Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen.

Von

Ernst Schering.

(Vorgelegt in der Sitzung der Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen am 1. März 1879.)

Herr Weierstrass hat in seiner der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 16. October 1876 vorgelegten Abhandlung »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen« diese Functionen in Bezug auf die Art und Weise, wie sie unendlich klein und unendlich gross werden, untersucht. Die hervorragende Wichtigkeit, welche die dort bewiesenen Lehrsätze besitzen, wird nicht nur unmittelbar erkannt, sondern zeigt sich auch darin, dass sie die wesentlichen Hülfsmittel zur Aufstellung von solchen Functionen bieten, für welche die Weise, wie die Function unendlich gross und unendlich klein werden soll, vollständig vorgegeben ist.

Eine ausgedehnte Anwendung hat bis jetzt schon der Lehrsatz erfahren, welcher angibt, wie man eine für alle complexen Werthe des Argumentes eindeutige analytische Function von solcher Beschaffenheit bestimmen kann, dass sie für eine unbegrenzte Anzahl beliebig gegebener Werthe des Argumentes unendlich klein oder unendlich gross von beliebig gegebenem endlichem Grade werde, dass sie ferner für alle übrigen endlichen Werthe des Argumentes weder unendlich gross noch unendlich klein werde und dass sie nur für den unendlich grossen Argumentwerth unendlich gross von unbegrenztem Grade werden darf.

Herr Mittag-Leffler hat diese von Herrn Weierstrass gefundene Lösung benutzt, um eine solche Function noch weiter dahin zu bestimmen, dass sie in der Umgebung jeder der beliebig gegebenen Stellen sich von je einer beliebig gegebenen eindeutigen analytischen Function nur um eine Function unterscheiden darf, welche für die Stelle selbst unendlich klein von je einem beliebig gegebenen endlichen Grade wird. Herr Mittag-Leffler hat den betreffenden Lehrsatz in anderer Form ausgesprochen und mit zwei Hülfssätzen und auch mit einer Skizze der Beweise veröffentlicht in:

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar.

Stockholm 1876 Juni 7. No. 6. pag. 3—16. En metod att analytiskt framställa en *funktion af rationel karakter*, hvilken blir oändlig alltid och endast uti vissa föreskrifna *oändlighets punkter*, *hvilkas konstanter* äro på förhand angifna.

Stockholm 1877 Januari 10. No. 1. pag. 17—32. Ytterligare om den analytiska framställningen af *funktioner utaf rationel karakter*. Pars 1.

Stockholm 1877 Mars 14. No. 3. pag. 5—13. Till frågan om den analytiska framställningen af en *funktion af rationel karakter* genom quoten af två beständigt konvergerande potens serier.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques réd. par M. M. Darboux, Hoüel et Tannery. Serie II. t. III. 1879. Extrait d'une lettre à M. Hermite.

Schon im August 1878 hatte Herr Mittag-Leffler auf Marieholm am Wenersee mir die Freundlichkeit erwiesen, seine ausführliche handschriftliche deutsche Abhandlung mit der von ihm gegebenen Lösung für die in jedem dieser Lehrsätze enthaltenen Aufgabe und mit allen seinen Beweisen für dieselben mir anzuvertrauen.

Für die in jenen Lehrsätzen enthaltenen Aufgaben habe ich noch neue andere Lösungen, ferner für diese und für die von Herrn Mittag-Leffler gegebenen Lösungen andere von seinen Beweisen verschiedene Beweise gefunden.

Eine Reihe neuer von mir aufgestellter Lehrsätze, welche mit diesem für die Theorie der analytischen Functionen so wichtigen Gegenstande in enger Beziehung stehen, hatte ich in einer Abhandlung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 1. März 1879 vorgelegt. Da in dieser Schrift auch meine Lösungen für die von Herrn Mittag-Leffler in seiner zuvor erwähnten deutschen Abhandlung ausführlich untersuchten Aufgaben enthalten sind, so habe ich den Druck meiner Arbeit verschoben, bis ich jetzt (am 1. August 1880) von der unmittelbar bevorstehenden Veröffentlichung der Untersuchungen des Herrn Mittag-Leffler vergewissert bin. Die Verschiebung des Druckes benutze ich, um noch Hinweisungen auf die von Anderen inzwischen veröffentlichten oder mir mitgetheilten Arbeiten einzufügen.

Bei Gelegenheit meiner Untersuchungen über diesen Gegenstand habe ich auch Verallgemeinerungen mehrer in den folgenden Arbeiten von Laurent, von Mr. Hermite und von Herrn Mittag-Leffler enthaltener Lehrsätze gefunden:

Pierre Alphonse Laurent, Extension du théorème de Mr. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable. Comptes rendus, t. XVII. pag. 348. Paris 21. Août 1843. Rapport de Mr. Cauchy, t. XVII pag. 938—942. Paris. 30. Oct. 1843.

Hermite, Sur la formule d'interpolation de Lagrange. 5. juillet 1877, in Borchardt's Journal für Mathematik. Band 84. Seite 70.

Mittag-Leffler, Funktionsteoretiska Studier. I. En ny serie-utveckling för funktioner af rationel karakter. Acta Societatis Scientiarum Fennicae t. XI, pag. 275—293. Helsingfors. 1879.

Mittag-Leffler: Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med en godtyckligt vald gränspunkt. Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med ett *ändligt* antal godtyckligt föreskrifna gränspunkter. Om den analytiska framställningen af funktioner af rationel karakter utaf *flere* oberoende variabler. Pars I, Pars II. Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm. 1877 No. 1. pag. 33. Januar 10. — No. 2. pag. 31. Februar 14.— No. 10. pag. 3. December 12. — No. 10. pag. 17. December 12.

An dieser Stelle will ich nur hervorheben, dass die Interpolations-Formel, welche man jetzt die Lagrange'sche zu nennen pflegt, schon vor Lagrange (1794) von Waring 1779 aufgestellt worden ist. Diese Formel kann bekanntlich durch einfache Multiplication mit einem Factor aus der Euler'schen Zerlegung einer algebraischen Function in Partial-Brüche abgeleitet werden, eine Bemerkung, welche nicht bei Euler aber auch nicht bei Waring und Lagrange sich findet:

Euler: Institutiones Calculi Integralis. 3 vol. Petrop. 1768—70. T. II. pag. 432.

Waring: Problems concerning Interpolations. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. LXIX. for the Year 1779. Part. I. pag. 59—67 (Read Jan. 9. 1779).

Lagrange: Leçons élémentaires sur les Mathématiques données à l'École normale en 1795.

Oeuvres de Lagrange publiées par les soins de M. Serret, t. VII. pag. 285, 286, 287. Der Herausgeber bemerkt t. VII. pag. 183:

Les Leçons ont paru d'abord dans les *deux* éditions des Séances de l' École normale an III (1794—1795)

Dix-sept ans plus tard sur l'avis de Lagrange on a réimprimé ces Leçons dans le Journal de l'École Polytechnique (1812) VII^{e} et VIII^{e} cahiers t. II. [p. 417.]

ARTIKEL I.

Anschluss-Function.

Die complexen Grössen will ich, um die verschiedenen für sie zu betrachtenden Beziehungen übersichtlich ausdrücken zu können, wie Gauss sie 1799 in der Doctor-Dissertation »Omnem functionem algebraicam etc.« seinen eignen geometrischen Betrachtungen zu Grunde gelegt hat (Vergl. Gauss Werke Band III. Seite 25, 74, 114) und wie Argand in Gergonne's Annalen 1813, 1815 und Gauss 1831 April 23. (Vergl. G. W. Band II. Seite 171) sie ausführlich betrachten, geometrisch dargestellt denken.

Es sei x eine Grösse, welche alle complexen Werthe annehmen, also, indem der reelle Theil derselben als Abscisse und der Factor der imaginären Einheit in ihrem imaginären Theile als zugehörige rechtwinkelige geradlinige Ordinate vorausgesetzt wird, jedem Punkte der Ebene entsprechen kann. Es seien $\mathrm{F}(x)$ und $\mathfrak{p}(x)$ zwei gegebene Functionen, welche in solcher Weise von x abhängen, dass nach Elimination von x die Function $\mathrm{F}(x)$ durch eine nach Potenzen von $\mathfrak{p}(x)$ mit ganzzahligen wachsenden Exponenten fortschreitende, innerhalb eines den Werth $\mathfrak{p}(x) = 0$ umgebenden Bereiches gleichmässig convergirende, Reihe darstellbar ist, also dort die Form

$$[1] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{F}(x) = \sum_{\mu=-m}^{\mu=+\infty} A_\mu \, \mathfrak{p}(x)^\mu$$

hat, worin m eine endliche ganze positive oder negative Zahl oder die Null sein kann, worin ferner μ die ganzen Zahlen $-m$, $-m+1$, $-m+2, \ldots +\infty$ zu durchlaufen hat, worin weiter jedes A_μ eine von dem Werthe von $\mathfrak{p}(x)$ unabhängige Grösse bedeutet und worin endlich $\mathfrak{p}(x)$ mit etwaiger Ausnahme des Werthes Null alle complexen Werthe, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Grenze liegt, bedeuten kann.

Von jener Reihe [1] will ich, für eine ganze positive oder negative Zahl n oder für n gleich Null, mit

$$\mathfrak{P}[\mathrm{F}(x) \,|\, \mathfrak{p}(x) \,|\, n]$$

die Summe derjenigen Glieder bezeichnen, welche die Potenzen mit nicht grösserem als dem n^{ten} Exponenten enthalten, also

$$[2] \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{P}[\mathrm{F}(x) \,|\, \mathfrak{p}(x) \,|\, n] = \sum_{\mu=-m}^{\mu=+n} A_\mu \, \mathfrak{p}(x)^\mu$$

setzen.

Diese mit Hülfe der Gleichungen [1] *und* [2] *definirte ganze oder gebrochene rationale algebraische Function* $\mathfrak{P}$ *will ich die zum Argumente* $\mathfrak{p}(x)$, *zur Ordnung* n *und zu dem die Gleichung* $\mathfrak{p}(x) = 0$ *erfüllenden Werthe* $x = x_0$ *zugehörende Anschluss-Function der Function* $\mathrm{F}(x)$ *nennen.*

Für den Fall, dass A_{-m} nicht zu Null wird, also $\mathfrak{p}(x)^m \mathrm{F}(x)$ bei verschwindendem $\mathfrak{p}(x)$ weder unendlich gross noch unendlich klein wird, will ich

[3] . . . $1+n+m$ *die Anzahl der Glieder der Anschluss-Function* [2] und

[4] . . . $1+n+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}|m|$ *die Anzahl der gegebenen Coëfficienten der Anschluss-Function* [2] nennen, indem ich nach Herrn Weierstrass von einer

reellen oder complexen Grösse $a+bi$ den absoluten Betrag also den Werth $+\sqrt{(aa+bb)}$ mit $|a+bi|$ bezeichne.

Wenn bei der genaueren Bezeichnung der Anschluss-Function nicht das Argument $\mathfrak{p}(x)$ besonders genannt wird, so soll

[5] . . . . $\mathfrak{p}(x) = x - x_0$ für einen endlichen Werth x_0, aber

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{x} \text{ für } x_0 = \frac{1}{0}$$

vorausgesetzt sein.

In der vorliegenden Abhandlung beschränke ich mich auf solche Functionen $\mathfrak{p}(x)$, welche nur für Einen Werth von x zu Null werden.

Die durch Gleichung [2] definirte Anschluss-Function lässt den Ausdruck:

[6] . . . . $\mathfrak{p}(x)^m \mathfrak{P}[\mathrm{F}(x) \,|\, \mathfrak{p}(x) \,|\, n]$

eine ganze rationale algebraische Function des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$ von nicht höherem als dem $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade werden und denselben also für jeden Werth von $\mathfrak{p}(x)$ eine Bedeutung behalten, auch dort wo die zu Grunde gelegte Reihen-Entwickelung [1] für $\mathrm{F}(x)$ nicht mehr gilt.

[7] . . . Die Anschluss-Function nimmt für $n < -m$ beständig den Werth Null an.

Es ist

[8] . . . . $\mathrm{F}(x) = \mathfrak{P}[\mathrm{F}(x) \,|\, \mathfrak{p}(x) \,|\, n] + \mathfrak{p}(x)^{1+n} \mathfrak{P}^*(\mathfrak{p}(x))$

worin $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{p}(x))$ eine, nach Potenzen von $\mathfrak{p}(x)$ mit nicht negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitende, innerhalb desselben Convergenz-Bereiches wie [1] unbedingt summirbare Reihe bezeichnet.

Indem ich die von Herrn Weierstrass in seiner Abhandlung »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen« gebrauchte Benennungsweise benutze, bezeichne ich eine Function $\mathrm{F}(x)$, wenn sie in der Form [1] darstellbar ist und m darin einen endlichen Werth besitzt, als eine im Convergenz-Bereiche des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$

[9] . . *rational* sich verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$.

Um von den rational sich verhaltenden Functionen (im allgemeinen

Sinne) die rationalen Functionen — im gewöhnlichen Sinne — durch eine kurze Ausdrucksweise zu unterscheiden, nenne ich die letzteren *rationale algebraische* Functionen.

Hat in der Reihen-Entwickelung [1] für eine Function $F(x)$ die Zahl m keinen grösseren Werth als Null, so ist $F(x)$ eine in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$

[10] . . *regulär* sich verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$ zu nennen.

Bei den vorliegenden Untersuchungen kommt es sehr häufig in Betracht, ob die Function für denjenigen Argument-Werth, für dessen Umgebung die Function regulär sich verhält, einen von Null verschiedenen Werth hat. Zur Abkürzung des Ausdrucks will ich die Function in solchem Falle als eine in der Umgebung des betreffenden Argumentwerthes

[11] . . *vollständig regulär* sich verhaltende Function bezeichnen.

Besteht also die Entwickelung [1] entweder für $\mathfrak{p}(x) = x - x_0$ oder für $\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{x}$, und wird $m = 0$ aber verschwindet A_0 nicht, so ist beziehungsweise entweder x_0 oder $\frac{1}{0}$ derjenige Werth des Argumentes, für dessen Umgebung die Function $F(x)$ eine vollständig regulär sich verhaltende Function des Argumentes x genannt wird.

Besitzt eine Function $F(x)$ Reihen-Entwickelungen von der Form [1] für $\mathfrak{p}(x) = x - a$ und für jeden innerhalb eines bestimmten zusammenhängenden Gebietes befindlichen Werth a und zwar der Art, dass den von a abhängigen Coëfficienten A_μ für jeden besonderen Werth a ein einziges Werthensystem zukommt, so heisst sie eine in diesem Gebiete rational sich verhaltende Function des Argumentes x.

Wird unter jener Voraussetzung ferner kein mit einem negativen Index μ behaftetes A_μ von Null verschieden, so heisst die Function eine in jenem Gebiete regulär sich verhaltende Function. Nimmt sie endlich darin auch nicht den Werth Null an, so soll sie eine in jenem Gebiete vollständig regulär sich verhaltende Function genannt werden. Umfasst das in Rede stehende Gebiet auch einen unendlich entfernten Punkt der Ebene x, so muss eine Reihen-Darstellung von der Form [1] für $\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{x}$ gelten.

Lässt man in [1] und [2] die Beschränkungen fallen, dass die Zahl m eine endliche ganze Zahl sei und dass μ nur ganzzahlige Werthe bedeute, behält aber die Voraussetzung bei, dass die Reihen für jeden Werth des complexen Argumentes $\mathfrak{p}(x)$, dessen absoluter Betrag $|\mathfrak{p}(x)|$ unter einer beliebig gegebenen Grösse und über einer beliebig klein wählbaren positiven Grösse liegt, gleichmässig und unbedingt convergiren, so entstehen Functionen $\mathfrak{P}$, welche auch Anschluss-Functionen genannt werden mögen.

Eine in einem gegebenen Gebiete rational sich verhaltende Function besitzt in diesem Gebiete nur rationale algebraische Anschluss-Functionen.

Ist die Function in dem Gebiete eine regulär sich verhaltende, so besitzt sie darin auch nur ganze rationale algebraische Anschluss-Functionen.

Wird die Function in dem Gebiete eine vollständig regulär sich verhaltende, so sind ihre Anschluss-Functionen darin ganz rational algebraisch und jede derselben enthält ein additives von Null verschiedenes constantes Glied.

Sind für eine eindeutige analytische Function in einem gegebenen Gebiete alle Anschluss-Functionen, deren Ordnungszahlen n unter einer beliebig angenommenen endlichen positiven Grenze bleiben, entweder gebrochene rationale algebraische oder ganze rationale algebraische Functionen, so verhält die analytische Function sich in dem Gebiete beziehungsweise rational unstetig oder regulär. Wird von den betrachteten Anschluss-Functionen in dem Gebiete jede ganz rational algebraisch und besitzt jede ein additives von Null verschiedenes constantes Glied, so ist die eindeutige analytische Function auch eine in dem Gebiete vollständig regulär sich verhaltende.

Mit Hülfe der hier eingeführten Anschluss-Function lassen sich manche analytische Betrachtungen in einfacher Form ausdrücken. An dieser Stelle will ich nur auf die Partialbruch-Zerlegung algebraischer Functionen, ferner auf die Abhandlung »Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi« von Gauss 1814 (Vergl. G. W. Bd. III. Seite 165.) und auf die sehr merkwürdigen Untersuchungen von Mr. Hermite »Sur la fonction exponentielle« (Comptes rendus. t. LXXVII, a, b, Paris 1873 juillet 7. août 4) hinweisen.

ARTIKEL II.

Anwendung der Taylor'schen Reihe.

Lehrsatz. *Sind* $\mathrm{F}_1(x)$, $\mathrm{F}_2(x)$, $\mathfrak{p}(x)$ *solche Functionen von* x, *so dass durch Elimination von* x *sowohl die Function* $\mathrm{F}_1(x)$ *wie auch* $\mathrm{F}_2(x)$ *in der Umgebung des Werthes* $\mathfrak{p}(x) = 0$ *rational sich verhaltende Functionen vom Argumente* $\mathfrak{p}(x)$ *werden, sind ferner* k_1, k_2 *beliebige ganze positive oder negative Zahlen, sind endlich* a_1, a_2 *beliebige von* x *unabhängige und* b_1, b_2 *von* x *unabhängige aber auch von* 0 *und* $\frac{1}{0}$ *verschiedene Grössen, so ist*

$$[12] \,..\, \mathfrak{P}[(a_1 \mathrm{F}_1(x) + a_2 \mathrm{F}_2(x)) | \mathfrak{p}(x) | n] = a_1 \mathfrak{p}(x)^{-k_1} \mathfrak{P}[\mathfrak{p}(x)^{+k_1} \mathrm{F}_1(x) | b_1 \mathfrak{p}(x) | n + k_1] + a_2 \mathfrak{p}(x)^{-k_2} \mathfrak{P}[\mathfrak{p}(x)^{+k_2} \mathrm{F}_2(x) | b_2 \mathfrak{p}(x) | n + k_2]$$

Bedeuten m, m_1, m_2 diejenigen ganzen Zahlen, welche jeden der drei Ausdrücke

$$\mathfrak{p}(x)^m (a_1 \mathrm{F}_1(x) + a_2 \mathrm{F}_2(x)), \qquad \mathfrak{p}(x)^{m_1} \mathrm{F}_1(x), \qquad \mathfrak{p}(x)^{m} \; \mathrm{F}_2(x)$$

eine in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ vollständig regulär sich verhaltende Function von dem Argumente $\mathfrak{p}(x)$ werden lassen, so ist m nicht grösser als die grösste der beiden Zahlen m_1 und m_2. Die nach der Vorschrift [3] zu bestimmende Anzahl der Glieder beträgt für die Anschluss-Function auf der ersten Seite, für die erste und für die zweite Anschluss-Function auf der zweiten Seite der Gleichung [12] beziehungsweise

$$1 + n + m, \qquad 1 + n + m_1, \qquad 1 + n + m_2$$

Wendet man solche ganzzahlige k_1, k_2 an, welche keinen der beiden Ausdrücke

$$\mathfrak{p}(x)^{k_1} \mathrm{F}_1(x), \qquad \mathfrak{p}(x)^{k_2} \mathrm{F}_2(x)$$

für die der Null sich nähernde Grösse $\mathfrak{p}(x)$ unendlich gross werden lassen, so kann jede der beiden auf der zweiten Seite der Gleichung [12] stehenden Anschluss-Functionen, wie unmittelbar aus [2] ersichtlich ist, mit Hülfe der Taylor'schen Reihe dargestellt werden.

