

Ueber Funktionen zweier Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale zweier gege- bener Funktionen entstehn.

Von

L. Fuchs

in Heidelberg.

In der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 8. Januar 1881.

In einer Mittheilung, enthalten in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen (Februar 1880 p. 170 sqq.) habe ich Funktionen mehrerer Variabeln definirt, welche der Umkehrung von Integralen der Lösungen linearer homogener Differenzialgleichungen ihre Entstehung verdanken. Ich habe daselbst und ausführlicher in Borchardt's Journal B. 89 p. 151 sqq. ein Beispiel derartiger Funktionen geliefert, indem ich für den Fall der Differenzialgleichungen zweiter Ordnung gewisse Einschränkungen machte. Später habe ich in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissensch. (Juni 1880 p. 445 sqq.) die Tabelle derjenigen Differenzialgleichungen aufgestellt, welche diesen Einschränkungen entsprechen, und in dieser Tabelle zugleich die Integrale dieser Differenzialgleichungen angegeben.

Indem ich nun bemüht war, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzufinden, welchen die linearen homogenen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung zu genügen haben, um durch die erwähnte Umkehrung zwei Funktionen zweier unabhängiger Variabeln zu ergeben, von der Beschaffenheit dass jede symmetrische Funktion jener Funktionen eine eindeutige Funktion dieser Variabeln werde, gelangte ich zu einer Verallgemeinerung des Problems, indem ich an die Stelle der Lösungen linearer Differenzialgleichungen zweiter Ordnung gewisse näher charak-

terisirte Funktionen setzte. Im Folgenden erlaube ich mir die Lösung dieses Problems für die so charakterisirten Funktionen zu geben. — Zu diesen Funktionen gehören beispielsweise die Lösungen linearer Differenzialgleichungen beliebiger Ordnung (also auch die algebraischen Funktionen, welche immer solchen Differenzialgleichungen genügen) so dass in dem Folgenden auch die Beantwortung des speciellen Problems enthalten ist, die Beschaffenheit dieser Lösungen anzugeben, damit durch die Umkehrung ihrer Integrale zwei Funktionen zweier Variablen entstehen, deren symmetrische Funktionen sich eindeutig verhalten.

1.

Es seien $f(z)$, $\varphi(z)$ zwei Funktionen von z , deren Quotient nicht einen constanten Werth habe, und welche für jeden Werth der unabhängigen Variablen eine endliche oder eine unendliche Anzahl bestimmter Werthe annehmen, und für jeden Werth $z = a$ dieser Veränderlichen, für den sie unendlich werden oder sich verzweigen, und ebenso für $z = \infty$ Entwicklungen zulassen nach ganzen Potenzen resp. von $(z-a)^{\frac{1}{n}}$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$, (n eine positive ganze Zahl) mit nur einer endlichen Anzahl negativer Exponenten, und Producten solcher Potenzen mit ganzen positiven Potenzen resp. von $\log(z-a)$ und $\log \frac{1}{z}$ deren Exponenten eine endliche Zahl nicht übersteigen. Hierbei machen wir jedoch die Einschränkung, dass die kleinsten Exponenten der mit logarithmischen Factoren behafteten Potenzen von $z-a$ und $\frac{1}{z}$ die negative, resp. die positive Einheit nicht überschreiten. Wir wollen die Werthe a im Folgenden als singuläre Punkte der Funktionen $f(z)$, $\varphi(z)$ bezeichnen.

Wenn z unzählig viele Umläufe vollzieht, so kann der Quotient $\zeta = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ einen von z unabhängigen Werth annehmen. Wir wollen im Folgenden solche Werthe von ζ kurz mit γ bezeichnen. Wir setzen voraus, dass alsdann wenigstens eine der Funktionen $\int f(z) dz$, $\int \varphi(z) dz$

nach Vollziehung dieser Umläufe für jeden Werth von z unendlich gross wird. Wenn ausserdem nach Vollziehung einer endlichen Anzahl von Umläufen für einen Werth $z = b, \zeta$ einen der Werthe γ erhält, so soll ebenfalls wenigstens eine der Funktionen $\int f(z) dz, \int \varphi(z) dz$ für $z = b$ unendlich gross sein.

Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen können wir annehmen, dass für jeden singulären Punkt a und für $z = \infty$ die in den Exponenten der verschiedenen Potenzen von $z - a$, resp. $\frac{1}{z}$ auftretenden Brüche gleichen Nenner haben, und zwar für beide Funktionen $f(z), \varphi(z)$, denselben, da wenn dieses nicht der Fall ist, man als Nenner n das kleinste Vielfache der verschiedenen Nenner einführen kann.

Ein Beispiel derartiger Funktionen liefern die Lösungen der linearen homogenen Differenzialgleichungen von der in meiner Abhandlung B. 66 des Borchardtschen Journals p. 146 Gl. (12) charakterisirten Gattung.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen anzugeben, damit die durch die Gleichungen

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\delta_1}^{z_1} f(z) dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f(z) dz = u_1 \\ \int_{\delta_1}^{z_1} \varphi(z) dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi(z) dz = u_2 \end{array} \right.$$

— worin δ_1, δ_2 willkürliche Constanten, für welche den Grössen $f(\delta_1), f(\delta_2), \varphi(\delta_1), \varphi(\delta_2)$ bestimmte Werthe zugeschrieben werden, und die zwischen denselben Grenzen in beiden Gleichungen sich erstreckenden Integrationen längs desselben Weges auszuführen sind — definirten Funktionen z_1, z_2 der willkürlichen Veränderlichen u_1, u_2 die Wurzeln einer quadratischen Gleichung werden, deren Coefficienten in der Umgebung aller endlichen Werthenpaare dieser Veränderlichen sich eindeutig verhalten.

2.

Es sei in der Umgebung von $z_1 = \delta_1$, $z_2 = \delta_2$

$$(1) \quad \begin{cases} f(z_1) = \alpha_0 + \alpha_1(z_1 - \delta_1) + \dots \\ \varphi(z_1) = \alpha_0' + \alpha_1'(z_1 - \delta_1) + \dots \\ f(z_2) = \beta_0 + \beta_1(z_2 - \delta_2) + \dots \\ \varphi(z_2) = \beta_0' + \beta_1'(z_2 - \delta_2) + \dots, \end{cases}$$

so ergeben die Gleichungen (A)

$$(2) \quad \begin{aligned} \alpha_0(z_1 - \delta_1) + \beta_0(z_2 - \delta_2) + \dots &= u_1 \\ \alpha_0'(z_1 - \delta_1) + \beta_0'(z_2 - \delta_2) + \dots &= u_2. \end{aligned}$$

Da δ_1 , δ_2 willkürliche Grössen bedeuten, und da $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ der Voraussetzung gemäss nicht einen constanten Werth hat, so kann man voraussetzen, dass die Grösse $\alpha_0\beta_0' - \alpha_0'\beta_0$ von Null verschieden sei. Alsdann ergeben sich (cf. Jacobi in Crelle's Journal B. 6 p. 274) für $z_1 - \delta_1$, $z_2 - \delta_2$ Entwicklungen nach positiven ganzen Potenzen von u_1 , u_2 , welche in der Umgebung von $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ gültig sind. Diese Entwicklungen definiren zunächst die Funktionen z_1 , z_2 in dieser Umgebung. Indem wir nun u_1 , u_2 auf willkürlichen von einander unabhängigen Wegen von 0, 0 ausgehend fortsetzen, werden z_1 , z_2 sich auf entsprechenden Wegen fortsetzen und in den Umgebungen der durchlaufenen Werthe von u_1 , u_2 holomorph sein, so lange keine der Grössen z_1 , z_2 unendlich geworden, oder mit einem der singulären Punkte der Funktionen $f(z)$, $\varphi(z)$ coincidirt, so lange ferner nicht einer der Quotienten $\zeta_1 = \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}$ $\zeta_2 = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ einen der Werthe γ erreicht, endlich so lange z_1 , z_2 nicht solche Werthe erhalten haben, für welche die Gleichung

$$(B) \quad \Delta = \begin{vmatrix} f(z_1) & f(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi(z_2) \end{vmatrix} = 0$$

erfüllt ist. Denn sind $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ Werthe welche diesen Einschränkungen unterliegen, und welche den Werthen $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ entsprechen, so folgt auf dieselbe Weise, wie wir es für die Umgebung

von $u_1 = 0, u_2 = 0$ nachgewiesen, dass $z_1 - b_1, z_2 - b_2$ in der Umgebung von $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ sich nach ganzen positiven Potenzen von $u_1 - v_1, u_2 - v_2$ entwickeln lassen.

Da u_1, u_2 von einander unabhängige Veränderliche sind, so hat man die Stellen $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ für welche eine der Grössen z_1, z_2 mit gewissen singulären Punkten der Funktionen $f(z), \varphi(z)$, wozu unter Umständen der unendlich ferne Punkt gehört, coïncidirt, oder eine der Grössen ζ_1, ζ_2 gleich einem Werthe γ wird, oder endlich z_1, z_2 der Gleichung (B) genügen, nur dann einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen, wenn z_1, z_2 in die angegebenen Werthe einrücken, ohne dass zwischen den letzten Wegelementen, mit welchen u_1, u_2 resp. in v_1, v_2 eintreffen, eine bestimmte Beziehung vorausgesetzt werden muss.

Wenn dagegen keiner der angegebenen Werthe von z_1, z_2 für $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ erreicht werden kann, ohne dass zwischen den letzten Wegelementen der Veränderlichen u_1, u_2 eine Beziehung vorausgesetzt wird, so müssen die Funktionen z_1, z_2 der unabhängigen Veränderlichen u_1, u_2 in diesen Stellen auch andere als die genannten Ausnahmewerthe annehmen, also bei Umkreisung dieser Stellen, so lange u_1, u_2 von einander unabhängig bleiben, sich eindeutig verhalten, in diesen Stellen jedoch unbestimmt werden.

