

Zur Lehre von der aperiodischen Dämpfung und zur Galvanometrie.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Gesellsch. d. Wissensch. am 5. Mai 1883.

I. Die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung.

Wenn wir die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung in der Form schreiben:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2q \frac{d\varphi}{dt} + p^2 \varphi = 0$$

so ist das allgemeine Integral derselben gegeben durch:

$$\varphi = e^{-qt} \{ a_1 e^{\sqrt{q^2 - p^2} t} + a_2 e^{-\sqrt{q^2 - p^2} t} \}$$

wo a_1 und a_2 zwei Integrationsconstanten bezeichnen, welche durch die Anfangswerthe von φ und $d\varphi/dt$ ausgedrückt werden können.

Der Fall, in welchem $q^2 < p^2$, die Wurzelgrösse imaginär ist, entspricht der periodischen Dämpfung, deren Theorie zuerst von Gauss entwickelt wurde. Ist dagegen $q^2 > p^2$, so ergibt sich die aperiodisch gedämpfte Bewegung, welche zuerst von Emil du Bois Reymond genauer untersucht und für die Zwecke der Galvanometrie praktisch verwerthet worden ist.

Wilhelm Weber hat gezeigt, wie die Messung der von den Windungen eines Multiplicators ausgeübten periodischen Dämpfung zu der Bestimmung der Empfindlichkeitsconstanten benützt werden kann. Eine analoge Untersuchung für den Fall der aperiodischen Dämpfung durchzuführen, ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung.

Bezeichnen wir die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha^2 + 2\alpha q + p^2 = 0$$

durch α_1 und α_2 , so ist:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= -2q, & \alpha_1 \alpha_2 &= p^2 \\ \alpha_1 &= -q + \sqrt{q^2 - p^2}, & \alpha_2 &= -q - \sqrt{q^2 - p^2}\end{aligned}$$

Die Gleichung für die gedämpfte Schwingung kommt durch Einführung von α_1 und α_2 auf die Form

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{d\varphi}{dt} + \alpha_1 \alpha_2 \varphi = 0$$

Zwei Integrale dieser Gleichung sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}e^{-\alpha_2 t} \left\{ \frac{d\varphi}{dt} - \alpha_1 \varphi \right\} &= a_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \\ e^{-\alpha_1 t} \left\{ \frac{d\varphi}{dt} - \alpha_2 \varphi \right\} &= a_1 (\alpha_1 - \alpha_2)\end{aligned}$$

Durch Elimination von $d\varphi/dt$ ergibt sich:

$$\varphi = a_1 e^{\alpha_1 t} - a_2 e^{\alpha_2 t}$$

Bezeichnet man die Werthe, welche φ und $d\varphi/dt$ für $t = 0$ annehmen, durch φ_0 und ω_0 , so ist:

$$a_1 - a_2 = \varphi_0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 = \omega_0$$

Somit:

$$a_1 = \frac{\omega_0 - \alpha_2 \varphi_0}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad a_2 = \frac{\omega_0 - \alpha_1 \varphi_0}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

Für die Zeiten, in welchen φ , $d\varphi/dt$, $d^2\varphi/dt^2$, $d^3\varphi/dt^3$, . . . verschwinden, geben die vorhergehenden Gleichungen die folgende Werthreihe:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \text{ für } t_0 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 0 \text{ für } t_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \log \frac{\alpha_2^2 a_2}{\alpha_1 a_1} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= 0 \text{ für } t_2 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \log \frac{\alpha_2^3 a_2}{\alpha_1^2 a_1} \\ \frac{d^3\varphi}{dt^3} &= 0 \text{ für } t_3 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \log \frac{\alpha_2^4 a_2}{\alpha_1^3 a_1} \\ &\dots \end{aligned}$$

Die Intervalle zwischen den Zeiten, in welchen φ und die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten desselben verschwinden, sind somit unter sich gleich, ein Satz, welcher zuerst von du Bois Reymond ausgesprochen worden ist. Es ist:

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 &= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ t_2 - t_0 &= \frac{2}{\alpha_1 - \alpha_2} \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ t_3 - t_0 &= \frac{3}{\alpha_1 - \alpha_2} \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ &\dots \end{aligned}$$

Die den Zeiten $t_0, t_1, t_2, t_3 \dots$ entsprechenden Elongationen werden durch die folgenden Formeln ausgedrückt:

Für $t = t_0 : \varphi = 0$

$$\text{für } t = t_1 : \varphi_1 = \frac{\frac{\alpha_1}{a_2^{\alpha_1 - \alpha_2}}}{\frac{\alpha_2}{a_1^{\alpha_1 - \alpha_2}}} \left\{ \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}} \right\}$$

$$\text{für } t = t_2 : \varphi_2 = \frac{\frac{\alpha_1}{a_2^{\alpha_1 - \alpha_2}}}{\frac{\alpha_2}{a_1^{\alpha_1 - \alpha_2}}} \left\{ \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{2\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{2\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}} \right\}$$

$$\text{für } t = t_3 : \varphi_3 = \frac{\frac{\alpha_1}{a_2^{\alpha_1 - \alpha_2}}}{\frac{\alpha_2}{a_1^{\alpha_1 - \alpha_2}}} \left\{ \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{3\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{3\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}} \right\}$$

.....

Hieraus ergibt sich der wichtige Satz; die Verhältnisse der den Verschwindungszeiten von $d\varphi/dt, d^2\varphi/dt^2, d^3\varphi/dt^3 \dots$ entsprechenden Elongationen:

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \dots$$

sind nur abhängig von dem Quotienten α_1/α_2 , nicht von den absoluten Werthen dieser Constanten, oder von den Constanten a_1 und a_2 der Integration.

Einfachere Ausdrücke für die Elongationen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$ ergeben sich, wenn für den Anfangspunkt der Zeit eine speciellere Wahl getroffen wird.

Setzen wir erstens $t = 0$ für $\varphi = 0$, also auch $\varphi_0 = 0$, so wird:

$$\varphi_1 = -\omega_0 \left\{ \frac{\alpha_2^{\alpha_2}}{\alpha_1^{\alpha_1}} \right\}^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}}$$

$$\varphi_2 = -\omega_0 (\alpha_1 + \alpha_2) \left\{ \frac{\alpha_2^{\alpha_2}}{\alpha_1^{\alpha_1}} \right\}^{\frac{2}{\alpha_1 - \alpha_2}}$$

$$\varphi_3 = -\omega_0 (\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2) \left\{ \frac{\alpha_2^{\alpha_2}}{\alpha_1^{\alpha_1}} \right\}^{\frac{3}{\alpha_1 - \alpha_2}}$$

.....

Setzen wir zweitens $t = 0$ für $d\varphi/dt = 0$, also $\omega_0 = 0$, so wird:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \\ \varphi_2 &= \varphi_0 (\alpha_1 + \alpha_2) \left\{ \frac{\alpha_2^{\alpha_2}}{\alpha_1^{\alpha_1}} \right\}^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}} \\ \varphi_3 &= \varphi_0 (\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2) \left\{ \frac{\alpha_2^{\alpha_2}}{\alpha_1^{\alpha_1}} \right\}^{\frac{2}{\alpha_1 - \alpha_2}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Es leuchtet ein, dass die vorhergehenden Betrachtungen eine reelle Bedeutung nur dann besitzen, wenn a_1 und a_2 beide positiv sind; ist die eine dieser Constanten, etwa a_2 negativ, so werden die Zeiten $t_0, t_1, t_2, t_3 \dots$ imaginär, während ihre Differenzen durch dieselben reellen Ausdrücke dargestellt werden wie früher. Nun sind aber a_1 und a_2 in den Anfangswerthen der Ablenkung und der Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt durch die Formeln:

$$a_1 = \frac{\omega_0 - \alpha_2 \varphi_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{\omega_0 - \alpha_1 \varphi_0}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

Wenn also $\alpha_1 > \alpha_2$, so ist a_1 positiv, a_2 negativ, wenn

$$\alpha_1 > \frac{\omega_0}{\varphi_0} > \alpha_2$$

Setzen wir in diesem Falle

$$a_2 = \frac{\alpha_1 \varphi_0 - \omega_0}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

so wird φ gegeben durch die Formel

$$\varphi = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t}$$

in welcher a_1 und a_2 beide positiv sind.

II. Formeln und Tabellen zu numerischer Berechnung.

Wenn auf dem Wege der Beobachtung eine Reihe von zusammengehörigen Werthen von φ und t gefunden worden ist, so erhebt sich die Aufgabe, die Constanten α_1 und α_2 aus dieser Beobachtungsreihe zu berechnen. Die Mittel hiezu sollen im Folgenden entwickelt werden.

Wir beschränken uns auf den Fall, dass a_1 und a_2 beide positive Werthe besitzen. Wählen wir den Anfangspunkt der Zeit so, dass für $t = 0$ die Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt = \omega_0 = 0$ ist, so ergibt sich, wenn wir für a_1 und a_2 die Werthe

$$a_1 = -\frac{\alpha_2 \varphi_0}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad a_2 = -\frac{\alpha_1 \varphi_0}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

substituiren

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \frac{\alpha_1 e^{\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

Setzen wir

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = z$$

$$\alpha_1 t = r \cos \vartheta, \quad \alpha_2 t = r \sin \vartheta$$

so kommt die Gleichung auf die Form:

$$z = \frac{\cos \vartheta e^{r \sin \vartheta} - \sin \vartheta e^{r \cos \vartheta}}{\cos \vartheta - \sin \vartheta}$$

und es bestehen die Beziehungen:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = \frac{r}{t}$$

Was die Berechnung der Constanten α_1 und α_2 anbelangt, so sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Der erste und einfachste derselben tritt ein, wenn der Anfangswerth φ_0 des Ablenkungswinkels durch die Beobachtungen mitgegeben ist. In diesem Fall kann die Rechnung folgendermassen ausgeführt werden. Vor-

ausgesetzt wird, dass für eine Reihe von Werthen des Winkels ϑ die Grösse z als Funktion des Parameters r berechnet vorliege. Nun können wir auf der anderen Seite aus den beobachteten Werthen von φ und φ_0 z als Funktion von t für die ganze Reihe der Beobachtungszeiten bestimmen. Die so sich ergebenden Werthpaare von z und t mögen bezeichnet werden durch:

$$(0, 1); (t', z'); (t'', z''); (t''', z''') \dots$$

Wir legen jetzt dem Winkel ϑ , welcher als Parameter in dem Ausdruck

$$z = \frac{\cos \vartheta e^{r \sin \vartheta} - \sin \vartheta e^{r \cos \vartheta}}{\cos \vartheta - \sin \vartheta}$$

auftritt, einen bestimmten Werth bei, welchen wir vorerst nach Willkür uns gewählt denken können. Dann können wir eine zweite Reihe zusammengehöriger Werthe und zwar von z und r finden, indem wir diejenigen Werthe von r suchen, welche den zuvor bestimmten Werthen von z entsprechen. Diese zweite Werthreihe werde dargestellt durch

$$(0, 1); (r', z'); (r'', z''); (r''', z''') \dots$$

Ist der Winkel ϑ so gewählt, dass $\operatorname{tg} \vartheta = \alpha_2 / \alpha_1$, so finden die Beziehungen statt:

$$\frac{r'}{t'} = \frac{r''}{t''} = \frac{r'''}{t'''} = \dots = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

Umgekehrt also, wenn sich zeigt, dass für den angenommenen Werth von ϑ der Werth der Quotienten

$$\frac{r'}{t'}, \frac{r''}{t''}, \frac{r'''}{t'''} \dots$$

constant ist, so gelten die Beziehungen

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \operatorname{tg} \vartheta$$

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = \frac{r'}{t'} = \frac{r''}{t''} = \frac{r'''}{t'''} = \dots$$

und der Werth der Constanten α_1 und α_2 ist damit gefunden.