Ist nemlich:

$$\mathrm{F}_1(x) = \sum_{\mu=-m_1}^{\mu=+\infty} C_{1,\mu}\,\mathfrak{p}(x)^\mu, \qquad \mathrm{F}_2(x) = \sum_{\mu=-m_2}^{\mu=+\infty} C_{2,\mu}\,\mathfrak{p}(x)^\mu$$

worin $C_{1,\mu}$, $C_{2,\mu}$ von x unabhängige Coëfficienten bedeuten, ist ferner, mit Berücksichtigung der Vorzeichen, m_* gleich der grösseren der beiden Zahlen m_1, m_2 und setzen wir:

$$C_{1,\mu} = 0 \text{ für } \mu < -m_1, \qquad C_{2,\mu} = 0 \text{ für } \mu < -m_2$$

so erhalten wir für beliebige ganzzahlige k_1, k_2 unmittelbar aus der Definition [2] die Gleichungen:

$$\mathfrak{P}\big[(a_1\mathrm{F}_1(x) + a_2\mathrm{F}_2(x))\,|\,\mathfrak{p}(x)\,|\,n\big] = \sum_{\mu=-m_*}^{\mu=n} (a_1 C_{1,\mu} + a_2 C_{2,\mu})\cdot\mathfrak{p}(x)^\mu$$

$$\mathfrak{P}\big[a_1\mathfrak{p}(x)^{k_1}\mathrm{F}_1(x)\,|\,b_1\mathfrak{p}(x)\,|\,n+k_1\big] = \sum_{\nu=-m_1+k_1}^{\nu=n+k_1} (a_1 C_{1,\nu-k_1}\cdot b_1^{-\nu})\cdot(b_1\mathfrak{p}(x))^\nu$$

$$\mathfrak{P}\big[a_2\mathfrak{p}(x)^{k_2}\mathrm{F}_2(x)\,|\,b_2\mathfrak{p}(x)\,|\,n+k_2\big] = \sum_{\nu=-m_2+k_2}^{\nu=n+k_2} (a_2 C_{2,\nu-k_2}\cdot b_2^{-\nu})\cdot(b_2\mathfrak{p}(x))^\nu$$

Hieraus folgt die Gleichung [12].

Bei der nach Vorschrift [3] zu bestimmenden Anzahl der Glieder der ersten unter diesen drei Anschluss-Functionen kann diese Anzahl nemlich $1+n+m$ sich kleiner als $1+n+m_*$ ergeben. Dies tritt ein, wenn der Coëfficient $a_1 C_{1,\mu} + a_2 C_{2,\mu}$ für $\mu = -m_*$ zu Null wird.

ARTIKEL III.

Umwechselung der Argumente.

Lehrsatz. Bedeutet in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ der Ausdruck

[13] . . $\dfrac{\mathrm{p}(x)}{\mathfrak{p}(x)}$ eine vollständig regulär sich verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$, und die Function

$\mathrm{F}(x)$ eine rational sich verhaltende Function des Argumentes $\mathrm{p}(x)$

so ist

$$[14] \quad \ldots \quad \mathfrak{P}\Big[\{\mathfrak{P}[\mathrm{F}(x)\,|\,\mathrm{p}(x)\,|\,n]\}\Big|\,\mathfrak{p}(x)\,\Big|\,k\Big] = \mathfrak{P}[\mathrm{F}(x)\,|\,\mathfrak{p}(x)\,|\,k]$$

für jede ganze Zahl k, welche die willkürlich gewählte ganze Zahl n nicht übertrifft, also auch für den Fall, dass von den Anschluss-Functionen eine jede eben so viel Glieder besitzt wie jede andere.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich mit Hülfe der Theorie der analytischen Functionen, wenn man beachtet, dass bei der Herleitung der Entwickelung von $\mathrm{F}(x)$ nach Potenzen von $\mathfrak{p}(x)$ aus der Entwickelung von $\mathrm{F}(x)$ nach Potenzen von $\mathrm{p}(x)$ und aus der Entwickelung von $\mathrm{p}(x)$ nach Potenzen von $\mathfrak{p}(x)$ die nicht über die k^{te} Potenz des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$ hinausgehenden Glieder in der erstgenannten Entwickelung, nemlich von $\mathrm{F}(x)$ unmittelbar nach Potenzen von $\mathfrak{p}(x)$, auch nur von den nicht über die k^{te} Potenz des Argumentes $\mathrm{p}(x)$ hinaus gehenden Gliedern in der anderen Entwickelung, nemlich von $\mathrm{F}(x)$ nach Potenzen von $\mathrm{p}(x)$, abhängen.

ARTIKEL IV.

Multiplications - Satz.

L e h r s a t z. Bedeutet in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ jeder der drei Ausdrücke

$$[15] \quad \ldots\ldots \quad \frac{\mathrm{p}(x)}{\mathfrak{p}(x)}, \qquad \mathrm{p}(x)^h.\,\mathrm{H}(x), \qquad \mathrm{p}(x)^k.\,\mathrm{K}(x)$$

eine vollständig regulär sich verhaltende Function beziehungsweise des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$, $\mathrm{p}(x)$, $\mathrm{p}(x)$, so ist:

$$\begin{aligned}
[16] \ldots \mathfrak{P}[\{\mathrm{H}(x).\mathrm{K}(x)\}\,|\,\mathfrak{p}(x)\,|\,n] &= \mathfrak{P}\Big[\{\mathrm{H}(x)\,.\,\mathfrak{P}[\mathrm{K}(x)\,|\,\mathrm{p}(x)\,|\,\varkappa+h]\}\Big|\,\mathfrak{p}(x)\Big|\,n\Big] \\
&= \mathfrak{P}\Big[\{\mathrm{K}(x)\,.\,\mathfrak{P}[\mathrm{H}(x)\,|\,\mathrm{p}(x)\,|\,\eta+k]\}\Big|\,\mathfrak{p}(x)\Big|\,n\Big] \\
&= \mathfrak{P}\Big[\{\mathfrak{P}[\mathrm{H}(x)|\mathrm{p}(x)|\eta+k]\,.\,\mathfrak{P}[\mathrm{K}(x)|\mathrm{p}(x)|\varkappa+h]\}\Big|\mathfrak{p}(x)\Big|n\Big]
\end{aligned}$$

wenn die ganzen Zahlen $\varkappa$ und η nicht unter der beliebig gewählten ganzen Zahl n liegen, also auch wenn von den Anschluss-Functionen jede einzelne ebenso viel Glieder nemlich $1+n+h+k$ besitzt wie jede andere.

Für denjenigen besonderen Fall dieses Lehrsatzes, welcher sich auf einander gleiche Argumente $\mathfrak{p}(x)$ und $\mathrm{p}(x)$ bezieht, ergibt sich der Beweis, wenn man beachtet, dass das Glied mit der n^{ten} Potenz des Argumentes $\mathrm{p}(x)$ in der Reihen-Entwickelung des Productes $\mathrm{H}(x).\mathrm{K}(x)$ nur von den Gliedern mit nicht höherer als der $(n+h)^{\text{ten}}$ Potenz in der Reihen-Entwickelung von $\mathrm{K}(x)$ nach Potenzen von $\mathrm{p}(x)$ und von den Gliedern mit nicht höherer als der $(n+k)^{\text{ten}}$ Potenz in der Reihen-Entwickelung von $\mathrm{H}(x)$ nach Potenzen von $\mathrm{p}(x)$ abhängt. Nachdem der für diesen besonderen Fall geltende Lehrsatz gefunden ist, braucht auf denselben nur der Satz von der Umwechselung der Argumente Art. III. angewendet zu werden, damit die obige allgemeine Form [16] entsteht.

ARTIKEL V.

Functionen von Functionen.

Lehrsatz. Bedeuten die Ausdrücke

[17] . . . . . $\frac{\mathrm{p}(x)}{\mathfrak{p}(x)}$, $\mathrm{p}(x)^f.\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{p}(x)^k.\mathrm{K}(x)$

in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$, für ganze Zahlen f, k vollständig regulär sich verhaltende Functionen beziehungsweise des Argumentes $\mathfrak{p}(x)$, $\mathrm{p}(x)$, $\mathrm{p}(x)$,
bedeutet ferner der Ausdruck

[18] . . . . $\mathrm{H}(\mathrm{K}(x))$

eine nach Potenzen von $\mathrm{K}(x)$ mit ganzzahligen wachsenden Exponenten fortschreitende Reihe, für welche in dem Falle, dass sie unendlich viele Glieder enthält, der Bereich der gleichmässigen und unbedingten Convergenz auch die Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ mit enthält, also dadurch positive Werthe von k ausschliesst,
bezeichnet endlich die positive oder negative Zahl

[18*] . . . $\mathfrak{h}$ denjenigen in dieser Reihen-Entwickelung der H-Function vorkommenden Exponenten der Potenz des Argumentes $\mathrm{K}(x)$, welcher unter den von Null verschiedenen Exponenten für den Fall eines negati-

ven k den kleinsten Werth und für den Fall eines positiven k den grössten Werth hat, so ist:

$$[19]\,..\,\mathfrak{P}[\{F(x).H(K(x))\}|\mathfrak{p}(x)|n] = \mathfrak{P}\Big[\{F(x).H\{\mathfrak{P}[K(x)|p(x)|\varkappa]\}\Big|\mathfrak{p}(x)\Big|n\Big]$$

für jede ganze Zahl $\varkappa$, welche nicht unter der beliebig gewählten ganzen Zahl $n+f+\mathfrak{h}k-k$ liegt.

Der Beweis dieses Lehrsatzes kann daraus hergeleitet werden, dass in dem Ausdrucke $F(x).H(K(x))$ dasjenige Glied mit der n^{ten} Potenz von $p(x)$, welches sich durch die Ausführung der Reihen-Entwickelung von $F(x)$ nach Potenzen von $p(x)$ und durch die Einsetzung der Reihen-Entwickelung von $K(x)$ nach Potenzen von $p(x)$ in die Reihen-Entwickelung von $H(K(x))$ nach Potenzen von $K(x)$ ergibt, ausser von den Gliedern in der Entwickelung der Function $F(x)$ nur von den Gliedern bis zur $(n+f+\mathfrak{h}k-k)^{\text{ten}}$ Potenz in der Entwickelung der Function $K(x)$ nach Potenzen von $p(x)$ abhängt. Auf diese Weise entsteht der Lehrsatz für den Fall, dass die drei Anschluss-Functionen für dasselbe Argument $p(x)$ gebildet werden. Um die äusseren Anschluss-Functionen wie in [19] für das andere Argument $\mathfrak{p}(x)$ zu erhalten, braucht man die gefundene Gleichung nur der Umwechselung der Argumente nach Vorschrift [14] in Art. III. zu unterwerfen.

Die wiederholte Anwendung der durch die Gleichungen [16] und [19] dargestellten Sätze ergibt den

Lehrsatz: *Bedeuten die Ausdrücke:*

$$[20]\quad .\ .\ \frac{p(x)}{\mathfrak{p}(x)},\quad p(x)^f.F(x),\quad p(x)^{k_\rho}.K_\rho(x),\quad \textit{für}\ \rho = 1, 2, 3, \ldots$$

in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(x) = 0$ *für ganze Zahlen* f, k_1, $k_2 \ldots$ *vollständig regulär sich verhaltende Functionen beziehungsweise des Argumentes*

$\mathfrak{p}(x)$, $p(x)$, $p(x)$,

bedeutet ferner jeder der Ausdrücke

$$[21]\quad .\ .\ .\ .\quad H_\rho(K_\rho(x))\quad \textit{für jedes}\ \rho = 1, 2, 3\ \ldots$$

eine nach Potenzen von $K_\rho(x)$ *mit ganzzahligen wachsenden Exponenten fortschreitende Reihe, für welche in dem Falle, dass sie unendlich viele Glieder* *enthält, der Bereich ihrer gleichmässigen und unbedingten Convergenz auch die Umgebung des Werthes* $\mathfrak{p}(x) = 0$ *mit umfasst und dadurch positive Werthe von* $k_1, k_2 \ldots$ *ausschliesst.*

bezeichnet noch

[22] . . h_ρ, *für den Fall eines negativen Werthes von* k_ρ, *den niedrigsten in dieser Reihe* $\mathrm{H}_\rho(\mathrm{K}_\rho(x))$ *vorkommenden Exponenten der Potenz des Argumentes* $\mathrm{K}_\rho(x)$ *und, für den Fall eines positiven Werthes von* k_ρ, *den höchsten Exponenten, aber*

[23] . . $\mathfrak{h}_\rho$ *denjenigen in dieser Reihe vorkommenden Exponenten der Potenz des Argumentes* $\mathrm{K}_\rho(x)$, *welcher unter den von Null verschiedenen Exponenten, für den Fall eines negativen* k_ρ, *den kleinsten Werth hat und, für den Fall eines positiven* k_ρ, *den grössten Werth hat*

und ist endlich

[24] . . . . $g = \sum\limits_\rho h_\rho k_\rho$

so wird

[25] . . $\mathfrak{P}[\mathrm{F}(x).\prod\limits_\rho(\mathrm{H}_\rho\{\mathrm{K}_\rho(x)\})|\mathfrak{p}(x)|n] = \mathfrak{P}\Big[\mathrm{F}(x).\prod\limits_\rho(\mathrm{H}_\rho\{\mathfrak{P}[\mathrm{K}_\rho(x)|\mathfrak{p}(x)|\varkappa_\rho]\})\Big|\mathfrak{p}(x)\Big|n\Big]$

wenn die ganzen Zahlen $\varkappa_\rho$ *die Bedingung*

[25*] . . $\varkappa_\rho \geqq n + f + g - h_\rho k_\rho + \mathfrak{h}_\rho k_\rho - k_\rho$ *für* $\rho = 1, 2, 3 \ldots$

erfüllen.

Auf der zweiten Seite der Gleichung [25] kann man, anstatt von jeder Function $\mathrm{K}_\rho(x)$ die Anschluss-Function zu nehmen, auch nur von einer beliebigen Anzahl derselben die Anschluss-Function bilden.

Die Gleichung [25] enthält auch den Fall, dass man statt eines Factors $\mathrm{F}(x)$ mehrere Factoren $\mathrm{F}_r(x)$ hat, von denen man einige durch ihre Anschluss-Functionen ersetzen will; in der That man braucht nur

$$\mathrm{H}_r(\mathrm{K}_r(x)) = \mathrm{K}_r(x) = \mathrm{F}_r(x)$$

und

$$h_r = \mathfrak{h}_r = 1, \quad k_r = f_r$$

anzunehmen.

ARTIKEL VI.

Gegebene Anschluss-Functionen.

Eine Anschluss-Function bezieht sich auf die Umgebung eines einzelnen Punktes. Für vorgeschriebene Anschluss-Functionen, welche sich auf die Umgebungen verschiedener Punkte beziehen, ist von besonderer Wichtigkeit die Auflösung der

Aufgabe: *Innerhalb eines beliebig gegebenen zusammenhängenden, nicht die ganze Ebene aber doch im Allgemeinen den Werth ∞ umfassenden, Gebietes der veränderlichen complexen Grösse x als Argument soll die Function $\mathfrak{L}(x)$ die Eigenschaft besitzen,*

dass für die Umgebung des Werthes $a_0 = \frac{1}{0}$ und eines jeden der innerhalb des genannten Gebietes beliebig vorausbestimmten Werthe $a_1, a_2, \ldots a_t$ von x die Function $\mathfrak{L}(x)$ eine rational sich verhaltende Function von x sei und zwar dass von der Entwickelung der Function $\mathfrak{L}(x)$ nach Potenzen beziehungsweise von $\frac{1}{x}$, $(x - a_1)$, $(x - a_2) \ldots (x - a_t)$ die Glieder mit nicht höheren als der n_0^{ten}, n_1^{ten}, $n_2^{ten} \ldots n_t^{ten}$ Potenz, also die Anschluss-Functionen

$$[26] \quad \ldots \quad \mathfrak{P}\left[\mathfrak{L}(x)\left|\tfrac{1}{x}\right|n_0\right] = \sum_{\mu=-m_0}^{\mu=+n_0} A(0,\mu)\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu} = \mathrm{G}(0,x)$$

$$\mathfrak{P}\left[\mathfrak{L}(x)\left|x-a_r\right|n_r\right] = \sum_{\mu=-m_r}^{\mu=+n_r} A(r,\mu)\,(x-a_r)^{\mu} = \mathrm{G}(r,x)$$

$$\text{für} \quad r = 1, 2, 3 \ldots t$$

mit den von x unabhängigen Coëfficienten $A(0,\mu)$ und $A(r,\mu)$ gegeben seien; dass aber für die Umgebung eines jeden, von $a_0, a_1, a_2, \ldots a_t$ verschiedenen im Innern des vorgegebenen Gebietes liegenden, Werthes des x die Function $\mathfrak{L}(x)$ sich regulär verhalte.

Eine noch mehr beschränkende Aufgabe wird diejenige sein, worin dies zuletzt geforderte reguläre Verhalten der Function $\mathfrak{L}(x)$ auch ein vollständig reguläres sein soll.

Auflösung:

Ausserhalb des für die Function $\mathfrak{L}(x)$ vorgegebenen Gebietes will ich die Werthe $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_t$ beliebig von einander verschieden oder zum Theil oder auch alle einander gleich angenommen denken. Für den Fall, dass der Werth $\frac{1}{0}$ nicht innerhalb des gegebenen Gebietes liegt, will ich $\alpha_0 = \frac{1}{0}$ annehmen und weil in diesem Falle eine Anschluss-Function für die Umgebung des Werthes $x = \frac{1}{0}$ nicht gegeben ist, so will ich dann $a_0 = 0$ setzen, wenn nemlich für die Umgebung des Werthes $x = 0$ die Anschluss-Function gegeben ist; anderen Falls sollen in den nachfolgenden Ausdrücken die Glieder mit dem Index 0 auszulassen sein. Es sind also $a_0, a_1, a_2, \ldots a_t$ alle von einander und von sämmtlichen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_t$ verschieden;

[27] . . es ist a_ρ nicht gleich $\frac{1}{0}$ wenn $\rho > 0$;

es sind in:

[28] . . . $$\mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x)|\tfrac{1}{x}|n_0] = \sum_{\mu=-m_0}^{\mu=+n_0} A(0,\mu)\left(\tfrac{1}{x}\right)^\mu = \mathrm{G}(0,x)$$

für $a_0 = \frac{1}{0}$ und α_0 nicht gleich $\frac{1}{0}$

die von x unabhängigen Coëfficienten $A(0,\mu)$ gegeben. Für den Fall aber, dass, während der Werth $x = \frac{1}{0}$ sich in dem vorgegebenen Gebiete befindet (also α_0 nicht gleich $\frac{1}{0}$ ist), dennoch eine Anschluss-Function für die Umgebung des Werthes $\frac{1}{0}$ nicht vorgegeben ist, würde die Gleichung [28] nicht in Betracht kommen und in jeder der folgenden auf die Lösung sich beziehenden Formel das Glied mit dem Index 0 auszulassen sein.

Es sind nach obiger Annahme in

[29] . . . . $$\mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x)|x|n_0] = \sum_{\mu=-m_0}^{\mu=+n_0} A(0,\mu)\,x^\mu = \mathrm{G}(0,x)$$

für $\alpha_0 = \frac{1}{0}$, $a_0 = 0$

die von x unabhängigen Coëfficienten $A(0,\mu)$ gegeben. Für den Fall aber, dass, während der Werth $\frac{1}{0}$ sich nicht in dem für die Function $\mathfrak{L}(x)$ vorgegebenen Gebiete befindet (also α_0 gleich $\frac{1}{0}$ angenommen ist), eine Anschluss-Function für die Umgebung des Werthes 0 nicht vorgegeben ist, würde die Gleichung [29] nicht in Betracht kommen und in jeder der folgenden auf die Lösung sich beziehenden Formel das Glied mit dem Index 0 auszulassen sein.

Um für die verschiedenen in Betracht kommenden Fälle eine gemeinsame Form der Lösung zu erhalten, setze ich:

[30] . . $\mathfrak{q}(r,x) = \frac{1}{x-a_r}$ wenn a_r nicht gleich $\frac{1}{0}$ und $r > 0$ ist,

[31] . . $\mathfrak{p}(r,x) = \frac{x-a_r}{x-a_r} = 1 - \frac{a_r - a_r}{x-a_r} = 1 - \frac{\mathfrak{q}(r,x)}{\mathfrak{q}(r,a_r)}$ wenn a_r nicht gleich $\frac{1}{0}$ und $r > 0$ ist,

[32] . . $\mathfrak{p}(0,x) = \frac{1}{x-a_0} = \mathfrak{q}(0,x)$ wenn a_0 nicht gleich $\frac{1}{0}$ und wenn für die Umgebung des Werthes $a_0 = \frac{1}{0}$ eine Anschluss-Function [28] vorgegeben ist,

[33] . . $\mathfrak{p}(0,x) = 1 = \mathfrak{q}(0,x)$ wenn a_0 nicht gleich $\frac{1}{0}$ und wenn für die Umgebung des Werthes $\frac{1}{0}$ eine Anschluss-Function nicht vorgegeben ist,

[34] . . $\mathfrak{q}(r,x) = x$ wenn $a_r = \frac{1}{0}$ und $r > 0$ ist,

[35] . . $\mathfrak{p}(r,x) = 1 - \frac{x}{a_r} = 1 - \frac{\mathfrak{q}(r,x)}{\mathfrak{q}(r,a_r)}$ wenn $a_r = \frac{1}{0}$ und $r > 0$ ist,

[36] . . $\mathfrak{p}(0,x) = x = \mathfrak{q}(r,x)$ wenn $a_0 = \frac{1}{0}$ und wenn für die Umgebung des Werthes $a_0 = 0$ eine Anschluss-Function [29] vorgegeben ist,

[37] . . $\mathfrak{p}(0,x) = 1 = \mathfrak{q}(0,x)$ wenn $a_0 = \frac{1}{0}$ und wenn für die Umgebung des Werthes 0 eine Anschluss-Function nicht vorgegeben ist.

