Beiträge
zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.

Zweiter Beitrag*).

Von

M. A. Stern.

(Der Königl. Gesellsch. der Wissensch. vorgelegt am 1. Mai 1880.)

1.

Bei den folgenden Untersuchungen über die Bernoullischen Zahlen werde ich besonders die Entwickelung von $(e^x-1)^n$, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet, in eine nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete Reihe benutzen. Zwischen den Coefficienten dieser Reihen finden viele merkwürdige Beziehungen statt, von welchen ich hier hauptsächlich nur diejenigen zusammenstelle, die ich im Folgenden benutzen werde. Nur einzelne sind schon bekannt und diese meistens auf weniger einfachem Wege bewiesen, als es hier geschehen soll.

Man setze

$$(1)\quad (e^x-1)^n = \frac{A_{0,n}}{1.2..n}x^n + \frac{A_{1,n}}{1.2..(n+1)}x^{n+1} + \ldots = \sum_{0,\infty}^{m} \frac{A_{m,n}}{1.2..(n+m)}x^{n+m}$$

Ist $n=0$, so ist mithin die Einheit statt $\frac{A_{0,n}}{1.2..n}$ zu setzen, sonst ist allgemein $A_{m,0}=0$. Für jeden anderen Werth von n ist ebenfalls $\frac{A_{0,n}}{1..n}=1$, auch ist allgemein $A_{m,1}=1$, dagegen ist $A_{m,n}$ immer Null, sobald m negativ.

Bezeichnet man $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2..m}$ durch (n,m) so ist zugleich

*) Man vergleiche Abhandl. d. Königl. Ges. d. Wiss. Bd. 23, mathem. Classe.

$$(e^x-1)^n = e^{nx} - (n,\ 1)\, e^{(n-1)x} \ldots . + (-1)^n$$

Entwickelt man nun e^{nx}, $e^{(n-1)x}$ . . . nach aufsteigenden Potenzen von x, so ergiebt sich als Werth des Coefficienten von x^{n+m} in der Entwickelung von $(e^x-1)^n$ der Ausdruck

$$\frac{1}{1.2\ldots(n+m)}[n^{n+m} - (n,\ 1)(n-1)^{n+m} \ldots \pm (n,\ n-1) 1^{n+m}]$$

Demnach hat man

(2) $$A_{m,n} = n^{n+m} - (n,\ 1)(n-1)^{n+m} \ldots + (-1)^{n-1}(n,\ n-1)\, 1^{n+m}$$

Nun ist dies, wie bekannt, zugleich der Werth des ersten Gliedes der $n$ten Differenzreihe der Reihe

$$0,\ 1^{n+m},\ 2^{n+m} \ldots .$$

bezeichnet man dieses Glied durch $\Delta^n 0^{m+n}$ so hat man mithin

(2′) $$A_{m,n} = \Delta^n 0^{m+n}$$

so dass jede Beziehung zwischen den Grössen A sich zugleich als ein Satz aus der Differenzenrechnung darstellen lässt.

Aus (2) folgt

$$\begin{aligned} nA_{m-1,n} &= n^{n+m} - n(n,\ 1)(n-1)^{n+m-1} + n(n,\ 2)(n-2)^{n+m-1} \ldots . \\ nA_{m,n-1} &= \qquad\quad (n,\ 1)(n-1)^{n+m-1} - 2(n,\ 2)(n-2)^{n+m-1} \ldots . \end{aligned}$$

also

(3) $$A_{m,n} = n(A_{m-1,n} + A_{m,n-1})$$

eine Beziehung die schon Euler bemerkt hat*). Es folgt hieraus, dass $A_{m,n}$ für alle Werthe $n \overline{\gtrless} 2$ eine gerade Zahl ist und für alle Werthe $n \overline{\gtrless} 5$ mit Null schliesst.

Setzt man $\frac{A_{m,n}}{1.2\ldots n} = h_{m,n}$, so dass $h_{0,n} = 1$ und $h_{m,1} = A_{m,1} = 1$ so folgt aus (3)

(4) $$\begin{aligned} h_{m,n} &= h_{m,n-1} + nh_{m-1,n} \\ h_{m-1,n} &= h_{m-1,n-1} + nh_{m-2,n} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{1,n} &= h_{1,n-1} + nh_{0,n} = h_{1,n-1} + n \end{aligned}$$

*) Instit. calc. diff. P. 2 § 172.

Demnach

$$h_{m,n} = h_{m,n-1} + n h_{m-1,n-1} + n^2 h_{m-2,n-1} \ldots + n^{m-1} h_{1,n-1} + n^m \tag{5}$$

Ist also $h_{m,n-1}$ für alle ganzen positiven Werthe von m eine ganze positive Zahl, so ist dasselbe bei $h_{m,n}$ der Fall. Da nun $h_{m,1} = 1$, so ist allgemein $h_{m,n}$ eine ganze positive Zahl, sobald n eine solche ist. Mithin ist $A_{m,n}$ nicht blos eine ganze positive Zahl, sondern zugleich durch $1 \, . \, 2 \ldots n$ theilbar.

Man kann $h_{m,n}$ in einer Weise definiren, aus welcher sich von selbst ergiebt, dass es eine ganze positive Zahl ist. Bezeichnet man nemlich durch $C_{m,n}$ die Summe der Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung zur Classe m aus den Elementen $1, 2 \ldots n$ unter der Voraussetzung, dass die Elemente in jeder Combinationsform als Faktoren betrachtet und die Combinationsformen addirt werden, so hat man

$$C(m, n) = C(m, n-1) + n\, C(m-1, n)$$

und demnach

$$C(1, n) = C(1, n-1) + n\, C(o, n)$$

aber auch
$$C(1, n) = C(1, n-1) + n$$

Man muss also $C(o, n) = 1 = h_{o,n}$ nehmen und hat mithin der Formel (5) entsprechend

$$C(m, n) = C(m, n-1) + n\, C(m-1, n-1) + n^2 C(m-2, n-1) \ldots + n^m$$

Nun ist $C(m, 1) = 1 = h_{m,1}$ also allgemein

$$C(m, n) = h_{m,n}$$

Alle Beziehungen zwischen den Grössen $h_{m,n}$ oder $A_{m,n}$ können mithin auch als Beziehungen zwischen den Grössen $C(m, n)$ gedeutet werden*).

Aus (5) folgt unmittelbar

$$A_{m,n} = n\,[A_{m,n-1} + n A_{m-1,n-1} + n^2 A_{m-2,n-1} + \ldots + n^m A_{o,n-1}] \tag{6}$$

Auch folgt aus (3)

$$A_{m,n} = n A_{m-1,n} + n(n-1) A_{m-1,n-1} \ldots + n(n-1) \ldots 2 \, . \, 1\, A_{m-1,1} \tag{7}$$

*) Ettingshausen combin. Analysis p. 203.

2.

Aus $(e^x-1)^n = (e^x-1)^{n-1}(x+\frac{x^2}{1.2}+\ldots)$

d. h.

$$\frac{A_{0,n}}{1.2..n}x^n+\ldots+\frac{A_{m,n}}{1.2..n+m}x^{n+m}\ldots$$
$$=\left[\frac{A_{0,n-1}}{1.2..n-1}x^{n-1}\ldots+\frac{A_{m,n-1}}{1..m+n-1}x^{n+m-1}\ldots\right]\left[x+\frac{x^2}{1.2}\ldots+\frac{x^{m+1}}{1.2..m+1}\ldots\right]$$

folgt, wenn man auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{n+m} nimmt,

$$(8)\quad A_{m,n} = (n+m,\ 1)A_{m,n-1}+(n+m,\ 2)A_{m-1,n-1}\ldots+(n+m,\ m+1)A_{0,n-1}$$

Ebenso findet man aus

$$\frac{n(e^x-1)^n}{1.2..n} = (1-e^{-x})\frac{\partial}{\partial x}.\frac{(e^x-1)^n}{1.2..n}$$

indem man auf beiden Seiten den Coefficienten von $n+m$ bestimmt,

$$(9)\qquad mA_{m,n} = (n+m,\ 2)A_{m-1,n}-(n+m,\ 3)A_{m-2,n}\ldots$$
$$+(-1)^{m-1}(n+m,\ m+1)A_{0,n}$$

und aus

$$(e^x-1)\frac{\partial}{\partial x}.\frac{(e^x-1)^n}{1..n} = n\frac{(e^x-1)^n e^x}{1.2..n}$$

folgt

$$(n+m,\ 1)A_{m,n}+(n+m,\ 2)A_{m-1,n}\ldots+(n+m,\ m+1)A_{0,n}$$
$$= n[A_{m,n}+(n+m,\ 1)A_{m-1,n}\ldots+(n+m,\ m)A_{0,n}]$$

d. h.

$$(10)\quad mA_{m,n} = \frac{n+1-m}{2}(n+m,\ 1)A_{m-1,n}+\frac{2(n+1)-m}{3}(n+m,\ 2)A_{m-2,n}\ldots$$
$$+\frac{m(n+1)-m}{m+1}(n+m,\ m)A_{0,n}$$

3.

Aus Formel (3) folgt unmittelbar

$$(11)\quad \sum_{1,\,m}^{n}(-1)^{n+1}\frac{A_{m-n,n+1}}{n+1} = \sum_{1,\,m}^{n}(-1)^{n+1}A_{m-n,n}+\sum_{1,\,m}^{n}(-1)^{n+1}A_{m-n-1,n+1}$$

nun ist $$\sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} A_{m-n,\,n} = A_{m-1,\,1} + \sum_{2,\,m}^{n} (-1)^{n+1} A_{m-n,\,n}$$

und $$\sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} A_{m-n-1,\,n+1} = -\sum_{2,\,m}^{n} (-1)^{n+1} A_{m-n,\,n}$$

also

$$\sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-n,\,n+1}}{n+1} = A_{m-1,\,1} = 1 \tag{12}$$

Entwickelt man aber in

$$1-(e^x-1)+(e^x-1)^2-\ldots+(-1)^m(e^x-1)^m\ldots = e^{-x}$$

auf beiden Seiten nach aufsteigenden Potenzen von x und vergleicht die Coefficienten von x^m, so findet man

$$\sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} A_{m-n,\,n} = (-1)^{m-1} \tag{12'}$$

Verbindet man dies mit (11), so ergiebt sich

$$\sum_{2,\,m}^{n} (-1)^{n+1} A_{m-n,\,n} = (-1)^{m-1} - 1$$

d. h. $$\sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} A_{m-n,\,n} = (-1)^{m-1}$$

oder, indem man mit $(-1)^{m-1}$ multiplicirt und $m-n=k$ setzt,

$$\sum_{o,\,m-1}^{k} (-1)^k A_{k,\,m-k} = 1$$

Aus (3) folgt auch

$$\sum_{1,\,m}^{n} (-1)^n A_{\frac{m-n,\,n}{n}} = \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^n A_{m-n,\,n-1} + \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^n A_{m-n-1,\,n}$$

Unter der Voraussetzung, dass $m > 1$, also $A_{m-1,\,o} = 0$, ist aber

$$\sum_{1,\,m}^{n} (-1)^n A_{m-n,\,n-1} = \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} A_{m-n-1,\,n}$$

mithin

$$(13) \qquad \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^n \frac{A_{m-n,\,n}}{n} = 0$$

wo man also auch $(-1)^{n-1}$ statt $(-1)^n$ schreiben kann.

Schreibt man statt dessen $\sum_{1,\,m}^{n} (-1)^n \frac{A_{m-n,n}}{n} = mA_{m-1,o}$ so umfasst die Formel zugleich den Fall wenn $m = 1$.