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, bemerken wir, dass wir im Folgenden voraussetzen können, dass für $f(z), \varphi(z)$ in den zur Umgebung eines singulären Punktes dieser Funktionen oder eines nicht singulären Punktes derselben oder endlich des unendlich fernen Punktes gehörigen Entwicklungen die niedrigsten Dimensionen der Glieder übereinstimmen, und dass wenn ζ mit einem der Werthe γ coïncidirt, $\int f(z) dz, \int \varphi(z) dz$ gleichzeitig unendlich werden. Denn wenn dieses nicht stattfindet, so seien

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \gamma_{11} f(z) + \gamma_{12} \varphi(z) \\ \varphi_1(z) &= \gamma_{21} f(z) + \gamma_{22} \varphi(z), \end{aligned}$$

wo $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ willkürliche Grössen bedeuten. Setzt man alsdann

$$(a) \quad \begin{aligned} w_1 &= \gamma_{11} u_1 + \gamma_{12} u_2 \\ w_2 &= \gamma_{21} u_1 + \gamma_{22} u_2 \end{aligned}$$

so gehen die Gleichungen (A) über in

$$(A^1) \quad \int_{\delta_1}^{z_1} f_1(z) dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f_1(z) dz = w_1$$

$$\int_{\delta_1}^{z_1} \varphi_1(z) dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi_1(z) dz = w_2$$

Es haben nunmehr $f_1(z)$ und $\varphi_1(z)$ wegen der Willkürlichkeit von γ_{11} . . . γ_{22} die verlangte Eigenschaft, und es sind die symmetrischen Funktionen von z_1, z_2 alsdann in der Umgebung bestimmter Werthe von u_1, u_2 eindeutig, wenn dieselben Funktionen in der Umgebung der entsprechenden Werthe von w_1, w_2 eindeutig sind, und wenn andererseits die letzten Wegelemente mit welchen w_1, w_2 in gewisse Werthe w'_1, w'_2 einrücken, von einander abhängig werden, so werden dadurch auch bestimmte Beziehungen zwischen den letzten Wegelementen, mit welchen u_1, u_2 in die w'_1, w'_2 entsprechenden Werthe von u_1, u_2 eintreffen, festgestellt.

3.

Zunächst ergibt sich der Satz:

I. Die Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ dürfen nicht für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden.

Es sei in der That $z = b$ zunächst ein nicht singulärer Werth der Funktionen $f(z), \varphi(z)$, für welchen beide gleichzeitig verschwinden, und man habe in der Umgebung von $z = b$

$$(1) \quad \begin{aligned} f(z) &= \alpha_k (z-b)^k + \alpha_{k+1} (z-b)^{k+1} + \dots \\ \varphi(z) &= \alpha'_k (z-b)^k + \alpha'_{k+1} (z-b)^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

wo k eine positive ganze Zahl.

Es bezeichne $z = c$ einen willkürlichen ebenfalls nicht singulären Werth von z , in dessen Umgebung

$$(1a) \quad \begin{aligned} f(z) &= \beta_0 + \beta_1 (z-c) + \dots \\ \varphi(z) &= \beta'_0 + \beta'_1 (z-c) + \dots, \end{aligned}$$

und es mögen den Werthen $z_1 = b$, $z_2 = c$ die Stellen $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ entsprechen, alsdann folgt aus den Gleichungen (A)

$$(2) \begin{cases} u_1 - v_1 = \frac{\alpha_{k+1}}{k+1}(z_1 - b)^{k+1} + \beta_0(z_2 - c) + \frac{\alpha_{k+2}}{k+2}(z_1 - b)^{k+2} + \frac{\beta_1}{2}(z_2 - c)^2 + \dots \\ u_2 - v_2 = \frac{\alpha'_{k+1}}{k+1}(z_1 - b)^{k+1} + \beta'_0(z_2 - c) + \frac{\alpha'_{k+2}}{k+2}(z_1 - b)^{k+2} + \frac{\beta'_1}{2}(z_2 - c)^2 + \dots \end{cases}$$

Lassen wir nunmehr $z_1 - b$ und $z_2 - c$ derartig unendlich klein werden, dass

$$(3) \quad z_2 - c = \xi(z_1 - b)^{k+1} + \eta$$

wo ξ eine beliebige Grösse, η eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung als $(z_1 - b)^{k+1}$ werde, so wird ξ derart bestimmt werden können, dass

$$u_2 - v_2 - \lambda(u_1 - v_1)$$

unendlich klein höherer Ordnung als $(z_1 - b)^{k+1}$ wird, wenn man mit λ einen beliebig gegebenen Werth bezeichnet. In der That ergibt sich ξ aus der Gleichung

$$(4) \quad \xi(\beta'_0 - \lambda\beta_0) + \frac{\alpha'_{k+1} - \lambda\alpha_{k+1}}{k+1} = 0$$

Da $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ nicht constant ist, so kann man $z_2 = c$ so wählen, dass keine der Gleichungen

$$\beta'_0 - \lambda\beta_0 = 0, \quad \alpha'_{k+1}\beta_0 - \alpha_{k+1}\beta'_0 = 0$$

erfüllt werde. Alsdann ist ξ eine endliche bestimmte Grösse, wenn λ einen endlichen Werth hat, und es sind die Grössen

$$\beta_0 \xi + \frac{\alpha_{k+1}}{k+1}, \quad \beta'_0 \xi + \frac{\alpha'_{k+1}}{k+1}$$

von Null verschieden. Demnach stellen $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ unendlich kleine Grössen gleicher Ordnung mit $(z_1 - b)^{k+1}$ vor, während $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$

den willkürlich gegebenen Werth λ erhält. Hieraus folgt zunächst, dass z_1, z_2 resp. die Werthe b, c , annehmen, wenn die letzten Wegelemente, mit welchen u_1, u_2 resp. in v_1, v_2 einrücken, von einander unabhängig sind

Andererseits folgt aus den Gleichungen (2)

$$(u_2 - v_2)\beta_0 - (u_1 - v_1)\beta'_0 = \frac{1}{k+1}(\alpha'_{k+1}\beta_0 - \alpha_{k+1}\beta'_0)(z_1 - b)^{k+1}$$

bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung. Da der Coefficient von $(z_1 - b)^{k+1}$ in dieser Gleichung nicht verschwindet, so folgt

$$(5) \quad z_1 - b = \sqrt[k+1]{\frac{(u_2 - v_2)\beta_0 - (u_1 - v_1)\beta'_0}{\alpha'_{k+1}\beta_0 - \alpha_{k+1}\beta'_0} \cdot (k+1)}$$

d. h. z_1 erhält $k+1$ von c verschiedene Werthe, wenn u_1, u_2 resp. um v_1, v_2 Umläufe vollziehen. Es sind deshalb $z_1 + z_2, z_1 z_2$ in der Umgebung von $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ nicht eindeutig, wenn $k \geq 1$. Hieraus folgt, dass $f(z)$ und $\varphi(z)$ nicht für einen nicht singulären Werth b gleichzeitig verschwinden dürfen.

Es sei nunmehr a ein singulärer Punkt von der Beschaffenheit, dass $f(a) = 0, \varphi(a) = 0$.

In diesem Falle enthalten nach den Voraussetzungen der No. 1 die Entwicklungen von $f(z), \varphi(z)$ in der Umgebung von $z = a$ keine Logarithmen. Enthalten diese Entwicklungen die ganzen Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{n}}$, so setzen wir

$$(z - a)^{\frac{1}{n}} = t.$$

Es sei in der Umgebung von $z = a$

$$(6) \quad \begin{aligned} f(z) &= \alpha_k t^k + \alpha_{k+1} \cdot t^{k+1} + \dots \\ \varphi(z) &= \alpha'_k t^k + \alpha'_{k+1} \cdot t^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

Lässt man z_1 in a einrücken und gleichzeitig z_2 in einen belie-

bigen nicht singulären Punkt c , und bezeichnet wieder die zugehörigen Werthe von u_1, u_2 mit v_1, v_2 , so ergibt sich auf dieselbe Weise wie in dem eben behandelten Falle, wo z_1 in den nicht singulären Punkt b

einrückte, dass $t_1 = (z_1 - a)^{\frac{1}{n}}$ in der Umgebung von $u_1 = v_1, u_2 = v_2, k + n$ von c verschiedene Werthe annimmt. Demnach sind $z_1 + z_2, z_1 z_2$ in der Umgebung dieser Werthe nicht eindeutig, wenn $f(z)$ und $\varphi(z)$ für $z = a$ gleichzeitig verschwinden.

Der am Anfang dieser No. ausgesprochene Satz ist hierdurch bewiesen.

Ist in Gl. (6) $k + n > 0$, so können demnach $z_1 + z_2, z_1 z_2$ nur dann in der Umgebung von $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ eindeutig sein, wenn $k + n = 1$, also

$$k = -(n - 1).$$

Es ergibt sich demnach der Satz:

II. Der Exponent der niedrigsten Potenz von $z - a$ in den Entwicklungen von $f(z), \varphi(z)$ in der Umgebung eines singulären Punktes a ist eine negative Zahl, welche entweder die negative Einheit nicht überschreitet oder den Werth $-\left(\frac{n-1}{n}\right)$ hat (n pos. ganze Zahl).

Es sei in der Umgebung von $z = \infty$ der Exponent der niedrigsten Potenz in den Entwicklungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ grösser als die positive Einheit. Alsdann enthalten nach No. 1 diese Entwicklungen keine Logarithmen. Treten in denselben die ganzen Potenzen von $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$ auf, so setzen wir

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}} = t.$$

Es sei

$$(7) \quad \begin{aligned} f(z) &= \alpha_k t^k + \alpha_{k+1} t^{k+1} + \dots \\ \varphi(z) &= \alpha'_k t^k + \alpha'_{k+1} t^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

Lässt man z_1 unendlich werden, während z_2 mit einem willkürlichen nicht singulären Punkte c zusammenfällt, und bezeichnet wieder die zugehörigen Werthe von u_1, u_2 mit v_1, v_2 , so folgert man wie in

dem Falle eines endlichen singulären Werthes, dass $t_1 = \left(\frac{1}{z_1}\right)^{\frac{1}{n}}$ in der Umgebung von $u_1 = v_1, u_2 = v_2, k-n$ von c verschiedene Werthe annimmt, dass also $z_1, z_2, z_1 z_2$ in der Umgebung von $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ nicht eindeutig sind, wenn $k-n > 1$. Hieraus folgt:

III. Der Exponent der niedrigsten Potenz von $\frac{1}{z}$ in den Entwicklungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = \infty$ ist entweder eine Zahl welche die positive Einheit nicht überschreitet, oder derselbe hat den Werth $1 + \frac{1}{n}$ (n pos. ganze Zahl).

4.

Es mögen sich nunmehr z_1, z_2 den von einander verschiedenen Werthen b_1, b_2 annähern, welche nicht zu den singulären Punkten gehören, aber der Gleichung (B) genügen.