Ferner bedeute

[38] . . $\varphi(\rho,x)$ eine in der Umgebung jedes endlichen, einem innerhalb des vorgegebenen Gebietes liegenden x entsprechenden, Werthes $\mathfrak{p}(\rho,x)$ regulär und in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(\rho,x) = 0$ vollständig regulär sich verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(\rho,x)$,

[39] . . $\psi(\rho,x)$ eine in der Umgebung jedes endlichen, einem innerhalb des vorgegebenen Gebietes liegenden x entsprechenden, Werthes $\mathfrak{p}(\rho,x)$ regulär sich verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(\rho,x)$,

[40] . . $\mathfrak{W}(\rho,s,x)$, $\mathfrak{V}(\sigma,x)$ in der Umgebung jedes endlichen, einem innerhalb des vorgegebenen Gebietes liegenden x entsprechenden,

Werthes beziehungsweise von $\mathfrak{p}(s,x)$, $\mathfrak{p}(\sigma,x)$, je eine vollständig regulär sich verhaltende Function dieser Grössen als Argumente.

Schliesslich setze ich

$$[41] \;..\; \mathfrak{W}(\rho,x) = \prod_{s=0}^{s=t} \mathfrak{p}(s,x)^{1+m_s+n_s}\,\mathfrak{W}(\rho,s,x)$$

$$[42] \;...\; \mathfrak{V}(x) = \prod_{\sigma=0}^{\sigma=t} \mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma}\,\mathfrak{V}(\sigma,x)$$

$$[43] \;..\; \mathfrak{L}(x) = \mathfrak{V}(x)\,\Phi\left\{\sum_{\rho=0}^{\rho=t} \mathfrak{W}(\rho,x)\left\{\varphi(\rho,x).\mathfrak{P}\left[\left\{\frac{1}{\mathfrak{W}(\rho,x).\varphi(\rho,x)}\Psi\left(\frac{G(\rho,x)}{\mathfrak{V}(x)}\right)\right\}\middle|\mathfrak{p}(\rho,x)\middle|-1\right]+\psi(\rho,x)\right\}\right\}$$

worin

[44] . . $\Psi\frac{G(\rho,x)}{\mathfrak{V}(x)}$ für ein innerhalb des vorgegebenen Gebietes liegendes x eine in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(\rho,x)=0$ regulär sich verhaltende Function des Argumentes $\mathfrak{p}(\rho,x)$ von solcher Beschaffenheit bedeutet, dass zu ihr die Function

[45] . . Φ invers ist, also

$$\Phi\left\{\Psi\left(\frac{G(\rho,x)}{\mathfrak{V}(x)}\right)\right\} = \frac{G(\rho,x)}{\mathfrak{V}(x)}$$

wird und zwar dass die Function

[46] . . Φ eine nach Potenzen des unter ihr in Formel [43] stehenden Argumentes mit wachsenden nicht negativen Exponenten fortschreitende, die erste Potenz enthaltende, für alle in dem vorgegebenen Gebiete liegende x gleichmässig und unbedingt convergirende Reihe bedeutet.

Die in den Nummern [1] und [2], und [30] bis [46] ausgesprochene Bestimmungsweise für die einzelne Anschluss-Function $\mathfrak{P}$ und für die übrigen in der zweiten Seite der Gleichung [43] vorkommenden Functionen genügen, wie ich im nachfolgenden Artikel beweisen werde, um durch die Formel [43] die zu Eingang des laufenden Artikels gestellte erste Aufgabe für den Fall einer endlichen Anzahl t oder $t+1$ von Anschluss-Stellen allgemein zu lösen.

Die zweite Aufgabe fordert noch, dass die zu suchende Function in dem gegebenen Gebiete ausser bei den Anschluss-Stellen sich vollständig regulär verhalte; für sie bietet die Formel [43] ebenfalls die allgemeine Lösung in dem Falle einer endlichen Anzahl t oder $t+1$ von Anschluss-Stellen, wenn noch die Bedingung erfüllt wird, dass die Function

[47] . . Φ für keinen Werth des in [43] unter ihr stehenden Argumentes, welcher einem im vorgegebenen Gebiete liegenden Werthe von x entspricht, den Werth Null annimmt.

Für den Fall einer unbegrenzt wachsenden Anzahl von gegebenen Anschluss-Stellen tritt noch die Bedingung hinzu, dass die Functionen $\mathfrak{W}(\rho, s, x)$, $\mathfrak{V}(\sigma, x)$ die Convergenz der in den Gleichungen [41], [42] vorkommenden unendlich vielgliederigen Producte und dass die Functionen $\varphi(\rho, x)$ und $\psi(\rho, x)$ die Convergenz der in [43] vorkommenden unendlich vielgliederigen Summe bewirken.

Damit der Umstand, von welchem jene Convergenz abhängt, besonders hervortritt, will ich die Functionen in den Formen:

[48] . . $\mathfrak{W}(\rho, s, x) = \mathrm{W}(\rho, s, x) \, . \, \Phi_{\rho, s}\{\mathfrak{P}[\Psi_{\rho, s}(\mathfrak{p}(s, x)^{-1-m_s-n_s}) \,|\, \mathfrak{q}(s, x) \,|\, k_s]\}$

[49] . . . $\mathfrak{V}(\sigma, x) = \mathrm{V}(\sigma, x) \, . \, \Phi_{\sigma}\{\mathfrak{P}[\Psi_{\sigma}(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{+m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, x) \,|\, h_\sigma]\}$

[50] . . . $\varphi(\rho, x) = \varphi(0, \rho, x) \, \mathrm{Q}(\rho, x)^{\varkappa_\rho} \, . \, \mathfrak{P}[\mathrm{Q}(\rho, x)^{-\varkappa_\rho} \,|\, \mathfrak{p}(\rho, x) \,|\, m_\rho + n_\rho]$

[51] . . . $\mathrm{R}(\rho, x) = \varphi(\rho, x) \, . \, \mathfrak{P}\left[\left\{\frac{1}{\mathfrak{W}(\rho, x) \, . \, \varphi(\rho, x)} \, . \, \Psi \frac{\mathrm{G}(\rho, x)}{\mathfrak{V}(x)}\right\} \middle| \, \mathfrak{p}(\rho, x) \, \middle| -1\right]$

[52] . . . $\psi(\rho, x) = \psi(0, \rho, x) - \mathfrak{P}[\mathrm{R}(\rho, x) \,|\, \mathfrak{q}(\rho, x) \,|\, \lambda_\rho]$

darstellen.

Hier haben die Functionen

[53] . . . $\varphi(0, \rho, x)$, $\psi(0, \rho, x)$, $\mathrm{W}(\rho, s, x)$, $\mathrm{V}(\sigma, x)$ dieselben allgemeinen Eigenschaften wie solche beziehungsweise für $\varphi(\rho, x)$, $\psi(\rho, x)$, $\mathfrak{W}(\rho, s, x)$, $\mathfrak{V}(\sigma, x)$ unter Nr. [38], [39], [40] ausgesprochen sind;

die Functionen

[54] . . . $\Psi_{\rho, s}$, Ψ_σ mit den unter ihnen in [48], [49] stehenden Argumenten sind in der Umgebung beziehungsweise von $\frac{\mathfrak{q}(s, x)}{\mathfrak{q}(s, a_s)} = \frac{1}{\infty}$, $\frac{\mathfrak{q}(\sigma, x)}{\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)} = \frac{1}{\infty}$, regulär sich verhaltende Functionen beziehungsweise von den Argumenten $\mathfrak{q}(s, x)$, $\mathfrak{q}(\sigma, x)$;

[55] . . . $\Phi_{\rho,s}$, Φ_σ sind die inversen Functionen beziehungsweise von $\Psi_{\rho,s}$, Ψ_σ also

$$\Phi_{\rho,s}\,\Psi_{\rho,s}(\mathfrak{p}(s,x)^\gamma) = \mathfrak{p}(s,x)^\gamma, \quad \Phi_\sigma\,\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^\gamma) = \mathfrak{p}(\sigma,x)^\gamma$$

für jede ganze Zahl γ, und zwar bedeuten

[56] . . . $\Phi_{\rho,s}$, Φ_σ nach Potenzen der unter ihnen beziehungsweise in [48], [49] stehenden Argumente mit wachsenden nicht negativen Exponenten fortschreitende, für alle in dem vorgegebenen Gebiete liegende x gleichmässig und unbedingt convergirende Reihen; dieselben werde ich Convergenz-Factoren in Producten (nemlich der Ausdrücke [41] und [42]) nennen;

[57] . . . $Q(\rho,x)$ ist eine in der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(\rho,x) = 0$ vollständig regulär sich verhaltende Function von dem Argumente $\mathfrak{p}(\rho,x)$, und für das vorgegebene Gebiet eine eindeutige analytische nicht unendlich gross werdende Function von x.

Die Function $Q(\rho,x)$ dividirt durch ihre eingliedrige für das Argument $\mathfrak{p}(\rho,x)$ gebildete Anschluss-Function gibt bei genügend grossem ρ einen Werth, dessen absoluter Betrag ein echter Bruch ist. Besonders einfache Formen von $Q(\rho,x)$ sind $1-\mathfrak{p}(\rho,x)$ und $e^{1-\mathfrak{p}(\rho,x)}$.

Den ganzen von $Q(\rho,x)$ abhängigen Factor, mit welchem die Function $\varphi(0,\rho,x)$ auf der zweiten Seite der Gleichung [50] multiplicirt ist, werde ich Convergenz-Factor in einer Summe (nemlich des Ausdruckes [43]) nennen;

[57*] . . . die auf der zweiten Seite der Gleichung [52] mit $\psi(0,\rho,x)$ durch Subtraction verbundene Anschluss-Function werde ich Convergenz-Subtrahend in einer Summe (nemlich des Ausdrucks [43]) nennen.

[58] . . . k_ρ, h_σ, $\varkappa_\rho$, λ_ρ sind ganze Zahlen, deren genügend gross gewählte Werthe die Convergenz der Producte und der Summen für $t=\infty$ hervorbringen sollen.

In manchen Fällen kann es vortheilhaft sein, die Lösung der zu Anfang dieses Artikels bezeichneten Aufgabe durch den Ausdruck:

[59]..$\mathfrak{L}(x) = \mathfrak{V}(x)\prod\limits_{\rho=0}^{\rho=t}\Theta_\rho\Big\{\mathfrak{W}(\rho,x)\Big\{\varphi(\rho,x)\cdot\mathfrak{P}\Big[\Big\{\frac{1}{\mathfrak{W}(\rho,x)\cdot\varphi(\rho,x)}\cdot T_\rho\Big(\frac{G(\rho,x)}{\mathfrak{V}(x)}\Big)\Big\}\Big|\mathfrak{p}(\rho,x)\Big|-1\Big]+\psi(\rho,x)\Big\}\Big\}$

darzustellen, worin die Functionen:

[60] . . . T_ρ und Θ_ρ die gleichen Bedingungen wie nach [44], [45], [46] beziehungsweise Ψ und Φ also auch die Gleichung

[60*] . . . . $\Theta_\rho\left\{T_\rho\left(\frac{G(\rho, x)}{\mathfrak{P}(x)}\right)\right\} = \frac{G(\rho, x)}{\mathfrak{P}(x)}$

erfüllen,

aber ausserdem noch die Reihe

[61] . . . Θ_ρ das Glied mit der nullten Potenz des Argumentes und zwar in der besonderen Form der positiven Einheit enthält.

Für einige einfache Formen der in den Convergenz-Factoren [48], [49], [50] noch willkürlich gelassenen Functionen und für die Convergenz-Subtrahenden [52] werde ich die Möglichkeit, die gleichmässige und unbedingte Convergenz der Producte und der Summen für $t = \infty$ zu erreichen, nachweisen.

Anstatt der in den Convergenz-Factoren und Convergenz-Subtrahenden hier [48] bis [52] angewendeten Anschluss-Functionen $\mathfrak{P}$ können zu demselben Zwecke auch geeignet gewählte ganze algebraische Functionen insbesondere Interpolations-Functionen benutzt werden.

ARTIKEL VII.

Endliche Anzahl von Anschluss-Stellen.

Um für den Fall einer endlichen Anzahl t oder $t+1$ vorgegebener Anschluss-Stellen zu beweisen, dass die zweiten Seiten der Gleichungen [43] und [59] die in den beiden Aufgaben des Artikel VI zu suchenden Functionen darstellen, hat man zunächst unmittelbar aus den unter Nr. [30] bis [61] ausgesprochenen Voraussetzungen zu schliessen, dass die eben bezeichneten Ausdrücke für die in dem vorgegebenen Gebiete befindlichen Werthe von x eindeutige analytische Functionen des Argumentes x werden und in jenem Gebiete nur an den gegebenen Anschluss-Stellen unendlich grosse Werthe annehmen können.

Zur Untersuchung der Frage, ob die in den Gleichungen [26], [28], [29] vorgeschriebenen Formen der einzelnen Anschluss-Functionen den

Ausdrücken [43] und [59] zukommen, und um dabei die verschiedenen Fälle nicht gesondert behandeln zu müssen, setzen wir

[62] . . $\pi(r,x) = x - a_r$ für $r > 0$, also wenn Gleichung [26] erfüllt sein soll;

[63] . . $\pi(r,x) = \frac{1}{x}$ für $r = 0$ und wenn die Gleichung [28] erfüllt sein soll;

[64] . . $\pi(r,x) = x$ für $r = 0$ und wenn die Gleichung [29] erfüllt sein soll.

Die unter Nr. [30] bis [36] für $\mathfrak{p}(r,x)$ getroffenen Bestimmungen lassen ersehen, dass in allen den Fällen, in welchen eine Anschluss-Function durch die Aufgabe vorgegeben ist,

[65] . . $\frac{\mathfrak{p}(r,x)}{\pi(r,x)}$ eine in der Umgebung des Werthes $\pi(r,x) = 0$ vollständig regulär sich verhaltende Function des Argumentes $\pi(r,x)$ wird.

Die gesuchte Anschluss-Function

[66] . . . . $\mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x)|\pi(r,x)|n_r]$

worin $\mathfrak{L}(x)$ den durch die zweite Seite der Gleichung [43] dargestellten Ausdruck bedeutet, können wir mit Hülfe der Gleichung [19] bestimmen, wenn wir n in n_r, $\mathfrak{p}(x)$ in $\pi(r,x)$, $\mathrm{p}(x)$ in $\mathfrak{p}(r,x)$, $\mathrm{F}(x)$ in $\mathfrak{V}(x)$, f in m_r, die H-Function in die Φ-Function, $\mathfrak{h}$ in $+1$, und $\mathrm{K}(x)$ in den Ausdruck:

[67] . . $\sum\limits_{\rho=0}^{\rho=t}\left\{\mathfrak{W}(\rho,x)\cdot\varphi(\rho,x)\cdot\mathfrak{P}\left[\left\{\frac{1}{\mathfrak{W}(\rho,x)\cdot\varphi(\rho,x)}\cdot\Psi\left(\frac{\mathrm{G}(\rho,x)}{\mathfrak{V}(x)}\right)\right\}\middle|\mathfrak{p}(\rho,x)\middle|-1\right]+\mathfrak{W}(\rho,x)\cdot\psi(\rho,x)\right\}$

übergehen lassen.

Von dem Ausdrucke [67] haben wir also nun die zur Ordnung $n_r + m_r$, zum Argument $\mathfrak{p}(r,x)$ und zu der Umgebung des Werthes $\mathfrak{p}(r,x) = 0$ zugehörige Anschluss-Function zu finden. Da die Anschluss-Function einer Summe von Functionen gleich der Summe der von den einzelnen Functionen gebildeten Anschluss-Functionen ist, so erhalten wir hier für die von [67] aufzusuchende Auschluss-Function die Summe der Glieder

[68] . . $\mathfrak{P}\left[\left\{\mathfrak{W}(\rho,x)\cdot\varphi(\rho,x)\cdot\mathfrak{P}\left[\left\{\frac{1}{\mathfrak{W}(\rho,x)\cdot\varphi(\rho,x)}\cdot\Psi\left(\frac{\mathrm{G}(\rho,x)}{\mathfrak{V}(x)}\right)\right\}\middle|\mathfrak{p}(\rho,x)\middle|-1\right]\right\}\middle|\mathfrak{p}(r,x)\middle|n_r+m_r\right]$

und der Glieder

$$[69] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathfrak{P}[\{\mathfrak{W}(\rho, x) \cdot \psi(\rho, x)\} | \mathfrak{p}(r, x) | n_r + m_r]$$

für $\rho = 0, 1, 2, 3, \ldots, t$

Aus der Definition der Anschluss-Function $\mathfrak{P}$ durch Gleichung [1] und [2], aus der Bestimmung der Function $\mathfrak{W}(\rho, x)$ durch Gleichung [41], und aus den unter Nr. [38], [39] aufgestellten Eigenschaften von $\varphi(\rho, x)$ und $\psi(\rho, x)$ ist unmittelbar ersichtlich, dass jedes Glied [69] und jedes zu einem von r verschiedenen ρ zugehöriges Glied [68] gleich Null wird. Die gesuchte Anschluss-Function von dem ganzen Ausdruck [67] zieht sich also zu

$$[70] \ldots \mathfrak{P}\left[\left\{\mathfrak{W}(r, x) \cdot \varphi(r, x) \cdot \mathfrak{P}\left[\left\{\frac{1}{\mathfrak{W}(r, x) \cdot \varphi(r, x)} \cdot \Psi\left(\frac{G(r, x)}{\mathfrak{V}(x)}\right)\right\} \middle| \mathfrak{p}(r, x) \middle| -1\right]\right\} \middle| \mathfrak{p}(r, x) \middle| n_r + m_r\right]$$

zusammen und diese wird nach dem Multiplications-Satze in Nr. [16] gleich

$$[71] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathfrak{P}\left[\Psi\left(\frac{G(r, x)}{\mathfrak{V}(x)}\right) \middle| \mathfrak{p}(r, x) \middle| n_r + m_r\right]$$

Der Ausdruck [71] tritt also bei der oben ausgeführten Anwendung der Gleichung [19] auf die zu bestimmende Anschluss-Function [66] an die Stelle von

$$\mathfrak{P}[K(x) | \mathfrak{p}(x) | \varkappa]$$

und wir erhalten:

$$[72] \ldots \mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x) | \pi(r, x) | n_r] = \mathfrak{P}\left[\left\{\mathfrak{V}(x) \cdot \Phi\left\{\mathfrak{P}\left[\Psi\left(\frac{G(r, x)}{\mathfrak{V}(x)}\right) \middle| \mathfrak{p}(r, x) \middle| n_r + m_r\right]\right\}\right\} \middle| \pi(r, x) \middle| n_r\right]$$

Auf die zweite Seite dieser Gleichung wenden wir wieder die Transformations-Gleichung [19] an, indem wir jetzt $\Psi\left(\frac{G(r, x)}{\mathfrak{V}(x)}\right)$ für $K(x)$ setzen aber im Uebrigen die oben gebrauchten Beziehungen beibehalten. Wir finden dadurch:

$$[73] \quad . \quad . \quad \mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x) | \pi(r, x) | n_r] = \mathfrak{P}\left[\left\{\mathfrak{V}(x) \cdot \Phi\left\{\Psi\left(\frac{G(r, x)}{\mathfrak{V}(x)}\right)\right\}\right\} \middle| \pi(r, x) \middle| n_r\right]$$

oder weil nach [45] die Function Φ und Ψ zu einander invers sind:

$$[74] \ldots \mathfrak{P}[\mathfrak{L}(x) | \pi(r,x) | n_r] = \mathfrak{P}\left[\left\{\mathfrak{V}(x) \cdot \frac{G(r,x)}{\mathfrak{V}(x)}\right\} \middle| \pi(r,x) \middle| n_r\right] = \mathfrak{P}[G(r,x) | \pi(r,x) | n_r] = G(r,x)$$

so dass also der in Gleichung [43] aufgestellte Ausdruck für $\mathfrak{L}(x)$ die unter Nr. [26], [28], [29] geforderten Bedingungen für $r = 0, 1, 2, 3, \ldots t$ erfüllt.