Nach Formel (3) ist

$$A_{m-n,\,n+1} = (n+1)\left[A_{m-n,\,n} + A_{m-n-1,\,n+1}\right]$$

also auch

$$\sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-n,\,n+1}}{n} = \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{A_{m-n,\,n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-n,\,n+1}}{n+1} + \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left[A_{m-n,\,n} + A_{m-n-1,\,n+1}\right]$$

oder (nach F. (12) und (13))

$$= 1 + \sum_{1,\,m-1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-n-1,\,n+1}}{n}$$

Setzt man $W_{m,\,k} = \sum_{1,\,m-k}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-(n+k),\,n+k}}{n}$ so ist mithin

$$W_{m+1,\,1} = \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m+1-n-1,\,n+1}}{n} = \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-n,\,n+1}}{n}$$

also nach dem Vorhergehenden

$$W_{m+1,\,1} = 1 + W_{m,1}$$

und, indem man wieder $W_{m,1} = 1 + W_{m-1,1}$ u. s. w. setzt, schliesslich

$$W_{m+1,\,1} = m - 1 + W_{2,1}$$

Aber $W_{2,1} = A_{0,2} = 2$ also

$$W_{m+1,\,1} = m + 1$$

Hieraus folgt

$$(14) \qquad W_{m,1} = \sum_{1,\, m-1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-n-1,\, n+1}}{n} = m$$

und allgemeiner

$$\sum_{1,\, m-k}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-(n+k),\, n+1}}{n} = m-k+1$$

Diese Formeln sind aber nur specielle Fälle einer allgemeineren, welche heisst

$$(15) \qquad W_{m,k} = mA_{m-k-1,\, k}$$

Nach Formel (3) hat man nemlich

$$\frac{A_{m-(n+k),\, n+k}}{n} = \frac{n+k}{n}\left[A_{m-(n+k+1),\, n+k} + A_{m-(n+k),\, n+k-1}\right]$$

Nun ist

$$\sum_{1,\, m-k}^{n} (-1)^{n+1} A_{m-(n+k),\, n+k-1} = A_{m-k-1,\, k} + \sum_{1,\, m-k}^{n} (-1)^{n} A_{m-(n+k+1),\, n+k}$$

d. h.

$$\sum_{1,\, m-k}^{n} (-1)^{n+1}\left[A_{m-(n+k+1),\, n+k} + A_{m-(n+k),\, n+k-1}\right] = A_{m-k-1,\, k}$$

mithin

$$(16) \qquad W_{m,k} = A_{m-k-1,\, k} + kW_{m-1,\, k} + kW_{m-1,\, k-1}$$

Gesetzt, es sei bis zu einem gewissen k

$$(16') \qquad \begin{cases} W_{m-1,\, k-1} = (m-1)\, A_{m-k-1,\, k-1} \\ W_{m-1,\, k} \;\;\; = (m-1)\, A_{m-k-2,\, k} \end{cases}$$

so ist mithin $W_{m,k-1} = A_{m-k,\, k-1} + (k-1)\, W_{m-1,\, k-1} + (k-1)\, W_{m-1,\, k-2} = A_{m-k,\, k-1} + (m-1)(k-1)\left[A_{m-k-1,\, k-1} + A_{m-k,\, k-2}\right] = mA_{m-k,\, k-1}$ (nach F. (3)). Ebenso folgt $W_{m,k} = mA_{m-k-1,k}$. Nun ist in der That, wenn man $k=1$ setzt, und wie früher $m>1$ genommen wird, $W_{m-1,\, k-1} = W_{m-1,0} = \sum_{1,\, m-1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-1-n,\, n}}{n} = 0$ wofür man auch $W_{m-1,0} = (m-1)\, A_{m-1,0}$ schreiben kann, da $A_{m-1,0} = 0$. Ferner $W_{m-1,k} = W_{m-1,1} = \sum\limits_{1,\ m-2}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-(n+2),n+1}}{n}$ $= m-1$, wofür man auch $W_{m-1,1} = (m-1) A_{m-3,1}$ schreiben kann. Da mithin die Formeln (16') für $k = 1$ richtig sind, so gelten sie allgemein, wodurch die allgemeine Richtigkeit von (15) bewiesen ist.

Aus

$$\frac{A_{m+1-n,n+1}}{n+1} = A_{m-n,n+1} + A_{m+1-n,n}$$

folgt

$$\sum_{1,\ m+1}^{n} (-1)^n \frac{A_{m+1-n,n}}{n+1} = \sum_{1,\ m+1}^{n} (-1)^n \frac{A_{m+1-n,n+1}}{(n+1)^2} + \sum_{1,\ m+1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-n,n+1}}{n+1}$$

oder, nach (12)

$$(17) \qquad \sum_{1,\ m+1}^{n} (-1)^n \frac{A_{m+1-n,n}}{n+1} = \sum_{0,\ m+1}^{n} (-1)^n \frac{A_{m+1-n,n+1}}{(n+1)^2}$$

ferner

$$(18) \qquad \sum_{1,\ m+1}^{n} (-1)^n \frac{A_{m+1-n,n}}{n+1} = \sum_{1,\ m+1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{A_{m+1-n,n}}{n(n+1)}$$

da $\sum\limits_{1,\ m+1}^{n} (-1)^n \frac{A_{m+1-n,n}}{n} = 0$ nach (13).

4.

Aus $e^{mx} = (1+e^x-1)^m = 1+(m,1)(e^x-1)+\ldots+(m,m)(e^x-1)^m$

folgt

$$1+mx+\frac{m^2x^2}{1.2}\ldots+\frac{m^r x^r}{1.2\ldots r} =$$

$$1+(m,1)\left[A_{0,1}x+\ldots A_{r-1,1}\frac{x^r}{1.2\ldots r}+\ldots\right]$$

$$+(m,2)\left[\frac{A_{0,2}}{1.2}x^2+\ldots A_{r-2,2}\frac{x^r}{1.2\ldots r}+\ldots\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

mithin, indem man auf beiden Seiten die Coefficienten von x^r vergleicht

(19) $$m^r = (m, 1) A_{r-1,1} + (m, 2) A_{r-2,2} \ldots + (m, r) A_{o,r}$$

Ist $r > m$ und m eine ganze Zahl, so schliesst die Reihe mit $(m, m) A_{r-m,m}$; die folgenden Glieder fallen von selbst weg, so dass die Formel auch für diesen Fall ihre Geltung behält.

Man kann diese Formel auch leicht in eine andere verwandeln. Man hat nemlich

$$A_{r-1,1} = A_{r,1}$$
$$(m-1, 1) A_{r-1,1} + (m-1, 1) A_{r-2,2} = (m-1, 1) \frac{A_{r-1,2}}{2}$$
$$(m-1, 2) A_{r-2,2} + (m-1, 2) A_{r-3,3} = (m-1, 2) \frac{A_{r-2,3}}{3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(m-1, r) A_{o,r} \qquad\qquad = (m-1, r) \frac{A_{o,r+1}}{r+1}$$

Addirt man auf beiden Seiten alle Glieder und bemerkt, dass

$$A_{r-1,1} + (m-1, 1) A_{r-1,1} = (m, 1) A_{r-1,1}$$
$$(m-1, 1) A_{r-2,2} + (m-1, 2) A_{r-2,2} = (m, 2) A_{r-2,2}$$
u. s. w.

so ergiebt sich

(20) $$m^r = A_{r,1} + (m-1, 1) \frac{A_{r-1,2}}{2} \ldots + (m-1, r) \frac{A_{o,r+1}}{r+1}$$

Entwickelt man in derselben Weise

$$e^{-mx} = (1 + e^x - 1)^{-m}$$

so ergiebt sich

(21) $$m^r = (m+r-1, r) A_{o,r} - (m+r-2, r-1) A_{1,r-1} \ldots + (-1)^{r-1} (m, 1) A_{r-1,1}$$

5.

Aus (2) folgt

$$(-1)^{n-1} A_{m+1-n,n} = (n, 1) 1^{m+1} - (n, 2) 2^{m+1} \ldots + (-1)^{n-1} n^{m+1}$$
$$= n [1^m - (n-1, 1) 2^m \ldots + (-1)^{n-1} n^m]$$

oder wenn man

$$N_n^{(m)} = 1^m - (n, 1)\,2^m + (n, 2)\,3^m \ldots + (-1)^{n-1}(n+1)^m$$

setzt, $(-1)^{n-1}\,nN_{n-1}^{(m)} = A_{m-(n-1),n}$ also

(22) $$A_{m,n} = (-1)^{n-1}\,nN_{n-1}^{(m+n-1)}$$

Vermittelst dieser Beziehung kann man auf ganz elementarem Wege, nach dem Vorhergehenden, die Eigenschaften von $N_n^{(m)}$ finden, welche Herr Prof. Bauer aus der Theorie der Gammafunction abgeleitet hat*).

Aus (3) folgt

$$N_{n-1}^{(m+n-1)} = (1-n)\,N_{n-2}^{(m+n-2)} + nN_{n-1}^{m+n-2}$$

oder, indem man $n-1 = i$ und $m-i$ statt m setzt

$$N_i^{(m)} = (i+1)\,N_i^{(m-1)} - iN_{i-1}^{(m-1)}$$

wie Herr Bauer findet (a. a. O. Bd. 58 p. 292)

Ferner ist $\sum\limits_{1,\,m+1}^{n} N_{n-1}^{(m)} = \sum\limits_{1,\,m+1}^{n} (-1)^{n-1}\dfrac{A_{m+1-n,n}}{n} = 0$ **) nach (13)

auch ist

$$\sum_{1,\,m}^{n} \frac{1}{n} N_n^{(m)} = \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^n \frac{A_{m-n,n+1}}{n(n+1)} = \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^n \frac{A_{m-n,n+1}}{n} - \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^n \frac{A_{m-n,n+1}}{n+1}$$

aber nach (12) ist $\sum\limits_{1,\,m}^{n} (-1)^n \dfrac{A_{m-n,n+1}}{n+1} = -1$

also nach (14)

$$\sum_{1,\,m}^{n} \frac{1}{n} N_n^{(m)} = \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^n \frac{A_{m+1-n-1,n+1}}{n} = -m \text{***)}$$

Ferner

$$\sum_{1,\,m-1}^{n} \frac{1}{n\,.\,n+1} N_{n+1}^{(m)} = \sum_{1,\,m-1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-(n+1),n+2}}{n\,.\,n+1\,.\,n+2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{1,\,m-1}^{n} (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right] A_{m-(n+1),\,n+2}$$

---

*) Crelle Journ. f. d. Math. Bd. 57 und 58.

) A. a. O. Bd. 57 p. 271. *) ebend.

Nun ist nach (15)

$$\sum_{1,\,m-1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-(n+1),\,n+2}}{n} = \sum_{1,\,m-1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m+1-(n+2),\,n+2}}{n} = (m+1)\,A_{m-2,2}$$

$= (m+1)(2^m-2)$ nach F. (2)

ferner

$$-2 \sum_{1,\,m-1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-(n+1),\,n+2}}{n+1} = 2 \sum_{2,\,m}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-n,\,n+1}}{n} = 2\,(m+1-A_{m-1,2})$$

nach (14) oder $= 2\,(m+1-2^{m+1}+2)$

auch ist

$$\sum_{1,\,m-1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-(n+1),\,n+2}}{n+2} = \sum_{3,\,m+1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-n+1,\,n}}{n} = \sum_{1,\,m+1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{A_{m-n+1,n}}{n}$$
$$-A_{m,\,1} + \frac{A_{m-1,\,2}}{2}$$

also, nach (13), $= 2^m - 2$. Hieraus ergiebt sich

$$\sum_{1,\,m-1}^{n} \frac{1}{n\,(n+1)} N_{n+1}^{(m)} = 1 + m \,.\, 2^{m-1} - 2^m \text{ *)}.$$

Aus (22) folgt

$$\sum_{1,\,m}^{n} n N_{n-1}^{(m-1)} = \sum_{1,\,m}^{n} (-1)^{n-1} A_{m-n,\,n} = (-1)^{m-1}$$

nach F. (12′) und aus (17) und (18)

$$\sum_{0,\,m}^{n} \frac{1}{n+1} N_n^{(m)} = \sum_{1,\,m}^{n} \frac{1}{n+1} N_{n-1}^{(m-1)} \text{ **)}.$$

---

*) ebend.

**) a. a. O. Bd. 58 p. 295, 296. Die Formel VIII (p. 298) ist mit der obigen Formel (20) identisch.

6.

Vergleicht man die bekannte Formel

$$(23) \qquad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{1\,.\,2} x^2 \ldots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{1\,.\,.\,2m} x^{2m} \ldots .$$

wo B_m die $m$te Bernoulli'sche Zahl bedeutet, mit der Formel

$$(24) \qquad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{(e^x - 1)}{2} + \frac{(e^x - 1)^2}{3} \ldots + (-1)^n \frac{(e^x - 1)^n}{n+1} \ldots .$$

welche man erhält, indem man $e^x - 1 = z$ also $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{\log(1+z)}{z}$ setzt, und bemerkt zugleich, dass nach (23) in der Entwickelung von $\frac{x}{e^x - 1}$ keine ungerade Potenz von x, die erste ausgenommen, vorkommt, so erhält man, wenn man in (24) die einzelnen Glieder nach Formel (1) entwickelt und den Coefficienten von x^{2m+1} bestimmt

$$(25) \qquad \sum_{1,\ 2m+1}^{n} (-1)^n \frac{A_{2m+1-n,\,n}}{n+1} = 0$$

Bestimmt man dagegen den Coefficienten von x^{2m}, so giebt der Vergleich mit (23)

$$(26) \qquad (-1)^{m-1} B_m = \sum_{1,\ 2m}^{n} (-1)^n \frac{A_{2m-n,\,n}}{n+1}$$

Berücksichtigt man die Formel (2′), so sieht man, dass die Formeln (25) und (26) identisch sind mit denen, welche schon Staudt in der kleinen gehaltvollen, aber wie es scheint, wenig beachteten Gelegenheitsschrift »De numeris Bernoullianis, Erlangae 1845 in § 11 gefunden hat; aus der letzten hat er zugleich den nach ihm benannten Staudt'schen Satz in § 16 abgeleitet*).