Als zweiten Fall bezeichnen wir denjenigen, in welchem der Anfangswerth φ_0 als unbekannt zu betrachten, aber für die folgenden Zeiten eine vollständige Reihe zusammengehöriger Werthe von φ und t gegeben ist. In diesem Falle wird man zuerst die Zeit t_2 bestimmen, für welche $d^2\varphi/dt^2$ verschwindet. Ist diese Zeit bekannt, so kann durch Interpolation die Reihe der Ablenkungen $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \dots$ gefunden werden, welche den Zeiten $t_3 = 2t_2, t_4 = 3t_2 \dots$ entsprechen. Die Verhältnisse dieser Ablenkungen sind allein abhängig von dem Quotienten α_2/α_1 . Betrachtet man andererseits die Funktion

$$z = \frac{\cos \vartheta e^{r \sin \vartheta} - \sin \vartheta e^{r \cos \vartheta}}{\cos \vartheta - \sin \vartheta}$$

so werden für diese bei einem gegebenen Werth des Parameters ϑ die Werthe von z , für welche $dz/dr, d^2z/dr^2, d^3z/dr^3, d^4z/dr^4 \dots$ verschwinden, jederzeit berechnet werden können. Wir bezeichnen die so bestimmte Werthreihe durch $1, z_2, z_3, z_4 \dots$. Ist nun $\operatorname{tg} \vartheta = \alpha_2/\alpha_1$, so hat man die Gleichung

$$1 : z_2 : z_3 : z_4 \dots = \varphi_0 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4 : \dots$$

Wird demnach der Winkel ϑ so gewählt, dass

$$z_2 : z_3 : z_4 : \dots = \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4 : \dots$$

so ergibt sich aus der vorhergehenden Gleichung der Anfangswerth φ_0 der Ablenkung. Ist aber φ_0 gefunden, so sind die Verhältnisse dieselben wie in dem zuerst behandelten Falle.

Der dritte Fall endlich würde dadurch bestimmt sein, dass die Zeit t_1 für welche die Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt$ gleich Null ist nicht unmittelbar durch die Beobachtung gegeben ist und ebensowenig der dieser Zeit entsprechende Werth φ_1 der Ablenkung. In diesem Fall würden zuerst die Zeiten $t_2, t_3 \dots$ zu bestimmen sein, für welche $d^2\varphi/dt^2, d^3\varphi/dt^3 \dots$ verschwinden. Die Zeit t_1 bestimmt sich dann durch die Beziehung

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots$$

Wird aber die so gefundene Zeit t_1 zum Anfangspunkt der Zeitrech-

nung gemacht, so sind die Verhältnisse dieselben, wie in dem zuvor betrachteten Falle und die weitere Rechnung kann daher nach den für diesen gegebenen Regeln ausgeführt werden.

Die im Vorhergehenden gegebenen Rechnungsregeln beruhen auf der Voraussetzung dass für eine nach bestimmten Intervallen fortschreitende Reihe von Winkeln ϑ die Werthe von z als Funktion von r und die Reihe der Werthe $1, z_2, z_3, \dots$ bekannt seien. Um wenigstens eine allgemeine Uebersicht über das Verhalten der Funktion z zu ermöglichen, sind in den Tabellen 1 und 2 für einige Werthe des Winkels ϑ die Werthe von z und die Reihen $1, z_2, z_3 \dots$ mitgetheilt. Ausserdem sind in der Tafel I die in der ersten Tabelle enthaltenen Funktionswerthe graphisch dargestellt. Die Tabelle 1 beschränkt sich auf negative Werthe des Argumentes r ; wie sich aus den Gleichungen $\alpha_1 t = r \cos \vartheta, \alpha_2 t = r \sin \vartheta$ ergibt, würden positive r nur in Betracht zu ziehen sein bei negativem t ; schliessen wir also negative Werthe der Zeit aus, so sieht man, dass die Kenntniss der Funktion z nur für negative Werthe von r erforderlich ist.

Mit Bezug auf die Berechnung der Funktionen z möge noch bemerkt werden, dass der Fall $\vartheta = 45^\circ$ eine besondere Behandlung erfordert. Dieser Werth von ϑ ergibt sich, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ und daher auch $p = q = -\alpha$. Die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung kommt auf die Form:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2q \frac{d\varphi}{dt} + q^2 \varphi = 0$$

Das Integral derselben ist:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-qt} (1 + qt)$$

oder

$$\varphi = \varphi_0 e^{\alpha t} (1 - \alpha t)$$

Setzen wir

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = z, \quad \alpha t = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

so ergibt sich:

$$z = e^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}} \right)$$

und diess ist die Gleichung, durch welche die Werthe der Funktion z bestimmt werden für $\vartheta = 45^\circ$.

III. Anwendung auf Galvanometrie.

Beobachtungen mit constantem Strome.

Die allgemeinen Betrachtungen der vorhergehenden Abschnitte sollen im Folgenden angewandt werden auf die Theorie der Galvanometer mit aperiodischer Dämpfung und mit astatischem Nadelpaar. Wir betrachten zuerst den Fall, dass die Ablenkung des letzteren durch einen constanten Strom erzeugt wird.

So lange kein Strom die Windungen des Galvanometers durchläuft, wird die Ruhelage des astatischen Paares bedingt durch das Gleichgewicht zwischen der Torsion des Suspensionsfadens und dem vom Erdmagnetismus auf die beiden Magnete ausgeübten Drehungsmoment. Wir bezeichnen durch ε_i und ε_a die Winkel, welche die magnetischen Axen des inneren und äusseren Stabes unter diesen Umständen mit dem Meridiane einschliessen, mit δ den Winkel, welchen die Axe des unteren Stabes in der Torsionsruhelage mit dem magnetischen Meridiane bilden würde. Die magnetischen Momente der beiden Stäbe seien gleich m_i und m_a . Man hat dann die Gleichung

$$D(\delta - \varepsilon_i) = (m_i \varepsilon_i - m_a \varepsilon_a) T$$

wenn D die Torsionsconstante, T die horizontale Intensität des Erdmagnetismus bezeichnet.

Der Winkel, welchen die Ebene der Multiplicatorwindungen mit dem Meridiane bildet, werde bezeichnet durch γ ; wird das Galvanometer durchflossen von einem Strome von der Stärke 1, so übt dieser auf die Nordpole der beiden Magnetstäbe in der Richtung senkrecht gegen die

Ebene der Multiplicatorwindungen Kräfte aus, welche reducirt auf die Einheit des nördlichen Magnetismus durch P_i und P_a bezeichnet werden mögen. Wird die magnetische Axe des unteren Stabes durch einen Strom von der Stärke i um den Winkel u aus der Ruhelage abgelenkt, so ist das von dem Strome auf das astatische Nadelpaar ausgeübte Drehungsmoment gleich

$$iP_i m_i \cos(u + \varepsilon_i - \gamma) + iP_a m_a \cos(u + \varepsilon_a - \gamma)$$

gleichzeitig ist das Drehungsmoment der Torsion

$$-D(u + \varepsilon_i - \delta)$$

und das Drehungsmoment des Erdmagnetismus:

$$- \{m_i(u + \varepsilon_i) - m_a(u + \varepsilon_a)\} T$$

Das gesammte auf das Nadelpaar ausgeübte statische Moment wird somit:

$$iP_i m_i \cos(u + \varepsilon_i - \gamma) + iP_a m_a \cos(u + \varepsilon_a - \gamma) - D(u + \varepsilon_i - \delta) \\ - \{m_i(u + \varepsilon_i) - m_a(u + \varepsilon_a)\} T$$

oder mit Rücksicht auf die frühere Gleichung

$$iP_i m_i \cos(u + \varepsilon_i - \gamma) + iP_a m_a \cos(u + \varepsilon_a - \gamma) - Du - (m_i - m_a) Tu$$

Nimmt man an, dass die Winkel u , ε_i , ε_a und γ so klein sind, dass die Quadrate derselben vernachlässigt werden können, so reducirt sich der gefundene Ausdruck auf:

$$i(P_i m_i + P_a m_a) - \{D + (m_i - m_a) T\} u$$

Zu diesem statischen Drehungsmoment kommt noch hinzu ein dynamisches, welches, durch die in den Windungen des Multiplicators inducirten Ströme erzeugt, die Ursache der galvanischen Dämpfung ist. Denken wir uns den Multiplicator in einer auf demselben markirten Grundrichtung durchflossen von einem Strom von der Stärke 1, und bezeichnen wir das Potential, welches unter diesen Umständen von dem astatischen Paar auf die Gesammtheit der Windungen ausgeübt wird

durch V , so ist die bei der Drehung des Paares auf die Windungen ausgeübte electromotorische Kraft gleich:

$$\frac{\partial V}{\partial u} \frac{du}{dt}$$

Ist w der Widerstand des Schliessungskreises, so ist die Stärke des in dem Multiplicator inducirten Stromes gleich:

$$\frac{1}{w} \frac{\partial V}{\partial u} \frac{du}{dt}$$

Auf der anderen Seite ist das Drehungsmoment, welches ein Strom von der Stärke 1 auf das astatiche Paar ausübt gegeben durch

$$-\frac{\partial V}{\partial u}$$

Das durch den inducirten Strom ausgeübte Drehungsmoment ist somit gleich

$$-\frac{1}{w} \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 \frac{du}{dt}$$

Dem Vorhergehenden entsprechend haben wir zu setzen:

$$-\frac{\partial V}{\partial u} = P_i m_i + P_a m_a$$

und es ergibt sich daher für das rückwirkende Drehungsmoment der inducirten Ströme der Ausdruck:

$$-\frac{(P_i m_i + P_a m_a)^2}{w} \frac{du}{dt}$$

Zu der von den Multiplicatorwindungen ausgeübten Dämpfung wird noch hinzutreten die von der inneren Reibung des Suspensionsfadens, seiner elastischen Nachwirkung und der Luftreibung herrührende. Endlich kann die Dämpfung noch absichtlich verstärkt sein dadurch, dass die innere Nadel mit einem Kupferring umgeben, oder die Suspension mit einer in einer Flüssigkeit schwebenden Platte verbunden wird.