Es sei in der Umgebung von $z_1 = b_1, z_2 = b_2$ resp.

$$(1) \quad \begin{cases} f(z_1) = \alpha_0 + \alpha_1(z_1 - b_1) + \alpha_2(z_1 - b_1)^2 + \dots \\ \varphi(z_1) = \alpha'_0 + \alpha'_1(z_1 - b_1) + \alpha'_2(z_1 - b_1)^2 + \dots \\ f(z_2) = \beta_0 + \beta_1(z_2 - b_2) + \beta_2(z_2 - b_2)^2 + \dots \\ \varphi(z_2) = \beta'_0 + \beta'_1(z_2 - b_2) + \beta'_2(z_2 - b_2)^2 + \dots \end{cases}$$

so sind nach dem Satze I voriger No. nicht gleichzeitig α_0 und α'_0 oder β_0 und β'_0 Null. Wir können daher nach der Bemerkung am

Schlusse der No. 2 voraussetzen, dass $\alpha_0, \alpha'_0, \beta_0, \beta'_0$ sämmtlich von Null verschieden sind. Aus den Gleichungen (A) folgt, wenn $z_1 = b_1, z_2 = b_2$ die Werthe $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ entsprechen,

$$(2) \left\{ \begin{aligned} u_1 - v_1 &= \alpha_0(z_1 - b_1) + \beta_0(z_2 - b_2) + \frac{\alpha_1}{2}(z_1 - b_1)^2 \\ &\quad + \frac{\beta_1}{2}(z_2 - b_2)^2 + \frac{\alpha_2}{3}(z_1 - b_1)^3 + \frac{\beta_2}{3}(z_2 - b_2)^3 + \dots \\ u_2 - v_2 &= \alpha'_0(z_1 - b_1) + \beta'_0(z_2 - b_2) + \frac{\alpha'_1}{2}(z_1 - b_1)^2 \\ &\quad + \frac{\beta'_1}{2}(z_2 - b_2)^2 + \frac{\alpha'_2}{3}(z_1 - b_1)^3 + \frac{\beta'_2}{3}(z_2 - b_2)^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

Der Voraussetzung gemäss findet die Gleichung:

$$(3) \quad \alpha_0 \beta'_0 - \alpha'_0 \beta_0 = 0$$

statt.

Wenn z_1, z_2 sich resp. den Werthen b_1, b_2 annähern, ohne dass die Gleichung

$$(4) \quad \alpha_0(z_1 - b_1) + \beta_0(z_2 - b_2) = 0$$

erfüllt wird, so werden $u_1 - v_1, u_2 - v_2$ unendlich kleine Grössen gleicher Ordnung mit derjenigen der beiden unendlich kleinen Grössen $z_1 - b_1, z_2 - b_2$, welche von der niedrigeren Ordnung ist. Es sei $z_2 - b_2$ von gleicher oder höherer Ordnung als $z_1 - b_1$. Multiplicirt man die erste der Gleichungen (2) mit β'_0 , die zweite mit β_0 und subtrahirt, so folgt nach Gleichung (3)

$$(5) \quad \beta'_0(u_1 - v_1) - \beta_0(u_2 - v_2) = \frac{1}{2}(\alpha_1 \beta'_0 - \alpha'_1 \beta_0)(z_1 - b_1)^2 \\ + \frac{1}{2}(\beta_1 \beta'_0 - \beta'_1 \beta_0)(z_2 - b_2)^2 + \dots$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist demnach von höherer Ordnung als $u_1 - v_1, u_2 - v_2$, d. h. man muss

$$(6) \quad \beta'_0(u_1 - v_1) - \beta_0(u_2 - v_2) = 0$$

setzen. Welches daher auch die letzten Elemente der Wege sind, auf welchen z_1, z_2 in b_1, b_2 eintreten — wenn sie nicht in der durch die Gleichung (4) angegebenen Beziehung stehen, so findet zwischen den zugehörigen letzten Wegelementen von u_1, u_2 die bleibende Relation (6) statt.

Von einander unabhängig können die ebengenannten Wegelemente von u_1, u_2 nur werden, wenn zwischen den unendlich kleinen Grössen $z_1 - b_1, z_2 - b_2$ die Relation (4) besteht, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass

$$(7) \quad t = \alpha_0(z_1 - b_1) + \beta_0(z_2 - b_2)$$

eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung als jede der Grössen $z_1 - b_1, z_2 - b_2$ ist, welche gleich hohe Ordnung besitzen.

Führen wir die Bezeichnung aus Gl. (7) in (2) ein, und setzen

$$(8) \quad -\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \varepsilon \quad \frac{\beta'_0}{\beta_0} = \frac{\alpha'_0}{\alpha_0} = \lambda$$

so erhält man

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 - v_1 = t + \frac{1}{2}[\alpha_1 + \beta_1 \varepsilon^2](z_1 - b_1)^2 \\ \quad \quad \quad - \frac{\beta_1}{\beta_0}(z_1 - b_1)t + \frac{1}{2}\frac{\beta_1}{\beta_0^2}t^2 + \dots \\ u_2 - v_2 = \lambda t + \frac{1}{2}[\alpha'_1 + \beta'_1 \varepsilon^2](z_1 - b_1)^2 \\ \quad \quad \quad - \frac{\beta'_1}{\beta_0}(z_1 - b_1)t + \frac{1}{2}\frac{\beta'_1}{\beta_0^2}t^2 + \dots \end{array} \right.$$

Man kann t so unendlich klein werden lassen, dass

$$(10) \quad t = \xi(z_1 - b_1)^2$$

wo ξ eine willkürlich bestimmte Grösse bedeutet. Aus den Gleichungen (9) ergibt sich dann bis auf unendlich kleine Grössen:

$$(11) \quad \frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_2} = \frac{\lambda \xi + \frac{1}{2}(\alpha'_1 + \beta'_1 \varepsilon^2)}{\xi + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 \varepsilon^2)}$$

Indem man ξ stetig ändernd dasselbe alle möglichen Werthe durchlaufen lässt, nimmt $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ jeden beliebigen Werth an, also treffen z_1, z_2 resp. in b_1, b_2 ein, welches auch die letzten Wegelemente sind, mit denen u_1, u_2 resp. in v_1, v_2 einrücken, wenn nicht die Gleichung

$$(12) \quad \alpha'_1 + \beta'_1 \varepsilon^2 - \lambda[\alpha_1 + \beta_1 \varepsilon^2] = 0$$

stattfindet, in welchem Falle das Verhältniss $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ in Gleichung (11) einen von ξ unabhängigen Werth erhält.

Andererseits folgt, wenn man das Verhältniss $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ willkürlich annimmt, aus Gleichung (9) bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung

$$(13) \quad u_2 - v_2 - \lambda(u_1 - v_1) = \frac{1}{2}[\alpha'_1 + \beta'_1 \varepsilon^2 - \lambda(\alpha_1 + \beta_1 \varepsilon^2)](z_1 - b_1)^2.$$

Diese Gleichung lieferte demnach in der Umgebung von $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ zwei von b_2 verschiedene Werthe von z_1 , und es könnten deshalb $z_1 + z_2$ und $z_1 z_2$ in dieser Umgebung nicht eindeutig sein, wenn nicht die Gleichung (12) erfüllt wäre.

Findet demnach die Relation (4) statt, so erfordert die Eindeutigkeit von $z_1 + z_2, z_1 z_2$ auch das Bestehen der Relation (12).

Setzt man

$$\frac{df(z)}{dz} = f'(z), \quad \frac{d\varphi(z)}{dz} = \varphi'(z)$$

und

$$(14) \quad \varphi'(z) f(z) - \varphi(z) f'(z) = F(z)$$

so geht die Gleichung (12) über in;

$$(15) \quad F(b_1) f(b_2)^3 + F(b_2) f(b_1)^3 = 0.$$

Da b_1, b_2 ein willkürliches Werthenpaar bedeutete, welches der Gleichung (B) genügt, so folgt:

I. Die Eindeutigkeit von $z_1 + z_2, z_1 z_2$ als Funktionen von u_1, u_2 erfordert, dass für alle Werthenpaare z_1, z_2 welche der Gleichung (B) genügen, die Gleichung

$$(C) \quad F(z_1) f(z_2)^3 + F(z_2) f(z_1)^3 = 0$$

erfüllt werde.

Es sei durch die Gleichung

$$(D) \quad \frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta$$

z als Funktion von ζ definirt. Aus dieser ergibt sich

$$(E) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{f(z)^2}{F(z)}$$

Sind z_1, z_2 zwei Zweige der Funktion z von ζ , so hat man

$$(16) \quad \frac{dz_1}{d\zeta} = \frac{f(z_1)^2}{F(z_1)} \quad \frac{dz_2}{d\zeta} = \frac{f(z_2)^2}{F(z_2)}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt mit Hülfe von Gleichung (C)

$$(F) \quad \frac{dz_1}{d\zeta} f(z_1) + \frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) = 0.$$

Da andererseits die Gleichung

$$(G) \quad \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)} = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

stattfindet, so ergibt sich aus Gleichung (F) auch

$$(F') \quad \frac{dz_1}{d\zeta} \varphi(z_1) + \frac{dz_2}{d\zeta} \varphi(z_2) = 0.$$

Es sei

$$z_1 = g_1(\zeta), \quad b_1 = g_1(\alpha)$$

$$z_2 = g_2(\zeta), \quad b_2 = g_2(\alpha)$$

Setzt man in die Gleichungen (2)

$$\begin{aligned} z_1 - b_1 &= g_1(\zeta) - g_1(a) \\ z_2 - b_2 &= g_2(\zeta) - g_2(a), \end{aligned}$$

so wird den Gleichungen (F) (F') entsprechend die rechte Seite identisch Null, d. h. für jeden Werth von ζ .

Demnach wird auch, wenn man mit Rücksicht darauf, dass t (Gleichung 7) unendlich klein höherer Ordnung werden muss, in Gleichung (2)

$$(17) \quad \begin{cases} z_1 - b_1 = dz_1 = g'_1(a) d\zeta, \\ z_2 - b_2 = \delta z_2 = dz_2 + \nu dz_2 \end{cases}$$

$dz_2 = g'_2(a) d\zeta$ substituirt, wo ν eine unendlich kleine Grösse und wo

$$g'_i(\zeta) = \frac{dg_i(\zeta)}{d\zeta}$$

$$(18) \quad \begin{cases} u_1 - v_1 = du_1 = \nu dz_2 f(b_2) + dz_2^2 (2\nu + \nu^2) \frac{f'(b_2)}{2} + \dots \\ u_2 - v_2 = du_2 = \nu dz_2 \varphi(b_2) + dz_2^2 (2\nu + \nu^2) \frac{\varphi'(b_2)}{2} + \dots \end{cases}$$

Es sind also du_1, du_2 von gleicher Ordnung mit νdz_2 . Multiplicirt man die erste Gleichung (18) mit $\varphi(b_2)$, die zweite mit $f(b_2)$ und subtrahirt, so ist

$$(19) \quad \varphi(b_2) du_1 - f(b_2) du_2 = -\nu dz_2^2 \cdot F'(b_2) + \dots$$

Demnach ist die linke Seite von der Ordnung νdz_2^2 , oder es ist

$$(20) \quad \varphi(b_2) du_1 - f(b_2) du_2 = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

II. Ist für jedes System von Lösungen $z_1 = b_1, z_2 = b_2$ der Gleichung (B) die Gleichung (C) erfüllt, so können z_1, z_2 nicht in b_1, b_2 einrücken, wenn die letzten Wegelemente auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 anlangen, von einander unabhängig sind.

