad \begin{cases} x_1 \cos\lambda_1 + y_1 \cos\mu_1 + z_1 \cos\nu_1 = 0, \\[2ex] x_1 \cos\alpha_1 + y_1 \cos\beta_1 + z_1 \cos\gamma_1 = -\dfrac{\dfrac{1}{r_1}\dfrac{dV}{d\psi}}{\dfrac{\sin\psi}{\varrho_1} - \dfrac{\cos\psi}{r_1}}, \\[4ex] x_1 \cos l_1 + y_1 \cos m_1 + z_1 \cos n_1 = \dfrac{\dfrac{1}{\varrho_1}\dfrac{dV}{d\psi}}{\dfrac{\sin\psi}{\varrho_1} - \dfrac{\cos\psi}{r_1}}. \end{cases}$$

$$41)\quad \begin{cases} x_2 \cos\lambda_1 + y_2 \cos\mu_1 + z_2 \cos\nu_1 = 0 \\ x_2 \cos\alpha_1 + y_2 \cos\beta_1 + z_2 \cos\gamma_1 = -\dfrac{d^2 V}{d\psi^2}\sin\psi + \dfrac{dV}{d\psi}\cos\psi, \\ x_2 \cos l_1 + y_2 \cos m_1 + z_2 \cos n_1 = \dfrac{d^2 V}{d\psi^2}\cos\psi + \dfrac{dV}{d\psi}\sin\psi. \end{cases}$$

Die Gleichungen 40) lassen sich durch die folgenden ersetzen:

$$42)\quad \frac{x_1}{\dfrac{\cos l_1}{\varrho_1} - \dfrac{\cos\alpha_1}{r_1}} = \frac{y_1}{\dfrac{\cos m_1}{\varrho_1} - \dfrac{\cos\beta_1}{r_1}} = \frac{z_1}{\dfrac{\cos n_1}{\varrho_1} - \dfrac{\cos\gamma_1}{r_1}} = \frac{\dfrac{dV}{d\psi}}{\dfrac{\sin\psi}{\varrho_1} - \dfrac{\cos\psi}{r_1}}.$$

Durch diese Gleichungen ist eine Kegelfläche bestimmt. Die Kanten derselben sind den rectificirenden Geraden einer Curve doppelter Krümmung parallel, deren rectificirenden Ebenen, die Ebenen des planen Systems von Krümmungslinien parallel sind.

Die Gleichungen 40) oder 42) nehmen sehr einfache Formen an, wenn statt der Winkel α_1, λ_1, l_1 etc. wieder die Winkel α, λ, l etc. mittelst der Gleichungen 5), 7) und 8) von A eingeführt werden und ferner nach 6) und 9) von A

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = -\operatorname{tang}\omega$$

gesetzt wird. An Stelle der Gleichungen 40) lassen sich dann die folgenden setzen:

43)

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = 0,$$

$$x_1(\cos l \sin\omega + \cos\lambda\cos\omega) + y_1(\cos m \sin\omega + \cos\mu\cos\omega) + z_1(\cos n \sin\omega + \cos\nu\cos\omega)$$

$$= \frac{\sin\omega \frac{dV}{d\psi}}{\sin(\omega+\psi)},$$

$$x_1(\cos l \cos\omega - \cos\lambda\sin\omega) + y_1(\cos m \cos\omega - \cos\mu\sin\omega) + z_1(\cos n \cos\omega - \cos\nu\sin\omega)$$

$$= \frac{\cos\omega \frac{dV}{d\psi}}{\sin(\omega+\psi)}.$$

Diese Gleichungen reduciren sich einfach auf:

44) $$\frac{x_1}{\cos l} = \frac{y_1}{\cos m} = \frac{z_1}{\cos n} = \frac{dV}{d\psi}\frac{1}{\sin(\omega+\psi)}.$$

Nimmt man die Ebenen des planen Systems den Normalebenen einer Curve Γ doppelter Krümmung parallel, so sind die Generatricen der Kegelfläche, bestimmt durch die Gleichungen 44), den Binormalen der Curve Γ parallel.