---

*) Ohne Staudt's Abhandlung zu kennen, hat Herr Professor Sidler in der Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. in Zürich, Jahrg. 1, 1856 p. 188 diese zwei Formeln gefunden und später hat daraus Herr Professor Schlaefli den Staudt'schen Satz in ähnlicher Weise abgeleitet (Quarterly Journal of Mathem. Vol 6 p. 75) wie Staudt selbst. Nichts Anderes ist auch die Formel $\sum\limits_{1,\ m+1}^{n} \frac{n}{n+1} N_{n-1}^{(m)} = 0$ oder $= (-1)^{\frac{m+1}{2}} B_m$ bei Bauer (a. a. O. Bd. 57 p. 271) wie man sogleich sieht, wenn

Berücksichtigt man die Formeln (17) und (18), so findet man zugleich

$$(27) \qquad \sum_{0,\ 2m+1}^{n} (-1)^n \frac{A_{2m+1-n,\, n+1}}{(n+1)^2} = 0$$

$$(28) \qquad \sum_{0,\ 2m}^{n} (-1)^n \frac{A_{2m-n,\, n+1}}{(n+1)^2} = (-1)^{m-1} B_m$$

$$(29) \qquad \sum_{1,\ 2m+1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{A_{2m+1-n,\, n}}{n(n+1)} = 0$$

$$(30) \qquad \sum_{1,\ 2m}^{n} (-1)^{n-1} \frac{A_{2m-n,\, n}}{n(n+1)} = (-1)^{m-1} B_m$$

Nun ist $\sum\limits_{1,\ m+1}^{n} \frac{1}{n+1} N_{n-1}^{(m)} = \sum\limits_{1,\ m+1}^{n} (-1)^n \frac{A_{m+1-n,\, n}}{n \, . \, n+1}$ also $= 0$ oder $= (-1)^{m-1} B_m$ je nachdem m gerade oder ungerade, wie ebenfalls Herr Bauer gefunden hat**).

7.

Wenn man den oben gefundenen Ausdruck

$$\sum_{0,\ \infty}^{n} (-1)^n \frac{(e^x - 1)^n}{n+1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{1 \, . \, 2} x^2 \ldots + \frac{(-1)^{m-1} B_m}{1 \, . \, 2 \ldots 2m} x^{2m} \ldots$$

man die Formel (22) berücksichtigt und zugleich bemerkt, dass nach der hier gebrauchten Bezeichnung $(-1)^m B_{\frac{m+1}{2}}$ zu schreiben ist, wo dort $(-1)^{\frac{m+1}{2}} B_m$ steht. In ähnlicher Weise kann man auch die anderen dort vorkommenden Formeln mit Hülfe von (22) finden.

Ich benutze diese Gelegenheit zu einer Bemerkung, die ich Herrn Professor Sidler verdanke. Die erste der zwei Recursionsformeln, welche ich in meiner ersten Abhandlung als von Herrn Prof. Seidel gefunden bezeichnet habe, kommt schon in der Abhandlung von Raabe »die Jacob Bernoulli'sche Function, Zürich 1848 p. 35 und, wie dort bemerkt wird, schon früher in Ettingshausen's Vorlesungen über d. höh. Mathem. vor.

Ich füge noch hinzu, dass Herr Prof. Sidler in der erwähnten Abhandlung mit $A_{m,n}$ dasselbe bezeichnet, was hier mit $A_{m-n,n}$ bezeichnet wird; die Formel (21) ist demnach identisch mit der dortigen Formel (13).

**) a. a. O. Bd. 57, p. 271.

differenzirt, so findet man

$$(31)\qquad e^x \sum_{1,\,\infty}^{n} (-1)^n \frac{n}{n+1} (e^x-1)^{n-1} = -\frac{1}{2} + B_1 x \ldots + \frac{(-1)^{m-1} B_m}{1.2..2m-1} x^{2m-1} \ldots$$

Entwickelt man nun e^x und nach F. (1) die verschiedenen Potenzen von $e^x - 1$ in nach aufsteigenden Potenzen von x fortlaufende Reihen und bestimmt die Glieder, welche x^{2m+1} enthalten, so findet man

$$\frac{(-1)^m B_{m+1}}{1.2..2m+1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2..2m+1}$$
$$+\frac{2}{3}\left[\frac{A_{0,1}}{1..2m} + \frac{1}{1.2}\,\frac{A_{1,1}}{1.2..2m-1} \ldots + \frac{1}{1..2m+1} A_{2m,1}\right]$$
$$-\frac{3}{4}\left[\frac{1}{1.2}\,\frac{A_{0,2}}{1..2m-1} + \frac{1}{1.2.3}\,\frac{A_{1,2}}{1..2m-2} + \ldots + \frac{1}{1..2m+1} A_{2m-1,2}\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{2m+2}{2m+3}\,\frac{A_{0,2m+1}}{1..2m+1}$$

oder

$$(32)\qquad (-1)^m B_{m+1} = -\frac{1}{2}$$
$$+\frac{2}{3}[(2m+1,\ 1) A_{0,1} + (2m+1,\ 2) A_{1,1} + \ldots + (2m+1,\ 2m+1) A_{2m,1}]$$
$$-\frac{3}{4}[(2m+1,\ 2) A_{0,2} + (2m+1,\ 3) A_{1,2} \ldots + (2m+1,\ 2m+1) A_{2m-1,2}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{2m+2}{2m+3} A_{0,2m+1}$$

Dagegen muss die Summe der Glieder, welche x^{2m} enthalten, Null sein, mithin

$$(33)\qquad 0 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}[(2m,\ 1) A_{0,1} \ldots + (2m,\ 2m) A_{2m-1,1}]$$
$$-\frac{3}{4}[(2m,\ 2) A_{0,2} \ldots + (2m,\ 2m) A_{2m-2,2}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{2m+1}{2m+2} A_{0,2m}$$

Durch nochmalige Differentiation findet man

$$\text{(A)} \qquad e^{2x}\sum_{2,\infty}^{n}(-1)^n\frac{n\,.\,n-1}{n+1}(e^x-1)^{n-2}+e^x\sum_{1,\infty}^{n}(-1)^n\frac{n}{n+1}(e^x-1)^{n-1}=B_1\ldots$$
$$+\frac{(-1)^m B_{m+1}}{1\,.\,2\,.\,.\,2m}x^{2m}\ldots$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{2m} und bemerkt, dass nach dem vorhergehenden der von $e^x\sum\limits_{1,\infty}^{n}(-1)^n\frac{n}{n+1}(e^x-1)^{n-1}$ herrührende Theil $=0$ ist, so erhält man

$$\text{(34)} \qquad (-1)^m B_{m+1}=\frac{1\,.\,2}{3}2^{2m}$$
$$-\frac{2\,.\,3}{4}[(2m,\ 1)\,2^{2m-1}A_{0,1}+(2m,\ 2)\,2^{2m-2}A_{1,1}\ldots+(2m,\ 2m)\,A_{2m-1,1}]$$
$$+\frac{3\,.\,4}{5}[(2m,\ 2)\,2^{2m-2}A_{0,2}+(2m,\ 3)\,2^{2m-3}A_{1,2}\ldots+(2m,\ 2m)\,A_{2m-2,2}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{2m+1\,.\,2m+2}{2m+3}A_{0,2m}$$

zugleich muss der Coefficient von x^{2m+1} in der Entwickelung des obigen Ausdruckes Null werden. Bezeichnet man aber den in

$$e^x\sum_{1,\infty}^{n}(-1)^n\frac{n}{n+1}(e^x-1)^{n-1}$$

enthaltenen Theil dieses Coefficienten durch S, so ist $1\,.\,2\,.\,.\,(2m+1)\,S$ dem auf der rechten Seite in (32) stehenden Ausdrucke gleich und man hat daher

$$(-1)^m B_{m+1}=1\,.\,2\,.\,.\,(2m+1)\,S$$

Bezeichnet man ferner den in $e^{2x}\sum\limits_{2,\infty}^{n}(-1)^n\frac{n\,.\,n-1}{n+1}(e^x-1)^{n-2}$ enthaltenen Theil dieses Coefficienten durch S_1 so findet man

$$\text{(35)} \qquad 1\,.\,2\,.\,.\,(2m+1)\,S_1=\frac{2}{3}2^{2m+1}$$
$$-\frac{2\,.\,3}{4}[(2m+1,\ 1)\,2^{2m}A_{0,1}+(2m+1,\ 2)\,2^{2m-1}A_{1,1}\ldots+(2m+1,\ 2m+1)\,A_{2m,1}]$$
$$+\frac{3\,.\,4}{5}[(2m+1,2)\,2^{2m-1}A_{0,2}+(2m+1,3)\,2^{2m-2}A_{1,2}\ldots+(2m+1,2m+1)\,A_{2m-1,2}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{2m+2\,.\,2m+3}{2m+4}A_{0,2m+1}$$

Demnach, da $S+S_1=0$

$$(-1)^{m+1}B_{m+1}=1.2..(2m+1)S_1$$

Der Vergleich von (34) mit (35) zeigt also eine merkwürdige Uebereinstimmung zweier Ausdrücke, von welchen der erste in den zweiten übergeht, wenn man $m+\frac{1}{2}$ statt m setzt. Durch fortgesetztes Differenziren lässt sich in ähnlicher Weise eine grosse Zahl neuer Beziehungen entwickeln.

Schreibt man (31) in der Form

$$\sum(-1)^n\frac{n}{n+1}(e^x-1)^{n-1}=(1-x+\frac{x^2}{1.2}\ldots).(-\tfrac{1}{2}+B_1x\ldots)$$

und entwickelt auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{2m+1}, so findet man die Beziehung

$$\frac{2}{3}A_{2m,1}-\frac{3}{4}A_{2m-1,2}\ldots+\frac{2m+2}{2m+3}A_{0,2m+1}=$$
$$(-1)^mB_{m+1}+(-1)^{m-1}(2m+1,\ 2)B_m+(-1)^{m-2}(2m+1,\ 4)B_{m-1}\ldots$$
$$+(2m+1,\ 2m)B_1+\frac{1}{2}$$

Nun ist (nach § 2 F. 9* der ersten Abhandlung)

$$2m+1,\ 2)B_m-(2m+1,4)B_{m-1}\ldots+(-1)^{m-1}(2m+1,2m)B_1+(-1)^m\frac{1}{2}=0$$

Demnach verwandelt sich die obige Gleichung in

$$(36)\qquad (-1)^mB_{m+1}=-1+\frac{2}{3}A_{2m,1}-\frac{3}{4}A_{2m-1,2}\ldots+\frac{2m+2}{2m+3}A_{0,2m+1}$$

Vergleicht man dies mit (32), so ergiebt sich

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}[(2m+1,\ 1)A_{0,1}\ldots+(2m+1,\ 2m)A_{2m-1,1}]$$
$$-\frac{3}{4}[(2m+1,\ 2)A_{0,2}\ldots+(2m+1,\ 2m)A_{2m-2,2}]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{2m+1}{2m+2}A_{0,2m}=0$$

Entwickelt man dagegen auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{2m} so findet man

$$\frac{2}{3}A_{2m-1,1}-\frac{3}{4}A_{2m-2,2}\ldots-\frac{2m+1}{2m+2}A_{0,2m}=$$
$$(-1)^m(2m,1)B_m+(-1)^{m-1}(2m,3)B_{m-1}\ldots-(2m,2m-1)B_1-\frac{1}{2}$$

Nun ist (nach § 2 F. 11* der ersten Abhandlung)

$$[(2m,1)+1]B_m-(2m,3)B_{m-1}\ldots+(-1)^{m-1}(2m,2m-1)B_1+(-1)^m\frac{1}{2}=0$$

d. h.

$$(-1)^{m-1}B_m-1=(-1)^m(2m,1)B_m+(-1)^{m-1}(2m,3)B_{m-1}\ldots$$
$$-(2m,2m-1)B_1-\frac{1}{2}$$

also

(37) $$(-1)^{m-1}B_m=1+\frac{2}{3}A_{2m-1,1}-\frac{3}{4}A_{2m-2,2}\ldots-\frac{2m+1}{2m+2}A_{0,2m}$$

oder

$$(-1)^m B_{m+1}=1+\frac{2}{3}A_{2m+1,1}\ldots-\frac{2m+3}{2m+4}A_{0,2m+2}$$

Auch giebt der Vergleich mit (33)

(37′) $$(-1)^m B_m=-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}[(2m,1)A_{0,1}+\ldots+(2m,2m-1)A_{2m-2,1}]$$
$$-\frac{3}{4}[(2m,2)A_{0,2}+\ldots+(2m,2m-1)A_{2m-3,2}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{2m}{2m+1}A_{0,2m-1}$$

Verbindet man (37) mit (12′) indem man in letzterem Ausdrucke $2m$ statt m setzt, wodurch er in

(38) $$A_{2m-1,1}-A_{2m-2,2}+A_{2m-3,3}\ldots-A_{0,2m}=-1$$

übergeht, so findet man

(39) $$(-1)^m B_m=\frac{1}{3}A_{2m-1,1}-\frac{1}{4}A_{2m-2,2}\ldots-\frac{1}{2m+2}A_{0,2m}$$

Verbindet man (36) mit (12′) indem man in letzterem $2m+1$ statt m setzt, wodurch dieser Ausdruck in

(38′) $$A_{2m,1}-A_{2m-1,2}+A_{2m-2,3}\ldots+A_{0,2m+1}=1$$

übergeht, so findet man

$$(40) \qquad (-1)^m B_{m+1} = -\tfrac{1}{3} A_{2m,1} + \tfrac{1}{4} A_{2m-1,2} \ldots - \frac{1}{2m+3} A_{0,2m+1} \text{*)}$$

8.