5.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, dass für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $z_1 = a$, $z_2 = b$ werde, wo b einen nicht singulären Punkt, a einen solchen singulären Punkt bezeichnet, für welchen $\int f(z) dz$, $\int \varphi(z) dz$ endliche Werthe erhalten, und gleichzeitig die Gleichung (B) durch $z_1 = a$, $z_2 = b$ erfüllt werde.

Nach Satz II in No. 3 ist alsdann der Exponent der niedrigsten Potenz von $z - a$ in den Entwicklungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = a$, welche nach No. 1 keine Logarithmen enthalten, von der Form $-\left(\frac{n-1}{n}\right)$ (n pos. ganze Zahl).

Setzt man daher

$$(1) \quad \begin{cases} (z - a)^{\frac{1}{n}} = t \\ n f(z) t^{n-1} = f_1(t), \quad n \varphi(z) t^{n-1} = \varphi_1(t) \end{cases}$$

und substituirt in den Gleichungen (A)

$$(2) \quad \begin{aligned} z_1 &= a + t_1^n & z_2 &= a + t_2^n \\ \delta_1 &= a + \eta_1^n & \delta_2 &= a + \eta_2^n, \end{aligned}$$

so verwandeln sich dieselben in

$$(A'') \quad \begin{cases} \int_{\eta_1}^{t_1} f_1(t) dt + \int_{\eta_2}^{t_2} f_1(t) dt = u_1 \\ \int_{\eta_1}^{t_1} \varphi_1(t) dt + \int_{\eta_2}^{t_2} \varphi_1(t) dt = u_2. \end{cases}$$

Wenn $z_1 = a$, $z_2 = b$ wird, so wird $t_1 = 0$, $t_2 = \beta = \sqrt[n]{b - a}$, und es sind nunmehr $t = 0$, $t = \beta$ keine singulären Punkte der Funktionen $f_1(t)$, $\varphi_1(t)$. Damit t_1 in 0, t_2 in β nur unter Voraussetzung einer gewissen Beziehung zwischen den letzten Wegelementen, auf welchen u_1 , u_2 in v_1 , v_2 einrücken, anlangen können, ist vermöge derselben Dis-

cussion wie in der vorigen No. erforderlich, dass gleichzeitig mit der Gleichung

$$(3) \quad \frac{\varphi_1(0)}{f_1(0)} = \frac{\varphi_1(\beta)}{\varphi_2(\beta)}$$

die Gleichung

$$(4) \quad F_1(0) f_1(\beta)^3 + F_1(\beta) f_1(0)^3 = 0$$

erfüllt werde, wo

$$(5) \quad F_1(t) = \varphi_1'(t) f_1(t) - \varphi_1(t) f_1'(t)$$

Da aber

$$(6) \quad F_1(t) = n^3 t^{3(n-1)} \cdot F(z),$$

so besagt die Gleichung (4), dass die Gleichung (C) auch für $z_1 = a, z_2 = b$ bestehen müsse.

Umgekehrt folgt wie in voriger No., dass wenn diese Bedingung erfüllt ist, z_1 in a, z_2 in b nur anlangen, wenn zwischen den letzten Wegelementen, auf denen u_1, u_2 in v_1, v_2 eintreffen, eine Beziehung besteht.

Ganz auf dieselbe Weise ergibt sich: Wenn für $u_1 = v_1, u_2 = v_2, z_1 = a_1, z_2 = a_2$, wo a_1, a_2 zwei verschiedene singuläre Punkte bedeuten, wovon auch einer mit dem unendlich fernen Punkte coïncidiren kann, und wenn vorausgesetzt wird, dass $z_1 = a_1, z_2 = a_2$ die Gleichung (B) befriedigen, und dass $\int f(z) dz, \int \varphi(z) dz$ für $z = a_1, z = a_2$ endlich sind, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass z_1, z_2 die angegebenen Werthe nur unter der Voraussetzung gewisser Relationen zwischen den letzten Wegelementen, auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 eintreffen, erreichen können, dass diese Werthenpaare $z_1 = a_1, z_2 = a_2$ gleichzeitig die Gleichung (C) befriedigen.

6.

Wenn für $u_1 = v_1, u_2 = v_2, z_1, z_2$ einen gleichen Werth b annehmen, so können $f(z_1), f(z_2)$ resp. $\varphi(z_1), \varphi(z_2)$ verschiedene Werthe

erreichen. Diese Werthe seien $f(b)$, $\varphi(b)$ für $z_1 = b$ und $f_1(b)$, $\varphi_1(b)$ für $z_2 = b$. Findet nun die Gleichung (B) für $z_1 = z_2 = b$ statt, d. h.

$$(1) \quad \begin{vmatrix} f(b) & f_1(b) \\ \varphi(b) & \varphi_1(b) \end{vmatrix} = 0$$

so muss nach der Schlussweise von No. 4, wenn man

$$(2) \quad [F(z_1)]_{z_1=b} = F(b) \quad [F(z_2)]_{z_2=b} = F_1(b)$$

setzt, die Gleichung

$$(3) \quad F(b) f_1(b)^3 + F_1(b) f(b)^3 = 0$$

erfüllt sein.

Die Gleichung (1) kann unter den angegebenen Umständen nur erfüllt werden, wenn z als Funktion von ζ betrachtet, für einen gewissen Umlauf der letzteren Veränderlichen zu seinem ursprünglichen Werthe zurückkehrt, ohne dass gleichzeitig $f(z)$ und $\varphi(z)$ zu ihren Werthen zurückkehren. Findet dieses statt, und sei z ein einem willkürlichen Werthe von ζ entsprechender Werth, $f(z)$, $\varphi(z)$ die zugehörigen Werthe der beiden Funktionen, $f_1(z)$, $\varphi_1(z)$ die Werthe, in welche dieselben nach dem angegebenen Umlaufe von ζ übergehen, wenn z zu seinem ursprünglichen Werthe zurückkehrt, alsdann ergibt sich nach Gleichung (3), dass für einen willkürlichen Werth von z die Gleichung

$$(H) \quad F(z) f_1(z)^3 + F_1(z) f(z)^3 = 0$$

bestehen muss.

Durch denen der No. 4 analoge Betrachtungen ergibt sich alsdann, dass z_1, z_2 den gemeinschaftlichen Werth nicht erreichen können, wenn nicht zwischen den letzten Wegelementen von u_1, u_2 eine Relation besteht.

Aus Betrachtungen, welche denen der vorigen No. analog sind, ergibt sich ebenfalls, dass die Gleichung (H) für singuläre und unendlich grosse Werthe von z in gleicher Weise wie für nicht singuläre besteht, und

dass auch z_1, z_2 einen gemeinsamen so beschaffenen Werth nicht erreichen können, ohne dass gleichzeitig $f(z_1) = f(z_2), \varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ werde, wenn nicht zwischen den letzten Wegelementen von u_1, u_2 eine Relation besteht.

7.

Lässt man u_1, u_2 willkürliche Wege durchlaufen und setzt längs derselben die Funktionen z_1, z_2 stetig fort, so möge für $u_1 = v_1, u_2 = v_2$, wo v_1, v_2 endliche Werthe bedeuten, einer oder beide der Quotienten $\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}, \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ einen der mit γ bezeichneten Werthe annehmen, oder eine oder beide der Funktionen z_1, z_2 solche singuläre Werthe der Funktionen $f(z), \varphi(z)$ erreichen, dass eines oder beide der Integralwerthenpaare $\int f(z_1) dz_1, \int \varphi(z_1) dz_1, \int f(z_2) dz_2, \int \varphi(z_2) dz_2$ unendlich werde, ohne dass z_1, z_2 unendlich viele Umläufe vollzogen.

Es seien, wenn die Fortsetzungen z. B. mittelst Kreise vollzogen werden, K_1, K_2 die ersten Kreise resp. für die Variablen u_1, u_2 , auf deren Peripherien $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ werden. Es haben alsdann innerhalb dieser Kreise K_1, K_2 und in beliebig kleiner, aber nicht unendlich kleiner Entfernung von v_1, v_2 $\int f(z_1) dz_1, \int \varphi(z_1) dz_1, \int f(z_2) dz_2, \int \varphi(z_2) dz_2$ endliche Werthe. — Seien demnach $v_1 - \varepsilon_1, v_2 - \varepsilon_2$ Werthe von u_1, u_2 resp. innerhalb K_1, K_2 , beliebig nahe an v_1, v_2 , und mögen diesem Werthenpaare u_1, u_2 die Werthe b_1, b_2 von z_1, z_2 entsprechen, Führen die beiden Wege Γ_1, Γ_2 für u_1, u_2 von $v_1 - \varepsilon_1$ in v_1 , resp. $v_2 - \varepsilon_2$ in v_2 , so mögen z_1, z_2 gleichzeitig resp. auf den Wegen W_1, W_2 in c_1, c_2 anlangen. Es ist zu bemerken, dass die Wegstrecken W_1, W_2 unendlich lang sein können, während die entsprechenden Strecken auf Γ_1, Γ_2 beliebig klein sind. Sind $v_1 - \varepsilon_1 + \lambda_1, v_2 - \varepsilon_2 + \lambda_2$ Werthe von u_1, u_2 zwischen $v_1 - \varepsilon_1$ und v_1 , resp. $v_2 - \varepsilon_2$ und v_2 längs Γ_1, Γ_2 , und c'_1, c'_2 die zugehörigen Werthe von z_1, z_2 längs W_1, W_2 , so folgt, dass

$$\sigma_1 = \int_{b_1}^{c'_1} f(z) dz + \int_{b_2}^{c'_2} f(z) dz$$

$$\sigma_2 = \int_{b_1}^{c'_1} \varphi(z) dz + \int_{b_2}^{c'_2} \varphi(z) dz$$

beliebig kleine Werthe annehmen müssen.