Sollen die Gleichungen 36) eine Kegelfläche bestimmen, deren Spitze im Anfangspunkt der Coordinaten liegt, so giebt die erste derselben $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ gesetzt:

$$\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = g^2,$$

wo g eine Constante bedeutet. Der Punkt (ξ, η, ζ) gehört einer sphärischen Curve an. Aus dem Vorhergehenden, erhält man unter Zuziehung der in A aufgestellten Theoreme, folgende allgemeinen Resultate, für Flächen, deren Krümmungslinien gleichzeitig geodätische Linien sind.

Theorem:

In einer Ebene werde eine feste Curve C angenommen und zwei bestimmte zu einander orthogonale Geraden, welche sich in einem Punkte O schneiden. Es sei Γ eine beliebige Curve doppelter Krümmung, Γ' eine ihrer Evoluten, einem Punkte Π von Γ entspreche der Punkt Π'

von Γ'. Die Curve C bewege sich nun so, dass der Punkt O die Curve Γ durchläuft, dass im Punkte Π ihre Ebene mit der Normalebene von Γ zusammenfällt und eine der beiden festen Geraden in der Ebene von C die Verbindungslinie der Punkte Π und Π' ist. Die Curve C erzeugt dann die allgemeinste Fläche S, auf welcher C gleichzeitig Krümmungslinie und geodätische Linie ist. Die Evolute der Curve C erzeugt eine Fläche S_2, welche eine der Flächen der Krümmungscentra von S ist. Den Krümmungslinien von S entsprechen auf S_2 wieder Krümmungslinien, dem planen System entspricht wieder ein planes System; dem nicht planen System entsprechen auf S_2 Curven, deren Tangenten den Tangenten der Curve Γ parallel sind. Die andere Fläche S_1 der Krümmungscentra von S ist die developpabele Fläche der Krümmungsaxen der Curve Γ. Für eine sphärische Curve Γ ist die Fläche S_1 eine conische Fläche. Ist die Curve Γ plan, so existirt nur eine Evolute Γ', es findet dann für die Flächen S und S_2 eine ganz ähnliche Erzeugung wie im allgemeinen Falle statt. Die Fläche der Krümmungsaxen geht in eine cylindrische Fläche über, welche auf der Ebene von Γ senkrecht steht und die Evolute Γ' enthält.

Geht die Ebene der Curve C immer durch denselben festen Punkt O, so drehe sich die Ebene um den Punkt O derart, dass sie der Normalebene im Punkte Π einer Curve doppelter Krümmung Γ parallel bleibt und eine der beiden festen Geraden die Richtung der Verbindungslinie $\Pi\Pi'$ hat. Die eine Fläche der Krümmungscentra wird von der Evolute von C beschrieben, die andere ist eine Kegelfläche, welche den festen Punkt O zur Spitze hat und deren Generatricen den Binormalen der Curve Γ parallel sind. Die Ebene der Curve C kann sich auch um den festen Punkt O so drehn, dass sie den rectificirenden Ebenen einer Curve Γ_1 parallel bleibt, und zwei feste zu einander orthogonale Geraden in der Ebene von C dabei die respectiven Richtungen der Tangenten und Binormalen der Curve Γ_1 annehmen. Die Generatricen der developpabeln Fläche der Krümmungscentra sind den rectificirenden Geraden der Curve Γ_1 parallel.

Anmerkung zu Anhang B.

Analytische Bestimmung der Flächen, für welche eine Schale der Krümmungscentra eine Kegelfläche zweiten Grades ist.