Schreibt man die oben (§ 3) benutzte Gleichung

$$e^{-x} = 1 - (e^x - 1) + (e^x - 1)^2 \ldots$$

in der Form

$$1 = e^x [1 - (e^x - 1) + (e^x - 1)^2 \ldots]$$

so erhält man, je nachdem man in dem nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelten Ausdrucke den Coefficienten von x^{2m} oder x^{2m+1} bestimmt,

$$(41) \qquad \begin{aligned} 1 = {} & (2m, 1) A_{0,1} + (2m, 2) A_{1,1} \ldots + A_{2m-1,1} \\ & - [(2m, 2) A_{0,2} + (2m, 3) A_{1,2} \ldots + A_{2m-2,2}] \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ & - A_{0,2m} \end{aligned}$$

oder

$$(42) \qquad \begin{aligned} 1 = {} & (2m+1, 1) A_{0,1} + (2m+1, 2) A_{1,1} \ldots + A_{2m,1} \\ & - [(2m+1, 2) A_{0,2} + (2m+1, 3) A_{1,2} \ldots + A_{2m-1,2}] \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ & + A_{0,2m+1} \end{aligned}$$

Aus der Verbindung von (41) mit (38) folgt

$$(43) \qquad \begin{aligned} 2 = {} & (2m, 1) A_{0,1} + \ldots + (2m, 2m-1) A_{2m-2,1} \\ & - [(2m, 2) A_{0,2} + \ldots + (2m, 2m-1) A_{2m-3,2}] \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ & + (2m, 2m-1) A_{0,2m-1}] \end{aligned}$$

und aus der Verbindung von (42) mit (38')

---

*) Die zwei Formeln (39) und (40) finden sich bei Staudt a. a. O. p. 15 ohne Beweis.

(44)
$$\begin{aligned} 0 = {} & (2m+1,\ 1)A_{0,1}\ldots+(2m+1,\ 2m)A_{2m-1,1} \\ & -[(2m+1,\ 2)A_{0,2}\ldots+(2m+1,\ 2m)A_{2m-2,2}] \\ & \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & -(2m+1,\ 2m)A_{0,2m} \end{aligned}$$

Schreibt man die in § 7 gefundene Gleichung (A) in der Form

$$e^x\sum_{1,\infty}^{n}(-1)^n\frac{n.n-1}{n+1}(e^x-1)^{n-2}+\sum_{1,\infty}^{n}(-1)^n\frac{n}{n+1}(e^x-1)^{n-1}=$$
$$\left(1-x+\frac{x^2}{1.2}\ldots+\frac{x^{2m}}{1..2m}\ldots\right)\left(B_1-\frac{B_2x^2}{1.2}\ldots+(-1)^m\frac{B_{m+1}x^{2m}}{1\ldots 2m}\ldots\right)$$

und entwickelt auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{2m}, indem man zugleich mit $1.2..2m$ multiplicirt, so liefert $\sum\limits_{1,\infty}^{n}(-1)^n\frac{n}{n+1}(e^x-1)^{n-1}$ den Ausdruck

$$\frac{2}{3}A_{2m-1,1}-\frac{3}{4}A_{2m-2,2}\ldots-\frac{2m+1}{2m+2}A_{0,2m}$$

an dessen Stelle man nach (37) einfacher $(-1)^{m-1}B_m-1$ schreiben kann. Aus $e^x\sum\limits_{1,\infty}^{n}(-1)^n\frac{n.n-1}{n+1}(e^x-1)^{n-2}$ erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}-\frac{2.3}{4}[(2m,\ 1)A_{0,1}+(2m,\ 2)A_{1,1}\ldots+A_{2m-1,1}] \\ & \quad+\frac{3.4}{5}[(2m,\ 2)A_{0,2}+(2m,\ 3)A_{1,2}\ldots+A_{2m-2,2}] \\ & \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \quad+\frac{2m+1.2m+2}{2m+3}A_{0,2m} \end{aligned}$$

die andere Seite der Gleichung giebt aber als Coefficienten von x^{2m} mit $1.2..2m$ multiplicirt den Ausdruck

$$(-1)^mB_{m+1}+(-1)^{m-1}(2m,\ 2)B_m\ldots-(2m,\ 2m-2)B_2+B_1$$

Nun ist (nach § 2 F. 8* der ersten Abhandlung)

$$(2m,\ 2-1)B_m-(2m,\ 4)B_{m-1}\ldots+(-1)^{m-1}B_1=0$$

Man hat also

$$(-1)^m B_{m+1} = -\tfrac{1}{3} - \tfrac{2.3}{4}[(2m,\ 1)A_{0,1}\ldots + A_{2m-1,1}$$
$$+\tfrac{3.4}{5}[(2m,\ 2)A_{0,2}\ldots + A_{2m-2,2}]$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\frac{2m+1.2m+2}{2m+3}A_{0,2m}$$

Entwickelt man dagegen den Coefficienten von x^{2m+1} und multiplicirt mit $1.2\ldots 2m+1$ so liefert $\sum\limits_{1,\infty}^{n}(-1)^n\frac{n}{n+1}(e^x-1)^{n-1}$ den Ausdruck

$$\tfrac{2}{3}A_{2m,1} - \tfrac{3}{4}A_{2m,2}\ldots + \frac{2m+2}{2m+3}A_{0,2m+1}$$

was, nach (36), $=(-1)^m B_{m+1}+1$ ist. Ferner liefert

$$e^x\sum_{1,\infty}^{n}(-1)^n.\frac{n.n-1}{n+1}(e^x-1)^{n-2}$$

den Ausdruck

$$\tfrac{2}{3} - \tfrac{2.3}{4}[(2m+1,\ 1)A_{0,1} + (2m+1,\ 2)A_{1,1}\ldots + A_{2m,1}]$$
$$+\tfrac{3.4}{5}[(2m+1,\ 2)A_{0,2} + \ldots \qquad + A_{2m-1,2}]$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$-\frac{2m+2.2m+3}{2m+4}A_{0,2m+1}$$

Die andere Seite der Gleichung giebt

$$(-1)^{m+1}(2m+1,\ 1)B_{m+1} + (-1)^m(2m+1,\ 3)B_m\ldots - B_1$$

Nun ist (nach § 2 F. 10* der ersten Abhandlung)

$$((2m+1,\ 1)+2)B_{m+1} - (2m+1,\ 3)B_m\ldots + (-1)^m B_1 = 0$$

d. h.

$$(-1)^m B_{m+1} = (-1)^{m+1}[((2m+1,\ 1)+1)B_{m+1} + (-1)^m(2m+1,\ 3)B_m\ldots - B_1]$$

Demnach

$$(-1)^m B_{m+1} = \tfrac{5}{3} - \tfrac{2.3}{4}[(2m+1,\ 1)A_{0,1} + (2m+1,\ 2)A_{1,1}\ldots + A_{2m,1}]$$
$$+\tfrac{3.4}{5}[(2m+1,\ 2)A_{0,2}\ldots \qquad + A_{2m-1,2}]$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$-\frac{2m+2.2m+3}{2m+4}A_{0,2m+1}$$

Aus dem Vergleich dieses Werthes von $(-1)^m B_{m+1}$ mit dem unmittelbar vorher gefundenen ergiebt sich

$$\begin{aligned} 2 = & \frac{2 \cdot 3}{4}\left[(2m,\ 0) A_{0,1} \ldots + A_{2m,1}\right] \\ & - \frac{3 \cdot 4}{5}\left[(2m,\ 1) A_{0,2} \ldots + A_{2m-1,2}\right] \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + \frac{2m+2 \cdot 2m+3}{2m+4} A_{0,2m+1} \end{aligned}$$

Schreibt man die Gleichung (A) in der Form

$$\sum (-1)^n \frac{n \cdot n-1}{n+1}(e^x-1)^{n-2} + e^{-x} \sum (-1)^n \frac{n}{n+1}(e^x-1)^{n-1} =$$
$$e^{-2x}\left(B_1 \ldots + (-1)^m \frac{B_{m+1}}{1 \ldots 2m} x^{2m} \ldots\right)$$

so kann man hieraus in ähnlicher Weise andere Formeln ableiten.

9.

Schreibt man die Gleichung (24) in der Form

$$\frac{x}{e^x-1} - 1 = -\frac{e^x-1}{2} + \frac{(e^x-1)^2}{3} \ldots$$

multiplicirt dann auf der rechten Seite mit $\frac{x}{e^x-1}$ und auf der linken mit dem gleichwerthigen Ausdrucke $1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{1 \cdot 2} \ldots$ so hat man

$$\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{1 \cdot 2} \ldots + \frac{(-1)^{m-1} B_m x^{2m}}{1 \cdot 2 \ldots 2m} \ldots\right)^2 - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{1 \cdot 2} \ldots + \frac{(-1)^{m-1} B_m x^{2m}}{1 \cdot 2 \ldots 2m} \ldots\right)$$
$$= x \sum_{1,\infty}^{n} \frac{(-1)^n}{n+1}(e^x-1)^{n-1}$$

Entwickelt man auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{4m}, so findet man

$$\frac{B^2_m}{(1 \cdot 2 \ldots 2m)^2} + \frac{2B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{B_{2m-1}}{1 \ldots 4m-2} + \frac{2B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{B_{2m-2}}{1 \ldots 4m-4} \ldots + \frac{2B_{m+1}}{1 \ldots 2m-2} \cdot \frac{B_{m+1}}{1 \ldots 2m+2}$$
$$- \frac{B_{2m}}{1 \ldots 4m} = \frac{1}{3} \frac{A_{4m-2,1}}{1 \cdot 2 \ldots 4m-1} - \frac{1}{4} \frac{A_{4m-3,2}}{1 \cdot 2 \ldots 4m-1} \ldots + \frac{1}{4m+1} \frac{A_{0,4m-1}}{1 \ldots 4m-1}$$

also, wenn man auf beiden Seiten mit $1 \cdot 2 \ldots 4m$ multiplicirt (und $m > 1$)

$$(45)\quad (4m,2m)(B_m)^2+2(4m,2)B_1B_{2m-1}+\ldots+2(4m,2m-2)B_{m-1}B_{m+1}-B_{2m}$$
$$=4m\left[\tfrac{1}{3}A_{4m-2,1}-\tfrac{1}{4}A_{4m-3,2}\ldots+\tfrac{1}{4m+1}A_{0,4m-1}\right]$$

Bestimmt man dagegen den Coefficienten von x^{4m+2} so ergiebt sich

$$(46)\quad B_{2m+1}-2(4m+2,2)B_1B_{2m}-2(4m+2,4)B_2B_{2m-1}\ldots-2(4m+2,2m)B_mB_{m+1}$$
$$=(4m+2)\left[\tfrac{1}{3}A_{4m,1}-\tfrac{1}{4}A_{4m-1,2}\ldots+\tfrac{1}{4m+3}A_{0,4m+1}\right]$$

Setzt man in (40) $2m-1$ statt m so ist

$$B_{2m}=\tfrac{1}{3}A_{4m-2,1}-\tfrac{1}{4}A_{4m-3,2}\ldots+\tfrac{1}{4m+1}A_{0,4m-1}$$

und es folgt daher aus (45)

$$(47)\quad (4m+1)B_{2m}=(4m,2m)(B_m)^2+2(4m,2)B_1B_{2m-1}\ldots$$
$$+2(4m,2m-2)B_{m-1}B_{m+1}$$

Ferner folgt aus (40) indem man $2m$ statt m setzt,

$$B_{2m+1}=-\tfrac{1}{3}A_{4m,1}+\tfrac{1}{4}A_{4m-1,2}\ldots-\tfrac{1}{4m+3}A_{0,4m+1}$$

und mithin aus (46)

$$(48)\quad (4m+3)B_{2m+1}=2(4m+2,2)B_1B_{2m}\ldots+2(4m+2,2m)B_mB_{m+1}\,{}^{*)}.$$

10.