Dass diesen Bedingungen auch der in Gleichung [59] für $\mathfrak{L}(x)$ dargestellte Ausdruck genügt, wird auf entsprechende Weise mit Hülfe der Gleichung [25] dargethan. Es kommt dabei in Betracht, dass für jedes von r verschiedene ρ die Gleichung

$$[75] \ldots \Theta_\rho \mathfrak{P}\Big[\Big\{\mathfrak{W}(\rho,x).\varphi(\rho,x).\mathfrak{P}\Big[\Big\{\frac{1}{\mathfrak{W}(\rho,x).\varphi(\rho,x)}.\mathrm{T}_\rho\Big(\frac{\mathrm{G}(\rho,x)}{\mathfrak{B}(x)}\Big)\Big\}\Big|\mathfrak{p}(\rho,x)\Big|-1\Big]+\mathfrak{W}(\rho,x).\psi(\rho,x)\Big\}\Big|\pi(r,x)\Big|m_r+n_r\Big]=1$$

wegen der unter [60] und [61] für die Functionen Θ_ρ und T_ρ geforderten Eigenschaften gilt.

ARTIKEL VIII.

Convergenz-Factoren in Producten.

Die Anzahl t oder $t+1$ der Anschluss-Stellen a_r kann in der Weise unbegrenzt wachsen, dass dieselben in unbegrenzter Nähe der Werthe $\mathfrak{a}_r$, wo die gesuchte Function $\mathfrak{L}(x)$ aufhören darf, sich rational zu verhalten, unbegrenzt zahlreich neben einander liegen. Es wird dann für ein unendlich grosses r der Ausdruck $\mathfrak{q}(r, a_r)$, welcher nach [30] und [34] bei einem endlichen Werthe von $\mathfrak{a}_r$ gleich $\frac{1}{a_r - \mathfrak{a}_r}$ aber bei $\mathfrak{a}_r = \frac{1}{0}$ gleich a_r ist, einen unendlich grossen Werth annehmen.

Der einfacheren Übersicht wegen wollen wir die Indices $r = 1, 2, 3, \ldots$ also mit Ausnahme des Index 0, über welchen wir schon in [32] und [36] verfügt haben, auf solche Weise angebracht denken, dass die absoluten Beträge von $\mathfrak{q}(r, a_r)$ mit r wachsen oder doch nicht abnehmen, wenn r zunimmt, also dass, nach der von Herrn Weierstrass eingeführten Bezeichnungs-Weise der absoluten Beträge,

$$[76] \quad \ldots \quad |\mathfrak{q}(r, a_r)| \leqq |\mathfrak{q}(r+1, a_{r+1})| \qquad \text{für } r \geqq 1$$

$$\lim_{r=\infty} |\mathfrak{q}(r, a_r)| = \infty$$

wird.

Es ist nun zu beweisen, dass bei geeigneter Wahl der noch willkürlich gelassenen Functionen die unendlich vielgliedrigen Summen und Producte gleichmässig und unbedingt convergiren.

Wir wollen zunächst für das durch [42] und [49] definirte Product $\mathfrak{B}(x)$, nemlich für

$$[77] \ldots \mathfrak{V}(x) = \prod_{\sigma=0}^{\sigma=t} \mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma} . V(\sigma,x) . \Phi_\sigma \{ \mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{+m_\sigma}) | \mathfrak{q}(\sigma,x) | h_\sigma] \}, \quad t = \infty$$

geeignete Convergenz-Factoren Φ_σ zu bestimmen suchen.

Nach dem Satze über Functionen von Anschluss-Functionen, Gleichung [19], und nach den unter [55] getroffenen Bestimmungen wird:

$$\begin{aligned}[78] \ldots \; & \mathfrak{P}\Big[\Big\{\mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma} . \Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{+m_\sigma}) | \mathfrak{q}(\sigma,x) | h_\sigma]\}\Big\} \Big| \mathfrak{q}(\sigma,x) \Big| h_\sigma\Big] = \\ & = \mathfrak{P}\Big[\Big\{\mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma} . \Phi_\sigma\{\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{+m_\sigma})\}\Big\} \Big| \mathfrak{q}(\sigma,x) \Big| h_\sigma\Big] \\ & = 1\end{aligned}$$

Nach der Definition der Anschluss-Function durch [1] und [2] folgt also, dass für genügend kleine Werthe von $\mathfrak{q}(\sigma,x)$ die Gleichung

$$[79] \ldots \mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma} . \Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{+m_\sigma}) | \mathfrak{q}(\sigma,x) | h_\sigma]\} = 1 + \mathfrak{q}(\sigma,x)^{1+h_\sigma} . \mathfrak{P}^*(\mathfrak{q}(\sigma,x))$$

besteht, wenn $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{q}(\sigma,x))$ eine nach Potenzen von $\mathfrak{q}(\sigma,x)$ mit wachsenden ganzzahligen nicht negativen Exponenten fortschreitende für genügende kleine absolute Beträge von $\mathfrak{q}(\sigma,x)$ gleichmässig und unbedingt convergirende Reihe bedeutet. Die Gleichungen [30] und [35] haben die gemeinsame Form

$$[80] \quad \ldots \quad \mathfrak{p}(\sigma,x) = 1 - \frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)} \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1$$

also kann man die Gleichung [79] für $\sigma \geqq 1$ vortheilhafter so:

$$[81] \ldots \mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma} . \Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{+m_\sigma}) | \mathfrak{q}(\sigma,x) | h_\sigma] = 1 + \left(\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}\right)^{1+h_\sigma} . \mathfrak{P}^{**}\left(\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}\right)$$

darstellen, wenn man mit $\mathfrak{P}^{**}\left(\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}\right)$ eine für genügend klein gewählte Werthe von $\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}$ regulär sich verhaltende Function von den Argumente $\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}$ bezeichnet.

Es wird daher für $\sigma \geqq 1$ und $h_\sigma \geqq 0$:

$$[82] \ldots \log\{\mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma} . \Phi_\sigma \mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x))^{m_\sigma} | \mathfrak{q}(\sigma,x) | h_\sigma]\} = \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{\eta=+\infty} C(\eta,\sigma) . \left\{\frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}\right\}^\eta$$

worin die von der Form der Ψ_σ-Function und von den Grössen η, a_σ, $\mathfrak{a}_\sigma$, m_σ, h_σ abhängigen aber von x unabhängigen Coëfficienten $C(\eta, \sigma)$ der über die unbegrenzt wachsenden positiven ganzen Zahlen η auszudehnenden Summe eine für genügend kleine Werthe der absoluten Beträge von $\frac{\mathfrak{q}(\sigma, x)}{\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)}$ geltende gleichmässige und unbedingte Convergenz gestatten.

Um die Untersuchung der Convergenz des Ausdrucks [77] zu vereinfachen, will ich nur diejenigen Glieder eingehender betrachten, für welche σ gross genug ist, damit $|\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| \geqq e$ werde. Zu diesen Zahlen σ will ich die positiven ganzen Zahlen ε_σ durch

[83] . . . . $e \leqq e^{\varepsilon_\sigma} \leqq |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| < e^{\varepsilon_\sigma + 1}$

in Beziehung setzen. Es sei

[84] . . . $e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{a}}$ eine absolute Grösse, welche von der Anzahl der, die Bedingung [83] für ein beliebig gegebenes ε_σ erfüllenden, Werthe a_σ nicht übertroffen wird und zwar sei $\mathfrak{a}$ eine von σ und ε_σ unabhängig bestimmbare Grösse.

Ich will nun die Annahme machen, die Ψ_σ-Functionen seien von der Beschaffenheit gewählt, dass für jedes ε_σ, für jedes der hierzu nach [83] zugehörigen σ, für jedes der zu diesen σ zugehörigen h_σ und für jede ein solches h_σ übertreffende ganze Zahl η die Bedingung

[85] . . . . . . $|C(\eta, \sigma)| \leqq e^{\gamma\eta + ch_\sigma + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{m} + \varepsilon_\sigma \mathfrak{c}_\sigma + \mathfrak{c}}$

erfüllt wird und zwar in der Weise, dass

[86] . . . γ, c, $\mathfrak{m}_\sigma$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{c}_\sigma$, $\mathfrak{c}$ unabhängig von η und von h_σ bestimmt werden können und dass

[87] . . . γ, c auch noch von m_σ unabhängig bestimmt werden können.

Die Grössen

[88] . . . $\mathfrak{c}_\sigma$, $\mathfrak{c}$ will ich unabhängig von m_σ bestimmt denken, so dass in den Fällen, wo jeder Coëfficient $C(\eta, \sigma)$ die Grösse m_σ nur in der Form eines allein von m_σ abhängigen Factors enthält, die Grössen $\mathfrak{m}_\sigma$ und $\mathfrak{m}$ als nur von m_σ und auch nur die Grössen $\mathfrak{m}_\sigma$ und $\mathfrak{m}$ als von m_σ abhängig

gewählt werden können. Zur Abkürzung will ich den von σ unabhängigen reellen Werth ξ durch die Bedingung

$$[89] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad e^{\xi} \geqq |\mathfrak{q}(\sigma, x)|$$

einführen, welche für jedes der Nr. [83] genügende σ erfüllt sein soll.

Von der weiteren Untersuchung der Convergenz des Ausdrucks [77] will ich nun auch noch diejenige endliche Anzahl von Gliedern ausschliessen, für welche σ zu klein wäre, um die Bedingungen

[90] . . . $\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma \geqq 1$, und $\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma - c \geqq 1$ erfüllen zu können.

Unter diesen Voraussetzungen wird

$$[91] \ldots \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{\eta=\infty} |C(\eta,\sigma)| \cdot \left|\frac{\mathfrak{q}(\sigma, x)}{\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)}\right|^{\eta} \leqq \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{\eta=\infty} e^{\gamma\eta + c h_\sigma + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{m} + \varepsilon_\sigma \mathfrak{c}_\sigma + \mathfrak{c} + \xi\eta - \varepsilon_\sigma \eta}$$

$$\leqq e^{-(1+h_\sigma)(\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma - c) + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \varepsilon_\sigma \mathfrak{c}_\sigma - c + \mathfrak{m} + \mathfrak{c}} \cdot \left\{1 - e^{-(\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma)}\right\}^{-1}$$

$$< e^{-(1+h_\sigma)(\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma - c) + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \varepsilon_\sigma \mathfrak{c}_\sigma - c + \mathfrak{m} + \mathfrak{c} + 1}$$

weil nemlich $1 - e^{-(\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma)} \geqq 1 - e^{-1} > e^{-1}$ ist. Führen wir noch die Grösse

$$[92] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \mathfrak{f}_\sigma = 1 - \frac{\mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{c}_\sigma}{1 + h_\sigma}$$

ein und berücksichtigen wir Nr. [84], so können wir aus der zuletzt gefundenen Ungleichheit [91] auch die folgende ableiten:

$$[93] \ldots \sum_{\sigma=\sigma_1}^{\sigma=+\infty} \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{\eta=+\infty} |C(\eta,\sigma)| \cdot \left|\frac{\mathfrak{q}(\sigma, x)}{\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)}\right|^{\eta} < \sum_{\varepsilon_\sigma=\varepsilon_{\sigma_1}}^{+\infty} e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{a} - (1+h_\sigma)(\varepsilon_\sigma - \xi - \gamma - c) + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \varepsilon_\sigma \mathfrak{c}_\sigma - c + \mathfrak{m} + \mathfrak{c} + 1}$$

$$< \sum_{\varepsilon_\sigma=\varepsilon_{\sigma_1}}^{+\infty} e^{-(1+h_\sigma)(\varepsilon_\sigma \mathfrak{f}_\sigma - \xi - \gamma - c) + \mathfrak{a} + \mathfrak{m} + \mathfrak{c} - c + 1} \leqq e^{\mathfrak{a} + \mathfrak{m} + \mathfrak{c} - c + 1} \cdot \sum_{\varepsilon_\sigma=\varepsilon_{\sigma_1}}^{+\infty} e^{-(1+h_\sigma)(\varepsilon_\sigma \mathfrak{f}_\sigma - \xi - \gamma - c)}$$

worin jede der letzten drei Summationen über die ganzen Zahlen $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma_1}$, $1 + \varepsilon_{\sigma_1}$, $2 + \varepsilon_{\sigma_1}, \ldots + \infty$ zu erstrecken ist und worin dem, unter diesen Summen bei $\mathfrak{a}_\sigma$, h_σ, $\mathfrak{m}_\sigma$, $\mathfrak{c}_\sigma$, $\mathfrak{f}_\sigma$ vorkommenden, σ derjenige nach Vorschrift [83] zum jedesmaligen ε_σ zugehörige Zahlenwerth zu ertheilen ist, welcher die Zahl h_σ am kleinsten werden lässt. Hieraus erhalten wir den Lehrsatz:

Gibt man der Veränderlichen x nur solche Werthe, welche keinen der Ausdrücke $\mathfrak{q}(\sigma, x)$ für $\sigma = 0, 1, 2, 3 \ldots \infty$ unendlich gross werden lassen, bestimmt man ferner

$$[94] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \prod_{\sigma=0}^{\sigma=+\infty} V(\sigma, x)$$

als eine für solche x vollständig regulär sich verhaltende Function,

wählt man weiter die Functionen Φ_σ und Ψ_σ der Art, dass die Bedingungen [54], [55], [56], [82], [85], [86], [87] erfüllt werden,

nimmt man endlich die nicht negativen Zahlen h_σ so gross, dass bei den in [83] und [84] getroffenen Festsetzungen der Ausdruck

$$[95] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1 - \frac{\mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{c}_\sigma}{1 + h_\sigma}$$

für die über einem beliebig gewählten Werthe liegenden σ eine positive nicht verschwindend kleine Grösse wird,

so convergirt der Logarithmus des Ausdrucks [77] für $t = \infty$ rascher als eine gleichmässig und unbedingt convergirende Reihe, deren Glieder rational sich verhaltende Functionen von x sind.

In der That man braucht in [82] und in [93] die endlich bleibende Zahl σ_1 nur gross genug zu nehmen, um für jedes nicht unter ihr liegende σ die schon genannten Bedingungen [83], [90], [95] und auch die Bedingung

$$[96] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon_\sigma > \frac{\xi + \gamma + c}{\mathfrak{k}_\sigma}$$

zu erfüllen und damit die unter Nr. [93] auftretende Summe, welche über die ganzen Zahlen ε_σ von ε_{σ_1} bis $+\infty$ zu erstrecken ist, rascher als eine unbedingt convergirende geometrische Reihe convergiren zu lassen.

Die hier geforderten Eigenschaften der in den Convergenz-Factoren auftretenden Functionen ergeben sich zum Beispiel für

$$[97] \ldots \Psi_\sigma(1-v) = \log(1-v) = -v - \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{3}v^3 - \ldots = u \quad \text{also}$$

$$\Phi_\sigma(u) = e^u = 1 + u + \frac{1}{1.2}u^2 + \frac{1}{1.2.3}u^3 + \ldots = 1 - v$$

und auch für

$$[98] \ldots \Psi_\sigma(1-v) = \log\left\{1 + \frac{1}{m_\sigma h_\sigma}\log(1-v)\right\} = u \quad \text{also}$$

$$\Phi_\sigma(u) = e^{m_\sigma h_\sigma(-1+e^u)} = 1 - v$$

wenn $\sigma \geqq 1$ ist, denn in beiden Fällen bleibt $\left|\frac{1}{m_\sigma h_\sigma} C(\eta, \sigma)\right|$ unterhalb eines von η und σ unabhängig bestimmbaren Werthes.

ARTIKEL IX.

Weierstrass' Convergenz-Factoren.

Nimmt man für Ψ_σ und Φ_σ die unter Nr. [97] genannten Functionen und setzt noch $a_\sigma = \frac{1}{0}$, $m_\sigma = -1$, so wird

[99] . . . $$\mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} . \Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, x) \,|\, h_\sigma]\} =$$
$$= \left(1 - \frac{x}{a_\sigma}\right) \cdot e^{\mathfrak{P}\left[\log\left(1 - \frac{x}{a_\sigma}\right)^{-1} \middle| x \middle| h_\sigma\right]}$$
$$= \left(1 - \frac{x}{a_\sigma}\right) \cdot e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=h_\sigma} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a_\sigma}\right)^\lambda}$$

Diese Ausdrücke:

[100] . . . . $$E\left(\frac{x}{a_\sigma}, h_\sigma\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\sigma}\right) \cdot e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=h_\sigma} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a_\sigma}\right)^\lambda}$$

hat Herr WEIERSTRASS eingeführt und mit deren Hülfe zuerst Functionen, welche

[101] . . nur vorgeschriebene Null-Stellen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\sigma, \ldots$

unter Erfüllung der Bedingung

[101*] . . . . $$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty$$

besitzen und welche überall mit Ausschluss der Umgebung des Werthes $\frac{1}{0}$ sich regulär verhalten, gebildet, nemlich in der Form

[102] . . . . $$x^k . e^{G(x)} . \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, h_\nu\right)$$

und gezeigt, dass hierdurch jede Function mit den vorgenannten Eigenschaften dargestellt wird, wenn $G(x)$ eine für jeden endlichen Werth von x regulär sich verhaltende geeignet gewählte Function bedeutet und wenn, verschieden von der in der vorliegenden Abhandlung gemachten Annahme, so viele a_σ einander gleich vorausgesetzt sind, wie der Grad des Nullwerdens an der betreffenden Stelle Einheiten enthalten soll.

Herr Weierstrass hat diesen Satz in seiner, der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 16. October 1876 vorgelegten Abhandlung »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen« veröffentlicht und schon im Herbst 1874 in seinen Universitäts-Vorlesungen vorgetragen.

Der Ausdruck

$$[103] \qquad e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=h_\sigma} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a_\sigma}\right)^\lambda}$$

dürfte als der Weierstrass'sche Convergenz-Factor für die Function $\left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right)$ in einem Producte unendlich vieler solcher Functionen $\left(1-\frac{x}{a_1}\right)$, $\left(1-\frac{x}{a_2}\right) \ldots \left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right) \ldots$ zu bezeichnen sein.

ARTIKEL X.

Newton's Interpolations-Formel.

Die zu der Umgebung des Werthes 0 für das Argument z und zu der Ordnung n gehörende Anschluss-Function einer dort regulär sich verhaltenden Function $f(z)$ kann man als den Grenzfall des aus $n+1$ Argumentwerthen gebildeten Newton'schen Interpolations-Ausdrucks betrachten, nemlich wenn alle $n+1$ Argumentwerthe unendlich klein werden. Als eine entsprechende Eigenschaft dieser Interpolations-Ausdrücke kann man es ansehen, dass dieselben unter Umständen anstatt der Anschluss-Functionen benutzt werden dürfen, wenn nicht die genauen Werthe der letzteren sondern nur Näherungswerthe die wesentlichen Eigenschaften der aufzustellenden Formen, wie z. B. der Convergenz-Factoren und der Convergenz-Subtrahenden, bedingen. Es kömmt dabei also auf die Grösse des Werth-Unterschiedes der beiden Functionen an. Um dieselbe so weit zu bestimmen, wie es für den vorliegenden Zweck erforderlich ist, will ich von einem einfachen Beweise des Fundamental-Theorems für die Interpolations-Function ausgehen.