Wenn auch der Zweck der vorliegenden Untersuchungen wesentlich in der Aufstellung möglichst allgemeiner Resultate besteht, soweit die Allgemeinheit der Resultate durch die behandelten Probleme bedingt ist, möchte es nicht ungeeignet erscheinen, die im Anhang B entwickelten Gleichungen auf ein verhältnissmässig einfaches Beispiel anzuwenden. Die sehr geringe Anzahl von Beispielen in Beziehung auf Flächen, für welche die Schalen der Krümmungscentra gegeben sind, kann wohl zur Rechtfertigung einer speciellen Untersuchung dienen. Diese Untersuchung bietet in sofern einiges Interesse dar, als nur eine der Schalen der Krümmungscentra gegeben ist, während die zweite unbestimmt bleibt.

Ist die Fläche S_1 eine Kegelfläche, deren Spitze mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt, so verschwindet die linke Seite der Gleichung 21) von B, es ist dann $x \cos a' + y \cos b' + z \cos c' = 0$. Die Gleichungen 12) und 14) von A geben $\Omega_1 = 0$, also nach 10) $f''(\omega) + f(\omega) = 0$. Sind h_1 und h_2 Constanten, so ist

$$f(\omega) = h_1 \cos \omega + h_2 \sin \omega.$$

Man kann einfach $h_1 = 0$ und $h_2 = 0$, also $f(\omega) = 0$ nehmen. Es kommt dieses darauf hinaus in der zweiten und dritten Gleichung 1) von A einfach V statt $V + h_1 \cos \psi - h_2 \sin \psi$ zu setzen, wodurch die Allgemeinheit nicht verringert wird, da V eine beliebige Function von v oder ψ ist. Die Gleichungen 1) von A geben $f(\omega) = 0$ gesetzt:

$$
1)\quad \begin{cases}
x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0, \\
x(\cos l\sin\omega + \cos\lambda\cos\omega) + y(\cos m\sin\omega + \cos\mu\cos\omega) + z(\cos n\sin\omega + \cos\nu\cos\omega) \\
\qquad = \dfrac{dV}{d\psi}\cos\psi + V\sin\psi, \\
x(\cos l\cos\omega - \cos\lambda\sin\omega) + y(\cos m\cos\omega - \cos\mu\sin\omega) + z(\cos n\cos\omega - \cos\nu\sin\omega) \\
\qquad = \dfrac{dV}{d\psi}\sin\psi - V\cos\psi.
\end{cases}
$$

Durch diese Gleichungen ist der Punkt (x, y, z) einer Fläche S definirt, für welche die Schale S_1 der Krümmungscentra eine Kegelfläche ist. Für einen Punkt (x_1, y_1, z_1) dieser Kegelfläche bestehn die Gleichungen 44) von B, nämlich:

$$
2)\qquad \frac{x_1}{\cos l} = \frac{y_1}{\cos m} = \frac{z_1}{\cos n}.
$$

Da die Gleichung einer Kegelfläche von der Form:

$$
\Phi\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}\right) = 0
$$

ist, so zeigen die Gleichungen 2), dass die Aufstellung der Fläche S auf die Untersuchung einer Curve doppelter Krümmung hinauskommt, welche durch die Richtungen ihrer Binormalen definirt ist.

Sind f, g und h Constanten, liegt der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf einer Kegelfläche zweiten Grades, so findet die Gleichung statt:

$$
3)\qquad \frac{x_1^2}{f^2} + \frac{y_1^2}{g^2} - \frac{z_1^2}{h^2} = 0.
$$

Mittelst der Gleichungen 2) giebt die Gleichung 3):

$$
4)\qquad \frac{\cos^2 l}{f^2} + \frac{\cos^2 m}{g^2} - \frac{\cos^2 n}{h^2} = 0.
$$

Es sei $f \geqq g$. Auf die Gleichung 4) lassen sich die in I gegebenen Formeln anwenden, bei welcher Anwendung, der Einfachheit halber, die Gleichungen von I nicht weiter einzeln angeführt werden sollen.