Solche Dämpfungen verschiedenartigen äusseren Ursprunges können wir zusammenfassen durch die Hinzufügung eines Drehungsmomentes von der Form

$$-P^2 \frac{du}{dt}$$

Bezeichnen wir endlich durch K das Trägheitsmoment des schwingenden Systems, und setzen wir zur Abkürzung:

$$m_i P_i + m_a P_a = C$$

so wird die Bewegungsgleichung:

$$K \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{C^2}{w} + P^2 \right) \frac{du}{dt} + \{ (m_i - m_a) T + D \} u = C i$$

Bezeichnen wir durch u_0 die constante Ablenkung, bei welcher das astatistische Paar zur Ruhe kommt, so ist für diese

$$\{ D + (m_i - m_a) T \} u_0 = C i$$

Substituiren wir den hierdurch gegebenen Werth von $C i$ in der Differentialgleichung der Bewegung, so kommt dieselbe auf die Form:

$$K \frac{d^2 u}{dt^2} + \left\{ \frac{C^2}{w} + P^2 \right\} \frac{du}{dt} + \{ D + (m_i - m_a) T \} (u - u_0) = 0$$

Setzen wir $u - u_0 = -\varphi$, so ergibt sich:

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \left\{ \frac{C^2}{w} + P^2 \right\} \frac{d\varphi}{dt} + \{ D + (m_i - m_a) T \} \varphi = 0$$

Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$2qK = \frac{C^2}{w} + P^2 \quad \text{und} \quad p^2 K = D + (m_i - m_a) T$$

so erhalten wir die Gleichung in der früher behandelten Form:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2q \frac{d\varphi}{dt} + p^2 \varphi = 0$$

Nun ist für $t = 0$: $u = 0$, also $\varphi = u_0$ und für $t = \infty$:

$u = u_0$ also $\varphi = 0$; ferner ist für $t = 0$: $d\varphi/dt = 0$, somit ist das Integral der Gleichung gegeben durch:

$$\varphi = u_0 \frac{\alpha_1 e^{\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

wenn wie früher

$$\alpha_1 = -q + \sqrt{q^2 - p^2} \quad \alpha_2 = -q - \sqrt{q^2 - p^2}$$

gesetzt wird.

Das Gesetz, nach welchem das astatische Paar von der Ruhelage aus die schliessliche constante Ablenkung erreicht, ist hiermit vollständig bestimmt. Wenn nun nach Erreichung der letzteren Stellung der Strom unterbrochen wird, so bewegt sich das Nadelpaar wieder nach der ursprünglichen Ruhelage hin, und man sieht leicht, dass der Verlauf dieses Rückgangs durch genau dasselbe Gesetz bestimmt wird, wie der Verlauf der vorhergehenden Ablenkung. Wenn nämlich kein Strom in dem Multiplicator vorhanden ist, während die Enden desselben nach wie vor metallisch mit einander verbunden sind, so wird die Bewegung des astatischen Paares bestimmt sein durch die Gleichung:

$$K \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{C^2}{w} + P^2 \right) \frac{du}{dt} + \{ D + (m_i - m_a) T \} u = 0,$$

oder mit Benützung der früheren Bezeichnungen

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2q \frac{du}{dt} + p^2 u = 0$$

Das Integral dieser Gleichung ist mit Rücksicht auf die Anfangswerthe von u und du/dt gegeben durch:

$$u = u_0 \frac{\alpha_1 e^{\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

einen Ausdruck, welcher mit dem zuvor für φ gefundenen identisch ist.

Die vorhergehenden Resultate sollen nun angewandt werden zu der Bestimmung der Empfindlichkeit C eines Galvanometers mit aperiodischer Dämpfung.

Die Beobachtungen, welche wir zu diesem Zwecke anstellen können, sind folgende. Wenn das astatische Paar in Ruhe sich befindet, wird der Strom eines constanten Elementes durch den Multiplicator geschlossen. Nimmt man den Moment der Schliessung zum Anfangspunkt der Zeitrechnung, so wird von diesem Augenblick ab die Stellung des astatischen Paares in geeigneten Zeitintervallen bestimmt und auf diese Weise eine Reihe zusammengehöriger Werthe von φ und t ermittelt; der Werth von u_0 ergibt sich aus der constanten Einstellung, welche schliesslich von dem Nadelpaar erreicht wird. Wenn nun in einem bestimmten Moment der Strom, welcher den Multiplicator durchläuft unterbrochen wird, ohne dass gleichzeitig die metallische Schliessung des letzteren eine wesentliche Aenderung erleidet, so kann durch ganz analoge Beobachtungen eine Reihe von Werthpaaren u und t und ein neuer Werth der constanten Ablenkung u_0 gefunden werden. Es kann, wenn das Nadelpaar zu vollständiger Ruhe gelangt ist, der Strom aufs Neue geschlossen, die ganze Beobachtungsreihe beliebig oft wiederholt werden.

Wenn wir die Gleichung für den jeweilig vorhandenen Abstand von der Ruhelage in der früheren Form

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\alpha_1 e^{\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

schreiben, so wird aus den geschilderten Beobachtungen φ_0 und eine Reihe zusammengehöriger Werthe von φ und t zu entnehmen sein. Dann aber ergeben sich mit Hülfe der im zweiten Abschnitte entwickelten Methoden die Werthe von α_1 und α_2 und somit auch

$$2q = -(\alpha_1 + \alpha_2), \quad p^2 = \alpha_1 \alpha_2$$

Nun ist aber

$$2qK = \frac{C^2}{w} + P^2, \quad p^2 K = D + (m_i - m_a) T$$

Wenn also das Trägheitsmoment K bekannt ist, so kann der Werth von

$$\frac{C^2}{w} + P^2 \quad \text{und} \quad D + (m_i - m_a) T$$

berechnet werden.

Zur Bestimmung von P^2 dient die Beobachtung der Dämpfung bei geöffnetem Multiplicator. Die Bewegungsgleichung des astatischen Paares ist unter diesen Umständen gegeben durch

$$K \frac{d^2 u}{dt^2} + P^2 \frac{du}{dt} + \{D + (m_i - m_a) T\} u = 0$$

oder wenn wir setzen $P^2 = 2q_0 K$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2q_0 \frac{du}{dt} + p^2 u = 0$$

Ist die Dämpfung auch bei geöffnetem Multiplicator eine aperiodische, so wird q_0 ganz in derselben Weise zu bestimmen sein, wie zuvor q . Ist dagegen die Dämpfung eine periodische geworden, so ist

$$q_0 = \frac{\lambda}{\tau}$$

wo λ das logarithmische Decrement, τ die Dauer der gedämpften Schwingung. In beiden Fällen ergibt sich:

$$P^2 = 2q_0 K \quad \text{und} \quad C^2 = 2wK(q - q_0)$$

Man sieht also, dass die Empfindlichkeit C bestimmt werden kann aus der Beobachtung der Dämpfung bei geschlossenem und offenem Multiplicator, dem Trägheitsmoment des astatischen Paares und dem absoluten Widerstand des Multiplicators.

Eine Prüfung für die Richtigkeit der Beobachtungen wird durch die Berechnung von p gewonnen. Bezeichnet τ_0 die Schwingungsdauer des von der Dämpfung befreiten astatischen Paares, so ist:

$$\tau_0 = \frac{\pi}{p}$$

Die Bestimmung dieser Schwingungsdauer τ_0 wird also in einfachster Weise zur Controle der Rechnungen und Beobachtungen zu benützen sein.

Beobachtungen mit inducirtem Strome.

Wir setzen wiederum voraus, dass das Nadelpaar zunächst in Ruhe sich befinde. Wenn jetzt ein inducirter Strom von sehr kurzer Dauer durch die Windungen des Multiplicators geleitet wird, so ertheilt derselbe dem Nadelpaar eine Anfangsgeschwindigkeit:

$$\omega_0 = \frac{C}{K} \int idt$$

Die Bewegungsgleichung des astatischen Paares nach dem Verschwinden des Stromes ist:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2q \frac{du}{dt} + p^2 u = 0$$

wo $2q$ und p^2 dieselbe Bedeutung besitzen wie früher. Da für $t = 0$: $u = 0$ und $du/dt = \omega_0$, so ist:

$$a_1 = a_2 = \frac{\omega_0}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

und

$$u = \omega_0 \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

Das astatische Paar wird somit zuerst von der Ruhelage sich entfernen, zur Zeit t_1 eine grösste Ablenkung u_1 erreichen, sodann umkehren und asymptotisch sich wieder der Ruhelage nähern. Dieser letztere Theil der Bewegung erfolgt nach denselben Gesetzen, welche für die Ablenkung durch einen constanten Strom gelten. Es ergibt sich hieraus, dass die früheren Regeln auch auf den vorliegenden Fall in Anwendung gebracht werden können. Eine vollständige Ausnützung der Beobachtungsdaten wird zu erreichen sein, wenn die für die Function z zu berechnenden Tabellen auf positive Werthe von r ausgedehnt werden, wenigstens soweit, bis sich für z der Werth 0 ergibt. Eine Ergänzung der früheren Tabellen nach dieser Richtung ist in der Tabelle 3 gegeben. Die entsprechenden Curven sind in Tafel I gezeichnet.