Wenn man auf beiden Seiten der Gleichung (31) mit $\frac{x}{e^x-1}$ multiplicirt und das Resultat in folgender Gestalt schreibt

$$e^x\left(\tfrac{2}{3}x-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{x}{e^x-1}\right)+xe^x\left[-\tfrac{3}{4}(e^x-1)+\tfrac{4}{5}(e^x-1)^2\ldots\right]$$
$$=\tfrac{x}{e^x-1}\left(-\tfrac{1}{2}+B_1x\ldots+(-1)^{m-1}\tfrac{B_m}{1.2..2m-1}x^{2m-1}\ldots\right)$$

so erhält man

---

*) Die Formeln (47) und (48) stimmen mit denen überein, welche Euler instit. calc. diff. P. 2 § 123 gefunden hat.

$$\left(x+x^2+\frac{x^3}{1.2}\cdots+\frac{x^{2m}}{1..2m-1}\cdots\right)\left(-\frac{3}{4}(e^x-1)+\frac{4}{5}(e^x-1)^2\cdots-\frac{2m+1}{2m+2}(e^x-1)^{2m-1}\cdots\right)$$
$$+\frac{2}{3}\left(x+x^2+\cdots+\frac{x^{2m}}{1..2m-1}\cdots\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(1+x+\frac{x^2}{1.2}\cdots+\frac{x^{2m}}{1..2m}\cdots\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{B_1x^2}{1.2}\cdots+\frac{(-1)^{m-1}B_mx^{2m}}{1..2m}\cdots\right)$$
$$=\left(1-\frac{x}{2}\cdots+\frac{(-1)^{m-1}B_mx^{2m}}{1..2m}\cdots\right)\left(-\frac{1}{2}+B_1x\cdots+\frac{(-1)^{m-1}B_mx^{2m-1}}{1..2m-1}\cdots\right)$$

Bestimmt man also auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{2m}, so findet man

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1.2..2m-1}-\frac{3}{4}\left[A_{0,1}\frac{1}{1..2m-2}+\frac{A_{1,1}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..2m-3}\cdots+\frac{A_{2m-2,1}}{1..2m-1}\right]$$
$$+\frac{4}{5}\left[\frac{A_{0,2}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..2m-3}\cdots\qquad+\frac{A_{2m-3,2}}{1..2m-2}\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{2m+1}{2m+2}\,\frac{A_{0,2m-1}}{1..2m-1}$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^{m-1}B_m}{1.2..2m}+\frac{(-1)^{m-2}B_{m-1}}{1.2..2m-2}\cdot\frac{1}{1.2}\cdots+\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{1..2m-2}-\frac{m-1}{1.2..2m}\right]$$
$$=(-1)^m\frac{1}{2}\cdot\frac{2m+1}{1.2..2m}B_m$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit $1.2..2m-1$ und berücksichtigt die bekannte Formel

$$(2m,2)B_{m-1}-(2m,4)B_{m-2}\cdots+(-1)^{m-1}(m-1)=0\,^{*)}$$

so ergiebt sich die neue Formel

$$(49)\qquad (-1)^m\cdot\frac{1}{2}B_m=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\left[(2m-1,\,1)A_{0,1}\cdots+A_{2m-2,1}\right]$$
$$+\frac{4}{5}\left[(2m-1,\,2)A_{0,2}\cdots+A_{2m-3,2}\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{2m+1}{2m+2}A_{0,2m-1}$$

Bestimmt man aber den Coefficienten von x^{2m+1} und multiplicirt zugleich auf beiden Seiten mit $1.2..2m$, so liefert das Produkt

*) Vgl. erste Abhandlung § 1 F. II.

$$\left(1-\frac{x}{2}\ldots+\frac{(-1)^{m-1}B_m x^{2m}}{1.2\ldots 2m}\ldots\right)\left(-\frac{1}{2}+B_1 x\ldots+\frac{(-1)^m B_{m+1}}{1.2\ldots 2m+1}x^{2m+1}\ldots\right)$$

den Ausdruck

$$(-1)^{m-1}\frac{1}{2m+1}[-B_{m+1}+(2m+1,\,2)B_1 B_m+(2m+1,\,4)B_2 B_{m-1}\ldots$$
$$+(2m+1,\,2m)B_m B_1]$$

oder da $(2m+1,\,2)+(2m+1,\,2m)=(2m+2,\,2)$ u. s. w., so kann man statt dieses Ausdruckes, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist, auch schreiben

$$(-1)^{m-1}\frac{1}{2m+1}[-B_{m+1}+(2m+2,\,2)B_1 B_m+(2m+2,\,4)B_2 B_{m-1}\ldots$$
$$+(2m+2,\,m)\frac{B_m}{2}\frac{B_{m+1}}{2}$$

oder

$$(-1)^{m-1}\frac{1}{2m+1}[-B_{m+1}+(2m+2,\,2)B_1 B_m\ldots+(2m+2,\,m-1)\frac{B_{m-1}}{2}\frac{B_{m+3}}{2}$$
$$+\frac{1}{2}(2m+2,\,m+1)\left(\frac{B_{m+1}}{2}\right)^2\Bigg]$$

Berücksichtigt man aber die Formeln (47) und (48) so sieht man, dass in beiden Fällen der Werth in $(-1)^{m-1}\frac{1}{2}B_{m+1}$ übergeht. Bestimmt man auf der anderen Seite der Gleichung ebenfalls den mit $1.2\ldots 2m$ multiplicirten Werth des Coefficienten von x^{2m+1}, so findet man

$$\frac{2}{3}-\frac{3}{4}[(2m,\,1)A_{0,1}+(2m,\,2)A_{1,1}\ldots+A_{2m-1,1}]$$
$$+\frac{4}{5}[(2m,\,2)A_{0,2}+(2m,\,3)A_{1,2}\ldots+A_{2m-2,2}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{2m+2}{2m+3}A_{0,2m}$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m+1}(-1)^{m-1}[(2m+1,\,1)B_m-(2m+1,\,3)B_{m-1}\ldots+(-1)^m\frac{2m-1}{2}]$$

Nun ist der letzte in Klammern stehende Ausdruck $=0$*), man hat also schliesslich

---

*) Vgl. erste Abhandlung § 1 F. I.

$$(50)\qquad (-1)^{m+1}\frac{1}{2}B_{m+1} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}[(2m,\ 1)A_{0,1} + \ldots + A_{2m-1,1}]$$
$$+ \frac{4}{5}[(2m,\ 2)A_{0,2} + \ldots + A_{2m-2,2}]$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ \frac{2m+2}{2m+3}A_{0,2m}$$

Verbindet man diese Formel mit (33) durch Addition, so erhält man

$$(51)\qquad (-1)^{m+1}\frac{1}{2}B_{m+1} = \frac{1}{2\,.\,3} - \frac{1}{3\,.\,4}[(2m,\ 1)A_{0,1}\ldots + A_{2m-1,1}]$$
$$+ \frac{1}{4\,.\,5}[(2m,\ 2)A_{0,2}\ldots + A_{2m-2,2}]$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ \frac{1}{2m+2\,.\,2m+3}A_{0,2m}$$

Addirt man zu (50) auf der rechten Seite den Ausdruck

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}[(2m,\ 1)A_{0,1}\ldots + A_{2m-1,1}]$$
$$+ \frac{1}{5}[(2m,\ 2)A_{0,2}\ldots + A_{2m-2,2}]$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ \frac{1}{2m+3}A_{0,2m}$$

so erhält man

$$1 - [(2m,\ 1)A_{0,1}\ldots + A_{2m-1,1}]$$
$$+ [(2m,\ 2)A_{0,2}\ldots + A_{2m-2,2}]$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ A_{0,2m}$$

Dies ist aber Null nach (41). Mithin

$$(52)\qquad (-1)^{m}\frac{1}{2}B_{m+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}[(2m,\ 1)A_{0,1} + (2m,\ 2)A_{1,1} + \ldots + A_{2m-1,1}]$$
$$+ \frac{1}{5}[(2m,\ 2)A_{0,2}\ldots \qquad + A_{2m-2,2}]$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ \frac{1}{2m+3}A_{0,2m}$$

Ebenso ergiebt sich aus (49), wenn man $m+1$ statt m setzt, und die Formel (42) berücksichtigt,

$$(53)\qquad (-1)^m \tfrac{1}{2} B_{m+1} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}[(2m+1,\ 1) A_{0,1} + \ldots + A_{2m,1}]$$
$$+ \tfrac{1}{5}[(2m+1,\ 2) A_{0,2} \ldots \quad + A_{2m-1,2}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \frac{1}{2m+4} A_{0,2m+1}$$

Der Vergleich dieser zwei zuletzt gefundenen Werthe von $(-1)^m \frac{1}{2} B_{m+1}$ führt zu

$$0 = \tfrac{1}{4}[(2m,\ 0) A_{0,1} + (2m,\ 1) A_{1,1} \ldots + A_{2m,1}]$$
$$- \tfrac{1}{5}[(2m,\ 1) A_{0,2} + (2m,\ 2) A_{1,2} \ldots + A_{2m-1,2}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{2m+4} A_{0,2m+1}$$

Verbindet man (41) mit (32), so führt dies zu

$$(54)\qquad (-1)^m B_{m+1} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}[(2m+1,\ 1) A_{0,1} \ldots + A_{2m,1}]$$
$$+ \tfrac{1}{4}[(2m+1,\ 2) A_{0,2} \ldots + A_{2m-1,2}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \frac{1}{2m+3} A_{0,2m+1}$$

Wenn man in (37′) auf beiden Seiten der Gleichung

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}[(2m,\ 1) A_{0,1} \ldots + (2m,\ 2m-1) A_{2m-2,1}]$$
$$- \tfrac{1}{4}[(2m,\ 2) A_{0,2} \ldots + (2m,\ 2m-1) A_{2m-3,2}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{2m+1} A_{0,2m-1}$$

addirt und (43) berücksichtigt, so findet man

$$(-1)^m B_m = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}[(2m,\ 1) A_{0,1} \ldots + (2m,\ 2m-1) A_{2m-2,1}]$$
$$+ \tfrac{1}{4}[(2m,\ 2) A_{0,2} \ldots + (2m,\ 2m-1) A_{2m-3,2}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \frac{1}{2m+1}(2m,\ 2m-1) A_{0,2m-1}$$

oder

$$(55)\quad (-1)^m B_{m+1} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\left[(2m+2,\,1)A_{0,1}\ldots + (2m+2,\,2m+1)A_{2m,1}\right]$$
$$-\tfrac{1}{4}\left[(2m+2,\,2)A_{0,2}\ldots + (2m+2,\,2m+1)A_{2m-1,2}\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{2m+3}(2m+2,\,2m+1)A_{0,2m+1}$$

Verbindet man diesen Werth mit dem unmittelbar vorher gefundenen Werthe von $(-1)^m B_{m+1}$ durch Addition, so ergiebt sich

$$(-1)^m 2B_{m+1} = \tfrac{1}{3}\left[(2m+1,\,0)A_{0,1}\ldots + (2m+1,\,2m)A_{2m,1}\right]$$
$$-\tfrac{1}{4}\left[(2m+1,\,1)A_{0,2}\ldots + (2m+1,\,2m)A_{2m,1}\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{2m+3}(2m+1,\,2m)A_{0,2m+1}$$

11.

Aus der Gleichung (8) folgt, wenn man $2m-1$ statt m und $n=2$ setzt

$$A_{2m-1,2} = (2m+1,\,1)A_{0,1} + (2m+1,\,2)A_{1,1} + \ldots + (2m+1,\,2m)A_{2m-1,1}$$

ebenso, wenn man $2m-2$ statt m und $n=3$ setzt,

$$A_{2m-2,3} = (2m+1,\,2)A_{0,2} + (2m+1,\,3)A_{1,2}\ldots + (2m+1,\,2m)A_{2m-2,2}$$

u. s. w. Mit Hülfe dieser Formeln und indem man zugleich berücksichtigt, dass $A_{2m,1}=1$ ist, kann man die Formel (40) in

$$(-1)^m B_{m+1} =$$
$$-\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\left[(2m+1,\,1)A_{0,1} + (2m+1,\,2)A_{1,1}\ldots + (2m+1,\,2m)A_{2m-1,1}\right]$$
$$-\tfrac{1}{5}\left[(2m+1,\,2)A_{0,2} + (2m+1,\,3)A_{1,2}\ldots + (2m+1,\,2m)A_{2m-2,2}\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{1}{2m+3}(2m+1,\,2m)A_{0,2m}$$

verwandeln, da man statt $A_{0,2m+1}$ auch $(2m+1)A_{0,2m}$ schreiben kann.

Verbindet man diese Formel mit der Formel (53) durch Addition, so ergiebt sich

$$\tfrac{3}{2}(-1)^m B_{m+1} = -\tfrac{1}{4} A_{2m,1} + \tfrac{1}{5} A_{2m-1,2} \ldots - \frac{1}{2m+4} A_{0,2m+1}$$

welche Formel ebenfalls Staudt a. a. O. ohne Beweis gegeben hat.

Hieraus erhält man ferner durch Verbindung mit (38′)

$$\tfrac{3}{2}(-1)^m B_{m+1} = -1 + \tfrac{3}{4} A_{2m,1} \ldots + \frac{2m+3}{2m+4} A_{0,2m+1}$$

und hieraus durch Verbindung mit (36)

$$\tfrac{1}{2}(-1)^m B_{m+1} = \frac{1}{3.4} A_{2m,1} - \frac{1}{4.5} A_{2m-1,2} \ldots + \frac{1}{2m+3.2m+4} A_{0,2m+1}$$

Mit Hülfe der Gleichung (8) lässt sich noch eine grosse Anzahl neuer Formeln aus den im Vorhergehenden gefundenen ableiten. Auf diese Weise hätte man z B. aus

$$(-1)^m B_{m+1} = -\tfrac{1}{2} + \frac{A_{2m,2}}{3} \ldots + \frac{A_{0,2m+2}}{2m+3}$$

was unmittelbar aus (26) folgt, sofort (55) finden können.

12.