Die Gleichung 4) nach s differentiirt giebt:

$$\left(\frac{\cos l \cos\lambda}{f^2}+\frac{\cos m\cos\mu}{g^2}-\frac{\cos n\cos\nu}{h^2}\right)\frac{1}{r}=0,$$

d. i.

$$5)\qquad \frac{\cos l\cos\lambda}{f^2}+\frac{\cos m\cos\mu}{g^2}-\frac{\cos n\cos\nu}{h^2}=0.$$

Wird die Gleichung 5) nach s differentiirt, so folgt, mit Rücksicht auf die Gleichung 4),:

$$6)\quad \left(\frac{\cos l\cos\alpha}{f^2}+\frac{\cos m\cos\beta}{g^2}-\frac{\cos n\cos\gamma}{h^2}\right)\frac{1}{\varrho}=\left(\frac{\cos^2\lambda}{f^2}+\frac{\cos^2\mu}{g^2}-\frac{\cos^2\nu}{h^2}\right)\frac{1}{r}.$$

Zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen setze man:

$$7)\qquad \frac{\varrho}{r}=p,$$

und:

$$8)\qquad \frac{\cos^2\lambda}{f^2}+\frac{\cos^2\mu}{g^2}-\frac{\cos^2\nu}{h^2}=q.$$

Die Gleichung 6) wird dann einfacher:

$$9)\qquad \frac{\cos l\cos\alpha}{f^2}+\frac{\cos m\cos\beta}{g^2}-\frac{\cos n\cos\gamma}{h^2}=pq.$$

In der Summe der Gleichungen 4) und 8) setze man

$$\cos^2 l+\cos^2\lambda=1-\cos^2\alpha \text{ etc.},$$

es folgt dann:

$$10)\qquad \frac{\cos^2\alpha}{f^2}+\frac{\cos^2\beta}{g^2}-\frac{\cos^2\gamma}{h^2}=\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}-\frac{1}{h^2}-q.$$

Die vorstehende Gleichung nach s differentiirt giebt:

$$\left(\frac{\cos\alpha\cos\lambda}{f^2}+\frac{\cos\beta\cos\mu}{g^2}-\frac{\cos\gamma\cos\nu}{h^2}\right)\frac{1}{\varrho}=-\frac{1}{2}\frac{dq}{ds}.$$

Setzt man hierin $ds = r\,d\omega$ und aus 7) $\varrho = pr$, so erhält man:

11) $$\frac{\cos\alpha\cos\lambda}{f^2} + \frac{\cos\beta\cos\mu}{g^2} - \frac{\cos\gamma\cos\nu}{h^2} = -\frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}.$$

Unter Zuziehung der Gleichungen 4), 5), 8), 9), 10) und 11) folgt:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \cos l & \cos m & \cos n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\cos\alpha}{f^2}, & \frac{\cos\beta}{g^2}, & -\frac{\cos\gamma}{h^2} \\ \frac{\cos\lambda}{f^2}, & \frac{\cos\mu}{g^2}, & -\frac{\cos\nu}{h^2} \\ \frac{\cos l}{f^2}, & \frac{\cos m}{g^2}, & -\frac{\cos n}{h^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}-\frac{1}{h^2}-q, & -\frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}, & pq \\ -\frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}, & q & 0 \\ pq & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

d. i.

12) $$\frac{1}{(fgh)^2} = p^2 q^3.$$

Die Gleichungen 4), 5) und 9) schreibe man wie folgt:

$$\cos l\frac{\cos l}{f^2} + \cos m\frac{\cos m}{g^2} - \cos n\frac{\cos n}{h^2} = 0,$$

$$\cos\lambda\frac{\cos l}{f^2} + \cos\mu\frac{\cos m}{g^2} - \cos\nu\frac{\cos n}{h^2} = 0,$$

$$\cos\alpha\frac{\cos l}{f^2} + \cos\beta\frac{\cos m}{g^2} - \cos\gamma\frac{\cos n}{h^2} = pq.$$