Man kann somit durch Beobachtung der Bewegung, welche durch einen Inductionsstoss erzeugt wird in ähnlicher Weise wie aus der Ablenkung durch einen constanten Strom die Werthe von α_1 und α_2 bestimmen. Sind aber α_1 und α_2 auf die eine oder andere Weise gefunden, so kann auch ω_0 aus den Beobachtungen berechnet werden. Sind ausserdem C und K bekannt, so hat man zur Bestimmung des Integralstroms

$$\int i dt = \omega_0 \frac{K}{C}$$

Bezeichnet man durch u_1 die grösste Ablenkung, welche das astatische Paar erreicht, so ist nach den früheren Formeln

$$\omega_0 = -u_1 \left\{ \frac{\alpha_1^{\alpha_1}}{\alpha_2^{\alpha_2}} \right\}^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}}$$

Substituiren wir diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung, so ergibt sich:

$$\int i dt = -u_1 \left\{ \frac{\alpha_1^{\alpha_1}}{\alpha_2^{\alpha_2}} \right\}^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}} \frac{K}{C}$$

Ausserdem hat man zur Bestimmung von C die Gleichung

$$C^2 = 2wK(q - q_0)$$

Man sieht also, wie die Stärke des Integralstromes bestimmt werden kann durch die Beobachtung des Maximalausschlages u_1 und die Bestimmung der Constanten α_1 , α_2 , q_0 , sowie des Trägheitsmomentes K .

IV. Beobachtungen an einem Galvanometer von grosser Empfindlichkeit zur experimentellen Prüfung der Theorie.

Die folgenden Beobachtungen beziehen sich auf ein Galvanometer, dessen Multiplicator durch Aufwinden eines feinen mit Seide besponnenen Kupferdrahtes auf einen Holzrahmen von elliptischer Form hergestellt worden war. Die Anzahl der Windungen betrug 24826, die Dicke des umsponnenen Drahtes $0,124^{\text{mm}}$; der Widerstand der Windungen bei einer Temperatur von 23° ist gleich 6914 Siemens. Das Galvanometer ist versehen mit einem astatischen Nadelpaar; die Länge der beiden Nadeln beträgt 73^{mm} , das Gewicht der Nadel I 45323 mg, das der Nadel II 44861 mg. Das magnetische Moment der ersten Nadel hatte den Werth

$$m_{\text{I}} = 506 \times 10^4 \text{ (mm, mg, sec),}$$

das der zweiten Nadel war:

$$m_{\text{II}} = 554 \times 10^4 \text{ (mm, mg, sec).}$$

Das Trägheitsmoment der beiden Nadeln zusammengenommen mit dem der Suspension wurde gefunden gleich 4589×10^4 (mm, mg).

Die beiden Nadeln waren an einem Bündel von Coconfäden aufgehängt. Diess war für die Genauigkeit der Beobachtungen in so fern nachtheilig, als der Cocon eine sehr starke Torsionsnachwirkung zeigte. Abgesehen von dem Einfluss der einzelnen Ablenkungen, trat während der ganzen Dauer der Beobachtungen eine continuirliche Verschiebung der Ruhelage zu Tage. Die Schwingungsdauer des Nadelpaares erhielt sich dagegen ziemlich constant gleich 55 sec.

Um mit diesem Galvanometer Ströme von sehr geringer Intensität messen zu können, war seine Empfindlichkeit zu bestimmen. Diess konnte in bekannter Weise dadurch geschehen, dass man einen und denselben Strom durch eine Tangentenbussole von bekannter Empfindlichkeit und durch das Galvanometer hindurchgehen liess und die gleichzeitig in beiden Instrumenten erzeugten

Ablenkungen beobachtete. Das Verhältniss der Empfindlichkeiten war dann aus dem Verhältniss der Ablenkungen zu berechnen. Die hiebei benützte Tangentenbussole war dieselbe, welche von Weber in den electrodynamischen Maassbestimmungen beschrieben worden ist (IV. Abhandl. S. 289). Die Stärke des Stromes ergibt sich aus der beobachteten Ablenkung mit Hülfe der Formel:

$$i = \frac{T}{262,1} (1 + \Theta) \operatorname{tg} \varphi \left\{ \begin{array}{l} \text{magnetisches Maass} \\ \text{mm, mg, sec} \end{array} \right\}$$

wo

$$\Theta = 0,0024, \quad T = 1,918$$

zu setzen ist.

Bei der grossen Empfindlichkeit des Galvanometers konnte für dieses nur ein schwacher Zweigstrom des die Tangentenbussole durchfliessenden Stromes zur Anwendung kommen. Da aber schon die Tangentenbussole eine grosse Empfindlichkeit besass, so wurde, um die Stromstärke in geeigneter Weise zu reguliren, die in Tafel II dargestellte Verbindung benützt. *E* bezeichnet das zur Stromerzeugung dienende Daniellsche Element, *R I* einen Rheostaten, in welchem bei allen Beobachtungen ein Widerstand von 10000 Siemens eingeschaltet war. *T* ist die Tangentenbussole, *M* der Multiplicator. *N* und *N'* sind zwei Quecksilbernäpfe, mittelst welcher eine durch den Rheostaten *R II* gebildete Nebenschliessung hergestellt ist. Von zwei anderen Quecksilbernäpfen *Q* und *Q'* aus gehen Verbindungsdrähte nach den Enden des Multiplicators hin; diese Näpfe sind aber gleichzeitig durch 2 neben einander eingeschaltete Siemens-Einheiten verbunden. *C* bezeichnet einen Stöpselkommutator, *G* einen vor dem Galvanometer eingeschalteten Gauss'schen Commutator.

Die Enden des Multiplicators sind auch bei unterbrochenem Strom durch die beiden neben einander eingeschalteten Siemens-Einheiten, d. h. durch einen Widerstand von $\frac{1}{2}$ Siemens miteinander verbunden, und es wurden dadurch die Schwingungen des astatischen Nadelpaares aperiodisch gedämpft. In der Beobach-

tung dieser aperiodischen Schwingungen war somit den früheren Entwicklungen zufolge ein zweites Mittel zu der Bestimmung der Empfindlichkeit gegeben. Die Vergleichung des so erhaltenen Resultates mit dem aus der Reduction auf die Tangentenbussole folgenden Werth der Empfindlichkeit giebt dann einen Prüfstein für die Richtigkeit der im Vorhergehenden entwickelten Theorie. Eine Prüfung, welche noch vervollständigt wird dadurch, dass die aus der Beobachtung der aperiodischen Dämpfung zu berechnende Constante p gleich π/τ_0 sein muss, wenn τ_0 die Schwingungsdauer des ungedämpften Nadelpaares bezeichnet.

Die Dämpfungsbeobachtungen an dem Galvanometer wurden in der Weise ausgeführt, dass der Strom abwechselnd geschlossen und unterbrochen wurde; um die Bewegung des Nadelpaares nach der jeweiligen Gleichgewichtslage hin zu bestimmen, wurde von 15 zu 15 sec die Einstellung desselben beobachtet. Dabei war aber noch eine besondere Vorsicht nöthig.

Es ergab sich, dass in dem Kreise $M G Q Q'$ eine electromotorische Kraft vorhanden war, welche eine sehr kleine Verschiebung des Nadelpaares zur Folge hatte, sobald der Commutator G geschlossen wurde; da die Richtung der Verschiebung mit der Stellung des Commutators wechselte, so ist der Sitz jener Kraft ohne Zweifel in den Berührungstellen des Quecksilbers und Kupfers bei Q und Q' zu suchen. Um den Einfluss der erwähnten Verschiebungen eliminiren zu können, wurden die Beobachtungen in der Regel in folgender Weise ausgeführt. Zuerst wurde bei aufgehobenem Commutator G die Einstellung des Nadelpaares bestimmt, sodann der Commutator geschlossen und die Einstellung während eines Zeitraums von 6 min von 15 zu 15 sec beobachtet; hierauf wurde der Strom geschlossen und wieder während einer Zeit von 6 min die Einstellung des Nadelpaares verfolgt. Der Strom wurde dann unterbrochen und der Rückgang der Nadel zu ihrer Ruhelage beobachtet; endlich nach Verlauf von weiteren 6 min der Commutator aufgehoben und die Einstellung des Nadelpaares aus Umkehrpunkten bestimmt. Dieselbe Reihe von Beobachtungen wurde dann bei

umgekehrter Stellung des Commutators ausgeführt und zum Schluss die ursprüngliche Beobachtungsreihe wiederholt. Auf diese Weise kann gleichzeitig die continuirliche Verschiebung der Ruhelage bestimmt und es können die Beobachtungen selbst von ihrem Einfluss befreit werden. Die in dieser Weise angestellten Beobachtungsreihen sind in den folgenden Tabellen enthalten.

I. Beobachtungen vom 1. März 1882.

In dem Rheostat II wurden eingeschaltet 3000 Siemens. Die Ablenkung des Magnetspiegels der Tangentenbussole betrug in Scalentheilen

$$N = 503,78$$

Der Commutator G blieb beständig in demselben Sinne geschlossen, die bei abwechselnder Schliessung und Oeffnung des Stromes beobachteten Einstellungen des Nadelpaares sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt

Zeit	Einstellung in Scalentheilen				
	geschl.	offen	geschl.	offen	geschl.
0 ^m 0 ^s					
15		38.65	56.70	33.7	50.9
30		44.9	50.05	39.8	44.3
45		49.65	45.0	44.6	39.3
1 ^m 0		53.05	41.1	48.05	35.7
15		55.9	38.3	50.95	32.9
30		57.8	36.2	52.9	30.85
45		59.0	34.8	54.05	29.0
2 ^m 0		60.0	33.5	55.0	27.95
15		60.9	32.7	55.9	26.95
30		61.05	32.0	56.15	26.05
45		61.6	31.3	56.7	25.9
3 ^m 0		61.95	31.0	56.9	25.1
15		62.0	30.7	56.95	24.95
30		62.05	30.3	57.0	24.9
45		62.05	30.0	56.95	24.45
4 ^m 0		62.05	29.95	56.95	24.15
15		62.05	29.8	56.9	24.1
30		62.05	29.4	56.8	24.0
45		62.05	29.05	56.55	23.95
5 ^m 0		62.05	29.05	56.2	23.95
15	33.95	62.0	29.0	56.1	23.7
30	33.95	62.0	28.95	56.1	23.4
45	33.85	61.95	28.8	56.1	23.25

Nimmt man die Mittel aus den 3 letzten Ablesungen jeder Columne, so ergeben sich die folgenden Einstellungen des Nadelpaares.