Nach der Voraussetzung ist für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ wenigstens einer der Quotienten $\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}$, $\frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ gleich einem jeder mit γ bezeichneten Werthe. Es wird also nach No. 2 wenigstens je einer der Summanden von σ_1 , σ_2 unendlich werden, wenn b_1, c'_1 ; b_2, c'_2 längs W_1, W_2 sich c_1, c_2 annähern, folglich wird auch jedesmal der andere Summand unendlich. —

Oder es hat eine oder beide der Grössen z_1, z_2 einen solchen singulären Werth der Funktionen $f(z)$, $\varphi(z)$ erreicht, dass eines oder beide der Integralwerthenpaare $\int f(z_1) dz_1$, $\int \varphi(z_1) dz_1$, $\int f(z_2) dz_2$, $\int \varphi(z_2) dz_2$ unendlich werden, ohne dass z_1, z_2 unendlich viele Umläufe vollzogen, dann gilt dasselbe.

Da aber σ_1, σ_2 beliebig klein werden, so folgt, dass die Werthenreihen c'_1, c'_2 längs W_1, W_2 beliebig wenig verschieden von Werthenpaaren z_1, z_2 sind, welche den Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \int_{b_1}^{z_1} f(z) dz + \int_{b_2}^{z_2} f(z) dz = 0 \\ \int_{b_1}^{z_1} \varphi(z) dz + \int_{b_2}^{z_2} \varphi(z) dz = 0 \end{cases}$$

genügen. Stetige Reihen von Werthenpaaren z_1, z_2 welche den Gleichungen (1) genügen, befriedigen aber die Gleichung

$$(2) \quad \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)} = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

und ausserdem entweder die Gleichung (C) oder die Gleichung (H).

Demnach müssten c'_1, c'_2 beliebig wenig von einem Werthenpaare verschieden sein, welches gleichzeitig den Gleichungen (B) und (C) oder (H) Genüge leistet. Nach No. 4 bis 6 werden aber solche Werthenpaare nur erreicht, wenn u_1, u_2 von einander abhängige Wege beschreiben.

Da andererseits nicht z_1, z_2 sich gleichzeitig ein und demselben Werthe der angegebenen Art annähern können, wenn gleichzeitig $f(z_1)$ und $f(z_2)$ so wie $\varphi(z_1)$ und $\varphi(z_2)$ ein und denselben Werth anstreben, ohne dass u_1, u_2 unendlich gross werden, so ergibt sich der Satz:

Für *willkürliche* Wege von u_1, u_2 können für endliche Werthe dieser Variabeln nicht solche Werthe z_1, z_2 erreicht werden, dass einer oder beide der Quotienten $\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}, \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ einen der mit γ bezeichneten Werthe annehmen, und auch nicht solche singuläre Werthe z_1, z_2 der Funktionen $f(z), \varphi(z)$, für welches eines oder beide der Integralwerthenpaare $\int f(z_1) dz_1, \int \varphi(z_1) dz_1, \int f(z_2) dz_2, \int \varphi(z_2) dz_2$ unendlich werden, ohne dass die Variabeln z_1, z_2 unendlich viele Umläufe vollzogen haben.

8.

Aus Gleichung (F) ergibt sich:

I. Die Funktion z von ζ kann nicht mehr als zweiwerthig sein.

Denn wären z_1, z_2, z_3 drei verschiedene Zweige der Funktion z von ζ , so wäre nach Gleichung (F)

$$\frac{dz_1}{d\zeta} f(z_1) + \frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) = 0$$

$$\frac{dz_1}{d\zeta} f(z_1) + \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0$$

also

$$(1) \quad \frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) - \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0$$

Andererseits ist nach derselben Gleichung (F)

$$(2) \quad \frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) + \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0$$

Es müsste demnach

$$\frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) = 0 \quad \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0$$

sein, d. h. es müsste z von ζ unabhängig sein, was für willkürliche Werthe von ζ nicht stattfindet.

Dividirt man die Gleichung (H) durch $F(z) \cdot F_1(z)$ und setzt nach Gleichung (E)

$$(3) \quad \frac{f(z)^2}{F(z)} = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{f_1(z)^2}{F_1(z)},$$

so folgt

$$(4) \quad \frac{dz}{d\zeta} [f(z) + f_1(z)] = 0$$

oder

$$(J) \quad f(z) + f_1(z) = 0.$$

Nach Satz I ist

$$(K) \quad z = P(\zeta) + Q(\zeta) \sqrt{R(\zeta)},$$

wo $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ eindeutige Funktionen von ζ sind.

Setzen wir

$$(5) \quad f(z)^2 = g(\zeta),$$

so folgt aus der Gleichung (J), dass einem gegebenen Werthenpaare ζ , $\sqrt{R(\zeta)}$ ein einziger Werth von $g(\zeta)$ entspricht. Ebenso entspricht ein einziger bestimmter Werth dieser Funktion einem Werthenpaare ζ , $-\sqrt{R(\zeta)}$. Wir wollen denselben mit $g_1(\zeta)$ bezeichnen. Alsdann ist

$$(6) \quad \begin{cases} g(\zeta) + g_1(\zeta) = 2S(\zeta) \\ \frac{g(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}} - \frac{g_1(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}} = 2T(\zeta) \end{cases}$$

wo $S(\zeta)$, $T(\zeta)$ eindeutige Funktionen von ζ bedeuten.

Multiplicirt man die zweite der Gleichungen (6) mit $\sqrt{R(\zeta)}$ und addirt die beiden Gleichungen, so folgt:

$$(L) \quad f(z)^2 = g(\zeta) = S(\zeta) + T(\zeta) \cdot \sqrt{R(\zeta)}.$$

Setzt man

$$(K') \quad \frac{d\zeta}{dz} = P_1(\zeta) + Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

wo $P_1(\zeta)$, $Q_1(\zeta)$ nach Gleichung (K) eindeutige Funktionen von ζ sind, so folgt aus Gleichung (F), dass

$$(7) \quad t = \frac{f(z)}{\sqrt{R(\zeta)}[P_1(\zeta) + Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}]}$$

als Funktion von ζ aufgefasst durch die Umläufe von ζ , welche $\sqrt{R(\zeta)}$ in $-\sqrt{R(\zeta)}$ überführen, ungeändert bleibt. Dieselbe Eigenschaft besitzt danach auch t^2 . Daher ist nach Gleichung (L) t^2 eine eindeutige Funktion von ζ . Setzen wir demgemäss

$$(8) \quad t = \sqrt{R_1(\zeta)},$$

so folgt:

$$(L') \quad f(z) = [Q_1(\zeta)R(\zeta) + P_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}]\sqrt{R_1(\zeta)},$$

wo $R_1(\zeta)$ eine eindeutige Funktion von ζ und $\sqrt{R_1(\zeta)}$ durch die Umläufe von ζ , welche $\sqrt{R(\zeta)}$ in $-\sqrt{R(\zeta)}$ überführen, ungeändert bleibt.

Aus Gleichung (E) und den Gleichungen (K) und (L) ergibt sich

$$(M) \quad F(z) = W(\zeta) + U(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

wo $W(\zeta)$, $U(\zeta)$ eindeutige Funktionen von ζ .

II. Demnach sind die Funktionen $f(z)^2$ und $F(z)$ zweiwerthige Funktionen von ζ , welche durch die Umläufe von ζ gleichzeitig mit z unverändert bleiben oder geändert werden.

9.

Betrachtet man z als Funktion von ζ , so folgt aus den Gleichungen (C) und (H), dass $\frac{f(z)^3}{F(z)}$ für dasselbe ζ nur zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe annimmt. Es ist also

$$(N) \quad \frac{f(z)^3}{F(z)} = \sqrt{\Psi(\zeta)},$$

wo $\Psi(\zeta)$ eine eindeutige Funktion von ζ darstellt. Es ist nämlich nach Gl. (7) und (8) vor No.

$$(N') \quad \Psi(\zeta) = R(\zeta) R_1(\zeta).$$

Ein Umlauf von ζ , welcher $\sqrt{R(\zeta)}$ in $-\sqrt{R(\zeta)}$ überführt, führt daher auch $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ in $-\sqrt{\Psi(\zeta)}$ über.

Transformirt man die Gleichung (A) in die Variable ζ , und bezeichnet mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ zwei Werthe von ζ , welche resp. $z_1 = \delta_1, z_2 = \delta_2$ entsprechen, so verwandeln sich diese Gleichungen in

$$(A_1) \quad \begin{cases} \int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \sqrt{\Psi(\zeta)} d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \sqrt{\Psi(\zeta)} d\zeta = u_1 \\ \int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \zeta \sqrt{\Psi(\zeta)} d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \zeta \sqrt{\Psi(\zeta)} d\zeta = u_2. \end{cases}$$

10.

Für diejenigen Werthe von ζ , welche wir mir γ bezeichnet haben, erhält z jeden beliebigen Werth (s. No. 1), es sind daher diese Werthe γ singuläre Punkte der Funktion z von ζ (Gl. K), von solcher Beschaf-

fenheit, dass eine Entwicklung von z nach steigenden Potenzen von $\zeta - \alpha$ mit nur einer endlichen Anzahl von Potenzen mit negativen Exponenten nicht möglich ist. Wir wollen für solche singuläre Punkte dieselbe Bezeichnung wesentlich singuläre Punkte anwenden, welche Herr Weierstrass für eindeutige Funktionen angewendet hat (Abh. der Berliner Akademie Jahrg. 1876 p. 11 bis 15).

Da die Funktionen $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ in einem wesentlich singulären Punkte jeden beliebigen Werth annehmen (cf. Weierstrass l. c. p. 59—60), so ergibt sich, dass $\frac{\varphi(z)}{f'(z)} = \zeta$ für einen solchen Punkt von z unabhängig werden muss.

Demnach sind die Werthe $\zeta = \alpha$ die einzigen wesentlich singulären Punkte der Funktion z von ζ .

Ist $\zeta = \alpha$ ein Werth, welcher mit keinem der wesentlich singulären Punkte coïncidirt, und $z = a$ einer der beiden Werthe von z , welche ihm nach Gl. (K) entsprechen, so ist in der Umgebung von $\zeta = \alpha$

$$(1) \quad z - a = c_{-k}(\zeta - \alpha)^{-\frac{k}{2}} + c_{-(k-1)}(\zeta - \alpha)^{-\frac{(k-1)}{2}} \\ + \dots + c_0 + c_1(\zeta - \alpha)^{\frac{1}{2}} + c_2(\zeta - \alpha)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

wo die Anzahl der Glieder mit negativen Exponenten eine endliche mit k bezeichnete Grösse ist.