Newton benutzt die Quotienten der Differenzen von Functions-Werthen dividirt durch die Differenzen der entsprechenden Argument-Werthe. Um die Eigenschaften solcher Quotienten übersichtlich darstellen zu können, will ich dieselben durch ein Operations-Zeichen $\mathfrak{D}$ ausdrücken und zwar, wenn

[104] . . zu den Argument-Werthen: $z_1, \quad z_2, \quad z_3 \ \ldots$
die Functions-Werthe: $f(z_1), \ f(z_2), \ f(z_3) \ \ldots$
gehören sollen,

will ich für jeden Index ν und für jede nicht unter ν liegende Zahl μ,

[105] . . $\mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})\,|\,\nu] = f(z_\nu)$

[106] . . $\mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})|\nu, \nu+1, \ldots \mu, \mu+1] = \frac{\mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})|\nu, \nu+1, \ldots \mu-1, \mu] - \mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})|\nu+1, \nu+2, \ldots \mu, \mu+1]}{z_\nu - z_{\mu+1}}$

setzen. Die Gleichung [106] kann man auch in der Form:

[107] . . $\mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})|\nu, \nu+1, \ldots, \mu] = \mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})|\nu+1, \ldots \mu+1] + (z_\nu - z_{\mu+1})\mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})|\nu, \ldots \mu+1]$

darstellen. Wendet man hier statt der beliebigen Zahl μ die Zahl $\mu+\eta$ an und multiplicirt beide Seiten der Gleichung mit

$$\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta} (z_\nu - z_{\mu+\varkappa})$$

so erhält man:

[108] . . . $\mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})\,|\,\nu, \ldots \mu+\eta] \cdot \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta} (z_\nu - z_{\mu+\varkappa}) =$

$$= \mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})\,|\,\nu+1, \ldots \mu+\eta+1] \cdot \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta} (z_\nu - z_{\mu+\varkappa})$$
$$+ \mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})\,|\,\nu, \ldots \mu+\eta+1] \cdot \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta+1} (z_\nu - z_{\mu+\varkappa})$$

Lässt man hier η der Reihe nach die Werthe $1, 2, 3, 4, \ldots \lambda-1, \lambda$ annehmen und addirt die entsprechenden Seiten der dadurch entstehenden Gleichungen und der Gleichung [107], so findet man

[109] . . $\mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})|\nu, \ldots \mu] = \mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})\,|\,\nu+1, \ldots \mu+1]$

$$+ \sum_{\eta=1}^{\eta=\lambda} \mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})\,|\,\nu+1, \ldots \mu+\eta+1] \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta} (z_\nu - z_{\mu+\varkappa})$$
$$+ \mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})\,|\,\nu, \ldots \mu+\lambda+1] \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda+1} (z_\nu - z_{\mu+\varkappa})$$

und also für den besonderen Fall, dass μ mit ν identisch wird, nach Anwendung von [105] und Einführung der Bezeichnung

$$[110] \quad . . \ \mathfrak{N}[f(z_\nu)\,|\,z_\mathfrak{n}\,|\nu+1, \nu+2, . . \nu+\lambda+1] =$$
$$= f(z_{\nu+1}) + \sum_{\eta=1}^{\eta=\lambda} \mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})\,|\,\nu+1, . . \nu+\eta+1] \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\eta} (z_\nu - z_{\nu+\varkappa})$$

die Gleichung:

$$[110^*] \quad . . \ f(z_\nu) = \mathfrak{N}[f(z_\nu)\,|\,z_\mathfrak{n}|\nu+1, \nu+2, . . \nu+\lambda+1]$$
$$+ \mathfrak{D}[f(z_\mathfrak{d})\,|\,\nu, . . \nu+\lambda+1] \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda+1} (z_\nu - z_{\nu+\varkappa})$$

Geht $f(z)$ in eine Potenz von z mit ganzzahligem positivem Exponenten k über, so entsteht:

$$[111] \quad . . . . \ \mathfrak{D}[z_\mathfrak{d}^k\,|\,\nu] = z_\nu^k$$

$$[112] \quad . . . . \ \mathfrak{D}[z_\mathfrak{d}^k\,|\,\nu, \nu+1] = \frac{z_\nu^k - z_{\nu+1}^k}{z_\nu - z_{\nu+1}} = \sum_\gamma z_\nu^{\gamma_\nu} z_{\nu+1}^{\gamma_{\nu+1}}$$

worin die Summation über sämmtliche ganzzahlige nicht negative Werthe von γ_ν und $\gamma_{\nu+1}$, welche die Bedingung

$$[112^*] \quad . . . . \quad \gamma_\nu + \gamma_{\nu+1} = k - 1$$

erfüllen, zu erstrecken ist. Die folgeweise Anwendung der Definitions-Gleichung [106] und der Gleichung [112] ergibt, nach Benutzung des Schlusses der vollständigen Induction, die Gleichung:

$$[113] \quad . . . \ \mathfrak{D}[z_\mathfrak{d}^k\,|\,\nu, \nu+1, . . \mu-1, \mu] = \sum_\gamma z_\nu^{\gamma_\nu} z_{\nu+1}^{\gamma_{\nu+1}} . . z_{\mu-1}^{\gamma_{\mu-1}} z_\mu^{\gamma_\mu}$$

für $\qquad 0 \leqq \mu - \nu \leqq k$

worin die Summation über alle ganzzahlige nicht negative Werthe der $\gamma_\nu, \gamma_{\nu+1}, . . \gamma_{\mu-1}, \gamma_\mu$ zu erstrecken ist, welche die Gleichung

$$[113^*] \quad . . . \ \gamma_\nu + \gamma_{\nu+1} + . . + \gamma_{\mu-1} + \gamma_\mu = k - (\mu - \nu)$$

erfüllen. Für $\mu = \nu + k - 1$ wird:

$$[114] \ . . \ \mathfrak{D}[z_\mathfrak{d}^k\,|\,\nu, \nu+1, . . \nu+k-2, \nu+k-1] = z_\nu + z_{\nu+1} + . . + z_{\nu+k-1}$$

und hieraus mit Hülfe der Definitions-Gleichung [106] auch:

[115] . . . $\mathfrak{D}[z_{\mathfrak{v}}^{k} | \nu, \nu+1, \ldots \nu+k-1, \nu+k] = 1$

[117] . . . $\mathfrak{D}[z_{\mathfrak{v}}^{k} | \nu, \nu+1, \ldots \nu+k, \nu+k+\varkappa] = 0$, für $\varkappa \geqq 1$

Die Definition der Differenzen-Quotienten zeigt unmittelbar, dass die Differenzen-Quotienten einer Summe von Functionen gleich der Summe der Differenzen-Quotienten der Functionen sind. Wendet man also die Gleichung [110*] auf eine ganze rationale algebraische Function $\mathrm{f}(z)$ von niedrigerem als dem $(g+1)^{\text{sten}}$ Grade an, berücksichtigt [117], setzt $\lambda = g$, $\nu = 0$ und $z_0 = z$, so erhält man für jeden Werth von z unter Benutzung der Bezeichnung:

[118] . . $\mathfrak{N}[\mathrm{f}(z)|z_{\mathfrak{n}}|1, 2, 3, \ldots g+1] = \mathrm{f}(z_1) + \sum_{\mu=1}^{\mu=g} \mathfrak{D}[\mathrm{f}(z_{\mathfrak{v}}) | 1, 2, \ldots \mu, \mu+1] \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} (z - z_\varkappa)$

die Gleichung

[118*] . . $\mathrm{f}(z) = \mathfrak{N}[\mathrm{f}(z) | z_{\mathfrak{n}} | 1, 2, 3 \ldots g+1]$

wenn $\mathrm{f}(z)$ ein ganze rationale algebraische Function des Argumentes z von nicht höherem als dem g^{ten} Grade ist und das Operations-Zeichen $\mathfrak{D}$ sich durch die Gleichungen [105] und [106] bestimmt.

Die zweite Seite von [118] ist mit der von Newton in »Philosophiae naturalis principia mathematica, Lib. III. Propositio XL. Lemma V« (Lond. 1687) zur Auflösung der Aufgabe »invenire lineam curvam generis parabolici, quae per data quotcunque puncta transibit« aufgestellten Formel gleichbedeutend.

Die Gleichung [118*] enthält den Lehrsatz:

Eine ganze rationale algebraische Function ist mit ihrer Newton'*schen Interpolations-Formel identisch, wenn die Anzahl der bei der letztern in Anwendung gebrachten Functional-Werthe mehr beträgt als der Grad der algebraischen Function.*

ARTIKEL XI.

Verallgemeinerung von Newton's Interpolation.

Die hier durchgeführte Ableitung der NEWTON'schen Interpolations-Formel zeigt unmittelbar, wie die letztere zu verallgemeinern ist, damit nicht nur zu gegebenen Argument-Werthen beliebig gegebene Werthe der Function sondern auch beliebig gegebene Werthe der Derivirten der letzteren dargestellt werden. Sind nemlich die Argument-Werthe

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots\ z_\sigma,\ \ldots$$

und die Werthe der Function sowie ihrer Derivirten und zwar

$$[119] \quad \begin{array}{lllll} f(z_1), & f'(z_1), & f''(z_1), & \ldots & f^{(n_1)}(z_1) \\ f(z_2), & f'(z_2), & f''(z_2), & \ldots & f^{(n_2)}(z_2) \\ f(z_3), & f'(z_3), & f''(z_3), & \ldots & f^{(n_3)}(z_3) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(z_\sigma), & f'(z_\sigma), & f''(z_\sigma), & \ldots & f^{(n_\sigma)}z_\sigma \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

willkürlich vorgeschrieben, so gibt es immer eine und nur Eine solche ganze rationale algebraische Function $f(z)$, welche eine unter der Zahl

$$(1+n_1)+(1+n_2)+(1+n_3)+\ldots$$

liegende Gradzahl besitzt und welche mit ihren Derivirten die zu den Argument-Werthen $z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots$ zugehörenden vorgeschriebenen Werthe annimmt. Diese Function kann in der Form

$$\begin{aligned} [120] \quad & f(z) = \\ & = f_{1,0}+(z-z_1)f_{1,1}+(z-z_1)^2 f_{1,2}+\ldots+(z-z_1)^{n_1} f_{1,n_1}+ \\ & +(z-z_1)^{1+n_1}\{f_{2,0}+(z-z_2)f_{2,1}+(z-z_2)^2 f_{2,2}+\ldots+(z-z_2)^{n_2} f_{2,n_2}\}+ \\ & +(z-z_1)^{1+n_1}(z-z_2)^{1+n_2}\{f_{3,0}+(z-z_3)f_{3,1}+(z-z_3)^2 f_{3,2}+\ldots+(z-z_3)^{n_3} f_{3,n_3}\}+ \\ & \ldots \end{aligned}$$

dargestellt werden. Die constanten Factoren der ersten Zeile bestimmen sich unmittelbar durch:

$$[121] \quad f_{1,0} = f(z_1), \quad f_{1,\varkappa} = \frac{1}{\Pi(\varkappa)} f^{(\varkappa)}(z_1), \quad \varkappa = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n_1$$

wenn die Function Π die ihr von Gauss beigelegte Bedeutung besitzt. Bezeichnen wir mit

$$[122] \ldots \quad \mathfrak{f}(z|n_1), \quad \mathfrak{f}(z|1+n_1,\lambda), \quad \mathfrak{f}(z|1+n_1, 1+n_2, \mu), \ldots$$

die Summe der Glieder der zweiten Seite der Gleichung [120] der Reihe nach genommen und zwar vom ersten Gliede $f_{1,0}$ an beziehungsweise bis zum Gliede

$$(z-z_1)^{n_1} f_{1,n_1}, \quad (z-z_1)^{1+n_1}(z-z_2)^{\lambda} f_{2,\lambda}, \quad (z-z_1)^{1+n_1}(z-z_2)^{1+n_2}(z-z_3)^{\mu} f_{2,\mu}, \ldots$$

einschliesslich, so wird:

$$\begin{aligned}
[123] \ldots f_{2,0} &= (z_2-z_1)^{-1-n_1}\{\mathfrak{f}(z_2)-\mathfrak{f}(z_2|n_1)\} \\
f_{2,\lambda} &= \frac{1}{\Pi(\lambda)}(z_2-z_1)^{-1-n_1}\{\mathfrak{f}^{(\lambda)}(z_2)-\mathfrak{f}^{(\lambda)}(z_2|1+n_1,\lambda-1)\} \quad \text{für } 1 \leqq \lambda \leqq n_2 \\
f_{3,0} &= (z_3-z_1)^{-1-n_1}(z_3-z_2)^{-1-n_2}\{\mathfrak{f}(z_3)-\mathfrak{f}(z_3|1+n_1,n_2)\} \\
f_{3,\mu} &= \frac{1}{\Pi(\mu)}(z_3-z_1)^{-1-n_1}(z_3-z_2)^{-1-n_2}\{\mathfrak{f}^{(\mu)}(z_3)-\mathfrak{f}^{(\mu)}(z_3|1+n_1,1+n_2,\mu-1)\} \\
&\qquad \text{für } 1 \leqq \mu \leqq n_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Zur numerischen Berechnung der constanten Coëfficienten gibt es vortheilhaftere Ausdrücke als die in [123] aufgestellten; ich werde jene bei einer anderen Veranlassung vorlegen.

Hier will ich nur bemerken, dass die Coëfficienten mit Hülfe von Determinanten unmittelbar durch die vorgeschriebenen Werthe ausgedrückt werden können. Es ist nemlich in dem allgemeinen Gliede

$$[124] \ldots (z-z_1)^{1+n_1}(z-z_2)^{1+n_2}\ldots(z-z_{\sigma-1})^{1+n_{\sigma-1}}(z-z_\sigma)^{\mu} f_{\sigma,\mu}, \quad 0 \leqq \mu \leqq n_\sigma$$

des Ausdrucks [120] der von z unabhängige Coëfficient $f_{\sigma,\mu}$ gleich dem Quotient zweier Determinanten. Bezeichnen $N_{h,k}$ und $Z_{h,k}$ allgemein die Elemente der beziehungsweise im Nenner und im Zähler stehenden Determinante, so durchlaufen h und k die ganzen Zahlen von 1 bis

$$[125] \ldots (1+n_1)+(1+n_2)+\ldots+(1+n_{\sigma-1})+(1+\mu) = \mu^*$$

und für jedes $k = 1, 2, 3 \ldots \mu^*$ ist das Element

$$[126]..N_{h,k} = \frac{\Pi(k-1)}{\Pi(k-h)} z_1^{k-h}, \quad \text{für } h = 1, 2, 3 \,..\, (1+n_1)$$

$$N_{h,k} = \frac{\Pi(k-1)}{\Pi(k-h_2)} z_2^{k-h_2} \quad \text{für } h = 1+n_1+h_2;\ h_2 = 1, 2, 3 \,..\, (1+n_2)$$

$$N_{h,k} = \frac{\Pi(k-1)}{\Pi(k-h_{\sigma-1})} z_{\sigma-1}^{k-h_{\sigma-1}}, \text{ für } h = 1+n_1+1+n_2+..+1+n_{\sigma-2}+h_{\sigma-1},\ 1 \leqq h_{\sigma-1} \leqq 1+n_{\sigma-1}$$

$$N_{h,k} = \frac{\Pi(k-1)}{\Pi(k-h_\sigma)} z_\sigma^{k-h_\sigma}, \quad \text{für } h = 1+n_1+1+n_2+..+1+n_{\sigma-1}+h_\sigma,\ 1 \leqq h_\sigma \leqq 1+n_\sigma$$

ferner ist für $k = \mu^*$ das Element

$$[127]..Z_{h,\mu^*} = \mathrm{f}^{(-1+h)}(z_1) \quad \text{für } h = 1, 2, 3, \,..\, (1+n_1)$$

$$Z_{h,\mu^*} = \mathrm{f}^{(-1+h_2)}(z_2) \quad \text{für } h = 1+n_1+h_2;\ h_2 = 1, 2, 3, \,..\,(1+n_2)$$

. . . .

$$Z_{h,\mu^*} = \mathrm{f}^{(-1+h_{\sigma-1})}(z_{\sigma-1}) \text{ für } h = 1+n_1+1+n_2+\,..\,+(1+n_{\sigma-2})+h_{\sigma-1};$$
$$h_{\sigma-1} = 1, 2, 3, \,..\,(1+n_{\sigma-1})$$

$$Z_{h,\mu^*} = \mathrm{f}^{(-1+h_\sigma)}(z_\sigma) \text{ für } h = 1+n_1+1+n_2+\,..\,+(1+n_{\sigma-1})+h_\sigma;$$
$$h_\sigma = 1, 2, 3, \,..\,(1+\mu)$$

während für jedes von μ^* verschiedene $k = 1, 2, 3, \,..\, (\mu^*-1)$ und für jedes $h = 1, 2, 3, \,..\, \mu^*$ das Element

$$[127^*] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad Z_{h,k} = N_{h,k} \quad \text{wird.}$$

Hierbei ist die nullte Derivirte einer Function als mit der Function identisch und die Π-Function nach Gauss, als durch die Gleichung

$$[127^{**}] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \Pi(x) = \prod_{n=1}^{n=+\infty} \frac{n}{n+x} \left(\frac{n+1}{n}\right)^x$$

definirt, vorausgesetzt.

ARTIKEL XII.

Werthen-Grenze der Interpolations-Formel.

Bedeutet $\mathrm{F}(z)$ eine in der Umgebung des Argumentwerthes 0 regulär sich verhaltende Function des Argumentes z, ist also in:

$$[128] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \mathrm{F}(z) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} z^\mu F_\mu$$

jedes F_μ unabhängig von z und die Summe für genügend kleine absolute Beträge von z gleichmässig und unbedingt convergent, so wird nach der Definition der Anschluss-Function

$$[129] \quad \mathfrak{P}[\mathrm{F}(z)|z|k] = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} z^\mu F_\mu$$

und daher:

$$[130] \quad \mathrm{F}(z) - \mathfrak{P}[\mathrm{F}(z)|z|k] = \sum_{\mu=1+k}^{\mu=+\infty} z^\mu F_\mu$$

Sind $z_1, z_2, z_3 \ldots z_{k+1}$ Argumentwerthe, welche sich im Convergenzbereiche der Summe [128] befinden, und bilden wir für jene Werthe die Newton'sche Interpolations-Function von beiden Seiten der Gleichung [130], berücksichtigen dabei, dass die Interpolations-Function von der Differenz zweier Functionen gleich der Differenz der Interpolations-Functionen von den einzelnen Functionen ist, ferner, dass die Interpolations-Function von einem ganzen rationalen Ausdrucke, mit geringerer Gradzahl k als die Anzahl $k+1$ der Interpolations-Werthe, gleich ist dem ganzen rationalen Ausdrucke, endlich, dass die Interpolations-Function von einer Function multiplicirt in einen constanten Factor gleich dem Producte des constanten Factors multiplicirt in die Interpolations-Function von jener Function ist, so erhalten wir

$$[131] \ldots \mathfrak{N}[\mathrm{F}(z)|z_\mathfrak{n}|1,2,3,\ldots k+1] - \mathfrak{P}[\mathrm{F}(z)|z|k] = \sum_{\mu=1+k}^{\mu=+\infty} F_\mu \mathfrak{N}[z^\mu|z_\mathfrak{n}|1,2,3,\ldots k+1]$$

$$= \sum_{\mu=1+k}^{\mu=\infty} F_\mu \Big\{ z_1 + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} \mathfrak{D}[z_\mathfrak{d}^\mu | 1, 2, \ldots (1+\varkappa)] . (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_\varkappa) \Big\}$$

Aus Gleichung [113] folgt:

$$[132] \ldots \mathfrak{D}[z_\mathfrak{d}^\mu | 1,2,3\ldots(1+\varkappa)] = \sum_\gamma z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \ldots z_\varkappa^{\gamma_\varkappa} z_{\varkappa+1}^{\gamma_{\varkappa+1}} \quad \text{für } 0 \leqq \varkappa \leqq \mu$$

worin die Summation über alle Werthensysteme der ganzzahligen nicht negativen, die Gleichung

$$[132^*] \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_\varkappa + \gamma_{\varkappa+1} = \mu - \varkappa$$

erfüllenden, Werthe der $\gamma_1, \ldots \gamma_{\varkappa+1}$ zu erstrecken ist. Die Anzahl der

Summations-Glieder auf der zweiten Seite der Gleichung [132] beträgt, wie unmittelbar zu sehen, μ für den Fall, dass $\varkappa$ gleich 1 wird.

Durch dasselbe Schlussverfahren, wie man von Gleichung [112] zu Gleichung [113] gelangt, findet man leicht, dass die Anzahl der Summations-Glieder der zweiten Seite von [132] im allgemeinen Falle gleich

[133] . . . . $\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(\mu-\varkappa)}$

ist. Lassen wir nun ζ eine Grösse bedeuten, welche von dem absoluten Betrage keines der $z_1, z_2, \ldots z_{k+1}$ übertroffen wird:

[134] . . . . $\zeta \geqq |z_\lambda|$ für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots k+1$

so erhalten wir für den absoluten Betrag der ersten Seite der Gleichung [132] die Werthen-Grenze

[135] . . . $\left|\mathfrak{D}\left[z_\mathfrak{d}^\mu \middle| 1, 2, 3, \ldots (\varkappa+1)\right]\right| \leqq \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(\mu-\varkappa)}\zeta^{\mu-\varkappa}$

Bedeutet daher $\mathfrak{z}$ eine Grösse, welche die Bedingung

[136] . . . $\mathfrak{z} \geqq |z - z_\lambda|$ für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, k, k+1$

erfüllt, also zum Beispiel $\mathfrak{z} = |z| + \zeta$, so wird:

[137] . . $\left|\mathfrak{D}\left[z_\mathfrak{d} \middle| 1, 2, 3, \ldots (\varkappa+1)\right](z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_\varkappa)\right| \leqq \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(\mu-\varkappa)}\zeta^{\mu-\varkappa}\mathfrak{z}^\varkappa$

Die zweite Seite dieser Beziehung ergibt für $\varkappa = 0$ den Werth ζ^μ, welcher nach [134] nicht kleiner als $|z_1|^\mu$ ist, demnach folgt:

[138] . . $\left|\mathfrak{R}\left[z^\mu \middle| z_\mathfrak{n} \middle| 1, 2, 3, \ldots k+1\right]\right| \leqq \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=k} \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(\mu-\varkappa)}\zeta^{\mu-\varkappa}\mathfrak{z}^\varkappa$

oder, weil

[139] . . . $\Pi(\mu-\varkappa) \geqq \Pi(\mu-k)\,.\,\Pi(k-\varkappa)$ für $\mu - k \geqq 0,\ k-\varkappa \geqq 0$

ist, auch:

$$\left|\mathfrak{R}\left[z^\mu \middle| z_\mathfrak{n} \middle| 1, 2, 3 \ldots k+1\right]\right| \leqq \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(k)\,\Pi(\mu-k)}\zeta^{\mu-k}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=k}\frac{\Pi(k)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(k-\varkappa)}\zeta^{k-\varkappa}\mathfrak{z}^\varkappa$$

oder

[140] . . . $\left|\mathfrak{R}\left[z^\mu \middle| z_\mathfrak{n} \middle| 1, 2, 3, \ldots k+1\right]\right| \leqq \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(k)\,\Pi(\mu-k)}\zeta^{\mu-k}(\zeta+\mathfrak{z})^k$

für $\mu = k+1, k+2, \ldots +\infty$

während aus dem Satze [118*] unmittelbar

$$[141] \quad \ldots \left|\mathfrak{N}[z^{\mu}|z_n|1, 2, 3, .. k+1]\right| = |z|^{\mu} \quad \text{für} \quad \mu = 0, 1, 2, 3, .., k$$

folgt.