Strom	geschl.	offen	geschl.	offen	geschl.
Zeit	5 ^m 30 ^s	11 ^m 30 ^s	17 ^m 30 ^s	23 ^m 30 ^s	29 ^m 30 ^s
Einstell.	33.92	61.98	28.92	56.10	23.45

Hiernach berechnen sich für die durch den Strom hervorgebrachten Ablenkungen die Werthe

30,56

30,12

29,92

Im Mittel 30,20

Nimmt man ferner an, dass die Ruhelage des astatischen Paares mit gleichmässiger Beschleunigung sich verschoben habe, so ergeben sich in den einzelnen Abschnitten der Beobachtung die folgenden Verschiebungen auf 1 min.

5,5 ^{min}	—	11,5 ^{min}	Verschiebung:	0,433
11,5	—	17,5	0,453
17,5	—	23,5	0,473
23,5	—	29,5	0,493

Mit Benützung dieser Werthe ist die folgende Tabelle berechnet, welche die Bewegung der Nadeln nach der jedesmaligen Ruhelage hin angiebt.

Zeit	Ablenkungen				Mittel
0 ^m	o	o	o	o	o
15 ^s	5.05	4.95	5.13	4.83	4.99
30	11.40	11.49	11.44	11.30	11.41
45	16.26	16.42	16.26	16.18	16.28
1 ^m 0	19.77	20.21	19.83	19.66	19.87
15	22.73	22.89	22.85	22.32	22.70
30	24.74	24.88	24.92	24.26	24.70
45	26.04	26.17	26.19	25.99	26.10
2 ^m 0	27.16	27.35	27.26	26.91	27.17
15	28.16	28.04	28.27	27.79	28.06
30	28.42	28.63	28.64	28.57	28.56
45	29.04	29.22	29.31	28.60	29.05
3 ^m 0	29.54	29.40	29.63	29.27	29.46
15	29.70	29.59	29.79	29.30	29.59
30	29.85	29.87	29.96	29.23	29.73
45	29.96	30.06	30.03	29.55	29.90
4 ^m 0	30.07	30.00	30.15	29.73	29.99
15	30.18	30.04	30.22	29.74	30.04
30	30.29	30.32	30.24	29.63	30.12
45	30.40	30.56	30.11	29.56	30.16
5 ^m 0	30.50	30.44	29.87	29.44	30.06
15	30.56	30.38	29.89	29.56	30.10
30	30.67	30.32	30.01	29.74	30.18
45	30.73	30.36	30.13	29.77	30.25

Nimmt man auch hier die Mittel aus den 3 letzten Ablenkungen so ergibt sich der Werth

$$n = 30,18$$

und wir können daher nach beiden Berechnungsarten im Mittel setzen

$$n = 30,19$$

II. Beobachtungen vom 24. März 1882.

Im Rheostaten II sind eingeschaltet 3000 Siemens. Die Ablenkung der Tangentenbussole betrug in Scalentheilen $N = 521,18$. Der Commutator G wurde abwechselnd in der einen und anderen Richtung geschlossen, (\parallel und \times).

Strom	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.
Zeit	Einstellungen des Galvanometers in Scalentheilen.								
0 ^m	Comm. 0			Comm. 0			Comm. 0		
1 ^m 0 ^s	80.10	Commutator		70.29	Commutator ×		56.05	Commutator	
15		286.05	8.25		58.2	29.1		60.35	80.05
30		92.35	2.0		51.7	35.3		66.6	73.9
45		97.65	296.7		46.4	40.35		71.7	68.65
2 ^m 0	Comm.	301.5	92.3	Com. ×	42.3	44.05	Comm.	75.1	64.5
15		4.3	89.0		39.0	47.0		78.1	61.2
30		6.95	86.5		36.3	49.05		80.1	59.0
45		8.8	84.2		34.1	50.95		82.0	57.0
3 ^m 0		10.0	82.9		32.55	52.0		83.05	55.25
15		11.05	81.1		31.05	53.0		84.0	54.0
30		12.0	80.1		30.05	53.95		84.9	53.05
45		12.55	79.2		29.1	54.05		85.05	52.1
4 ^m 0		13.0	78.9		28.75	54.55		85.8	51.9
15		13.1	78.05		28.0	54.95		86.0	51.05
30		13.55	77.8		27.3	55.0		86.0	50.9
45		13.9	77.05		27.0	55.0		86.0	50.05
5 ^m 0		13.9	77.0		26.6	55.0		86.0	49.95
15		13.95	76.45		26.05	55.0		86.0	49.6
30		13.95	76.05		25.95	55.0		86.0	49.05
45		13.95	75.95		25.65	55.0		85.95	49.0
6 ^m 0	81.5	13.95	75.8	64.05	25.2	55.0	56.05	85.95	48.95
15	81.35	13.8	75.15	64.0	25.0	54.95	56.0	85.9	48.55
30	81.2	13.6	75.05	63.95	25.0	54.8	56.0	85.6	48.05
45	81.05	13.6	75.0	63.95	24.9	54.4	55.65	85.3	48.0
7 ^m									Comm. 0
8 ^m									43.88

Im Mittel aus den 3 letzten Ablesungen jeder Columne ergeben sich die folgenden Einstellungen des astatischen Paares.

Strom	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.
Commut.				×	×	×			
Zeit	6 ^m 30 ^s	12 ^m 30 ^s	18 ^m 30 ^s	25 ^m 30 ^s	31 ^m 30 ^s	37 ^m 30 ^s	44 ^m 30 ^s	50 ^m 30 ^s	56 ^m 30 ^s
Einstell.	281.20	313.67	275.07	263.97	224.97	254.72	255.88	285.60	248.20

Die Ablenkungen in Scalentheilen sind hiernach

35.54

34.37

33.56

Im Mittel

34.49

Die Verschiebung der Ruhelage, welche während des Verlaufs der Beobachtungen eingetreten war, ergibt sich aus den bei aufgehobener Verbindung des Commutators (0) angestellten Beobachtungen in folgender Weise.

Zeit	1 ^m	20 ^m	39 ^m	58 ^m
Ruhelage	80.10	70.29	56.05	43.88

Berechnet man hiernach die Ruhelagen für die Zeiten, welchen die in der obigen Tabelle enthaltenen Einstellungen bei geschlossenem Multiplicator aber unterbrochenem Strom entsprechen, so ergibt sich die folgende Zusammenstellung :

	Commutator		Commutator ×		Commutator	
Einstell.	81.20	75.07	63.97	54.72	55.88	48.20
Ruhelage	77.26	71.07	66.17	57.17	52.53	44.85
Differenz	3.94	4.00	-2.20	-2.45	3.35	3.35

Diese Differenzen beweisen die Existenz der im Vorhergehenden erwähnten electromotorischen Kraft in dem aus Galvanometer und Commutator gebildeten Kreise.

Für die in 1^{min} eintretende Verschiebung der Ruhelage ergeben sich aus den vorhergehenden Beobachtungen die folgenden Werthe :

Bei aufgehobenem Commutator.

Zeit	1—20 ^m	20—39 ^m	39—58 ^m
Verschieb. in 1 min	0.516	0.749	0.640

Bei paralleler Stellung des Commutators.

Zeit	6.5—18.5 ^m	44.5—56.5
Verschieb. in 1 min	0.511	0.640

Bei gekreuzter Stellung des Commutators ist für das Intervall von 25.5—37.5^{min} die Verschiebung in 1^{min} gleich 0.771. Mit Berücksichtigung dieser Werthe ist die folgende Tabelle berechnet, mit Hülfe deren die Verschiebung der Ruhelage aus den Beobachtungen eliminirt werden kann.

6.5 — 12.5 ^m	Verschiebung in 1 ^m	0.489
12.5 — 18.5 ^m	0.565
25.5 — 31.5 ^m	0.731
31.5 — 37.5 ^m	0.732
44.5 — 50.5 ^m	0.652
50.5 — 56.5 ^m	0.616

Die Bewegung des astatischen Paares gegen die jeweilige Gleichgewichtslage hin ist hiernach durch die folgende Tabelle gegeben.

Zeit		Ablenkungen in Scalentheilen					Mittel	
0 ^m	0 ^s	o	o	o	o	o	o	
	15	5.21	5.00	5.23	4.94	4.95	5.09	5.07
	30	11.36	11.11	11.55	11.33	11.37	11.08	11.34
	45	17.06	16.27	16.66	16.56	16.63	16.18	16.56
1 ^m	o	21.03	20.53	20.58	20.44	20.19	20.17	20.49
	15	23.95	23.68	23.70	23.57	23.35	23.32	23.59
	30	26.72	26.04	26.22	25.81	25.52	25.37	25.95
	45	28.69	28.20	28.23	27.89	27.58	27.21	27.97
2 ^m	o	30.02	29.36	29.60	29.12	28.79	28.81	29.28
	15	31.09	31.02	30.92	30.30	29.91	29.90	30.52
	30	32.26	31.88	31.83	31.44	30.97	30.70	31.51
	45	32.93	32.64	32.50	31.72	31.28	31.50	32.09
3 ^m	o	33.51	32.80	32.67	32.41	32.20	31.54	32.52
	15	33.73	33.36	33.24	32.98	32.56	32.24	33.02
	30	34.30	33.47	33.75	33.22	32.72	32.23	33.28
	45	34.77	34.22	33.87	33.40	32.88	32.93	33.68
4 ^m	o	34.90	34.13	34.09	33.59	33.05	32.88	33.77
	15	35.07	34.44	34.45	33.77	33.21	33.07	34.00
	30	35.19	34.80	34.37	33.95	33.37	33.47	34.19
	45	35.31	34.76	34.49	34.14	33.59	33.37	34.28
5 ^m	o	35.43	34.77	34.76	34.32	33.65	33.26	34.36
	15	35.41	35.27	34.77	34.46	33.76	33.51	34.53
	30	35.33	35.23	34.59	34.49	33.63	33.85	34.52
	45	35.45	35.14	34.52	34.26	33.49	33.75	34.43
	Mittel	35.40	35.21	34.63	34.40	33.63	33.70	