Ist a ein singulärer Punkt der Funktionen $f(z)$, $\varphi(z)$, so ist nach No. 1 in der Umgebung von $z = a$

$$(2) \quad f(z)^2 = P_0 + P_1 \log(z - a) + P_2 [\log(z - a)]^2 + \dots \\ + P_\lambda [\log(z - a)]^\lambda,$$

wo $P_0, P_1, \dots, P_\lambda$ in der Umgebung von $z = a$ nach ganzen Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{n}}$ entwickelt sind, mit nur einer endlichen Anzahl von Gliedern mit negativen Exponenten.

Aus Gl. (1) folgt

$$(3) \quad z - a = (\zeta - \alpha)^{-\frac{k}{2}} \cdot \chi(\zeta),$$

wo $\chi(\zeta)$ für $\zeta = \alpha$ weder Null noch unendlich, und demnach $\log \chi(\zeta)$ nach positiven ganzen Potenzen von $(\zeta - \alpha)^{\frac{1}{2}}$ entwickelbar ist.

Demnach ist

$$(4) \quad f(z)^2 = P'_0 + P'_1 \log(\zeta - \alpha) + P'_2 [\log(\zeta - \alpha)]^2 + \dots + P'_\lambda [\log(\zeta - \alpha)]^\lambda,$$

wenn man

$$(5) \quad \left(-\frac{k}{2}\right)^i \{P'_i + P'_{i+1} (i+1) \log \chi(\zeta) + P'_{i+2} (i+2) [\log \chi(\zeta)]^2 + \dots \\ + P'_\lambda \lambda_{\lambda-i} [\log \chi(\zeta)]^{\lambda-i}\} = P'_i \\ \frac{m(m-1) \dots (m-l+1)}{1 \cdot 2 \dots l} = m_l$$

setzt. Die Coefficienten $P'_0, P'_1 \dots P'_\lambda$ sind nach steigenden Potenzen von $\zeta - \alpha$ mit rationalen Exponenten entwickelbar, so dass Glieder mit negativen Exponenten nur in endlicher Anzahl auftreten.

Nach Satz II No. 8 ist aber $f(z)^2$ eine zweiwerthige Function von ζ , erhält also bei Umläufen von ζ um α nur zwei Werthe, während die rechte Seite der Gleichung (4) durch Wiederholung dieser Umläufe unendlich viele Werthe annimmt. Demnach muss

$$P'_1 = 0, \quad P'_2 = 0, \quad \dots \quad P'_\lambda = 0$$

sein. Hieraus folgt aber

$$(6) \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad \dots \quad P_\lambda = 0.$$

Demnach enthält die Entwicklung von $f(z)$ in der Umgebung von $z = a$ keine Logarithmen. Da $\varphi(z)^2 = \zeta^2 f(z)^2$ ebenfalls eine zweiwerthige Funktion von ζ ist, so folgt, dass auch die Entwicklung von $\varphi(z)$ keine Logarithmen enthält.

Aus der Gl. (4) ergibt sich,

$$(7) \quad f(z)^2 = P'_0$$

d. h. es ist auch $f(z)^2$ in der Umgebung von $\zeta = \alpha$ nach steigenden Potenzen von $\zeta - \alpha$ mit rationalen Exponenten entwickelbar, derart

dass die Anzahl der Glieder mit negativen Exponenten eine endliche ist.

Demnach ist $\zeta = a$ auch kein wesentlich singulärer Punkt für die Funktion $f(z)^2$ von ζ .

Es sei nunmehr

$$(8) \quad \begin{cases} f(z) = e_\mu (z-a)^{\frac{\mu}{n}} + e_{\mu+1} \cdot (z-a)^{\frac{\mu+1}{n}} + \dots \\ \varphi(z) = e'_\mu (z-a)^{\frac{\mu}{n}} + e'_{\mu+1} \cdot (z-a)^{\frac{\mu+1}{n}} + \dots \end{cases}$$

wo e_μ, e'_μ von Null verschieden sind. Setzt man

$$\frac{e'_\mu}{e_\mu} = a$$

und entwickelt $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ nach steigenden Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{n}}$, so erhält man

$$(9) \quad \zeta - a = \rho_1 (z-a)^{\frac{1}{n}} + \rho_2 (z-a)^{\frac{2}{n}} + \dots$$

wo

$$\rho_1 = \frac{e_\mu \cdot e'_{\mu+1} - e_{\mu+1} \cdot e'_\mu}{e_\mu^2}$$

Ist der Coefficient ρ_1 nicht Null, so folgt, dass $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ in der Umgebung von $\zeta = a$ eindeutig ist. Ist dagegen $\rho_1 = 0$, so kann ρ_2 nicht verschwinden, weil sonst $z-a$ in der Umgebung von $\zeta = a$ mehr als zwei Werthe annehmen würde, was mit dem Satze I. in No. 8 in Widerspruch stände.

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so erhält man den Satz:

I. Die Funktionen z und $f(z)^2$ von ζ haben dieselben wesentlich singulären Punkte, und zwar sind es diejenigen Werthe $\zeta = \gamma$, für welche $\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \gamma$ für jeden Werth von z . Die beiden Werthe von z , welche einem nicht wesentlich singulären Punkte $\zeta = a$ der Funktion z von ζ entsprechen, sind entweder nicht singuläre Punkte der Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$, oder solche singuläre Punkte a , dass

die für die Umgebung von a gültigen Entwicklungen von $f(z)$, $\varphi(z)$ keine Logarithmen enthalten, und dass in der Entwicklung nach steigenden Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{n}}$

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \alpha + \rho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \rho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \dots$$

nicht gleichzeitig ρ_1 und ρ_2 verschwinden. Einem Werthe z , für welchen $\int f(z) dz$, $\int \varphi(z) dz$ endliche Werthe erhalten, entsprechen nur nicht wesentlich singuläre Werthe der Funktion z von ζ .

Es ist zu bemerken dass hier $z = \infty$ den singulären Punkten beigezählt worden ist.

Aus der Gleichung

$$(10) \quad \zeta - a = \rho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \rho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \dots$$

folgt für $\frac{dz}{d\zeta}$

a) in dem Falle dass ρ_1 von Null verschieden ist

$$(11) \quad \frac{dz}{d\zeta} = (z-a)^{1-\frac{1}{n}} \{ \alpha_0 + \alpha_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \dots \}$$

b) in dem Falle aber, dass ρ_1 verschwindet,

$$(11^a) \quad \frac{dz}{d\zeta} = (z-a)^{1-\frac{2}{n}} \{ \lambda_0 + \lambda_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \dots \}$$

wo α_0 , λ_0 von Null verschiedene Grössen bedeuten.

Bezeichnen wir mit μ den Exponenten der niedrigsten Potenz von $z-a$ in der Entwicklung von $f(z)$ in der Umgebung von $z=a$, so ist nach Satz II. No. 3

$$\mu = \frac{-n-k+1}{n},$$

wo k die Null oder eine positive ganze Zahl bedeutet. Es folgt daher aus Gl. (E), dass im Falle a)

$$(12) \quad \frac{f(z)^3}{F(z)} = (z-a)^{-\frac{k}{n}} [x'_0 + x'_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \dots]$$

im Falle *b*)

$$(12^a) \quad \frac{f(z)^3}{F(z)} = (z-a)^{-\frac{(k+1)}{n}} [\lambda'_0 + \lambda'_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \dots]$$

Im Falle *a*) ergibt sich aus Gl. (10) $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ als eindeutige Funktion von $\zeta - a$

$$(13) \quad (z-a)^{\frac{1}{n}} = \mu_1(\zeta-a) + \mu_2(\zeta-a)^2 + \dots$$

Im Falle *b*) wird $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ eine eindeutige Funktion von $(\zeta - a)^{\frac{1}{2}}$

$$(14) \quad (z-a)^{\frac{1}{n}} = \mu'_1(\zeta-a)^{\frac{1}{2}} + \mu'_2(\zeta-a)^{\frac{2}{2}} + \dots$$

wo μ_1, μ'_1 von Null verschiedene Grössen bedeuten.

Demnach ist nach Gl. (N) in der Umgebung von $\zeta = a$ im Falle *a*)

$$(15) \quad \sqrt{\psi(\zeta)} = (\zeta-a)^{-k} \{x''_0 + x''_1(\zeta-a) + \dots\}$$

im Falle *b*)

$$(15^a) \quad \sqrt{\psi(\zeta)} = (\zeta-a)^{-\frac{k+1}{2}} \{\lambda''_0 + \lambda''_1(\zeta-a) + \dots\}$$

wo x''_0, λ''_0 von Null verschieden sind.

Diese Gleichungen finden auch statt, wenn $\zeta = a, z = \infty$ entspricht (s. Satz III No. 3)

Hieraus folgt

II. Die nicht wesentlich singulären Punkte der Funktion z von ζ sind auch nicht wesentlich singuläre Punkte der Funktion $\Psi(\zeta)$.

Sei $\zeta = \beta$ ein nicht wesentlich singulärer Punkt der Funktion z von ζ , für welchen $\Psi(\zeta)$ unendlich wird, von der Art, dass die $\zeta = \beta$ entsprechenden beiden Werthe von z nicht zu den singulären Punkten der Funktionen $f(z), \varphi(z)$ gehören. Ist $z = b$ einer dieser Werthe, so

muss nach Gl. (N) $F(b) = 0$ sein, und $F(z)$ in der Umgebung von $z = b$ die Entwicklung haben:

$$(16) \quad F(z) = (z-b)^l [\nu_0 + \nu_1 (z-b) + \dots]$$

wo l eine positive ganze Zahl und ν_0 von Null verschieden ist. Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden:

α) Es ist $f(b)$ von Null verschieden. Alsdann ergibt die Gleichung (E) in der Umgebung von $\zeta = \beta$

$$(17) \quad \frac{d\zeta}{dz} = (z-b)^l [\nu'_0 + \nu'_1 (z-b) + \dots]$$

wo ν'_0 von Null verschieden. Durch Integration dieser Gleichung folgt

$$\zeta - \beta = \frac{\nu'_0}{l+1} (z-b)^{l+1} + \dots$$

Da $z-b$ eine eindeutige Funktion von $(\zeta - \beta)^{\frac{1}{l+1}}$, so folgt, dass

$$(18) \quad \begin{cases} l=1 \text{ und} \\ z-b = \nu''_0 (\zeta - \beta)^{\frac{1}{2}} + \nu''_1 (\zeta - \beta)^{\frac{3}{2}} + \dots \end{cases}$$

wo ν''_0 von Null verschieden. Durch Substitution dieses Werthes in $\frac{f(z)^3}{F(z)}$ folgt, dass in der Umgebung von $\zeta = \beta$

$$(19) \quad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \rho_{-1} (\zeta - \beta)^{-\frac{1}{2}} + \rho_1 (\zeta - \beta)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

wo ρ_{-1} von Null verschieden.