Bezeichnen wir mit γ und F absolute von μ unabhängige Werthe, welche die Bedingung

$$[142] \quad \ldots\ldots \gamma^{\mu}.F \geqq |F_{\mu}| \quad \text{für jedes } \mu \geqq k+1$$

erfüllen und wenden wir die Relation [140] auf [131] an, so erhalten wir

$$[143] .. \left|\left\{\mathfrak{N}[\mathrm{F}(z)|z_n|1, 2, 3, .. k+1] - \mathfrak{P}[\mathrm{F}(z)|z|k]\right\}\right| = \left|\sum_{\mu=k+1}^{\infty} F_{\mu}\mathfrak{N}[z^{\mu}|z_n|1, 2, 3, .. k+1]\right|$$

$$\leqq \sum_{\mu=k+1}^{\mu=+\infty} \gamma^{\mu}.F.\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(k)\,\Pi(\mu-k)}\zeta^{\mu-k}(\zeta+\mathfrak{z})^{k}$$

$$\leqq F.(k+1).\zeta.\gamma^{k+1}(\zeta+\mathfrak{z})^{k}\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\frac{\Pi(\nu+k+1)}{\Pi(k+1).\Pi(\nu)}(\gamma\zeta)^{\nu}$$

$$\leqq F.(k+1).\zeta\gamma^{k+1}(\zeta+\mathfrak{z})^{k}(1-\gamma\zeta)^{-k-2}$$

$$\leqq F.(k+1).\zeta\gamma^{k+1}(2\zeta+|z|)^{k}(1-\gamma\zeta)^{-k-2}$$

wenn nemlich $\gamma\zeta < 1$ ist.

Die Relation [143] bestimmt die Werthen-Grenze für den Unterschied zwischen der NEWTON'schen Interpolations-Function und der Anschluss-Function, wenn beide von derselben in der Umgebung des Argument-Werthes 0 regulär sich verhaltenden Function $\mathrm{F}(z)$ und von gleich hohem Grade k gebildet sind und wenn die nach Potenzen von z mit nicht negativen Exponenten fortschreitende Reihen-Entwickelung von $\mathrm{F}(z)$ auch noch für den grössten in Anwendung gebrachten Interpolations-Werth des Argumentes bedingungslos wie eine geometrische Reihe convergirt.

Die in [143] vorkommenden Bezeichnungen sind unter [118], [105], [106], [128], [129], [134], [142] definirt. Die hier angewendete Bestimmungsweise der Differenzen-Quotienten in [132] zeigt, dass die vorstehende Ableitung der Relation [143] auch für den Fall gilt, wenn mehrere Interpolations-Werthe des Argumentes einander gleich sind, also wenn die NEWTON'sche Interpolations-Formel in ihre Verallgemeinerung Artikel XI. übergegangen ist.

ARTIKEL XIII.

Interpolirte Convergenz-Factoren.

Der in dem letzten Artikel gefundene Lehrsatz bietet das Hülfsmittel, um zu beweisen, dass es Functionen Φ_σ und Interpolations-Werthe der Argumente $\mathfrak{q}(\sigma, x)$ gibt, welche die Convergenz des Productes in [42] für $t = \infty$ auch dann gelten lassen, wenn in [49] die Anschluss-Functionen durch Newton'sche Interpolations-Functionen ersetzt werden.

Es handelt sich also darum, die bis zu unbegrenzt wachsenden Zahlenwerthen des Summations-Zeigers σ auszudehnende Summe der Glieder von der Form:

$$[144] \;.\;.\; \log\{\mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} . \Phi_\sigma \mathfrak{N}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}_{\text{n}}(\sigma, x) \,|\, 1, 2, 3, \ldots (1+h_\sigma)]\}$$

unbedingt und gleichmässig convergent zu machen durch geeignete Wahl der Interpolations-Werthe

$$[145] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathfrak{q}_1(\sigma, x),\; \mathfrak{q}_2(\sigma, x),\; . \; . \; . \; . \; \mathfrak{q}_{(1+h_\sigma)}(\sigma, x)$$

und der Functionen Φ_σ, welche ausserdem noch die Bedingungen [54], [55], [56] zu erfüllen haben.

Hier will ich mich darauf beschränken, den Nachweis dieser Möglichkeit bei den in Nr. [97] gewählten Functionen Φ_σ durchzuführen.

Der Ausdruck [144] erhält für $\sigma \geqq 1$ dann die Form:

$$[146] \;.\;.\; \log(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma}) + \mathfrak{N}[\log(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}_{\text{n}}(\sigma, x) \,|\, 1, 2, 3, \ldots (1+h_\sigma)]$$

Entwickelt man den unter der Interpolations-Function $\mathfrak{N}$ vorkommenden log. nach Potenzen von $\mathfrak{q}(\sigma, x)$, ersetzt ferner die Interpolations-Function einer Summe von Functionen durch die Summe der Interpolations-Functionen von den einzelnen Functionen und wendet den Fundamental-Satz für die Newton'sche Interpolations-Formel [118*] an, so findet man, dass der Ausdruck [146] gleich

$$[146^*] \;.\;.\; = \log(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma}) + \mathfrak{P}[\log(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, x) \,|\, h_\sigma]$$
$$+ \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{+\infty} \frac{-m_\sigma}{\eta} . \mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)^{-\eta} . \mathfrak{N}[\mathfrak{q}(\sigma, x)^\eta \,|\, \mathfrak{q}_{\text{n}}(\sigma, x) \,|\, 1, 2, 3, \ldots (1+h_\sigma)]$$

und, wenn man noch den ersten log. entwickelt, auch gleich

$$[147]\ .\ .= \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{+\infty} \frac{m_\sigma}{\eta}\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\eta}\mathfrak{q}(\sigma,x)^\eta$$
$$+\sum_{\eta=1+h_\sigma}^{+\infty} \frac{-m_\sigma}{\eta}\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\eta}\,\mathfrak{R}\left[\mathfrak{q}(\sigma,x)^\eta\,|\,\mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma,x)\,|\,1,2,3,..(1+h_\sigma)\right]$$

ist. Von diesem Ausdrucke ergibt sich nach Anwendung des Lehrsatzes [143] der absolute Betrag kleiner oder gleich:

$$[148]\ .\ .\leqq \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\eta}\cdot|m_\sigma|\cdot|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-\eta}\cdot|\mathfrak{q}(\sigma,x)|^\eta$$
$$+|m_\sigma|\cdot\mathfrak{q}(\sigma*)\cdot|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1-h_\sigma}\cdot\{2\mathfrak{q}(\sigma*)+|\mathfrak{q}(\sigma,x)|\}^{h_\sigma}\cdot\{1-|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1}\cdot\mathfrak{q}(\sigma*)\}^{-2-h_\sigma}$$

also auch kleiner oder gleich:

$$[148^*]\ .\ .\leqq \frac{1}{1+h_\sigma}\cdot|m_\sigma|\cdot|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1-h_\sigma}\cdot|\mathfrak{q}(\sigma,x)|^{1+h_\sigma}\cdot\{1-|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1}\cdot|\mathfrak{q}(\sigma,x)|\}^{-1}+$$
$$+|m_\sigma|\cdot\mathfrak{q}(\sigma*)\cdot|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1-h_\sigma}\cdot\{2\mathfrak{q}(\sigma*)+|\mathfrak{q}(\sigma,x)|\}^{h_\sigma}\cdot\{1-|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|^{-1}\cdot\mathfrak{q}(\sigma*)\}^{-2-h_\sigma}$$

wenn nemlich die $\mathfrak{q}(\sigma*)$ solche Werthe bedeuten, welche die Bedingungen

$$[149]\ .\ .\ .\ \mathfrak{q}(\sigma*)\geqq|\mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma,x)| \text{ für jedes } \mathfrak{n}=1,2,3,\ldots(1+h_\sigma)$$

erfüllen, und wenn

$$[150]\ .\ .\ .\ .\ .\ |\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|>|\mathfrak{q}(\sigma,x|,\ |\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|>\mathfrak{q}(\sigma*) \text{ ist.}$$

Die über die ganzen Zahlen σ zu erstreckende Summe des Ausdrucks [148*] können wir zum Zwecke der Untersuchung ihrer Convergenz für endliche Werthe der $\mathfrak{q}(\sigma,x)$, indem wir nur eine endliche Anzahl von Summen-Gliedern erforderlichen Falles ausscheiden, auf diejenigen σ beschränken, welche $|\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)|\geqq e$ werden lassen. Indem ich die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Nr. [83], [84], [89] beibehalte, nehme ich specieller als in Nr. [85], [86], [87] an, dass für jede über einem gross genug gewählten endlichen $\varepsilon_{\sigma_1}-1$ liegende ganze positive Zahl ε_σ und für jedes dazu nach Nr. [83] zugehörige σ die reellen Grössen $\mathfrak{m}_\sigma$ und die von σ ganz unabhängige reelle Grösse $\mathfrak{m}$ die Bedingung

$$[151]\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ e^{\varepsilon_\sigma\mathfrak{m}_\sigma+\mathfrak{m}}\geqq|m_\sigma|$$

erfüllen sollen.

Für dieselben Zahlen ε_σ und σ will ich, indem ich den Interpolations-Werthen $\mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma, x)$ die Grenzen noch enger als in [149] und [150] ziehe, die reellen Grössen ν_σ und die von σ ganz unabhängige reelle Grösse ν der Art gewählt denken, dass

[152] . . $|\mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma, x)| \leqq \mathfrak{q}(\sigma *) \leqq e^{\varepsilon_\sigma(1-\nu_\sigma)-\nu} \leqq |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| . e^{-\varepsilon_\sigma\nu_\sigma-\nu} < |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| . e^{-2}$

für jedes $\mathfrak{n} = 1, 2, 3, \ldots (1+h_\sigma)$ wird.

Zur Abkürzung setze ich noch:

[153] . . $\mathfrak{n}_\sigma$ gleich der kleineren der beiden Grössen

$$(1-e^{-h})(1+h_\sigma) - \mathfrak{a}_\sigma - \mathfrak{m}_\sigma \quad \text{und} \quad \left(\nu_\sigma + \frac{\nu-2}{\varepsilon_\sigma}\right)(1+h_\sigma) - \mathfrak{a}_\sigma - \mathfrak{m}_\sigma$$

und nehme an, dass diese Grössen, für einen invoraus beliebig festgesetzten Werth von h, in Folge genügend gross gewählter nicht negativer Zahlen h_σ und σ immer positiv und für $\sigma = \infty$ nicht unendlich klein werden.

Beachtet man, dass

[154] . . $1-e^{-1-b} \geqq 1-e^{-1} > e^{-1}$ für $b \geqq 0$, $e = 2{,}71828$ . . ist,

so erhält man aus der zwischen dem Ausdrucke [146] und dem Ausdrucke [148*] schon gefundenen Beziehung unter Anwendung von Nr. [83], [84], [89], [151], [152], [153] auch:

[155] . . $$\sum_\sigma \left| \left\{ \log(\mathfrak{p}(\sigma, x))^{-m_\sigma} + \mathfrak{R}[\log(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma, x) \,|\, 1, 2, 3, \ldots (1+h_\sigma)] \right\} \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\varepsilon_\sigma} \frac{1}{1+h_\sigma} . e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{m}} . e^{-(\varepsilon_\sigma - \xi)(1+h_\sigma)} . e . e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{a}}$$

$$+ \sum_{\varepsilon_\sigma} e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{m}} . e^{-\varepsilon_\sigma \nu_\sigma - \nu} . \left\{ 2e^{-\varepsilon_\sigma \nu_\sigma - \nu} + e^{\xi - \varepsilon_\sigma} \right\}^{h_\sigma} . e^{2+h_\sigma} . e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{a}}$$

$$< e^{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}+1} \sum_{\varepsilon_\sigma} e^{-\varepsilon_\sigma \mathfrak{n}_\sigma}$$

Hier ist die auf σ sich beziehende Summation über die Zahlen

$$\sigma = \sigma_1,\; 1+\sigma_1,\; 2+\sigma_1,\; 3+\sigma_1, \ldots +\infty$$

auszudehnen, worin die endliche Zahl σ_1 gross genug gewählt sein soll, damit die vorgenannten Bedingungen und auch noch diese:

$$[156] \quad \ldots\ldots \quad \varepsilon_\sigma > (\xi + 3)\, e^{+h}$$

für jene Werthe des σ erfüllt werden.

Die in Nr. [155] auf ε_σ sich beziehenden Summationen sind über die Zahlen

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma_1},\; 1 + \varepsilon_{\sigma_1},\; 2 + \varepsilon_{\sigma_1},\; 3 + \varepsilon_{\sigma_1},\; \ldots + \infty$$

zu erstrecken und dem, im selben Summations-Gliede bei h_σ, $\mathfrak{a}_\sigma$, $\mathfrak{m}_\sigma$, ν_σ, $\mathfrak{n}_\sigma$ vorkommenden. σ ist derjenige nach Vorschrift [83] zum jedesmaligen ε_σ zugehörige Zahlenwerth zu geben, welcher die Zahl h_σ am kleinsten werden lässt.

Die letzte in Nr. [155] vorkommende Summe convergirt in Folge der Annahme unter Nr. [153] stärker als eine gleichmässig und unbedingt convergirende geometrische Reihe.

Wir haben also bewiesen, dass, unter Beibehaltung der letzten in [76] ausgesprochenen Voraussetzung, wir das unendlich vielgliedrige Product

$$[158] \,..\, \mathfrak{P}(x) = \prod_{\sigma=0}^{+\infty} \mathfrak{p}(\sigma, x)^{-\mathfrak{m}_\sigma} . \mathrm{V}(\sigma, x) . \Phi_\sigma \{ \mathfrak{R} [\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{\mathfrak{m}_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}_{\mathfrak{n}}(\sigma, x) \,|\, 1, 2, 3, \ldots (1 + h_\sigma)] \}$$

für endliche Werthe aller $\mathfrak{q}(\sigma, x)$, nach etwaiger Ausscheidung einer endlichen Anzahl von Gliedern, gleichmässig und unbedingt convergiren lassen können, wenn wir die vollständig regulär sich verhaltenden Functionen V und Φ mit den zu letzteren inversen Functionen Ψ auf geeignete Weise, wie zum Beispiel in Nr. [94], [97], wählen und wenn wir die Interpolations-Werthe $\mathfrak{q}_{\mathfrak{n}}(\sigma, x)$ innerhalb gewisser Grenzen wie bei Nr. [152] und auch in genügender Anzahl $1 + h_\sigma$ wie nach [153] nehmen.

ARTIKEL XIV.

Euler's interpolirte Producte.

Euler beginnt in seinem Werke »Institutiones calculi differentialis etc. Petropol. 1755. Caput XVI. De differentiatione functionum inexplicabilium«, den § 367 mit den Worten »Functiones inexplicabiles hic voco, quae neque expressionibus determinatis, neque per aequationum radices explicari possunt; ita ut non solum non sint algebraicae, sed etiam plerumque incertum sit, ad quod genus transcendentium pertineant. Huiusmodi functio inexplicabilis est

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\;.\;.\;.\;+\tfrac{1}{x}$$

quae utique ab x pendet, at nisi x sit numerus integer nullo modo explicari potest. Simili modo haec expressio

$$1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,x$$

erit functio inexplicabilis ipsius x, quoniam si x sit numerus quicunque, eius valor non solum non algebraice, sed ne quidem per ullum certum quantitatum transcendentium genus exprimi potest. Generatim ergo talium functionum inexplicabilium notio ex seriebus derivari potest.«

Die von Euler gegebene Lösung der hierin angedeuteten Aufgabe ist mit dem Gegenstande des folgenden Capitels übereinstimmend. Dieses Caput XVII. De interpolatione serierum, § 389, hat die Einleitung: »Series interpolari dicitur, dum eius termini assignantur, qui respondent indicibus fractis vel etiam surdis. Si igitur seriei terminus generalis fuerit cognitus, interpolatio nullam habet difficultatem; cum quicunque numerus loco indicis x substituatur, ista expressio praebeat terminum respondentem.«

Um die Uebersicht der Formeln zu erleichtern, will ich Functions-Zeichen anwenden. Es sei $\mathrm{F}(x)$ das allgemeine Glied der Summe, und werde als ein für jeden Werth von x bekannter Ausdruck vorausgesetzt. Indem ich das Operations-Zeichen Δ im selben Sinne wie Euler gebrauche, bilde ich die Differenzen

[158] . . . .
$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{F}(x) &= \mathrm{F}(x+1)-\mathrm{F}(x)\\ \Delta^2\mathrm{F}(x) &= \Delta\mathrm{F}(x+1)-\Delta\mathrm{F}(x)\\ \Delta^3\mathrm{F}(x) &= \Delta^2\mathrm{F}(x+1)-\Delta^2\mathrm{F}(x)\\ &\text{u. s. f.}\end{aligned}$$

Ferner sei für ein ganzzahliges x:

[159] . . $$\mathfrak{F}(x)=\mathrm{F}(1)+\mathrm{F}(2)+\mathrm{F}(3)+\;.\;.\;+\mathrm{F}(x-1)+\mathrm{F}(x)$$

Die von Euler in § 396 gegebene Bestimmung der als »inexplicable Function« oder als »interpolirte Reihe« betrachteten Grösse $\mathfrak{F}(x, \omega)$ für ein ganzzahliges x und ein beliebiges ω können wir, wenn wir nur in der Bezeichnungsweise von Euler abweichen aber in der Anordnung der Glieder ihm folgen, durch die Formel darstellen:

$$[160] \quad \ldots \quad \mathfrak{F}(x, \omega) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{F}(x) + F(x+1) \quad + F(x+2) \quad + F(x+3) \quad + \text{etc.} \\
&\qquad - F(x+\omega+1) - F(x+\omega+2) - F(x+\omega+3) - \text{etc.} \\
&+ \omega \{ F(x+1) + \Delta F(x+1) + \Delta F(x+2) + \Delta F(x+3) + \text{etc.} \} \\
&+ \frac{\omega(\omega-1)}{1\,.\,2} \{ \Delta F(x+1) + \Delta^2 F(x+1) + \Delta^2 F(x+2) + \Delta^2 F(x+3) + \text{etc.} \} \\
&+ \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \{ \Delta^2 F(x+1) + \Delta^3 F(x+1) + \Delta^3 F(x+2) + \Delta^3 F(x+3) + \text{etc.} \} \\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Euler fügt die Worte hinzu: »Sufficit, uti iam notavimus, tot huiusmodi series adiecisse, donec ad terminorum infinitesimorum differentias evanescentes perveniatur.« Nachdem er dann x gleich 0 und $\mathfrak{F}(0)$ gleich 0 gesetzt hat, ordnet er den Ausdruck so, dass er die hier vertikal unter einander stehenden Theile zu einem Gliede einer, über alle ganzen Zahlen von $x+1$ an zu erstreckenden, Summe zusammenfasst. Er gibt auch mehrere Beispiele zu jener Formel, stellt aber keine Betrachtungen über deren Convergenz an.