Aus der bekannten Formel

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = T_1 x - \frac{T_3 x^3}{1.2.3} \ldots$$

wo T_{2r-1} d. h. der $r$te Tangentencoefficient $= 2^{2r-1}(2^{2r}-1)\frac{B_r}{r}$, folgt

$$1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{e^{2x}+1} = 1 - T_1 x + \frac{T_3}{1.2.3} x^3 \ldots + \frac{(-1)^r T_{2r-1}}{1.2..2r-1} x^{2r-1} \ldots$$

also, wenn man $\frac{x}{2}$ statt x setzt,

$$\frac{2}{e^x+1} = \frac{1}{1 + \frac{e^x - 1}{2}} = 1 - T_1 \frac{x}{2} + \frac{T_3}{1.2.3} \frac{x^3}{2^3} \ldots + (-1)^r \frac{T_{2r-1}}{1.2..2r-1} \frac{x^{2r-1}}{2^{2x-1}} \ldots$$

Nun ist

$$\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right)^{-1} = 1-\frac{e^x-1}{2}+\frac{(e^x-1)^2}{2^2}\cdots$$

setzt man in dieser Gleichung auf der rechten Seite allgemein statt $(e^x-1)^n$ seinen Werth nach Formel (1) so folgt

$$T_{2r-1} = (-1)^{r-1}[A_{0,2r-1}-2A_{1,2r-2}+2^2A_{2,2r-3}\cdots+2^{2r-2}A_{2r-2,1}]$$

mithin

$$(56)\qquad B_r = (-1)^{r-1}\frac{r}{2^{2r}-1}\left(\frac{A_{0,2r-1}}{2^{2r-1}}-\frac{A_{1,2r-2}}{2^{2r-2}}\cdots+\frac{A_{2r-2,1}}{2}\right)\text{*)}$$

und da in der Entwickelung von $\frac{2}{e^x+1}$ keine geraden Potenzen von x vorkommen, so hat man zugleich, wenn man den Coefficienten der Potenz x^{2r} in der Entwickelung von $1-\frac{e^x-1}{2}\cdots$ nimmt,

$$(57)\qquad \frac{A_{0,2r}}{2^{2r-1}}-\frac{A_{1,2r-1}}{2^{2r-2}}\cdots-A_{2r-1,1}=0$$

Eine ähnliche Betrachtung führt auch zu einer Darstellung der Euler'schen Zahlen durch die Zahlen A. Denn da, wenn E_r die $r$te Euler'sche Zahl bedeutet,

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}} = e^x\cdot\frac{2}{1+e^{2x}} = 1-\frac{E_1x^2}{1.2}\cdots+(-1)^r\frac{E_rx^{2r}}{1.2..2r}\cdots$$

also $$e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right)^{-1} = 1-E_1\frac{x^2}{2^2}\cdot\frac{1}{1.2}\cdots+(-1)^rE_r\frac{x^{2r}}{2^{2r}}\cdot\frac{1}{1.2..2r}\cdots$$

so folgt hieraus, wenn man wieder $\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right)^{-1}$ wie vorher behandelt und zugleich für $e^{\frac{x}{2}}$ seinen Werth $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}\cdot\frac{1}{1.2}\cdots$ setzt,

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^rE_r}{2^{2r}}\cdot\frac{1}{1.2..2r} &= \frac{1}{2^{2r}}\cdot\frac{1}{1.2..2r}\\ &-\frac{1}{2}\left[A_{0,1}\frac{1}{2^{2r-1}}\cdot\frac{1}{1.2..(2r-1)}+\frac{A_{1,1}}{1.2}\cdot\frac{1}{2^{2r-2}}\cdot\frac{1}{1.2..(2r-2)}\cdots+\frac{A_{2r-1,1}}{1.2..2r}\right]\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\\ &+\frac{(-1)^k}{2^k}\left[\frac{A_{0,k}}{1...k}\cdot\frac{1}{2^{2r-k}}\cdot\frac{1}{1.2..(2r-k)}\cdots+\frac{A_{2r-k,k}}{1.2..2r}\right]\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\\ &+\frac{1}{2^{2r}}\frac{A_{0,2r}}{1.2..2r}\end{aligned}$$

*) Vgl. Eytelwein über die Vergleichung der Differenzencoefficienten mit den Bernoulli'schen Zahlen. Abh. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1816—17, p. 41.

und zugleich folgt, da die Entwickelung von $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$ keine ungeraden Potenzen von x enthält

$$0 = \frac{1}{2^{2r+1}} \cdot \frac{1}{1.2..2r+1} - \frac{1}{2}\left[A_{0,1} \cdot \frac{1}{2^{2r}} \cdot \frac{1}{1..2r} \ldots + \frac{A_{2r,1}}{1..(2r+1)}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(-1)^k}{2^k}\left[\frac{A_{0,k}}{1.2..k} \cdot \frac{1}{2^{2r+1-k}} \cdot \frac{1}{1...(2r+1-k)} \ldots + \frac{A_{2r+1-k,k}}{1.2..2r+1}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{1}{2^{2r+1}} \frac{A_{0,2r+1}}{1.2..2r+1}$$

Berücksichtigt man, dass $A_{0,0} = 1$, sonst aber $A_{k,0} = 0$ (§ 1), so sieht man, dass man die zwei letzten Formeln auch in folgender Gestalt schreiben kann

$$(-1)^r E_r = \sum_{0,\ 2r}^{k} (-1)^k [(2r,\ k) A_{0,k} + 2\,(2r,\ k+1)\, A_{1,k} \ldots + 2^{2r-k}(2r,\ 2r)\, A_{2r-k,k}]$$

$$0 = \sum_{0,\ 2r+1}^{k} (-1)^k [(2r+1,\ k) A_{0,k} + 2\,(2r+1,\ k+1)\, A_{1,k} \ldots$$
$$+ 2^{2r+1-k}(2r+1,\ 2r+1)\, A_{2r+1-k,k}]$$

13.

Zu anderen Ausdrücken für die Bernoulli'schen Zahlen führt folgende Betrachtung. Wenn man, von der Formel (19) ausgehend, den Werth des Ausdrucks

$$1^r - 2^r + 3^r - 4^r \ldots + (m-1)^r - m^r$$

berechnet, wo also m gerade ist, so findet man

$$\begin{aligned}
&(1,\ 1)\, A_{r-1,1} \\
&-(2,\ 1)\, A_{r-1,1} - (2,\ 2)\, A_{r-2,2} \\
&+(3,\ 1)\, A_{r-1,1} + (3,\ 2)\, A_{r-2,2} + (3,\ 3)\, A_{r-3,3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&-(m,\ 1)\, A_{r-1,1} - (m,\ 2)\, A_{r-2,2} \ldots - (m,\ r)\, A_{0,r}
\end{aligned}$$

Indem man $r \leqq m$ voraussetzt, sind also die Coefficienten von $A_{r-1,1}$; $A_{r-2,2}$; $\ldots A_{0,r}$ bezüglich $=$

$$(1,\,1)-(2,\,1)\ldots-(m,\,1) = 1-2+3-4\ldots+(m-1)-m$$

$$-(2,\,2)+(3,\,2)\ldots-(m,\,2) = \frac{-1.2+2.3\ldots\ldots-(m-1)m}{1.2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm(r,\,r)\mp(r+1,\,r)\ldots-(m,\,r) = \frac{\pm 1.2\ldots r \mp 2\ldots(r+1)\ldots - m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r}$$

wo in der letzten Reihe die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem r ungerade oder gerade. Ist $r > m$, so fallen die Glieder $(m,\,r+1)$ u. s. w. von selbst weg. Nun ist, wenn man

$$S = z - z^2 + z^3 \ldots - z^m$$

setzt, wo also m gerade,

$$\frac{\partial^r S}{\partial z^r} = (-1)^{r-1}[1.2\ldots r - 2.3\ldots(r+1)z\ldots+(-1)^r(m-r+1)\ldots m z^{m-r}]$$

Bezeichnet man durch D_r den Werth, welchen $\frac{\partial^r S}{\partial z^r}$ für $z=1$ annimmt, so erhält man

$$D_r = (-1)^{r-1}[1.2\ldots r - 2.3\ldots r+1\ldots+(-1)^r m\ldots(m-r+1)]$$

und

$$(58) \qquad 1-2^r+3^r\ldots-m^r = D_1 \cdot A_{r-1,1} + \frac{D_2}{1.2} A_{r-2,2}\ldots + \frac{D_r}{1.2\ldots r} A_{0,r}$$

Setzt man $z - z^{m+1} = u$ und $(1+z)^{-1} = v$ so dass $S = uv$, so findet man, wenn man (nach der Differentiation) $z=1$ setzt

$$u = 0 \qquad\qquad v = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -m, \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -(m+1)m,$$

$$\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^n u}{\partial z^n} = -(m+1)m\ldots(m-n+2), \quad \frac{\partial^{n-1} v}{\partial z^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1.2\ldots(n-1)}{2^n}$$

Nach der Formel

$$d^n(uv) = ud^n v + (n, 1)\, du \,.\, d^{n-1}v \ldots + d^n u \,.\, v$$

hat man also

$$D_1 = -\frac{m}{2};\ D_2 = -\frac{m^2}{2}$$

und allgemein, wenn $n > 2$,

$$D_n = \pm m(n, 1)\frac{1.2..(n-1)}{2^n} \mp \frac{(m+1)m(n, 2)\,1.2\ldots(n-2)}{2^{n-1}}$$
$$\pm (m+1)m(m-1)(n, 3)\frac{1.2\ldots(n-3)}{2^{n-2}} \ldots - \frac{(m+1)m\ldots m-n+2}{2}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem n gerade oder ungerade.

Entwickelt man die Grössen D nach Potenzen von m, so findet man demnach für die erste Potenz in D_1 den Coefficienten $-\frac{1}{2}$, in D_2 den Coefficienten Null, in $\frac{D_s}{1.2..s}$ (wenn $s > 2$) den Coefficienten

$$(-1)^{s-1}\left[\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2^{s-2}} + \frac{1}{3.4}\cdot\frac{1}{2^{s-3}} \ldots + \frac{1}{(s-1)s}\cdot\frac{1}{2}\right] = (-1)^{s-1}\sum_{2,\, s-1}^{k}\frac{1}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{2^{s-k}}$$

Nun ist nach Euler*), wenn man $r = 2n$ und $C_k = 2(2^k - 1)B_k$ setzt,

$$1^{2n} - 2^{2n} \ldots + (m-1)^{2n} - m^{2n} = -\frac{1}{2}\Big[m^{2n} + \frac{C_1}{1.2}(2n, 1)m^{2n-1} \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{C_n}{2n}(2n, 2n-1)m\Big]$$

Vergleicht man den Coefficienten von m in dieser Entwickelung, welchen man kürzer durch $\frac{(-1)^n C_n}{2} = (-1)^n(2^{2n}-1)B_n$ ausdrücken kann, mit dem Coefficienten von m, welcher sich aus (58) ergiebt, wenn man dort $r = 2n$ setzt, so findet man

$$(-1)^n(2^{2n}-1)B_n = -\frac{A_{2n-1,1}}{2} + \sum_{3,\, 2n}^{s}\ \sum_{2,\, s-1}^{k}(-1)^{s-1}\cdot\frac{1}{k(k+1)}\cdot\frac{A_{2n-s,s}}{2^{s-k}}$$

Benutzt man die Formel (21), so findet man

*) Instit. calc. differ. P. 2 § 184.

$$1^r - 2^r \ldots + (m-1)^r - m^r =$$
$$(r, r) A_{0,r} - (r-1, r-1) A_{1,r-1} \ldots + (-1)^{r-1} (1, 1) A_{r-1,1}$$
$$-[(r+1, r) A_{0,r} - (r, r-1) A_{1,r-1} \ldots + (-1)^{r-1} (2, 1) A_{r-1,1}]$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$-[(m+r-1, r) A_{0,r} - (m+r-2), r-1) A_{1,r-1} \ldots + (-1)^{r-1} (m, 1) A_{r-1,1}]$$

Hier sind also die Reihen von der Form

$$(-1)^k [(r-k, r-k) - (r-k+1, r-k) \ldots - (r-k+m-1, r-k)]$$

zu summiren, wobei k die Werthe $r-1$, $r-2$ u. s. w. bis Null annimmt. Geht man aber von

$$Z = z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} - z^{-4} \ldots + z^{-(m-1)} - z^{-m}$$

aus und versteht unter H_k den Werth, welchen $\frac{\partial^k Z}{\partial z^k}$ für $z = 1$ annimmt, so findet man

$$H_{r-k} = (-1)^{r-k} [1 . 2 \ldots (r-k) - 2 . 3 \ldots (r-k+1) \ldots$$
$$- m(m+1) \ldots (m+r-k-1)$$

mithin

(59) $$\frac{(-1)^r H_{r-k}}{1 . 2 \ldots (r-k)} = (-1)^k [(r-k, r-k) - (r-k+1, r-k \ldots$$
$$-(r-k+m-1, r-k)]$$

und

(60) $$1^r - 2^r \ldots + (m-1)^r - m^r =$$
$$(-1)^r \left[\frac{H_r}{1 \ldots r} A_{0,r} + \frac{H_{r-1}}{1 \ldots (r-1)} A_{1,r-1} \ldots + H_1 A_{r-1,1}\right]$$

Nun ist $Z = \frac{1 - z^{-m}}{1+z}$. Setzt man hier wieder $(1+z)^{-1} = v$ und $1 - z^{-m} = u$, so ist für $z = 1$

$$u = 0, \quad v = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = m, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{2^2}$$

allgemein

$$\frac{\partial^n u}{\partial z^n} = (-1)^{n-1} m(m+1) \ldots (m+n-1)$$
$$\frac{\partial^n v}{\partial z^n} = (-1)^n \frac{1 . 2 \ldots n}{2^{n+1}}$$

Demnach, indem man wieder die Formel

$$d^n(uv) = ud^n v + \dots.$$

benutzt,

$$H_1 = \frac{m}{2}; \; \frac{H_2}{1.2} = -\frac{m}{2} - \frac{m^2}{2^2}$$

allgemein

$$(61) \qquad \frac{H_s}{1.2..s} = (-1)^{s-1} \sum_{1,\,s}^{k} (m+k-1,\, k) \cdot \frac{1}{2^{s-k+1}}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von m, so wird der Coefficient der ersten Potenz von m

$$(-1)^{s-1} \sum_{1,\,s}^{k} \frac{1}{k.2^{s-k+1}}$$

Setzt man wieder $r = 2n$, so giebt der Vergleich der Formel (60) mit der Euler'schen Formel

$$(-1)^n (2^{2n}-1) B_n = \sum_{1,\,2n}^{s} \; \sum_{1,\,s}^{k} (-1)^{s-1} \frac{A_{2n-s,s}}{k.2^{s-k+1}}$$

Der Vergleich von (59) und (61) giebt zugleich die bemerkenswerthe Beziehung zwischen Binomialcoefficienten

$$(s+m-1,\, s) - (s+m-2,\, s) \dots + (s+1,\, s) - (s,\, s) =$$
$$\frac{(m,\, 1)}{2^s} + \frac{(m+1,\, 2)}{2^{s-1}} \dots + \frac{(m+s-1,\, s)}{2}$$

14.