Die letzte Horizontalreihe enthält die Mittel aus den drei letzten Ablenkungen jeder Columne. Das Hauptmittel hat in vollkommener Uebereinstimmung mit der früheren Berechnung den Werth

$$n = 34.49.$$

III. Beobachtungen vom 23. März 1882.

Im Rheostat II sind eingeschaltet 250 Siemens. $N = 250.17$

Strom	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.
Zeit	Einstellungen des Galvanometers in Scalentheilen								
0 ^m	Comm. o			Comm. o			Comm. o		
1 ^m 0 ^s	43.13	Commutator		38.73			33.23	Commutator	
15		45.75	55.35					36.15	45.9
30		48.8	52.1					39.1	42.75
45		51.0	49.8					41.8	40.0
2 ^m 0	Comm.	52.95	47.9	Comm. ×	Commutator ×	Comm.		43.35	38.0
15		54.05	46.05		33.05 20.1			45.0	36.5
30		55.05	45.0		30.0 23.05			45.95	35.1
45		56.0	44.0		27.25 25.8			46.8	34.45
3 ^m 0		56.55	43.1		25.2 27.35			47.05	33.95
15		57.0	42.9		23.95 28.95			47.6	33.05
30		57.2	42.05		22.85 29.9			47.95	33.0
45		57.8	41.95		21.95 30.5			48.0	32.5
4 ^m 0		57.95	41.55		21.0 31.0			48.0	32.05
15		58.0	41.05		20.3 31.6			48.1	32.0
30		58.0	41.0		20.0 31.95			48.1	32.0
45		58.05	40.95		19.6 32.0			48.15	31.9
5 ^m 0	43.05	58.05	40.95		19.1 32.05	34.0		48.15	31.55
15	43.05	58.05	40.7		19.05 32.05	34.0		48.15	31.2
30	43.05	58.05	40.3		18.95 32.1	34.0		48.1	31.1
45	43.05	58.0	40.2		18.8 32.1	34.0		48.15	31.05
6 ^m 0				36.0	18.3 32.1				Comm. o
15				36.0	18.05 32.1				
30				36.0	18.0 32.05				
45				35.95	18.0 32.05				
7 ^m									28.99

Die Mittel aus den 3 letzten Ablesungen jeder Columne geben die folgenden Einstellungen des astatischen Paares.

Strom	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.	Unterbr.	Geschl.	Unterbr.
Commut.				×	×	×			
Zeit	5 ^m 30 ^s	10 ^m 30 ^s	15 ^m 30 ^s	22 ^m 30 ^s	27 ^m 30 ^s	32 ^m 30 ^s	38 ^m 30 ^s	43 ^m 30 ^s	48 ^m 30 ^s
Einstell.	43.05	58.03	40.40	35.98	18.02	32.07	34.0	48.13	31.12

Hieraus ergeben sich die folgenden Ablenkungen in Scalentheilen

16.31

16.00

15.57

Im Mittel

15.96

Für die Verschiebung der Ruhelage bei offenem Commutator ergibt sich die Tabelle

Zeit	1 ^m	17 ^m	34 ^m	50 ^m
Ruhelage	43.13	38.73	33.23	28.99

Hiernach ergibt sich die folgende Zusammenstellung der bei geschlossenem Commutator aber ausgeschaltetem Element beobachteten Einstellungen mit den entsprechenden Ruhelagen.

	Commutator		Commutator ×		Commutator	
Einstell.	43.05	40.40	35.98	32.07	34.00	31.12
Ruhelage	41.89	39.14	36.95	33.72	32.04	29.39
Differenz	1.16	1.26	-0.97	-1.65	1.96	1.73

Die in 1^{min} erfolgende Verschiebung der Ruhelage besitzt während der verschiedenen Perioden der Beobachtung die folgenden Werthe

5.5 ^m — 10.5 ^m Verschiebung	0.257	27.5 ^m — 32.5 ^m Verschiebung	0.296
10.5 — 15.5	0.309	38.5 — 43.5	0.287
22.5 — 27.5	0.319	43.5 — 48.5	0.255

Hiernach ergibt sich für die Bewegung des astatischen Paares nach der jeweiligen Ruhelage die folgende Tabelle

Zeit	Ablenkung in Scalentheilen						Mittel
0 ^m 0 ^s	o	o	o	o	o	o	o
15	2.89	2.46	2.69	2.30	2.36	2.04	2.46
30	6.01	5.63	5.66	5.33	5.38	5.12	5.52
45	8.27	7.86	8.33	8.15	8.15	7.81	8.09
1 ^m 0	10.29	9.68	10.30	9.78	9.78	9.75	9.93
15	11.45	11.45	11.47	11.45	11.50	11.18	11.42
30	12.51	12.43	12.49	12.47	12.52	12.52	12.49
45	13.53	13.35	13.31	13.15	13.44	13.10	13.31
2 ^m 0	14.14	14.18	14.18	13.72	13.76	13.54	13.92
15	14.66	14.30	14.80	14.30	14.38	14.38	14.47
30	14.92	15.08	15.02	14.82	14.81	14.36	14.83
45	15.59	15.10	15.34	14.94	14.93	14.80	15.12
3 ^m 0	15.80	15.43	15.76	15.07	15.00	15.19	15.37
15	15.91	15.85	15.73	15.14	15.17	15.17	15.49
30	15.98	15.83	15.75	15.27	15.24	15.11	15.53
45	16.09	15.80	15.82	15.34	15.37	15.14	15.59
4 ^m 0	16.16	15.73	16.24	15.41	15.44	15.43	15.57
15	16.22	15.90	16.42	15.49	15.51	15.72	15.88
30	16.29	16.23	16.39	15.51	15.53	15.75	15.95
45	16.30	16.25	16.31	15.59	15.65	15.74	15.97
Mittel	16.27	16.13	16.37	15.53	15.56	15.74	

Die unterste Horizontalreihe enthält wieder die Mittel aus den drei letzten Ablenkungen jeder Columne. Im Mittel ergibt sich für die Ablenkung ein Betrag von 15,93 Scalentheilen, während die frühere Rechnung 15,96 gegeben hatte. Wir setzen daher $n = 15,94$.

Ausser den im Vorhergehenden ausführlich behandelten Beobachtungsreihen wurden in derselben Weise noch zwei weitere angestellt, bei welchen in dem Rheostat II ein Widerstand von 50 Siemens eingeschaltet war. Stellt man die Resultate sämtlicher Beobachtungsreihen zusammen, so ergeben sich die folgenden entsprechenden Ablenkungen des Galvanometers und der Tangentenbussole in Scalentheilen.

Widerstand in Rh. II.	Ablenkung d. Tangentenb.	Ablenkung d. Galvanom.
3000	503.78	30.19
3000	521.18	34.49
250	250.17	15.94
50	80.33	5.01
50	80.12	5.13

Wir werden ferner die Mittelwerthe der Ablenkungen, wie sie für die vorhergehenden Beobachtungsreihen jedesmal in der letzten Verticalcolumnne angegeben sind, subtrahiren von der schliesslich erreichten constanten Ablenkung. Wir erhalten dann die zu den entsprechenden Zeiten vorhandenen Abstände des astatischen Paares von der schliesslichen Gleichgewichtslage. Bezeichnen wir den Anfangswerth dieses Abstandes durch n_0 , den zu einer beliebigen Zeit noch vorhandenen Abstand durch n , so werden wir ausserdem noch die Quotienten n/n_0 für die aufeinanderfolgenden Beobachtungszeiten berechnen. Diese Werthe sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, welche bei der Berechnung der Constanten der aperiodischen Dämpfung zu Grunde zu legen ist.

Zeit; Sec.	n	n/n_0	n	n/n_0	n	n/n_0
0	30.25	1.000	34.43	1.000	15.97	1.000
15	25.26	0.835	29.36	0.853	13.51	0.846
30	18.84	0.623	23.09	0.671	10.45	0.654
45	13.97	0.462	17.77	0.516	7.88	0.493
60	10.38	0.343	13.94	0.405	6.04	0.378
75	7.55	0.250	10.84	0.315	4.55	0.285
90	5.55	0.183	8.48	0.246	3.48	0.218
105	4.15	0.137	6.46	0.188	2.66	0.167
120	3.18	0.105	5.15	0.150	2.05	0.128
135	2.19	0.072	3.91	0.114	1.50	0.094
150	1.69	0.056	2.92	0.085	1.14	0.071
165	1.20	0.040	2.34	0.068	0.85	0.053
180	0.79	0.026	1.91	0.055	0.60	0.038
195	0.66	0.022	1.41	0.041	0.48	0.030
210	0.52	0.017	1.15	0.033	0.44	0.028
225	0.35	0.012	0.75	0.022	0.38	0.024
240	0.26	0.009	0.66	0.019	0.40	0.026
255	0.21	0.007	0.43	0.012	0.09	0.006
270	0.13	0.004	0.24	0.007	0.02	0.001
285	0.09	0.003	0.15	0.004	0.00	
300	0.19		0.07			
315	0.15		-0.10			
330	0.07		0.09			
345	0.00		0.00			

Die in dieser Tabelle enthaltenen Werthe von n/n_0 sind in Tafel II graphisch dargestellt.

Endlich mögen noch die Ausschläge des astatischen Paares zusammengestellt werden, welche der in dem Kreise $Q G M Q'$ vorhandenen electromotorischen Kraft entsprechen. Je nach dem der Commutator nach der einen oder anderen Richtung geschlossen wird, sind die Ausschläge durch $\parallel - 0$ oder $\times - 0$ bezeichnet.

Ablenkung d. Tangentenb.	$\parallel - 0$	$\times - 0$
521.18	3.66	-2.32
250.17	1.55	-1.31
80.33	1.19	-0.94
80.12	1.59	-1.58

Es scheint aus diesen Beobachtungen eine Abnahme des in dem Kreise $Q G M Q'$ vorhandenen Stromes mit der Stärke des von dem Elemente gelieferten Stromes zu folgen. Es wäre daher wahrscheinlich,

dass die in Q und Q' auftretende electromotorische Kraft durch das an den Berührungsstellen des Quecksilbers und Kupfers auftretende Peltier'sche Phänomen bedingt ist.

V. Berechnung der Constanten der gedämpften Schwingung.

Es sollen hiezu die drei im vorhergehenden Abschnitt ausführlich mitgetheilten Beobachtungsreihen benützt werden, da bei den beiden zuletzt angeführten die Ablenkungen im Ganzen sehr klein sind, so dass eine sichere Bestimmung jener Constanten aus denselben kaum zu erwarten ist.