Eine Interpolation der Producte findet Euler, indem er in obiger Formel [160] die Functionen F und $\mathfrak{F}$ als Logarithmen von anderen Functionen auffasst. Ich will für ein ganzzahliges nicht negatives $\mathfrak{e}$ und für ein ganzzahliges positives x die Bezeichnungen

$$[161] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{E}[E(x) \mid 0 \mid 0 \mid \mathfrak{e}] = 1$$

$$[162] \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{E}[E(x) \mid x \mid 0 \mid \mathfrak{e}] = E(1) \,.\, E(2) \,.\, E(3) \,.\,.\, E(x)$$

anwenden, ferner für ein ganzzahliges positives $\mathfrak{e}$ und für beliebige x und ω die Gleichungen:

$$[163] \ldots \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|\omega|0] = \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|0|0] \,.\, \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathrm{E}(n+x)}{\mathrm{E}(n+x+\omega)}$$

$$[164] \ldots \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|\omega|\mathfrak{e}] =$$

$$= \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|0|\mathfrak{e}] \,.\, \mathrm{E}(x+1)^{\omega} \,.\, \left\{\frac{\mathrm{E}(x+2)}{\mathrm{E}(x+1)}\right\}^{\frac{\omega(\omega-1)}{1\,.\,2}} \,.\, \left\{\frac{\mathrm{E}(x+1)\mathrm{E}(x+3)}{\mathrm{E}(x+2)\mathrm{E}(x+2)}\right\}^{\frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1\,.\,2\,.\,3}} \ldots \times$$

$$\times \ldots e^{\frac{\omega(\omega-1)\ldots(\omega-\mathfrak{e}+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,\mathfrak{e}} \Delta^{\mathfrak{e}-1} \log \mathrm{E}(x+1)} \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{E}(n+x)}{\mathrm{E}(n+x+\omega)} \,.\, \left\{\dfrac{\mathrm{E}(n+x+1)}{\mathrm{E}(n+x)}\right\}^{\omega} \,.\, \left\{\dfrac{\mathrm{E}(n+x).\mathrm{E}(n+x+2)}{\mathrm{E}(n+x+1).\mathrm{E}(n+x+1)}\right\}^{\frac{\omega(\omega-1)}{1\,.\,2}} \ldots \times \\ \times \ldots e^{\frac{\omega(\omega-1)\ldots(\omega-\mathfrak{e}+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,\mathfrak{e}} \Delta^{\mathfrak{e}} \log \mathrm{E}(n+x)} \end{array} \right.$$

zwischen den $\mathfrak{E}$-Functionen voraussetzen.

Euler stellt in § 398 die Formel [163] für den Fall $x = 0$ auf, nachdem er bemerkt hat: «Quodsi ergo ponamus huius seriei« [$\log \mathrm{E}(1)$, $\log \mathrm{E}(2) \ldots \log \mathrm{E}(n) \ldots$] »terminos infinitesimos evanescere ... erit ...« Im § 399 sagt er »Quodsi autem terminorum infinitesimorum seriei« [$\mathrm{E}(1)$, $\mathrm{E}(2) \ldots \mathrm{E}(n) \ldots$] »logarithmi non evanescant, sed habeant differentias evanescentes, erit..« er gibt dann die Formel, in welche [164] für $x = 0$, $\mathfrak{e} = 1$ übergeht. Nach derselben fährt er fort »At si illorum logarithmorum infinitesimorum differentiae demum secundae evanescant, erit« und er lässt die Formel folgen, welche aus [164] für den Fall $x = 0$, $\mathfrak{e} = 2$ sich ergibt.

Als Beispiel für den hier mit $\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|0|\omega|0]$ bezeichneten Ausdruck [163] nimmt Euler die Function

$$[165] \ldots\ldots \mathrm{E}(x) = \frac{a-c+xc}{b-c+xc}$$

Dass dadurch ein gleichmässig und unbedingt convergirendes Product für nicht unendlich grosse ω und $\frac{1}{c}$ entsteht, kann man aus dem bei [95] ausgesprochenen Lehrsatze schliessen, wenn man die Gleichung:

$$[165^*] \quad \ldots \quad \frac{E(n+1)}{E(n+1+\omega)} = \left\{1+\frac{a}{cn}\right\}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{a}{c}} \times$$
$$\times \left\{1+\frac{b}{cn}\right\}^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{b}{c}} \times$$
$$\times \left\{1+\left(\frac{a}{c}+\omega\right)\frac{1}{n}\right\}^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{a}{c}+\omega} \times$$
$$\times \left\{1+\left(\frac{b}{c}+\omega\right)\frac{1}{n}\right\}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{b}{c}-\omega}$$

beachtet. Lässt man nemlich die Grössen a_σ, $\mathfrak{q}_1(\sigma, x)$, $\mathfrak{q}_2(\sigma, x)$ und a_σ des Artikel XIII. beziehungsweise in $\frac{1}{0}$, 0, 1 und σ übergehen, so kann man $\mathfrak{a}_\sigma$, $\mathfrak{m}_\sigma$, ν_σ, h_σ beziehungsweise gleich 1, 0, $\frac{3}{4}$, 1 annehmen und findet dadurch die fragliche Convergenz für die unendlich vielgliedrigen Producte jeder der vier in besonderer Zeile stehenden Factoren.

Den hier mit $\mathfrak{E}[E(x)|x|\omega|1]$ bezeichneten Ausdruck [164] wendet Euler auf die Function

$$[166] \quad \ldots\ldots \quad E(x) = a - b + bx$$

an. Dass das unendliche Product für einen gegebenen Werth von ω eine bestimmte Grenze besitzt, hat Gauss zuerst bewiesen in Art. 20 seiner Abhandlung »Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \ldots$ Gottingae 1812 Jan. 30« (Gauss Werke Bd. III. S. 145). Deshalb sagt er in der Selbst-Anzeige dieser Abhandlung, 1812 Februar 10, bei der Anführung einer in jener vorkommenden Formel: »wo die Charakteristik Π eine eigene Art transcendenter Functionen andeutet, deren Erzeugung der Verfasser auf ein unendliches Product gründet. Diese in der ganzen Analyse höchst wichtige Function ist im Grunde nichts anders als Euler's inexplicable Function

$$\Pi z = 1.2.3.4\ldots.z$$

allein *diese* Erzeugungsart oder Definition ist, nach des Verfassers Urtheil, durchaus unstatthaft, da sie nur für ganze positive Werthe von z einen klaren Sinn hat. Die vom Verfasser gewählte Begründungsart ist allgemein anwendbar, und gibt selbst bei imaginären Werthen von z einen eben so klaren Sinn, wie bei reellen, und man läuft dabei durchaus keine Gefahr, auf solche Paradoxen und Widersprüche zu gerathen wie ehedem Hr. Kramp bei seinen numerischen Facultäten, die sich, wie man leicht zeigen kann, auf obige Function zurückführen lassen, aber zur Aufnahme in die Analyse weniger geeignet scheinen, als diese, da jene von drei Grössen abhängig sind, diese nur von Einer abhängt, und doch als eben so allgemein betrachtet werden muss. Der Verfasser wünscht dieser transcendenten Function Πz in der Analyse das Bürgerrecht gegeben zu sehen, wozu vielleicht die Wahl eines eigenen Namens für dieselbe am beförderlichsten sein würde: das Recht dazu mag demjenigen vorbehalten bleiben, der die wichtigsten Entdeckungen in der Theorie dieser der Anstrengungen der Geometer sehr würdigen Function machen wird.« (Gauss Werke Bd. III. S. 200).

Ein Beweis der Convergenz des Ausdrucks $\mathfrak{C}[\mathrm{E}(x)|\omega|1]$ für $\mathrm{E}(x) = a - b + bx$ ergibt sich auch unmittelbar aus dem Lehrsatze des obigen Artikel XIII, weil nemlich in [153] die Zahl $h_\sigma = 1$ wird und nach [83], [84], [151], [152] die Zahlen $\mathfrak{a}_\sigma$, $\mathfrak{m}_\sigma$, ν_σ beziehungsweise gleich 1, 0, $\frac{3}{4}$ angenommen werden können.

Das allgemeine Glied in dem unendlich vielgliedrigen Producte des Ausdrucks [164] für $\mathfrak{C}[\mathrm{E}(x)|x|\omega|2]$, also des schon von Euler unter Anwendung einer anderen Bezeichnungsweise aufgestellten Ausdrucks, geht, wenn ich

[167] . . . . $$\mathrm{E}(n) = \nu\Lambda + n$$

setze, in

[168] . . . $$\frac{\nu\Lambda+n}{\nu\Lambda+n+\omega}\cdot\left\{\frac{\nu\Lambda+n+1}{\nu\Lambda+n}\right\}^{\omega}\cdot\left\{\frac{\nu\Lambda+n}{\nu\Lambda+n+1}\cdot\frac{\nu\Lambda+n+2}{\nu\Lambda+n+1}\right\}^{\frac{1}{2}\omega(\omega-1)}$$

über. Bildet man nun hiervon nicht nur, wie Euler es bei seinen Producten gethan, das Product für alle reellen positiven Zahlen des n, sondern auch noch für alle reellen ganzen nicht negativen Zahlen als Werthe des ν, so folgt aus dem Lehrsatze des Artikel XIII, dass dies doppelt unendliche Product für jedes gegebene ω gleichmässig und unbedingt convergirt, wenn die complexe Grösse Λ einen nicht verschwindenden imaginären Theil enthält. Es können nemlich die dort mit $\bar{a}_\sigma$, a_σ, $\mathfrak{q}_1(\sigma, x)$, $\mathfrak{q}_2(\sigma, x)$, $\mathfrak{q}_3(\sigma, x)$, h_σ, $\mathfrak{a}_\sigma$, $\mathfrak{m}_\sigma$, ν_σ, ν bezeichneten Grössen der Reihe nach gleich $\frac{1}{0}$, $\nu\Lambda + n$, 0, 1, 2, 2, 2, 0, $\frac{5}{6}$, 2 angenommen werden.

Zwischen den doppelt unendlichen Producten, welche auf die angegebene Weise aus dem allgemeinen Gliede [168] gebildet sind, und den ganzen elliptischen Functionen bestehen ähnliche Beziehungen, wie zwischen den Π-Functionen und den trigonometrischen Functionen.

Die Functionen $\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|\omega|\mathfrak{e}]$, welche in der Gleichung [164] mit Hülfe der unendlich vielgliedrigen Producte bestimmt werden, wenn letztere für jeden gegebenen Werth von ω gleichmässig und unbedingt convergiren, besitzen bemerkenswerthe Eigenschaften, von welchen ich bei dieser Gelegenheit nur einige andeuten will.

Lehrsatz 1: Convergirt das unendlich vielgliedrige Product in [164] gleichmässig und unbedingt für jeden gegebenen Werth von ω und für einen bestimmten Zahlwerth $\mathfrak{e}$, so convergirt das Product auch gleichmässig und unbedingt für grössere Zahlenwerthe des $\mathfrak{e}$ und es wird:

$$[169] \quad . \; . \; . \; . \quad \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|\omega|\mathfrak{e}] = \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|\omega|\mathfrak{e}+1]$$

Lehrsatz 2: Convergirt das unendlich vielgliedrige Product für jeden gegebenen Werth von ω gleichmässig und unbedingt, so erhält der Ausdruck auf der zweiten Seite der Gleichung [164] bei der Zunahme von x um $+1$ denselben Werth wie bei der Zunahme von ω um $+1$ und es ist:

$$\begin{aligned}[170] \,.\,.\, \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x+1|\omega|\mathfrak{e}] = \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|\omega+1|\mathfrak{e}] &= \mathrm{E}(x+1+\omega)\,.\,\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|\omega|\mathfrak{e}] \\ &= \mathrm{E}(1)\,.\,\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x+1)|x|\omega|\mathfrak{e}]\end{aligned}$$

Lehrsatz 3: Wird $[\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|z|0|\mathfrak{e}]$ für ein nicht ganzzahliges z gleich $\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|0|z|\mathfrak{e}]$ gesetzt und ist das unendlich vielgliedrige Product auf der zweiten Seite der Gleichung [164] für ein gewisses, einen ganzzahligen nicht negativen Werth von x enthaltendes. Gebiet stetig veränderlicher complexer Werthe des x und für ein gewisses Gebiet stetig veränderlicher complexer Werthe des ω eine eindeutige und stetige analytische Function von x und von ω, so bleibt der Werth des Ausdrucks auf der zweiten Seite der Gleichung [164] ungeändert, wenn x und ω innerhalb der erwähnten bezüglichen Gebiete sich zugleich der Art ändern, dass der Werth von $x+\omega$ ungeändert bleibt, also wird:

[171] . . . $\mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x|\omega|\mathfrak{e}] = \mathfrak{E}[\mathrm{E}(x)|x+\delta|\omega-\delta|\mathfrak{e}]$

Lehrsatz 4: Ist $\mathrm{E}_\nu(n+x)$ eine Function, welche ebenso wie $\mathrm{E}(n+x)$ für ein gewisses Werthengebiet von x und für keine endliche positive ganze Zahl n unendlich gross oder unendlich klein wird, welche ferner die Summe

[172] . . . . $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \Delta^\nu \log \frac{\mathrm{E}(n+x)}{\mathrm{E}_\nu(n+x)}$

unbedingt und gleichmässig convergiren lässt und welche den Grenzwerth

[173] . . . . . $\lim_{n=+\infty} \Delta^{\nu-1} \log \frac{\mathrm{E}(n+x)}{\mathrm{E}_\nu(n+x)} = 1$

ergibt, so können in dem Ausdrucke [164] sämmtliche $\mathrm{E}(x+m)$, welche mit dem Exponenten

$$\frac{\omega.(\omega-1)\ldots(\omega-\nu+1)}{1.\;2\;\ldots\;\nu}$$

behaftet vorkommen, zugleich durch die Functionen $\mathrm{E}_\nu(x+m)$ ersetzt werden, ohne dass der Ausdruck [164] dadurch seinen Werth ändert.

Den speciellen, auf die in Nr. [166] genannte Function sich beziehenden, Fall dieses Lehrsatzes hat Euler mehrfach angewendet sowol in dem schon genannten letzten Capitel (XVII) seines Werkes Calcul. different. als auch in den folgenden Abhandlungen:

De curva hypergeometrica hac aequatione expressa $y = 1.2.3\ldots x$. Novi Commentarii Academiae Petropolitanae. Tom. XIII. pro anno 1768. Petrop. 1769. pag. 3—66.

Dilucidationes in capita postrema Calculi mei differentialis de functionibus inexplicabilibus. Conventui exhib. die 13 Martii 1780. Mémoires de l'académie de St. Pétersbourg. Tome IV. 1813. p. 88—119.

Einen entfernteren Zusammenhang mit diesem Gegenstande hat die Abhandlung:

De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina. Leon-

HARDI EULERI Opuscula analytica. Tomus I. Petrop. 1783 pag. 157—210. In derselben findet sich § 10. pag. 165 auch schon die sogenannte LAGRANGE'-sche Interpolations-Formel.

Nach den hier mitgetheilten Lehrsätzen für die interpolirten Producte [164] lassen die entsprechenden Lehrsätze für interpolirte Summen sich leicht aufstellen.

ARTIKEL XV.

Zusammengesetzte Convergenz-Factoren.

Die Convergenz der hier in Betracht kommenden unendlich vielgliedrigen Producte und Summen ist wesentlich dadurch bedingt, dass der Werth von $\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)$ mit σ unbegrenzt wächst. In denjenigen Anschluss-Functionen, welche nur zum Zweck der Erreichung der Convergenz angewendet worden sind, lassen sich daher die von x unabhängigen Glieder durch ganze Functionen von $\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)^{-1}$ ersetzen, wenn diese ganzen Functionen in ihrer Entwickelung nach wachsenden Potenzen dieses Argumentes bis einschliesslich der h_σ^{ten} Potenz mit jenen Gliedern übereinstimmen und wenn die noch höheren Potenzen die durch die vorgenannten Glieder erreichte gleichmässige und unbedingte Convergenz nicht wieder zerstören. Auf diese Weise erhält man für die gesuchte Function $\mathfrak{B}(x)$ auch eine Darstellung in der Form

$$[174] \ldots \mathfrak{B}(x) = \prod_{\sigma=0}^{\infty} \mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} \mathrm{V}(\sigma, x) \Phi_\sigma \left\{ \sum_{\eta=0}^{\eta=h_\sigma} \mathfrak{q}(\sigma, x)^\eta \chi_{\sigma,\eta}(\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)) \right\}$$

wenn

$$[175] \ldots \sum_{\eta=0}^{\eta=h_\sigma} \mathfrak{q}(\sigma, x)^\eta \mathfrak{P}[\chi_{\sigma,\eta}(\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)^{-1} \,|\, h_\sigma] = \mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, x) \,|\, h_\sigma]$$

ist und wenn weder die Factoren $\mathrm{V}(\sigma, x)$ noch die Glieder mit höheren als der h_σ^{ten} Potenzen von $\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)^{-1}$ in der Reihen-Entwickelung der Functionen $\chi_{\sigma,\eta}(\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma))$ die nach Artikel VIII schon erreichte gleichmässige und unbedingte Convergenz beeinträchtigen.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dass für $\eta \geqq 1$ und für genügend grosse σ die Functionen

$$[176] \;..\; \Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma,x)^{m_\sigma}) = m_\sigma \log \mathfrak{p}(\sigma,x) = m_\sigma \log\left(1 - \frac{\mathfrak{q}(\sigma,x)}{\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)}\right) =$$

$$= -m_\sigma \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{1}{\eta}\, \mathfrak{q}(\sigma,x)^{\eta}\,.\,\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\eta}$$

$$[177] \;..\; \chi_{\sigma,\eta}(\mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)) = -m_\sigma \sum_{\varkappa} \log\left\{1 + \frac{1}{\varkappa}(-\eta)^{-\varkappa} L_\varkappa\, \mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\varkappa\eta}\right\}$$

$$= m_\sigma \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\varkappa} \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{\varkappa}(-\eta)^{-\varkappa} L_\varkappa\right)^{\lambda} \mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\lambda\varkappa\eta} =$$

$$= m_\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-n\eta} \sum_{\delta} \frac{\delta}{n}\left(-\frac{1}{\delta}(-\eta)^{-\delta} L_\delta\right)^{\frac{n}{\delta}}$$

$$= -m_\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-\eta)^{-n}\, \mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-n\eta} \sum_{\delta} (-\delta)^{1-\frac{n}{\delta}} (L_\delta)^{\frac{n}{\delta}}$$

angewendet werden, worin $L_\varkappa$ allein von η und $\varkappa$ abhängige Zahlen-Coëfficienten bedeutet, worin ferner $\varkappa$ alle positive ganze Zahlen, welche nicht grösser als $\frac{1}{\eta} h_\sigma$ sind, durchläuft, worin endlich δ alle diejenige ganze positive Theiler von n, die Einheit und n selbst nicht ausgeschlossen, bedeutet, welche nicht grösser als $\frac{1}{\eta} h_\sigma$ sind.

Um die Bedingungs-Gleichung [175] zwischen den Anschluss-Functionen zu erfüllen, hat man für jeden Werth von η den Coëfficienten

$$[178] \;\ldots\ldots\ldots\; L_1 = -1$$

zu setzen und für $n > 1$ die Coëfficienten L_n durch die, auf alle Theiler δ eines n sich beziehenden, Recursions-Gleichungen von der Form

$$[179] \;\ldots\ldots\ldots\; \sum_{\delta} (-\delta)^{1-\frac{n}{\delta}} (L_\delta)^{\frac{n}{\delta}} = 0$$

zu bestimmen. Es wird also L_n von η unabhängig und bleibt nur von n abhängig. Ich finde

[180] . . für die zu n zugehörigen Coëfficienten L_n die Werthe:

$n =$	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19.
$L_n =$	1,	1,	$\frac{3}{2}$,	1,	$\frac{13}{12}$,	1,	$\frac{27}{16}$,	$\frac{10}{9}$,	$\frac{91}{80}$,	1,	$\frac{1213}{1152}$,	1,	$\frac{505}{448}$,	$\frac{1919}{2025}$,	$\frac{2955}{2048}$,	1,	$\frac{49037}{46656}$,	1.

Bei der hier getroffenen Wahl der Functionen Ψ und χ können wir also die gesuchte Function in der Form:

[181] . . $\mathfrak{B}(x) =$

$$= \mathfrak{p}(0,x)^{-m_0} \prod_{\sigma=1}^{+\infty} \mathfrak{p}(\sigma,x)^{-m_\sigma} . \mathrm{V}(\sigma,x) . \prod_{\eta} \prod_{\varkappa} \left\{ 1 + \frac{1}{\varkappa}(-\eta)^{-\varkappa} L_\varkappa . \mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\eta\varkappa} \right\}^{-m_\sigma \mathfrak{q}(\sigma,x)^\eta}$$

darstellen. Hier sind diejenigen Glieder

[181*] . . . . . . $1 + \frac{1}{\varkappa}(-\eta)^{-\varkappa} L_\varkappa . \mathfrak{q}(\sigma,a_\sigma)^{-\eta\varkappa}$

welche den Werth Null annehmen würden, was nach Nr. [76] nur für endliche Zahlen σ möglich ist, durch die Einheit zu ersetzen. Die Grösse η hat alle positive ganze Zahlen zu durchlaufen, welche nicht grösser als h_σ sind, während die Grösse $\varkappa$ nur alle positive ganze Zahlen, welche nicht grösser als $\frac{1}{\eta} h_\sigma$ sind, als Werthe anzunehmen hat.

Die Untersuchung der Convergenz des Ausdrucks [181] ist so entsprechend der Untersuchung des aus interpolirten Convergenz-Factoren gebildeten Ausdrucks im Artikel XIII zu führen, dass es hier genügen mag, das Resultat anzugeben.