Sieht man in diesen Gleichungen $\frac{\cos l}{f^2}$, $\frac{\cos m}{g^2}$, $\frac{-\cos n}{h^2}$ als Unbekannte an, so findet man unmittelbar:

13) $$\frac{\cos l}{f^2} = pq\cos\alpha, \quad \frac{\cos m}{g^2} = pq\cos\beta, \quad \frac{-\cos n}{h^2} = pq\cos\gamma.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen erhält man durch Substitution der Werthe von $\cos l$, $\cos m$ und $\cos n$ in:

$$\cos l\cos\alpha + \cos m\cos\beta + \cos n\cos\gamma = 0$$

die Relation:

14) $$f^2\cos^2\alpha + g^2\cos^2\beta - h^2\cos^2\gamma = 0.$$

Sieht man in den Gleichungen 5), 8) und 11) $\frac{\cos\lambda}{f^2}$, $\frac{\cos\mu}{g^2}$, $\frac{-\cos\nu}{h^2}$ als Unbekannte an, so giebt eine einfache Rechnung:

$$\frac{\cos\lambda}{f^2} = q\cos\lambda - \frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}\cos\alpha, \quad \frac{\cos\mu}{g^2} = q\cos\mu - \frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}\cos\beta,$$

$$-\frac{\cos\nu}{h^2} = q\cos\nu - \frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}\cos\gamma$$

oder:

$$15)\qquad \left(q - \frac{1}{f^2}\right)\cos\lambda = \frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}\cos\alpha, \quad \left(q - \frac{1}{g^2}\right)\cos\mu = \frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}\cos\beta,$$

$$\left(q + \frac{1}{h^2}\right)\cos\nu = \frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}\cos\gamma.$$

In den Gleichungen 9), 10) und 11) sehe man $\frac{\cos\alpha}{f^2}$, $\frac{\cos\beta}{g^2}$, $\frac{-\cos\gamma}{h^2}$ als Unbekannte an. Für $\frac{\cos\alpha}{f^2}$ ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{\cos\alpha}{f^2} = pq\cos l + \left(\frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} - \frac{1}{h^2} - q\right)\cos\alpha - \frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}\cos\lambda$$

oder:

$$pq\cos l + \left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{h^2} - q\right)\cos\alpha - \frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}\cos\lambda = 0.$$

Setzt man hierin die Werthe von $\cos l$ und $\cos\lambda$ aus 13) und 15) so folgt:

$$16)\qquad (pq)^2 f^2 + \frac{1}{g^2} - \frac{1}{h^2} - q - \frac{\left(\frac{p}{2}\frac{dq}{d\omega}\right)^2}{q - \frac{1}{f^2}}.$$

Durch Substitution des Werthes von p^2 aus 12), nämlich:

$$p^2 = \frac{1}{(fgh)^2 q^3}$$

liefert die Gleichung 16) folgende Differentialgleichung zur Bestimmung von q:

$$17)\qquad \left(\frac{1}{2}\frac{dq}{d\omega}\right)^2 = (fgh)^2 q^2\left(q-\frac{1}{f^2}\right)\left(\frac{1}{g^2}-q\right)\left(q+\frac{1}{h^2}\right).$$

Um die Gleichung 17) auf die gewöhnliche Form einer elliptischen Differentialgleichung zu reduciren, setze man:

$$18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{g^2}-\frac{1}{f^2}}{\frac{1}{g^2}+\frac{1}{h^2}} = k^2, \quad k^2+k'^2 = 1. \\ \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{g}\dfrac{k'\cos\delta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta}}, \quad \dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{g}\dfrac{k'\sin\delta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta}}. \\ q = \dfrac{\frac{k'^2\sin^2\varphi}{g^2}+\frac{\cos^2\varphi}{f^2}}{1-k^2\sin^2\varphi}. \end{cases}$$