Es sei $\beta) f(b) = 0$. Da nach Satz I No. 3 nicht gleichzeitig $\varphi(b) = 0$ sein kann, so folgt, dass in diesem Falle ζ unendlich gross wird. Gehört nun $\zeta = \infty$ nicht zu den wesentlich singulären Punkten von z als Funktion von ζ , und ist in der Umgebung von $z = b$

$$f(z) = (z-b)^m \{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 (z-b) + \dots\},$$

wo ε_0 von Null verschieden, so folgt aus der Gleichung

$$(20) \quad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{\zeta}$$

$$(21) \quad (z-b)^m \{ \epsilon'_0 + \epsilon'_1 (z-b) + \dots \} = \frac{1}{\zeta},$$

wo ϵ'_0 von Null verschieden. Da $z-b$ eine einwerthige Funktion von $\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}$ in der Umgebung von $\zeta = \infty$ ist, so folgt: entweder

$$(18a) \quad \begin{cases} m = 1 \\ z-b = \epsilon''_1 \left(\frac{1}{\zeta}\right) + \epsilon''_2 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^2 + \dots \end{cases}$$

oder

$$(18b) \quad \begin{cases} m = 2 \text{ und} \\ z-b = \epsilon''_1 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} + \epsilon''_2 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{3}{2}} + \dots \end{cases}$$

ϵ''_1 in beiden Fällen von Null verschieden.

Ist $\varphi(b) = \gamma_0$, so ist γ_0 von Null verschieden, und man erhält

$$F(z) = -m \epsilon_0 \gamma_0 (z-b)^{m-1} + \dots$$

also

$$\frac{f(z)^3}{F(z)} = -\frac{\epsilon_0^2 m}{\gamma_0} (z-b)^{2m+1} + \dots$$

Substituirt man hierin die Werthe (18a) und (18b), so folgt, dass in der Umgebung von $\zeta = \infty$ entweder

$$(22) \quad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \rho_3 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 + \rho_4 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^4 + \dots$$

oder

$$(22a) \quad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \rho_5 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{5}{2}} + \rho_7 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{7}{2}} + \dots$$

Demnach ist im Falle (β) $\Psi(\zeta)$ nicht unendlich.

Es sei nunmehr $\zeta = \beta$ ein Werth, welcher nicht zu den wesentlich singulären Punkten von z als Funktion von ζ gehört und wiederum von der Beschaffenheit, dass die beiden ihm entsprechenden Werthe von z nicht zu den singulären Punkten der Funktionen $f(z)$, $\varphi(z)$ gehören, und

für welchen $\Psi(\zeta)$ verschwindet. Ist b einer der beiden zu $\zeta = \beta$ gehörigen Werthe von z , so muss nach Gl. (N) $f(b) = 0$ sein. Da aber nach Satz I No. 3 nicht gleichzeitig $\varphi(b)$ verschwindet, so ergibt sich dass $\beta = \infty$ sein müsse.

Ist demnach $\zeta = \infty$ nicht ein wesentlich singulärer Punkt der Funktion z von ζ , und wird vorausgesetzt, dass $\Psi(\infty) = 0$, und es sei $z = b$ einer der beiden Werthe von z , welche $\zeta = \infty$ entsprechen (nach der in No. 2 gemachten Bemerkung entspricht $\zeta = \infty$, wenn dieser Punkt nicht zu den wesentlich singulären Punkten der Funktion z von ζ gehört, keinem singulären Punkte der Funktionen $f(z)$, $\varphi(z)$), so ergeben sich eben dieselben Gleichungen (20) — (22a). Die vorhergehende Untersuchung ergibt den folgenden Satz:

III. Es sei $\zeta = \beta$ ein endlicher Werth, welcher nicht zu den wesentlich singulären Punkten der Funktion z von ζ gehört.

Ist einer der beiden Werthe von z , welche $\zeta = \beta$ entsprechen, ein singulärer Punkt a der Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$, und bezeichnet man den Exponenten der niedrigsten Potenz von $z - a$ in den für $f(z)$, $\varphi(z)$ in der Umgebung von a bestehenden Entwicklungen mit $\frac{-n-k+1}{n}$, wo $k = 0$ oder eine ganze positive Zahl, so bleibt $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ entweder mit $(\zeta - \beta)^k$ oder mit $(\zeta - \beta)^{\frac{k+1}{2}}$ multiplicirt in der Umgebung von $\zeta = \beta$ eindeutig und für $\zeta = \beta$ endlich und von Null verschieden. Es ist der erstere Multiplikator oder der zweite anzuwenden, je nachdem z in der Umgebung von $\zeta = \beta$ einwerthig oder zweiwerthig ist. — Dasselbe findet Statt wenn $a = \infty$ und der Exponent der niedrigsten Potenz von $\frac{1}{z}$ mit $\frac{n+1-k}{n}$ bezeichnet wird.

Entspricht dem $\zeta = \beta$ ein nicht singulärer Werth $z = b$ der Funktionen $f(z)$, $\varphi(z)$, und ist $\Psi(\beta) = \infty$, so ist $(\zeta - \beta)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\Psi(\zeta)}$

in der Umgebung von $\zeta = \beta$ eindeutig und für $\zeta = \beta$ endlich und von Null verschieden.

Die Funktion $\Psi(\zeta)$ kann für keinen endlichen Werth von ζ verschwinden. Gehört $\zeta = \infty$ nicht zu den wesentlich singulären Punkten der Funktion z von ζ , so ist $\zeta^3 \sqrt{\Psi(\zeta)}$ oder $\zeta^{\frac{5}{2}} \sqrt{\Psi(\zeta)}$ in der Umgebung von $\zeta = \infty$ eindeutig, und für $\zeta = \infty$ endlich und von Null verschieden, je nachdem z in der Umgebung von $\zeta = \infty$ ein- oder zweiwerthig ist.

11.

Nach den in No. 2 bis 7 angestellten Untersuchungen verbleibt uns noch das Verhalten von z_1, z_2 als Funktionen von u_1, u_2 zu untersuchen, in der Umgebung solcher Werthe $u_1 = v_1, u_2 = v_2$, für welche $z_1 = z_2 = a$. $f(z_1) = f(z_2) = f(a)$, $\varphi(z_1) = \varphi(z_2) = \varphi(a)$ werden, sei es dass a nicht unendlich wird oder mit einem singulären Punkte der Funktionen $f(z), \varphi(z)$ zusammenfällt, sei es dass a mit einem solchen Punkte zusammenfällt oder unendlich wird, wenn nur $\int f(z) dz, \int \varphi(z) dz$ für $z = a$ nicht unendlich werden.

Ist $\zeta = \beta$ einer der Werthe von ζ , welche $z = a$ entsprechen, so ist nach Satz I No. 10 β von den wesentlich singulären Punkten der Funktion z von ζ verschieden.

Ist a ein singulärer Punkt der Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$, so ergibt sich aus der Forderung, dass $\int f(z) dz, \int \varphi(z) dz$ für $z = a$ nicht unendlich werden, nach den in No. 1 und 2 gemachten Voraussetzungen, dass die Entwicklungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = a$ keine Logarithmen enthalten, und dass nach S. II No. 3 der Exponent der niedrigsten Potenz von $z - a$ die Form $\frac{-n + 1}{n}$ habe.

Es ist also in diesem Falle im Satze III No. 10 $k = 0$, so dass diesem Satze gemäss in der Umgebung von $\zeta = \beta$ entweder

$$(1) \quad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \epsilon_0 + \epsilon_1 (\zeta - \beta) + \dots$$

oder

$$(1^a) \quad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \varepsilon_{-1} (\zeta - \beta)^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon_1 (\zeta - \beta)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

wo $\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}$ von Null verschieden.

Ist $a = \infty$ oder ein nicht singulärer Punkt der Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$, und β ein endlicher Werth, so hat nach demselben Satze $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ in der Umgebung von $\zeta = \beta$ wiederum eine der beiden Entwicklungen (1) oder (1^a).

Ist aber $\beta = \infty$, so ist entweder

$$(2) \quad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \rho_3 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 + \rho_4 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^4 + \dots$$

oder

$$(2^a) \quad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \rho_5 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{5}{2}} + \rho_7 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{7}{2}} + \dots$$

ρ_3, ρ_5 von Null verschieden.

Wir setzen gemäss Gleichung (K)

$$(3) \quad \begin{cases} z_1 = P(\zeta_1) + Q(\zeta_1) \sqrt{R(\zeta_1)} \\ z_2 = P(\zeta_2) + Q(\zeta_2) \sqrt{R(\zeta_2)} \end{cases}$$

und gemäss Gleichung (N)

$$(4) \quad \frac{f(z_1)^3}{F(z_1)} = \sqrt{\Psi(\zeta_1)}, \quad \frac{f(z_2)^3}{F(z_2)} = \sqrt{\Psi(\zeta_2)}.$$

Der Voraussetzung gemäss ist $z_1 = z_2 = a$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$. Es erhalten also auch $\sqrt{R(\zeta_1)}, \sqrt{R(\zeta_2)}$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ dasselbe Vorzeichen. Deshalb haben auch $\frac{dz_1}{d\zeta_1}, \frac{dz_2}{d\zeta_2}$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ gleiche Werthe. Da aber vorausgesetzt worden, dass $f(z_1) = f(z_2) = f(a)$ so folgt aus der Gl. (E) und den Gl.: (4), dass $\sqrt{\Psi(\zeta_1)}, \sqrt{\Psi(\zeta_2)}$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ dasselbe Vorzeichen erhalten.