Bekanntlich hat schon Euler*) ausführliche Untersuchungen über den Ausdruck

$$V = \frac{p-1}{p-e^x} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_m x^m \dots.$$

in welchem p eine beliebige Zahl bedeutet, angestellt. Man kann aus

*) Instit. calc. diff. P. 2 § 174.

demselben mit Leichtigkeit eine grosse Anzahl Beziehungen zwischen den Grössen A und den Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen ableiten. Setzt man $\frac{1}{p-1} = q$, so dass

$$V = \frac{1}{1-(e^x-1)q}$$

und demnach

$$1 + a_1 x \ldots + a_m x^m \ldots = 1 + (e^x - 1) q \ldots + (e^x - 1)^m q^m \ldots .$$

so ergiebt sich, indem man, wie früher, $e^x - 1$, $(e^x - 1)^2$ u. s. w. entwickelt,

$$a_m = \frac{A_{0,m} \cdot q^m + A_{1,m-1} \cdot q^{m-1} \ldots + A_{m-1,1} \cdot q}{1 \cdot 2 \ldots m}$$

oder, indem wieder $\frac{1}{p-1}$ statt q setzt,

$$(62) \qquad a_m = \frac{A_{0,m} + A_{1,m-1}(p-1) + A_{2,m-2}(p-1)^2 \ldots + A_{m-1,1}(p-1)^{m-1}}{1 \cdot 2 \ldots m\,(p-1)^m}$$

Setzt man zugleich

$$(63) \qquad a_m = \frac{a_{m,0} + a_{m,1} \cdot p + a_{m,2} \cdot p^2 \ldots + a_{m,m-1} \cdot p^{m-1}}{1 \cdot 2 \ldots m\,(p-1)^m}$$

so folgt hieraus

$$(64) \qquad \begin{aligned} a_{m,k} = A_{k,m-k} &- (k+1,\ 1) A_{k+1,m-k-1} \ldots \\ &+ (-1)^{m-k-1} (m-1, m-k-1) A_{m-1,1} \end{aligned}$$

wo also $k \leqq m - 1$

Setzt man in (63) im Zähler überall $p - 1 + 1$ statt p und entwickelt nach Potenzen von $p - 1$, so giebt der Vergleich mit (62)

$$A_{k,m-k} = a_{m,k} + (k+1,\ 1)\, a_{m,k+1} + \ldots + (m-1,\ m-k-1)\, a_{m,m-1}$$

und für $k = 0$

$$A_{0,m} = 1 \cdot 2 \ldots m = a_{m,0} + a_{m,1} \ldots + a_{m,m-1}\ ^{*)}$$

Aus der bekannten Eigenschaft, dass $a_{m,h} = a_{m,m-h-1}$ folgt, dass der Zähler des Werthes von a_m in (63) derselbe bleibt, wenn man $\frac{1}{p}$ statt p

---

*) Man vergl. Sidler a. a. O. Formel (9) und (6).

setzt und mit p^{m-1} multiplicirt, dasselbe muss also auch bei dem Zähler in (62) der Fall sein, d. h. man hat für jeden Werth von p

$$p^{m-1}A_{0,m}+p^{m-2}(1-p)A_{1,m-1}\ldots+(1-p)^{m-1}A_{m-1,1}=$$
$$A_{0,m}+(p-1)A_{1,m-1}\ldots+(p-1)^{m-1}A_{m-1,1}$$

Bemerkenswerth ist der specielle Fall $p=2$, welcher zu

$$2^{m-1}A_{0,m}-2^{m-2}A_{1,m-1}+2^{m-3}A_{2,m-2}\ldots+(-1)^{m-1}A_{m-1,1}$$
$$=A_{0,m}+A_{1,m-1}+A_{2m-2}\ldots+A_{m-1,1}$$

führt.

Auch folgt aus (64), wenn man $m-k-1$ statt k setzt

$$A_{k,m-k}-(k+1,\,1)A_{k+1,m-k-1}\ldots+(-1)^{m-k-1}(m-1,\,m-k-1)A_{m-1,1}$$
$$=A_{m-k-1,k+1}-(m-k,\,1)A_{m-k,k}+(m-k+1,\,2)A_{m-k+1,k-1}\ldots$$
$$+(-1)^k(m-1,\,k)A_{m-1,1}$$

Setzt man $k=0$, so erhält man die Formel (12′), da $A_{m-1,1}=1$.

15.

Für $p=-1$ wird

$$\frac{p-1}{p-e^x}=\frac{2}{1+e^x}=1-\frac{T_1x}{1.2}+\frac{T_3}{1.2.3}\frac{x^3}{2^3}\ldots+(-1)^m\frac{T_{2m-1}}{1..2m-1}\frac{x^{2m-1}}{2^{2m-1}}$$

Aus dem Vergleich mit V folgt mithin, dass unter dieser Voraussetzung $a_{2m}=0$ und $a_{2m-1}=(-1)^m\frac{T_{2m-1}}{1..2m-1}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}}=\frac{(2^{2m}-1)B_m}{1.2..(2m-1)}\cdot\frac{1}{m}$ oder $B_m=(-1)^m\frac{1.2..(2m-1)a_{2m-1}}{2^{2m-1}}m$, zugleich aber hat man nach (62)

$$a_{2m-1}=-\frac{A_{0,2m-1}-2A_{1,2m-2}\ldots+2^{2m-2}A_{2m-2,1}}{1.2..(2m-1)2^{2m-1}}$$

Der Vergleich dieser zwei Werthe von a_{2m-1} führt unmittelbar zu Formel (56). Ferner folgt für $p=-1$ aus (63)

$$-1.2..(2m-1)a_{2m-1}=\frac{a_{2m-1,0}-a_{2m-1,1}+a_{2m-1,2}\ldots+a_{2m-1,2m-2}}{2^{2m-1}}$$

also

$$B_m = \frac{(-1)^{m-1} m}{2^{2m}-1} \cdot \frac{a_{2m-1,0} - a_{2m-1,1} \dots + a_{2m-1,2m-2}}{2^{2m-1}}$$

welches die bekannte Laplace'sche Formel ist, und wenn man in (62) $2m$ statt m setzt, so findet man wieder (57). Da nach dem Vorhergehenden, unter der Voraussetzung, dass $p = -1$, also $a_{2m} = 0$,

$$\frac{p-1}{p-e^x} = \frac{2}{1+e^x} = 1 + a_1 x + a_3 x^3 \dots + a_{2m-1} x^{2m-1} \dots$$

so folgt

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = e^x \cdot \frac{2}{1+e^{2x}}$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} \dots + \frac{x^{2m}}{1..2m} \dots\right)\left(1 + 2a_1 x + 2^3 a_3 x^3 \dots + 2^{2m-1} a_{2m-1} x^{2m-1} \dots\right)$$

$$= 1 - \frac{E_1 x^2}{1.2} + \frac{E_2 x^4}{1.2.3.4} \dots + \frac{(-1)^m E_m x^{2m}}{1.2..2m} \dots$$

Bestimmt man auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{2m}, so findet man

$$(-1)^m E_m = 1 + 2m.2a_1 + 2m(2m-1)(2m-2)\,2^3 a_3 \dots$$
$$+ 2m(2m-1) \dots 1 . 2^{2m-1} a_{2m-1}$$

und indem man für a_{2m-1} seinen Werth $\frac{(2^{2m}-1) B_m}{1.2..2m-1} \cdot \frac{1}{m}$ setzt, findet man die bekannte Relation

$$E_m = (2m, 1)(2^{2m}-1)\, 2^{2m-1} \frac{B_m}{m} \dots + (-1)^m \text{*)}$$

Bestimmt man dagegen auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{2m-1}, so findet man

$$2^{2m-1} a_{2m-1} + 2^{2m-3} a_{2m-3} \cdot \frac{1}{1.2} \dots + 2a_1 \cdot \frac{1}{1.2..2m-2} + \frac{1}{1.2..2m-1} = 0$$

woraus

$$2^{2m-1}(2^{2m}-1)\frac{B_m}{m} - (2m-1, 2)\, 2^{2m-3}(2^{2m-2}-1)\frac{B_{m-1}}{m-1} \dots$$
$$+ (-1)^{m-1}(2m-1, 2m-2)\, 2.3\, B_1 + (-1)^m = 0$$

folgt. Berücksichtigt man, dass $m(2m-1, 2k) = (m-k)(2m, 2k)$, so sieht

---

*) Erste Abhandlung p. 32.

man dass diese Formel identisch ist mit derjenigen welche ich früher*) gefunden habe.

Man kann ebenso je nachdem man in

$$\frac{2}{1+e^{2x}} = e^{-x}\left(1 - \frac{E_1 x^2}{1.2} \ldots\right)$$

d. h.

$$1 + 2a_1 x \ldots + 2^{2m-1} a_{2m-1} x^{2m-1} \ldots = 1 - \frac{E_1 x^2}{1.2} \ldots + \frac{(-1)^m E_m x^{2m}}{1.2\ldots 2m} \ldots$$

den Coefficienten von x^{2m} oder von x^{2m-1} auf beiden Seiten bestimmt, sowohl die Euler'sche Relation

$$E_m - (2m, 2) E_{m-1} \ldots + (-1)^m \text{**)}$$

als auch die Scherk'sche

$$2^{2m-1}(2^{2m}-1)\frac{B_m}{m} = (2m-1, 1) E_{m-1} \ldots + (-1)^{m-1} \text{***)}$$

finden.

Als Anhang möge noch folgende Beziehung bemerkt werden. Geht man von

$$\frac{(e^x-1)^{m+1} \mp 1}{e^x} = (e^x-1)^m - (e^x-1)^{m-1} + (e^x-1)^{m-2} \ldots \pm (e^x-1) \mp 1$$

aus, und vergleicht, indem man $(e^x-1)^{m+1} \mp 1$ einerseits und

$$e^x\left[(e^x-1)^m - (e^x-1)^{m-1} \ldots \pm (e^x-1) \mp 1\right]$$

andererseits nach wachsenden Potenzen von x entwickelt, die Coefficienten von x^{m+n} auf beiden Seiten, so findet man

$$\begin{aligned}
\frac{A_{n-1,m+1}}{1.2\ldots(m+n)} = {} & \frac{A_{0,m}}{1\ldots m.1\ldots n} + \frac{A_{1,m}}{1\ldots(m+1)1\ldots(n-1)} \ldots + \frac{A_{n,m}}{1\ldots(m+n)} \\
& - \left[\frac{A_{0,m-1}}{1\ldots(m-1)1\ldots(n+1)} + \frac{A_{1,m-1}}{1\ldots m.1\ldots n} \ldots + \frac{A_{n+1,m-1}}{1\ldots(m+n)}\right] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-1)^m . \left[\frac{A_{0,1}}{1\ldots(m+n-1)} + \frac{A_{1,1}}{1.2.1\ldots(m+n-2)} \ldots + \frac{A_{m+n-1,1}}{1\ldots m+n}\right] \\
& + (-1)^{m+1} . \frac{1}{1\ldots m+n}
\end{aligned}$$

---

*) Crelle, Journal f. d. Mathematik, Bd. 26 S. 90.

) Erste Abhandlung p. 29. *) ebend. p. 30.

Setzt man $n = 1$, so wird $\frac{A_{0,m+1}}{1.2\ldots m+1}$ und also auch die rechte Seite der vorstehenden Gleichung $= 1$.