Bei der ersten Beobachtungsreihe haben wir die folgenden zusammengehörigen Werthe der Zeit t und des Quotienten $n/n_0 = z$.

t	15	30	45	60	75	90	105	120
z	0.835	0.623	0.462	0.343	0.250	0.183	0.137	0.105

Ertheilen wir nun in dem Ausdruck

$$z = \frac{\cos \vartheta e^{r \sin \vartheta} - \sin \vartheta e^{r \cos \vartheta}}{\cos \vartheta - \sin \vartheta}$$

dem Winkel ϑ einen zunächst willkürlich gewählten constanten Werth, so haben wir diejenigen Werthe des Parameters r zu bestimmen, für welche z die in der vorhergehenden Tabelle enthaltenen Werthe annimmt. Es kann diess geschehen durch graphische Interpolation, oder auch mit Hülfe einer Tabelle, durch welche die Function z für eine Reihe von Argumentwerthen r gegeben ist. In diesem letzteren Falle können wir innerhalb eines durch 3 aufeinanderfolgende Werthpaare (z_0, r_0) , (z_1, r_1) , (z_2, r_2) bestimmten Intervalles z darstellen durch den quadratischen Ausdruck:

$$z = z_0 - c_1 (r - r_0) + c_2 (r - r_0)^2$$

Zur Bestimmung von r ergibt sich dann die Formel

$$r = r_0 + \frac{z_0 - z}{c_1} + \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{z_0 - z}{c_1} \right)^2$$

Die Coëfficienten c_1 und c_2 sind zu berechnen mit Hülfe der Formeln:

$$c_1 = \frac{(z_0 - z_1)(r_2 - r_0)}{(r_2 - r_1)(r_1 - r_0)} - \frac{(z_0 - z_2)(r_1 - r_0)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_0)}$$

$$c_2 = \frac{z_0 - z}{(r_2 - r_1)(r_1 - r_0)} - \frac{z_0 - z_2}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_0)}$$

Setzt man nun den Winkel $\vartheta = 7^0 30'$, so ergibt sich das folgende System zusammengehöriger Werthe von r und z .

z	0.835	0.623	0.462	0.343	0.250	0.183	0.137	0.105
$-r$	2.34	4.69	7.00	9.30	11.70	14.10	16.40	18.35

Aus den einzelnen Werthpaaren von r und t ergeben sich mit Hülfe der Gleichungen

$$\frac{r}{t} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \text{tg } \vartheta$$

Die folgenden Werthe von α_1 und α_2

t	15	30	45	60	75	90	105	120
$-\alpha_1$	0.1547	0.1550	0.1542	0.1537	0.1547	0.1552	0.1548	0.1516
$-\alpha_2$	0.0203	0.0204	0.0203	0.0202	0.0203	0.0204	0.0204	0.0198

Für die Mittelwerthe von α_1 und α_2 würde sich hieraus ergeben:

$$-\alpha_1^0 = 0.1542, \quad -\alpha_2^0 = 0.0203.$$

Wenn wir andererseits dem Winkel ϑ den Werth von 7^0 ertheilen, so ergibt sich die folgende Tabelle.

t	15	30	45	60	75	90	105	120
z	0.835	0.623	0.462	0.343	0.250	0.183	0.137	0.105
$-r$	2.44	4.91	7.41	9.85	12.44	15.05	17.41	19.62
$-\alpha_1$	0.1615	0.1625	0.1634	0.1629	0.1646	0.1660	0.1645	0.1623
$-\alpha_2$	0.0198	0.0200	0.0201	0.0199	0.0202	0.0204	0.0202	0.0199

Die Mittelwerthe sind:

$$-\alpha_1^0 = 0.1635; \quad -\alpha_2^0 = 0.0200.$$

Die für die beiden Winkel $7^0 30'$ und 7^0 sich ergebenden Differenzen $\alpha_1^0 - \alpha_1$ und $\alpha_2^0 - \alpha_2$ geben einen Maassstab für die grössere oder geringere Annäherung jener willkürlich gewählten Winkel an denjenigen, welcher den vorliegenden Beobachtungen am vollkommensten entspricht. Diese Differenzen sind im Folgenden zusammengestellt.

t	q	15	30	45	60	75	90	105	120
$\alpha_1^0 - \alpha_1$	$7^0 30'$	+0.0005	+0.0008	+0.0000	-0.0005	+0.0005	+0.0010	+0.0006	-0.0026
	7^0	-0.0020	-0.0010	-0.0001	-0.0006	+0.0011	+0.0025	+0.0010	-0.0012
$\alpha_2^0 - \alpha_2$	$7^0 30'$	0.0000	+0.0001	0.0000	-0.0001	0.0000	+0.0001	+0.0001	-0.0005
	7^0	-0.0003	-0.0001	0.0000	-0.0002	+0.0001	+0.0003	+0.0001	-0.0002

Aus der Vergleichung der Differenzreihen leitet sich als bester Werth von ϑ ein Winkel von $7^0 26'$ ab. Führen wir die Rechnung mit Zugrundelegung dieses Winkels aus, so ergibt sich die Tabelle.

t	15	30	45	60	75	90	105	120
z beobachtet	0.835	0.623	0.462	0.343	0.250	0.183	0.137	0.105
z berechnet	0.838	0.625	0.462	0.341	0.252	0.185	0.137	0.105
$-r$	2.340	4.725	7.052	9.343	11.794	14.208	16.444	18.500
$-\alpha_1$	0.1547	0.1562	0.1554	0.1544	0.1559	0.1565	0.1553	0.1529
$-\alpha_2$	0.0202	0.0204	0.0203	0.0202	0.0203	0.0204	0.0203	0.0199

Im Mittel ergibt sich:

$$\alpha_1 = -0.1552, \quad \alpha_2 = -0.0202.$$

Und somit:

$$q = 0.0877$$

$$p^2 = 0.00313$$

Die zweite Beobachtungsreihe kann am besten dargestellt werden, wenn dem Winkel ϑ der Werth $5^0 42'$ beigelegt wird. Die Resultate der Rechnung sind in der folgenden Tabelle enthalten.

t	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
z beobachtet	0.853	0.671	0.516	0.405	0.315	0.246	0.188	0.150	0.114	0.085
z berechnet	0.854	0.668	0.520	0.403	0.313	0.243	0.188	0.146	0.114	0.085
$-r$	2.559	5.064	7.714	10.159	12.690	15.177	17.886	20.159	22.919	25.882
$-\alpha_1$	0.1698	0.1680	0.1706	0.1685	0.1683	0.1678	0.1694	0.1672	0.1689	0.1717
$-\alpha_2$	0.0169	0.0168	0.0170	0.0168	0.0168	0.0167	0.0169	0.0168	0.0169	0.0171

Im Mittel ergibt sich:

$$\alpha_1 = -0.1690, \quad \alpha_2 = -0.0169$$

Und somit

$$q = 0.0929$$

$$p^2 = 0.00285$$

Bei der dritten Beobachtungsreihe endlich ist zu setzen $\vartheta = 6^{\circ} 30'$. Mit Hülfe dieses Werthes ergeben sich die in der folgenden Tabelle enthaltenen Resultate.

t	15	30	45	60	75	90	105	120
z beobachtet	0.846	0.654	0.493	0.378	0.285	0.218	0.167	0.128
z berechnet	0.846	6.652	0.495	0.377	0.287	0.218	0.165	0.126
$-\alpha_1$	0.1603	0.1590	0.1618	0.1603	0.1615	0.1607	0.1599	0.1591
$-\alpha_2$	0.0183	0.0181	0.0184	0.0183	0.0184	0.0183	0.0182	0.0181
$-r$	2.42	4.80	7.33	9.68	12.19	14.56	16.90	19.21

Im Mittel ergibt sich:

$$\alpha_1 = -0.1603, \quad \alpha_2 = -0.0183$$

und somit:

$$q = 0.0893 \quad p^2 = 0.00293$$

VI. Prüfung der allgemeinen Theorie und Bestimmung der Empfindlichkeit des Galvanometers.

Aus den vorhergehenden Berechnungen ergeben sich zunächst die folgenden Werthe der Constanten p .

- I. Beobachtungsreihe 1/III. 82 : $p = 0.0560$
- II. Beobachtungsreihe 24/III. 82 : $p = 0.0534$
- III. Beobachtungsreihe 23/III. 82 : $p = 0.0541$.

Es ist aber andererseits $p = \pi/\tau$, wo τ die Schwingungsdauer des astatischen Paares bei unterbrochenem Kreise bezeichnet. Die Schwingungsdauer τ war für das astatische Paar zu verschiedenen Zeiten bestimmt worden. Werden aus denselben die entsprechenden Werthe von p berechnet, so ergeben sich die folgenden Resultate.

Tag d. Beob.	τ	p
31/I. 82	54.48	0.0590
24/II. 82	56.17	0.0559
1/III. 82	55.38	0.0567
2/III. 82	55.70	0.0564
6/III. 82	55.69	0.0564

Wie man sieht, ist die Schwingungsdauer und damit auch der Werth von p ziemlichen Schwankungen unterworfen; der Grund hiefür liegt darin, dass ein grosser Theil der gesammten Directions-kraft von der Torsionselasticität der Coconfäden herrührt, welche in hohem Grade durch Temperatur und Feuchtigkeit beeinflusst wird. Für einen Beobachtungstag, 1/III. 82, liegt eine doppelte Bestimmung von p einmal aus der Schwingungsdauer und dann aus der Dämpfung vor. Aus der ersteren ergibt sich:

$$p = 0.0567$$

aus der letzteren

$$p = 0.0560$$

Die beiden Werthe stimmen mit einander überein bis auf den Betrag von 1.2%. Dieses Resultat kann als befriedigend betrachtet werden, wenn man berücksichtigt, dass die Directions-kraft der Torsion bei aperiodischer Bewegung eine andere ist als bei periodischer in Folge der elastischen Nachwirkung, welche die beiden Bewegungen in verschiedener Weise beeinflusst. (Vgl. Zu Boltzmann's Theorie d. elastischen Nachwirkung von Eduard Riecke, Göttinger Nachrichten 1883.)

Wir gehen zweitens über zu der Bestimmung der Empfindlichkeit des Galvanometers.