Bedeutet t eine Unbestimmte, deren Werth von φ unabhängig ist, so kann man setzen:

$$19)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{f} = tk'\cos\delta, \quad \dfrac{1}{g} = t\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta}, \quad \dfrac{1}{h} = tk'\sin\delta, \\ q = t^2k'^2\dfrac{\cos^2\delta+k^2\sin^2\delta\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}. \end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen findet man:

$$20)\qquad \begin{cases} q-\dfrac{1}{f^2} = t^2k'^2\dfrac{k^2\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}, \quad \dfrac{1}{g^2}-q = t^2\dfrac{k^2\cos^2\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}, \\ q+\dfrac{1}{h^2} = t^2k'^2\dfrac{1}{1-k^2\sin^2\varphi}. \end{cases}$$

Nimmt man aus der Gleichung 17) den Werth von $\frac{dq}{d\omega}$ positiv, so ist nach 19) und 20) der Winkel φ durch folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$21)\qquad \frac{\operatorname{tang}\delta\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+k^2\operatorname{tang}^2\delta\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{d\omega}=1.$$

Die Gleichungen 10) und 14) in Verbindung mit

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

bestimmen $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$. Nimmt man die Wurzeln positiv, so folgt unter Zuziehung der Gleichungen 19):

$$22)\qquad \cos\alpha=\frac{k'\cos\delta\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \cos\beta=\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$
$$\cos\gamma=\frac{k'\sin\delta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

In den Gleichungen 13) und 15) setze man aus 12) $p=\frac{1}{fgh\,q^{\frac{3}{2}}}$, mit Hülfe der Gleichungen 19) und 22) findet man:

$$23)\quad\left\{\begin{aligned}
&H\cos l=\sin\varphi\operatorname{tang}\delta\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta}, && H\cos\lambda=\frac{-\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\\
&H\cos m=k'\sin\delta\cos\varphi, && H\cos\mu=\frac{k'\sin\varphi\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta}}{\cos\delta\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\\
&H\cos n=-\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta}, && H\cos\nu=\frac{-k^2\sin\delta\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\delta\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\\
&H=\sqrt{1+k^2\operatorname{tang}^2\delta\sin^2\varphi}.
\end{aligned}\right.$$

Durch die Gleichungen 22) und 23) sind die Factoren von x, y und z der Gleichungen 1) durch einen Winkel φ ausgedrückt, dessen Bestimmung von der Gleichung 21) abhängt. Die weitere Untersuchung dieser Gleichung mit Hülfe elliptischer Functionen bietet keine Schwierigkeit, wesshalb diese Untersuchung hier nicht weiter ausgeführt werden soll. Die Function V auf den rechten Seiten der Gleichungen 1) bleibt unbestimmt, durch die bemerkten Gleichungen sind alle Flächen analytisch bestimmt, für welche eine Schale der Krümmungscentra eine Kegelfläche zweiten Grades ist. Für einen Rotationskegel ist $f=g$, nach 16) ist dann $k=0$, $k'=1$, die dritte Gleichung 22) reducirt sich auf

$\cos\gamma = \sin\delta$, durch welche Gleichung eine Helix einer beliebigen Cylinderfläche characterisirt ist. Die Gleichung 21) reducirt sich für $k = 0$, $k' = 1$ einfach auf

$$\sin\delta \frac{d\varphi}{d\omega} = 1.$$

Findet zwischen f, g und h die Gleichung $f^2 - g^2 = h^2$ statt, so ist nach 19)

$$k \operatorname{tang}^2\delta = 1.$$

An Stelle eines elliptischen Integrals dritter Gattung führt die Gleichung 21) durch Integration nur auf ein elliptisches Integral erster Gattung. Die vorhergehende Darstellung enthält eine bedeutende Vereinfachung von analogen Untersuchungen, welche in den „Nachrichten v. d. K. G. d. W.“ aus dem Jahre 1871 (p. 231—242) enthalten sind.

Inhalt.