Da die Entwickelung von $\overline{(e^x - 1)^{m+n}} \mp 1$ keine niedrigere Potenz von x als die $m+1$te enthält, so müssen die Coefficienten aller dieser niedrigeren Potenzen verschwinden. Man findet also namentlich, wenn man den Coefficienten von x^m bestimmt und mit $1.2\ldots m$ multiplicirt

$$\begin{aligned}
&A_{0,m} - A_{1,m-1} \ldots + (-1)^{m-1} A_{m-1,1} \\
&-(m,\,1)\,[A_{0,m-1} - A_{1,m-2} \ldots + (-1)^{m-2} A_{m-2,1}] \\
&+(m,\,2)\,[A_{0,m-2} - A_{1,m-3} \ldots + (-1)^{m-3} A_{m-3,1}] \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\pm(m,\,m-1)\,A_{0,1} \mp 1 = 0
\end{aligned}$$

In der That ergiebt sich aus Formel (12') dass dieser Ausdruck nichts Anderes als $1-(m,\,1)+(m,\,2)\ldots\pm(m,\,m-1)\mp 1 = (1-1)^m$ ist.

16.

Da

$$\frac{\partial \sec . x}{\partial x} = \operatorname{tg} x \sec . x$$

so führen die zwei Ausdrücke

$$\operatorname{tg} x = T_1 x + \frac{T_3 x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{T_{2n+1}}{1.2\ldots 2n+1} x^{2n+1} + \ldots$$

$$\sec x = 1 + \frac{E_1 x^2}{1.2} + \ldots + \frac{E_n x^{2n}}{1\ldots 2n} + \ldots$$

zu

$$E_1 x + \ldots + \frac{E_{n+1} x^{2n+1}}{1\ldots 2n+1} \ldots$$

$$= [T_1 x + \frac{T_3 x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{T_{2n+1} x^{2n+1}}{1\ldots 2n+1} + \ldots]\,[1 + \frac{E_1 x^2}{1.2} \ldots + \frac{E_n x^{2n}}{1\ldots 2n} \ldots]$$

also, wenn man auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{2n+1} bestimmt,

(65) $$E_{n+1} = T_{2n+1} + (2n+1,\,2)\,T_{2n-1}\,E_1 \ldots + (2n+1,\,2n)\,T_1 E_n$$

Ferner folgt aus $\frac{\partial \operatorname{tg} x}{\partial x} = \frac{1}{(\cos x)^2}$

$$T_1 + \frac{T_3 x^2}{1.2} \ldots + \frac{T_{2n+1}}{1..2n} x^{2n} \ldots = [1 + \frac{E_1 x^2}{1.2} \ldots + \frac{E_n x^{2n}}{1..2n} \ldots]^2$$

und, indem man hier auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{2n} bestimmt, ergiebt sich, je nachdem n gerade oder ungerade

$$T_{2n+1} = 2E_n + 2(2n, 2) E_1 E_{n-1} + 2(2n, 4) E_2 E_{n-2} \ldots + (2n, n) E_{\frac{n}{2}} E_{\frac{n}{2}}$$

$$T_{2n+1} = 2E_n + 2(2n, 2) E_1 E_{n-1} + \ldots \qquad + 2(2n, n-1) E_{\frac{n-1}{2}} E_{\frac{n+1}{2}}$$

so dass man in beiden Fällen schreiben kann

(66) $$T_{2n+1} = E_n + (2n, 2) E_1 E_{n-1} \ldots + (2n, 2) E_{n-1} E_1 + E_n$$

Aus den Formeln (65) und (66) ergiebt sich der Beweis der zuerst von Herrn André*) bemerkten Identität der Euler'schen Zahlen und der Tangentencoefficienten mit Zahlen, welche sich aus einer scheinbar sehr entlegenen combinatorischen Operation ergeben.

Man bilde nemlich aus den k Zahlen $1, 2, \ldots k$, welche man als Elemente betrachtet, alle Permutationen, bei welchen, wenn man von der Linken zur Rechten fortgeht, das in der ersten Stelle stehende Element kleiner ist als das in zweiter Stelle stehende und allgemein das in der $2r-1$ten Stelle stehende kleiner als das in der $2r$ten stehende; zugleich soll aber auch allgemein das in der $2r$ten Stelle stehende grösser sein als das in der $2r+1$ten Stelle stehende. Zieht man in einer solchen Permutationsform von der Linken zur Rechten fortgehend, jedes Element von dem folgenden ab, so erhält man, wenn $k = 2n$, das aus $2n-1$ Zeichen bestehende Schema

(A) $$+ - + - \ldots - +$$

und, wenn $k = 2n+1$, das aus $2n$ Zeichen bestehende Schema

(B) $$+ - + - \ldots + -$$

Im ersten Falle soll A_{2n} und im zweiten A_{2n+1} die Gesammtzahl der dem bestimmten Schema entsprechenden Permutationen bezeichnen. Mithin ist $A_2 = 1$. dagegen hätte A_1 nach dieser Definition von A_k keine Bedeutung, es wird aber dieses Symbol $= 1$ gesetzt.

*) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences T. 88 p. 965.

Sollen aus $2n+1$ Elementen $1, 2 \ldots 2n+1$ alle dem Schema (B) entsprechenden A_{2n+1} Permutationen gebildet werden, so ist klar, dass das grösste Element $2n+1$ in jeder dieser Permutationen eine solche Stelle einnehmen muss, dass ihm eine ungerade Anzahl Elemente folgt und mithin auch vorausgeht. Es kann nemlich das Element $2n+1$ nicht in der letzten Stelle stehen, weil ihm dann ein kleineres Element vorausgehen und also die Zeichenreihe nicht mit — sondern mit + schliessen würde. Aus demselben Grunde können auch nicht $2k$ Elemente auf das Element $2n+1$ folgen, da die aus $2k$ Zeichen bestehende Zeichenreihe, die aus dem Elemente $2n+1$ und den folgenden $2k$ Elementen zu bilden wäre, mit — beginnen und also mit + schliessen müsste. Betrachtet man daher den Fall, wo $2k+1$ Elemente auf das Element $2n+1$ folgen und demnach $2n-2k-1$ Elemente ihm vorausgehen, so können aus den b e s t i m m t e n $2n-2k-1$ Elementen $A_{2n-2k-1}$ Permutationen gebildet werden, welche der Form des Schema (B) angehören und ebenso aus den bestimmten $2k+1$ Elementen A_{2k+1} Permutationen, welche derselben Form angehören. Man erhält daher durch Einschaltung des Elementes $2n+1$ in die $2n-2k$te Stelle im Ganzen $(2n, 2k+1) A_{2n-2k-1} A_{2k+1}$ Permutationen, die bei dieser bestimmten Stellung des Elementes $2n+1$ aus den $2n+1$ Elementen, dem Schema (B) entsprechend, gebildet werden können, da sich aus $2n$ Elementen $(2n, 2k+1)$ Combinationen ohne Wiederholung zur Classe $2k+1$ bilden lassen. Setzt man nun für k alle ganzen Zahlen von 0 bis $n-1$, so findet man

$$(67) \qquad A_{2n+1} = (2n, 1) A_{2n-1} A_1 + (2n, 3) A_{2n-3} A_3 \ldots + (2n, 2n-1) A_1 A_{2n-1}$$

Sollen aus $2n+2$ Elementen alle der Form des Schema (A) entsprechenden Permutationen gebildet werden, so kann das Element $2n+2$ nicht in der vorletzten Stelle stehen, weil sonst das Schema mit — schliessen würde, und aus demselben Grunde überhaupt nicht eine solche Stelle einnehmen, dass ihm eine ungerade Anzahl Elemente folgt. Nimmt man an, dass ihm $2k$ bestimmte Elemente folgen und also $2n+1-2k$ bestimmte Elemente ihm vorausgehen, so findet man, ähnlich wie im vorhergehenden Falle den Ausdruck $(2n+1,\ 2k)\,A_{2n+1-2k}\,A_{2k}$, in welchem man, um sämmtliche aus den $2n+2$ Elementen gebildeten Permutationen, welche der Form des Schema (A) entsprechen, zu erhalten, für k alle ganzen Zahlen von 0 bis n zu setzen hat, mithin

$$(68)\qquad A_{2n+2} = A_{2n+1} + (2n+1,\ 2)\,A_{2n-2}\,A_2 \ldots + (2n+1,\ 2n)\,A_1\,A_{2n}$$

Da $1+(\operatorname{tg} x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$ d. h.

$$1+\left[T_1\,x + \frac{T_3 x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{T_{2n-1} x^{2n-1}}{1..(2n-1)} \ldots\right]^2 = \left[1 + \frac{E_1 x^2}{1.2} \ldots + \frac{E_n x^{2n}}{1..2n} \ldots\right]^2$$

so ergiebt sich, wenn man in diesem Ausdrucke auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{2n} bestimmt, wenn n gerade,

$$\frac{2T_1\,T_{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} + \frac{2T_3\,T_{2n-3}}{1.2.3.1.2\ldots(2n-3)} \ldots + \frac{2T_{n-1}\,T_{n+1}}{1.2..(n-1)\,1.2\ldots(n+1)}$$
$$= \frac{2E_n}{1.2..2n} + \frac{2E_1\,E_{n-1}}{1.2.1.2\ldots(2n-2)} \ldots + \frac{E_{\frac{n}{2}}\,E_{\frac{n}{2}}}{(1.2..n)^2}$$

und wenn n ungerade

$$\frac{2T_1\,T_{2n-1}}{1.2..(2n-1)} + \frac{2T_3\,T_{2n-3}}{1.2.3.1.2\ldots(2n-3)} \ldots + \frac{T_n\,T_n}{(1.2\ldots n)^2} = \frac{2E_n}{1..2n} + \frac{2E_1\,E_{n-1}}{1.2.1.2..(2n-2)} + \ldots$$
$$+ \frac{2E_{\frac{n-1}{2}}\,E_{\frac{n+1}{2}}}{1..(n-1)\,1..(n+1)}$$

also im ersten Falle

$$(69)\qquad E_n + (2n,\ 2)\,E_1\,E_{n-1} \ldots + \tfrac{1}{2}(2n,\ n)\,E_{\frac{n}{2}}\,E_{\frac{n}{2}} =$$
$$(2n,\ 1)\,T_1\,T_{2n-1} + (2n,\ 3)\,T_3\,T_{2n-3} \ldots + (2n,\ n-1)\,T_{n-1}\,T_{n+1}$$

und im zweiten

$$(70)\qquad E_n + (2n,\ 2)\,E_1\,E_{n-1} \ldots + (2n,\ n-1)\,E_{\frac{n-1}{2}}\,E_{\frac{n+1}{2}} =$$
$$(2n,\ 1)\,T_1\,T_{2n-1} + (2n,\ 3)\,T_3\,T_{2n-3} \ldots + (2n,\ n-1)\,T_{n-1}\,T_{n+1}$$

Aus dem Vergleich von (69) und (70) mit (66) und (67) ergiebt sich, dass wenn $A_{2k-1} = T_{2k-1}$ für alle Werthe k von $k=1$ bis $k=n$, auch $A_{2n+1} = T_{2n+1}$ ist. Nun ist $A_1 = T_1$ also allgemein $A_{2n-1} = T_{2n-1}$.

Weiter folgt aus dem Vergleiche von (68) mit (65), dass wenn $A_{2k} = E_k$ für alle Werthe k von $k = 1$ bis $k = n$ auch $A_{2n+2} = E_{n+1}$, also da $A_2 = E_1 = 1$, so ist allgemein $A_{2n} = E_n$.

Man kann ferner, je nachdem n gerade oder ungerade ist, statt der Formel (66) auch schreiben

$$T_{2n+1} = E_n + (2n, 1)\, T_1\, T_{2n-1} + (2n, 2)\, E_1\, E_{n-1} \ldots + (2n, n-1)\, T_{n-1}\, T_{n+1}$$

oder

$$T_{2n+1} = E_n + (2n, 1)\, T_1\, T_{2n-1} + (2n, 2)\, E_1\, E_{n-1} \ldots + \tfrac{1}{2}(2n, n)\, T_n\, T_n$$

und mithin in beiden Fällen

$$2\,T_{2n+1} = E_n + (2n, 1)\, T_1\, T_{2n-1} + (2n, 2)\, E_1\, E_{n-1} \ldots + (2n, 2n-1)\, T_{2n-1}\, T_1 + E_n$$

zugleich kann man statt (65) auch schreiben

$$2E_{n+1} = T_{2n+1} + (2n+1, 1)\, T_1\, E_n + (2n+1, 2)\, E_1\, T_{2n-1} \ldots \\ + (2n+1, 2n)\, E_n\, T_1 + T_{2n+1}$$

Setzt man hier statt der T und E die gleichwerthigen A, so vereinigen sich die zwei letzten Formeln zu

$$2A_{r+1} = A_r + (r, 1)\, A_1\, A_{r-1} + (r, 2)\, A_2\, A_{r-2} \ldots + (r, r-1)\, A_{r-1} A_1 + A_r$$

welche Formel Herr André a. a. O. ohne Beweis mitgetheilt hat.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: 26

Autor(en)/Author(s): Stern Moritz Abraham

Artikel/Article: Beiträge zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen. 3-45