Durch die Substitutionen (3) verwandeln sich die Gleichungen (A) in (A₁), und man erhält aus diesen in der Umgebung von $u_1 = v_1, u_2 = v_2$

a) wenn die Gleichung (1) stattfindet:

$$(5) \quad \begin{cases} u_1 - v_1 = \varepsilon_0 (t_1 + t_2) + \frac{\varepsilon_1}{2} (t_1^2 + t_2^2) \\ u_2 - v_2 = \beta \varepsilon_0 (t_1 + t_2) + \frac{\beta \varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2} (t_1^2 + t_2^2) + \dots \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(6) \quad \zeta_1 - \beta = t_1, \quad \zeta_2 - \beta = t_2.$$

Da die Glieder der beiden Reihen die Form haben

$$\text{Const. } (t_1^m + t_2^m),$$

so lassen sich dieselben so umformen, dass sie nach positiven ganzen Potenzen von

$$(7) \quad t_1 + t_2 = w_1, \quad t_1^2 + t_2^2 = w_2$$

entwickelt erscheinen:

$$(8) \quad \begin{cases} u_1 - v_1 = \varepsilon_0 w_1 + \frac{\varepsilon_1}{2} w_2 + \dots \\ u_2 - v_2 = \beta \varepsilon_0 w_1 + \frac{\beta \varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2} w_2 + \dots \end{cases}$$

wo wir bloss die Glieder erster Dimension verzeichnet haben.

Da $\varepsilon_0 (\beta \varepsilon_1 + \varepsilon_0) - \beta \varepsilon_0 \varepsilon_1 = \varepsilon_0^2$ von Null verschieden, so ergeben nach dem Satze von Jacobi, welchen wir in No. 2 citirt, die Gleichungen (8) w_1, w_2 als nach positiven ganzen Potenzen von $u_1 - v_1, u_2 - v_2$ fortschreitende Reihen. Demnach sind w_1, w_2 in der Umgebung von $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ eindeutig, also haben $\zeta_1 + \zeta_2$ und $\zeta_1 \cdot \zeta_2$ dieselbe Eigenschaft.

b) wenn die Gleichung 1^a erfüllt ist, so folgt

$$(5^a) \quad \begin{cases} u_1 - v_1 = 2 \varepsilon_{-1} (t_1 + t_2) + \frac{2}{3} \varepsilon_1 (t_1^3 + t_2^3) + \dots \\ u_2 - v_2 = 2 \beta \varepsilon_{-1} (t_1 + t_2) + \frac{2}{3} (\beta \varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) (t_1^3 + t_2^3) + \dots \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$(6^a) \quad (\zeta_1 - \beta)^{\frac{1}{2}} = t_1, \quad (\zeta_2 - \beta)^{\frac{1}{2}} = t_2$$

Die Glieder der beiden Reihen haben die Form

$$\text{Const } (t_1^{2m+1} + t_2^{2m+1}).$$

Die sämmtlichen Glieder sind also durch $t_1 + t_2$ theilbar. Werden also $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$, t_1 , t_2 unendlich klein, so sind die Glieder, welche auf $2\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2)$ resp. $2\beta\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2)$ folgen, unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als diese letzteren. Demnach sind $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ gleicher Ordnung mit $t_1 + t_2$. Multiplicirt man die erste der Gl. (5^a) mit β , und subtrahirt die zweite, so ergibt sich, dass

$$\beta(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2)$$

unendlich klein von höherer Ordnung als $t_1 + t_2$, demnach höherer Ordnung als $u_1 - v_1$ oder $u_2 - v_2$, d. h. es muss

$$(9) \quad \beta(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2) = 0$$

sein.

Demnach rücken ζ_1 , ζ_2 in denselben Werth β nur ein, wenn zwischen den letzten Wegelementen auf welchen u_1 , u_2 in v_1 , v_2 eintreffen, die Relation (9) besteht.

c) für den Fall des Bestehens der Gleichung (2) ergibt sich:

$$(5^b) \quad \begin{cases} u_1 - v_1 = -\frac{1}{2}\rho_3(t_1^2 + t_2^2) - \frac{1}{3}\rho_4(t_1^3 + t_2^3) - \dots \\ u_2 - v_2 = -\rho_3(t_1 + t_2) - \frac{1}{2}\rho_4(t_1^2 + t_2^2) - \dots \end{cases}$$

wenn man

$$(6^b) \quad \frac{1}{\zeta_1} = t_1, \quad \frac{1}{\zeta_2} = t_2$$

setzt.

Die Reihen (5^b) gestatten wieder eine derartige Umformung, dass sie nach positiven ganzen Potenzen von

$$(7^a) \quad t_1 + t_2 = w_1, \quad t_1^2 + t_2^2 = w_2$$

entwickelt erscheinen:

$$(8^a) \quad \begin{cases} u_1 - v_1 = -\frac{1}{2} \rho_3 w_2 + \dots \\ u_2 - v_2 = -\rho_3 w_1 - \frac{1}{2} \rho_4 w_2 - \dots \end{cases}$$

Mit Hülfe des citirten Satzes von Jacobi folgt, dass w_1, w_2 sich in der Umgebung von $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ nach ganzen positiven Potenzen von $u_1 - v_1, u_2 - v_2$ entwickeln lassen. Es sind demnach w_1, w_2 , folglich auch $\zeta_1 + \zeta_2$ und $\zeta_1 \cdot \zeta_2$ in derselben Umgebung eindeutig.

d) Findet endlich die Gl. (2^a) statt, so ist

$$(5^c) \quad \begin{cases} u_1 - v_1 = -\frac{2}{3} \rho_5 (t_1^3 + t_2^3) - \frac{2}{5} \rho_7 (t_1^5 + t_2^5) + \dots \\ u_2 - v_2 = -2 \rho_5 (t_1 + t_2) - \frac{2}{3} \rho_7 (t_1^3 + t_2^3) \end{cases}$$

wenn man setzt:

$$(6^c) \quad \zeta_1^{-\frac{1}{2}} = t_1, \quad \zeta_2^{-\frac{1}{2}} = t_2$$

Die Glieder der Reihen sind sämmtlich durch $t_1 + t_2$ theilbar. Werden also $u_1 - v_1, u_2 - v_2, t_1, t_2$ unendlich klein, so wird $u_1 - v_1$ von höherer Ordnung als $t_1 + t_2$, während $u_2 - v_2$ von gleicher Ordnung mit $t_1 + t_2$ ist. Es findet also wieder zwischen den letzten Weg-Elementen, auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 eintreffen, eine Relation statt. Für willkürliche Wege von u_1, u_2 werden daher nicht ζ_1, ζ_2 gleichzeitig unendlich gross.

In der Umgebung von $\zeta = \beta$ wenn die Gleichung (1) besteht, und von $\zeta = \infty$ wenn die Gleichung (2) erfüllt ist, ist $\sqrt{\Psi(\zeta)}$, folglich auch nach einer Bemerkung in No. 9 auch $\sqrt{R(\zeta)}$ eindeutig.

Entspricht daher unter gleicher Voraussetzung den Werthen $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ oder $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty$ das Werthenpaar $u_1 = v_1, u_2 = v_2$, so werden $\sqrt{R(\zeta_1)}, \sqrt{R(\zeta_2)}$, wenn u_1, u_2 in hinlänglicher Nähe an v_1, v_2 um diese Werthe Umläufe vollziehen, ihr Vorzeichen nicht wechseln, daher $G(\zeta_1) \sqrt{R(\zeta_1)} + G(\zeta_2) \sqrt{R(\zeta_2)}$; $G(\zeta_1) \sqrt{R(\zeta_1)} \cdot G(\zeta_2) \sqrt{R(\zeta_2)}$ in derselben Umgebung eindeutig sein, wenn $G(\zeta)$ eine eindeutige Funktion von ζ bedeutet. Sind daher z_1, z_2 diejenigen Werthe von z , welche den Werthenpaaren $(\zeta_1, \sqrt{R(\zeta_1)})$, $(\zeta_2, \sqrt{R(\zeta_2)})$ nach den Gll. (3) entsprechen, so folgt, dass $z_1 + z_2$ und $z_1 \cdot z_2$ in der Umgebung derselben

Werthe u_1, u_2 eindeutig sind, in deren Umgebung sich $\zeta_1 + \zeta_2, \zeta_1 \cdot \zeta_2$ eindeutig verhalten.

12.

Aus den vorhergehenden Entwicklungen geht hervor, dass unter der in No. 2 gemachten Voraussetzung die durch die Gl. (A) definirten Funktionen z_1, z_2 der Variablen u_1, u_2 Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind, deren Coëfficienten für endliche Werthe der willkürlichen Variablen u_1, u_2 sich eindeutig verhalten. Wenn $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ willkürliche Grössen bedeuten, so sind die Grössen $\gamma_{11}u_1 + \gamma_{12}u_2; \gamma_{21}u_1 + \gamma_{22}u_2$ endlich für jedes endliche Werthenpaar von u_1, u_2 , unendlich wenn eine oder beide der letzteren Grössen unendlich gross werden. Es sind also auch ohne die Voraussetzung von No. 2 $z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2$ eindeutige Funktionen von u_1, u_2 für alle endlichen Werthe dieser Veränderlichen.

Fassen wir nunmehr die Untersuchungen von No. 2 bis 7 und No. 11 zusammen, so ergibt sich das folgende Resultat:

Damit die durch die Gleichungen (A) definirten Funktionen z_1, z_2 *der willkürlichen und von einander unabhängigen Variablen* u_1, u_2 einer quadratischen Gleichung genügen, deren Coëfficienten für alle endlichen Werthe dieser Variablen sich eindeutig verhalten, wenn die Funktionen $f(z), \varphi(z)$ die in No. 1 angegebene Beschaffenheit haben, sind folgende nothwendige und hinreichende Bedingungen zu erfüllen: Die beiden Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ dürfen nicht für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden. Der Exponent der niedrigsten Potenz von $z - a$ in der Entwicklung von $\gamma f(z) + \delta \varphi(z)$ (γ, δ willkürliche Grössen) in der Umgebung eines singulären Punktes a der Funktionen $f(z), \varphi(z)$, muss eine negative Zahl sein, welche entweder die negative Einheit nicht übersteigt, oder den Werth $-1 + \frac{1}{n}$ hat (n

eine positive ganze Zahl). Dagegen muss der Exponent der niedrigsten Potenz von $\frac{1}{z}$ in der für die Umgebung von $z = \infty$ gültigen Entwicklung von $\gamma f(z) + \delta \varphi(z)$ entweder eine Zahl sein, welche die positive Einheit nicht übersteigt, oder den Werth $1 + \frac{1}{n}$ hat (n eine positive ganze Zahl). Die durch die Gleichung (D) definirte Funktion z von ζ darf nicht mehr als zweiwerthig sein (Gl. (K)), während $f(z)$ als Funktion von ζ die durch die Gleichungen (L), (L') festgesetzte Beschaffenheit haben muss.

Heidelberg December 1880.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen](#)

Jahr/Year: 1881

Band/Volume: [27](#)

Autor(en)/Author(s): Fuchs Lazarus

Artikel/Article: [Ueber Funktionen zweier Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale zweier gegebener Funktionen entstehen. 1-39](#)