Der Ausdruck [181] wird für die Umgebung solcher Werthe von x, welche von jedem der $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ um eine nicht unendlich kleine Grösse verschieden und, falls unter den $\mathfrak{a}$ sich $\frac{1}{0}$ befindet, auch nicht unendlich gross sein müssen, entweder selbst schon oder für einen, mit einem a_σ zusammenfallenden, Werth von x nach Multiplication mit $\mathfrak{p}(\sigma,x)^{m_\sigma}$ eine vollständig regulär sich verhaltende Function von x, wenn man das Product der $\mathrm{V}(\sigma,x)$ für die bezeichneten Werthe von x eine vollständig regulär sich verhaltende Function werden lässt und wenn man bei den für $\mathfrak{a}_\sigma$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}_\sigma$, $\mathfrak{m}$ in Nr. [84], [151] ausgesprochenen Voraussetzungen die positiven Zahlen h_σ der Bedingung unterwirft, dass der Ausdruck

[182] . . . . $1 - \frac{\mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{m}_\sigma}{1 + h_\sigma}$

für alle, über einem invoraus beliebig gewählten Werthe liegende, σ eine positive nicht verschwindend kleine Grösse wird.

ARTIKEL XVI.

Betti's Convergenz-Factoren.

Für den Fall, dass die Grössen $\mathfrak{a}_\sigma$ und $\mathfrak{m}_\sigma$ vorgegebene endliche Werthe nicht überschreiten und dass man, wie es dann gestattet ist, auch die Grösse h_σ einen bestimmten Werth nicht überschreiten lässt, vereinfacht sich die Untersuchung der Convergenz des Ausdruckes [181] noch erheblich.

LEHRSATZ I: Geht der Abstand zwischen zwei Grössen a_ρ und a_σ für kein ρ und kein σ unter eine beliebig gewählte endliche Grenze herab,
sind die Grössen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ alle von 0 und -1 verschieden,
liegen die den Grössen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ entsprechenden Punkte alle auf einer solchen Curve, deren Längsabschnitte zu den entsprechenden Sehnen immer in einem endlichen Verhältnisse stehen,
und wächst der absolute Betrag von m_σ für zunehmende Zahlen σ nicht rascher als eine Potenz von σ mit beliebig bestimmtem echt gebrochenen Exponenten,
so wird der Ausdruck

$$[183] \quad \ldots \quad x^{-\mu_0}(1+x)^{-\mu_1}\prod_{\sigma=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right)^{-m_\sigma}\left(1+\frac{1}{a_\sigma}\right)^{-m_\sigma x}$$

für die Umgebung eines endlichen Werthes von x entweder selbst oder, wenn jener endliche Werth beziehungsweise die Null, die negative Einheit, ein Werth a_r ist, nach Multiplication beziehungsweise mit x^{μ_0}, mit $(1+x)^{\mu_1}$, mit $\left(1-\frac{x}{a_r}\right)^{m_r}$ eine vollständig regulär sich verhaltende Function von x.

LEHRSATZ II: Geht der Abstand zwischen zwei Grössen a_ρ und a_σ für kein ρ und kein σ unter eine beliebig gewählte endliche Grenze herab,
sind die Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ alle von 0, -1, $\pm\sqrt{\frac{-1}{2}}$, verschieden
und wächst die Quadratzahl $m_\sigma m_\sigma$ für zunehmende Zahlen σ nicht rascher als eine Potenz von σ mit beliebig bestimmten echt gebrochenen Exponenten,
so wird der Ausdruck

$$[184] \; . \; . \; x^{-\mu_0}(1+x)^{-\mu_1}(1-x\sqrt{-2})^{-\mu_2}(1+x\sqrt{-2})^{-\mu_3}\times$$
$$\times\prod_{\sigma=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\sigma}\right)^{-m_\sigma}\left(1+\frac{1}{a_\sigma}\right)^{-m_\sigma x}\left(1+\frac{1}{2a_\sigma a_\sigma}\right)^{-m_\sigma x}\left(1+\frac{1}{2a_\sigma a_\sigma}\right)^{-m_\sigma xx}$$

für die Umgebung eines jeden endlichen Werthes von x entweder selbst schon oder wenn jener endliche Werth beziehungsweise gleich

$$0, \qquad -1, \qquad +\frac{1}{\sqrt{-2}}, \qquad -\frac{1}{\sqrt{-2}}, \qquad a_r$$

ist. nach Multiplication beziehungsweise mit

$$x^{\mu_0}, \quad (1+x)^{\mu_1}, \quad (1-x\sqrt{-2})^{\mu_2}, \quad (1+x\sqrt{-2})^{\mu_3}, \quad \left(1-\frac{x}{a_r}\right)^{m_r}$$

eine vollständig regulär sich verhaltende Function von x.

Die Beweise dieser beiden Lehrsätze ergeben sich aus dem Obigen, wenn man beachtet, dass hier jede der Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..$ gleich $\frac{1}{0}$, also nach [34], [35]. [36]:

$$\mathfrak{p}(0,x) = x = \mathfrak{q}(0,x) = \mathfrak{q}(r,x), \quad \mathfrak{p}(r,x) = 1-\frac{x}{a_r} \quad \text{für} \quad r>0$$

wird, und dass die den Bedingungen [84], [151], [182] zu unterwerfenden Werthe

[185] . . . $\mathfrak{a}_\sigma = 1, \quad \mathfrak{m}_\sigma < 1, \quad h_\sigma = 1,$ im vorletzten Lehrsatze I

[186] . . . $\mathfrak{a}_\sigma = 2, \quad \mathfrak{m}_\sigma < 1, \quad h_\sigma = 2,$ im letzten Lehrsatze II

angenommen werden können.

Diese beiden Lehrsätze sind für den Fall, dass $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, $m_1 = m_2 = m_3 = \,.\,.\, = m_\sigma = \,.\,.\, = -1$ und dass die beim vorletzten Lehrsatze in Anwendung kommende Curve eine gerade Linie wird, zuerst von Sign. Betti aufgestellt und bewiesen: Annali di Matematica pura e applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da Betti, Brioschi, Genochi e Tortolini. Tomo III, Anno 1860. *La Teorica delle Funzioni ellittiche.* Monografia del Professore Enrico Betti. (Questa teorica è stata esposta nelle Lezioni di Analisi superiore date nella R. Università di Pisa nell' anno scolastico 1859—60). Introduzione No. 6, pag. 81. 82.

Sign. Betti bezeichnet diese von ihm aufgestellten Functionen als ganze Functionen, für welche die sämmtlichen Werthe $a_1, a_2, a_3, \,.\,.\, a_\sigma, \,.\,.$ und nur diese die Wurzeln bilden.

ARTIKEL XVII.

Die Null- und die Unendlichkeits-Stellen vorgegeben.

LEHRSATZ. *Es seien* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ *beliebig von einander verschiedene, oder theilweise oder alle einander gleiche vorgegebene Werthe, ferner seien* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *von einander und von* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ *verschiedene vorgegebene Werthe, welche zusammen die Bedingung*

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{1}{a_n - \mathfrak{a}_n}\right| = \infty \quad \textit{wenn } \mathfrak{a}_n \textit{ nicht gleich } \tfrac{1}{0} \textit{ ist,}$$

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty \quad \textit{wenn } \mathfrak{a}_n = \tfrac{1}{0} \textit{ ist,}$$

erfüllen.

Befindet sich unter den vorgegebenen Grössen das Werthen-Paar $\mathfrak{a}_r = \frac{1}{0}$ *und* $a_r = 0$, *so will ich* $r = 0$ *angenommen denken.*

Befindet sich unter den vorgegebenen Grössen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *der Werth* $\frac{1}{0}$, *so will ich annehmen, dass* $a_0 = \frac{1}{0}$ *sei; unter den Grössen* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ *kann dann keine gleich* $\frac{1}{0}$ *sein.*

Ich setze:

$\mathfrak{q}(r, x) = \frac{1}{x - \mathfrak{a}_r}$ *wenn* $\mathfrak{a}_r$ *nicht gleich* $\frac{1}{0}$ *ist,*

$\mathfrak{p}(r, x) = \frac{x - a_r}{x - \mathfrak{a}_r} = 1 - \frac{a_r - \mathfrak{a}_r}{x - \mathfrak{a}_r} = 1 - \frac{\mathfrak{q}(r, x)}{\mathfrak{q}(r, a_r)}$ *wenn weder* $\mathfrak{a}_r$ *noch* a_r *gleich* $\frac{1}{0}$ *ist,*

$\mathfrak{q}(r, x) = x$ *wenn* $\mathfrak{a}_r = \frac{1}{0}$ *ist,*

$\mathfrak{p}(r, x) = -\frac{x}{a_r} = -\frac{\mathfrak{q}(r, x)}{\mathfrak{q}(r, a_r)}$ *wenn* $\mathfrak{a}_r = \frac{1}{0}$ *und* a_r *von* 0 *verschieden ist,*

$\mathfrak{p}(r, x) = x = \mathfrak{q}(r, x)$ *wenn* $\mathfrak{a}_r = \frac{1}{0}$ *und* $a_r = 0$, *also* $r = 0$ *ist,*

$\mathfrak{p}(r, x) = \frac{1}{x - \mathfrak{a}_r} = \mathfrak{q}(r, x)$ *wenn* $a_r = \frac{1}{0}$, *also* $r = 0$ *ist.*

Sind noch

$$m_0, \quad m_1, \quad m_2, \quad \ldots m_\sigma, \ldots$$

ganze positive oder negative, für ein endliches σ *nicht unendlich gross werdende, vorgegebene Zahlen* m_σ, *so kann man in dem Ausdrucke*

$$\mathfrak{B}_1(x) = \prod_{\sigma=0}^{+\infty} \mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} \,.\, \mathrm{V}(\sigma, x) \,.\, \Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) \,|\, \mathfrak{q}(\sigma, x) \,|\, h_\sigma]\}$$

die $\mathrm{V}(\sigma, x)$ *als für alle von* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1 . \mathfrak{a}_2, \ldots$ *verschiedene Werthe von* x *vollständig regulär sich verhaltende Functionen*,
ferner die Φ_σ*-Functionen als für alle endliche Werthe ihrer bezüglichen Argumente vollständig regulär sich verhaltende Functionen*,
weiter die Ordnungs-Zahlen h_σ *der Anschluss-Functionen* $\mathfrak{P}$, *welche von den zu den* Φ_σ*-Functionen inversen* Ψ_σ*-Functionen und mit den bezüglichen Argumenten* $\mathfrak{q}(\sigma, x)$ *zu bilden sind*,
auf solche Weise bestimmen,
dass $\mathfrak{B}_1(x)$ *für die Umgebung eines jeden von* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ *und von* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *verschiedenen Werthes* x, *aber* $\mathfrak{p}(r, x)^{m_r}\mathfrak{B}_1(x)$ *für die Umgebung des* a_r *als des Werthes von* x, *eine vollständig regulär sich verhaltende Function von* x *wird.*

Die gleichen allgemeinen Eigenschaften kann man dem Ausdrucke

$$\mathfrak{B}_2(x) = \prod_{\sigma=0}^{+\infty} \mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} . \mathrm{V}(\sigma, x) . \Phi_\sigma\{\mathfrak{N}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x))^{m_\sigma} | \mathfrak{q}_{\mathfrak{n}}(\sigma, x) | 1, 2, 3, \ldots (1+h_\sigma)]\}$$

geben, wenn man noch die Interpolations-Werthe

$$\mathfrak{q}_1(\sigma, x), \quad \mathfrak{q}_2(\sigma, x), \quad \mathfrak{q}_3(\sigma, x), \quad \ldots \quad \mathfrak{q}_{(1+h_\sigma)}(\sigma, x)$$

der Newton'*schen Interpolations-Formel innerhalb genügender Grenzen und in genügender Anzahl* $(1+h_\sigma)$ *wählt.*

Auch dem Ausdrucke

$$\mathfrak{B}_3(x) = \prod_{\sigma=0}^{+\infty} \mathfrak{p}(\sigma, x)^{-m_\sigma} . \mathrm{V}(\sigma, x) . \Phi_\sigma\{\sum_{\eta=0}^{\eta=h_\sigma} \mathfrak{q}(\sigma, x)^\eta \chi_{\sigma,\eta}(\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma))\}$$

kann man die für $\mathfrak{B}_1(x)$ *geltenden allgemeinen Eigenschaften geben, wenn man die den Bedingungen*

$$\sum_{\eta=0}^{\eta=h_\sigma} \mathfrak{q}(\sigma, x)^\eta \mathfrak{P}[\chi_{\sigma,\eta}(\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)) | \mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)^{-1} | h_\sigma] = \mathfrak{P}[\Psi_\sigma(\mathfrak{p}(\sigma, x)^{m_\sigma}) | \mathfrak{q}(\sigma, x) | h_\sigma]$$

unterworfenen $\chi_{\sigma,\eta}$*-Functionen auf geeignete Weise bestimmt.*

Die hier gebrauchten Benennungen: Anschluss-Functionen und vollständig regulär sich verhaltende Functionen, sind unter Nr. [2] und [11] erklärt.

Beispielsweise kann man die V-Functionen der Art wählen, dass das über alle nicht negativen ganzen Zahlen σ auszudehnende Product $\prod V(\sigma, x)$ eine für jeden von allen Grössen $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ verschiedenen Werth der Veränderlichen x vollständig regulär sich verhaltende Function des Argumentes x wird.

Es gibt Functionen $\Phi_\sigma(u)$, welche für jeden endlichen Werth ihres Argumentes u vollständig regulär sich verhaltende Functionen sind, welche ferner für den verschwindenden Argument-Werth u der positiven Einheit gleich werden und welche als inverse Functionen solche Ψ_σ-Functionen besitzen, die für genügend kleine Werthe von $|1-\Phi_\sigma(u)|$ regulär sich verhaltende Functionen von dem Argumente $1-\Phi_\sigma$ sind. Für eine solche Φ_σ-Function ist:

$$\log\left\{(1-w)^{-m_\sigma}.\,\Phi_\sigma\{\mathfrak{P}[\Psi_\sigma((1-w)^{m_\sigma})\,|\,w\,|\,h_\sigma]\}\right\} = \sum_{\eta=1+h_\sigma}^{+\infty} C(\eta,\sigma).\,w^\eta$$

und $C(\eta,\sigma)$ sind von w unabhängige Coëfficienten. Die hierin vorkommende, über alle positiven ganzen von $1+h_\sigma$ an gerechneten Zahlen η auszudehnende, Summe convergirt für genügend kleine Werthe $|w|$ gleichmässig und unbedingt.

Um die Eigenschaften einiger der in dem Lehrsatze anwendbaren Functionen Φ_σ und Gradzahlen h_σ der Anschluss-Functionen in einfacher Form aussprechen zu können, will ich annehmen, die Indices $r = 1, 2, 3 \ldots$ seien in solcher Weise gewählt, dass immer

$$|\mathfrak{q}(r, \mathfrak{a}_r)| \leqq |\mathfrak{q}(r+1, \mathfrak{a}_{r+1})|$$

wird. Zu den genügend gross gewählten σ sollen die positiven ganzen Zahlen ε_σ durch

$$e \leqq e^{\varepsilon_\sigma} \leqq |\mathfrak{q}(\sigma, \mathfrak{a}_\sigma)| < e^{1+\varepsilon_\sigma}$$

in Beziehung gesetzt sein, und die reelle Grösse α_σ so wie die reelle von σ unabhängige Grösse α soll der Art bestimmt sein, dass die absolute Grösse

$$e^{\varepsilon_\sigma \alpha_\sigma + \alpha}$$

nicht von der Anzahl derjenigen σ übertroffen wird, welche zu einem bestimmten ε_σ gehören. In dem vorstehenden Lehrsatze sind nach [85] solche Φ_σ-Functionen zulässig, für welche bei jeder die h_σ übertreffenden ganzen Zahl η und bei jedem zu einem ε_σ zugehörigen σ die Bedingung

$$|C(\eta,\sigma)| \leq e^{\gamma\eta + ch_\sigma + \varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{m} + \varepsilon_\sigma \mathfrak{c}_\sigma + \mathfrak{c}}$$

in der Weise erfüllt wird, dass

$\gamma, c, \mathfrak{m}, \mathfrak{c}$ unabhängig von σ

$\gamma, c, \mathfrak{m}_\sigma, \mathfrak{m}, \mathfrak{c}_\sigma, \mathfrak{c}$ unabhängig von η und h_σ

γ, c auch noch unabhängig von m_σ

sich bestimmen lassen. Den Anforderungen des Lehrsatzes genügt es also nach [95], die nicht negativen Zahlen h_σ so gross zu nehmen, dass der Ausdruck

$$1 - \frac{\mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{c}_\sigma}{1 + h_\sigma}$$

für die, über einem invoraus beliebig gewählten endlichen Werthe liegenden, Zahlen σ eine positive Grösse und für unendlich grosse σ nicht unendlich klein wird.

Nach Nr. [97] und [98] sind die beiden Functionen

$$\Phi_\sigma(u) = e^u \quad \text{und} \quad \Phi_\sigma(u) = e^{m_\sigma h_\sigma(-1+e^u)}$$

zulässig. Es werden nemlich wenn man die reelle Grösse $\mathfrak{m}_\sigma$ und die von σ unabhängige Grösse $\mathfrak{m}$ der Art bestimmt, dass für alle die zu einem ε_σ zugehörigen Indices σ immer

$$e^{\varepsilon_\sigma \mathfrak{m}_\sigma + \mathfrak{m}} \geqq |m_\sigma|$$

ist, die vorgenannten Bedingungen für $C(\eta,\sigma)$ erfüllt und zwar kann $\mathfrak{c}_\sigma$ durch genügend gross gewählte σ beliebig klein gemacht werden.

Was die Grenzen der bei Anwendung der Functionen $\Phi_\sigma(u) = e^u$ zulässigen Interpolations-Werthe $\mathfrak{q}_n(\sigma, x)$ in der NEWTON'schen Formel $\mathfrak{N}$

betrifft, so genügt es nach [152] für jede über einem geeignet gross gewählten Werthe liegende Zahl σ und für jedes $\mathfrak{n} = 1, 2, 3, \ldots (1 + h_\sigma)$ die Bedingung

$$|\mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma, x)| < |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| \cdot e^{-2}$$

zu erfüllen. Wenn ν_σ eine reelle Grösse und ν eine reelle von σ unabhängige Grösse bedeutet, welche für jedes zu einem genügend gross gewählten ε_σ zugehörige σ immer

$$|\mathfrak{q}_\mathfrak{n}(\sigma, x)| \leqq |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| \cdot e^{-\varepsilon_\sigma \nu_\sigma - \nu} < |\mathfrak{q}(\sigma, a_\sigma)| \cdot e^{-2}$$

werden lassen, und wenn man $\mathfrak{a}_\sigma$ in der bisher gebrauchten und $\mathfrak{m}_\sigma$ in der zuletzt angegebenen speciellen Bedeutung anwendet, so kann man nach [153] als die in dem Lehrsatze genügende Anzahl $1 + h_\sigma$ der Interpolations-Werthe diejenigen betrachten, welche die beiden Ausdrücke

$$1 - \frac{\mathfrak{a}_\sigma + \mathfrak{m}_\sigma}{1 + h_\sigma} \quad \text{und} \quad \left(\nu_\sigma + \frac{\nu - 2}{\varepsilon_\sigma}\right)(1 + h_\sigma) - \mathfrak{a}_\sigma - \mathfrak{m}_\sigma$$

für wachsende σ beständig positiv und für unendlich grosse σ nicht unendlich klein werden lassen.

Ein Beispiel der in dem Lehrsatze anwendbaren $\chi_{\sigma,\eta}$-Functionen enthält der Artikel XV.

VORLÄUFIGER ABSCHLUSS.

Von den im Artikel VI angedeuteten Lehrsätzen habe ich noch die Gültigkeits-Bedingungen und meine Beweise derjenigen Sätze mitzutheilen, welche die Convergenz der die Functionen mit gegebenen Anschluss-Functionen darstellenden Ausdrücke bestimmen. Auch ist noch die Beziehung der letztgenannten Ausdrücke zu den oben im Vorwort genannten von Herrn Mittag-Leffler gelösten Problemen so wie zu derjenigen von Herrn Weierstrass für die gesuchten Functionen angewandten Darstellung anzugeben, welche in der Abhandlung »Über einen functionstheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler« (Monatsberichte. Berlin 1880 August 5) während des Druckes der vorstehenden Artikel veröffentlicht ist.

An der Drucklegung dieser meiner Untersuchungen bin ich gegenwärtig durch die unaufschiebbare Arbeit der Berechnung der Bilanz der Göttinger Professoren-Wittwen-Casse gehindert.

BERICHTIGUNG.

Seite 44 Z. 11, muss es heissen: festgesetzten positiven Werth von h.
Seite 45 Z. 15, muss [157] statt [158] stehen.

INHALT.

Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1881

Band/Volume: 27

Autor(en)/Author(s): Schering Ernst

Artikel/Article: Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen. 3-63