Aus den im vorhergehenden Abschnitt berechneten Beobachtungsreihen haben sich für die Constante q die Werthe ergeben:

$$\text{I. Beobachtungsreihe } q = 0.0877$$

$$\text{II. Beobachtungsreihe } q = 0.0929$$

$$\text{III. Beobachtungsreihe } q = 0.0893$$

Nun ist nach den früher entwickelten Formeln

$$2qK = \frac{C^2}{w} + P^2$$

Das Trägheitsmoment K des schwingenden Systems, wie es theils durch Wägung und Messung, theils durch Schwingungsbeobachtungen ermittelt wurde, ist gleich 45983×10^3 . Es ergeben sich somit die Werthe:

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad \frac{C^2}{w} + P^2 = 8065 \times 10^3 \\ \text{II.} & \quad \frac{C^2}{w} + P^2 = 8544 \times 10^3 \\ \text{III.} & \quad \frac{C^2}{w} + P^2 = 8213 \times 10^3 \end{aligned}$$

Bei offenem Multiplicator ist C^2/w gleich Null, und es bleibt demnach

$$P^2 = 2q_0 K$$

wenn q_0 den neuen Werth bezeichnet, welchen die Constante q unter diesen Umständen annimmt. Die Bewegung des Nadelpaares ist bei offenem Multiplicator eine periodisch gedämpfte; es ist somit, wenn wir mit λ das logarithmische Decrement, mit τ die Schwingungsdauer bezeichnen

$$q_0 = \frac{\lambda}{\tau} \quad \text{und} \quad P^2 = \frac{2\lambda K}{\tau}$$

Der Werth des logarithmischen Decrements bei offenem Multiplicator wurde gefunden gleich 0.06297, die Schwingungsdauer gleich 55.69 sec. Hiernach ergibt sich:

$$P^2 = 104 \times 10^3$$

und somit aus den verschiedenen Beobachtungsreihen

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad C^2 = 7961 \times 10^3 \times w \\ \text{II.} & \quad C^2 = 8440 \times 10^3 \times w \\ \text{III.} & \quad C^2 = 8110 \times 10^3 \times w \end{aligned}$$

Der Widerstand w setzt sich zusammen aus dem Widerstand des Multiplicators und dem Widerstand der die beiden Quecksilbernäpfe Q und Q' verbindenden Leitertheile. Was diesen letzteren Widerstand anbelangt, so ist bei der Berechnung desselben zu beachten, dass die beiden Näpfe Q und Q' unter allen Umständen durch die beiden neben einander eingeschalteten Quecksilbereinheiten verbunden sind, welche zusammen einen Widerstand von 0.5 Siemens repräsentiren. Ausserdem ist aber eine Verbindung der beiden Quecksilbernäpfe vermittelt durch

die übrige die Tangentenbussole enthaltende Leitung und zwar bei geschlossenem Strom gleichzeitig durch die beiden die Rheostaten I und II enthaltenden Zweige, bei offenem Strom nur durch den letzteren. Aus der Grösse der in den Rheostaten eingeschalteten Widerstände, und aus dem Widerstande der Tangentenbussole ergibt sich, dass die durch diese letztere vermittelte Verbindung der beiden Näpfe Q und Q' ausser Acht gelassen werden kann; es ist also unter allen Verhältnissen die Annahme gestattet, dass die Verbindung der beiden Quecksilbernäpfe durch einen Widerstand von 0.5 Siemens hergestellt ist.

Der Widerstand des Multiplicators wurde nach der Methode der Wheatstone'schen Brücke bestimmt, wobei jedoch das Galvanometer, dessen Widerstand zu bestimmen war, selbst zur Strommessung diente; es wurde der Widerstand des entsprechenden Brückenzweiges so lange geändert, bis die Einschaltung oder Entfernung des Brückendrahtes keine Aenderung der Ablenkung mehr hervorrief. Die Genauigkeit der Messung wurde durch die früher erwähnte in dem Kreise $QGMQ'$ auftretende electromotorische Kraft beeinträchtigt, war aber für den vorliegenden Zweck immerhin genügend. Drei an verschiedenen Tagen angestellte Messungen ergaben reducirt auf eine Temperatur von 23^0 einen Widerstand von

6914

6919

6906

Im Mittel also von 6914 Siemens.

Die Dämpfungsbeobachtungen waren angestellt bei einer mittleren Temperatur von 18^0 ; somit ist der entsprechende Widerstand des Multiplicators gleich 6790 Siemens, oder

$$w = 6790 \times 9440 \times 10^6 \text{ (magnet. Maass mm/sec)}$$

Substituiren wir diesen Werth in den für C^2 gegebenen Ausdrücken, so ergibt sich aus den verschiedenen Beobachtungen der folgende Werth von

$$C = m_i P_i + m_a P_a$$

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad C = 2254 \times 10^7 \\ \text{II.} \quad C = 2321 \times 10^7 \\ \text{III.} \quad C = 2275 \times 10^7 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{magnetisches Maass} \\ \text{mm}^{3/2}, \text{ mg}^{1/2}, \text{ sec}^{-1} \end{array} \right\}$$

Eine Prüfung für die Richtigkeit dieser Werthe ergibt sich endlich durch die Vergleichung der an der Tangentenbussole und dem Galvanometer beobachteten Ablenkungen.

Bezeichnen wir durch i_m die Stärke des den Multiplicator durchlaufenden Stromes, so haben wir für die durch denselben erzeugte Ablenkung die Gleichung:

$$i_m (m_i P_i + m_a P_a) \cos \varphi = \{ (m_i - m_a) T + D \} \varphi$$

oder mit Rücksicht auf die von uns eingeführten Bezeichnungen

$$i_m C \cos \varphi = p^2 K \varphi$$

Somit:

$$\frac{C}{p^2} = \frac{K}{i_m} \frac{\varphi}{\cos \varphi}$$

Bezeichnen wir die Ablenkung in mm durch n , die Entfernung von Spiegel zu Scale durch r , so ist:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{\cos \varphi} &= \frac{n}{2r} \left(1 - \frac{5}{24} \frac{n^2}{r^2} \right) \\ \frac{C}{p^2} &= \frac{K}{i_m} \frac{n}{2r} \left(1 - \frac{5}{24} \frac{n^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Ist ferner die Stärke des die Tangentenbussole durchlaufenden Stromes gleich i , so wird:

$$i_m = \frac{i}{13580}$$

Die Stromstärke i bestimmt sich aus der an der Tangentenbussole beobachteten Ablenkung N mit Hülfe der Formel:

$$i = \frac{T}{262.1} \times 1.0024 \times \frac{N}{2R} \left(1 - \left(\frac{N}{2R} \right)^2 \right)$$

Zur Berechnung der Stromstärken nach dieser Formel ist zu bemerken, dass

$$R = 1826.3^{\text{mm}}$$

dass ferner $1 \text{ Scalentheil} = 1.0085^{\text{mm}}$

und $T = 1.918$

zu setzen ist. Hiernach ergeben sich für die verschiedenen an der Tangentenbussole beobachteten Ablenkungen die folgenden Stromstärken i und i_m in magnetischem Maasse.

N	i (mm, mg, sec)	$i_m \times 10^{10}$ (mm, mg, sec)
503.78	0.001001	737.0
521.18	0.001034	761.7
250.17	0.000504	371.6
80.33	0.000163	119.8
80.12	0.000162	119.5

Für die weitere Berechnung von C/p^2 aus der angegebenen Formel ist zu bemerken, dass

$$r = 1321^{\text{mm}}$$

und $1 \text{ Scalentheil} = 0.998^{\text{mm}}$

Es ergeben sich hiernach für die berechneten Beobachtungsreihen die folgenden Werthe von C/p^2

$$\text{I. Beobachtungsreihe } \frac{C}{p^2} = 7122 \times 10^9$$

$$\text{II. Beobachtungsreihe } \frac{C}{p^2} = 7850 \times 10^9$$

$$\text{III. Beobachtungsreihe } \frac{C}{p^2} = 7454 \times 10^9$$

Mit Hülfe der früher angegebenen Werthe von p^2 berechnen sich hieraus die den einzelnen Beobachtungsreihen entsprechenden Werthe der Empfindlichkeitsconstante C . Dieselben sind im Folgenden zusammengestellt mit den aus den Dämpfungsbeobachtungen abgeleiteten Werthen :

Beobachtungsreihe	C bestimmt durch	
	Vergl. mit der Tangentenb.	Dämpfungsbeobachtungen
I.	2230×10 ⁷	2254×10 ⁷
II.	2238×10 ⁷	2321×10 ⁷
III.	2183×10 ⁷	2275×10 ⁷

Die zwischen den beiden Werthreihen hervortretenden Abweichungen dürften ihren Grund zu einem grossen Theile in der elastischen Nachwirkung des Coconfadens haben.

Wenn das Galvanometer zur Messung von Stromstärken nach magnetischem Maasse dienen soll, so genügt hiezu, eine unveränderliche Entfernung von Spiegel und Scale vorausgesetzt, die Kenntniss des Quotienten

$$\frac{i_m}{n} = \frac{K}{2r} \frac{p^2}{C}$$

Der Werth desselben ist einerseits unmittelbar durch die Ablenkungen der Tangentenbussole und des Galvanometers gegeben; er kann aber auch berechnet werden mit Hülfe des durch die Dämpfungsbeobachtungen bestimmten Werthes von C/p^2 . Die in dieser Weise sich ergebenden Werthe von i_m/n sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

n	$i_m/n \times 10^{10}$ bestimmt durch	
	Vergl. mit der Tangentenb.	die Constanten der Dämpfung
30.19	24.42	24.16
34.49	22.12	21.34
15.94	23.31	22.35
5.01	23.91	
5.13	23.28	
Mittel	23.41	22.62

Beide Bestimmungen zusammen würden demnach ergeben

$$i_m/n \times 10^{10} = 23.0 \text{ (magnet. Maass; mm, mg, sec).}$$

Wenn die Ablenkung nicht in Scalentheilen sondern durch den Ablenkungswinkel φ gegeben ist, so gilt für kleine Ablenkungen die Formel

$$i_m = 0.0000061 \times \operatorname{tg} \varphi. \text{ (magnet. Maass; mm, mg, sec)}$$

Unter den Verhältnissen, wie sie den im Vorhergehenden mitgetheilten Beobachtungen zu Grunde liegen, würde also eine Ablenkung von 1 Scalentheil durch einen Strom hervorgebracht worden sein, welcher zur Zersetzung von 1 mg Wasser einen Zeitraum von 1500 Jahren gebraucht hätte.

Tabellen.

1. Werthe von $z = \frac{\cos \vartheta e^{r \sin \vartheta} - \sin \vartheta e^{r \cos \vartheta}}{\cos \vartheta - \sin \vartheta}$ für negative Werthe des Argumentes r .

Werthe von $-r$	Werthe von ϑ								
	45°	30°	15°	10°	7.5°	5°	3°	2°	1°
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.5	0.951	0.956	0.976	0.985	0.987	0.991	0.995	0.997	0.999
1	0.843	0.861	0.916	0.943	0.955	0.970	0.982	0.987	0.994
2	0.589	0.628	0.761	0.828	0.866	0.908	0.947	0.961	0.981
3	0.374	0.426	0.609	0.710	0.770	0.839	0.902	0.932	0.965
4	0.227	0.282	0.479	0.603	0.681	0.772	0.859	0.900	0.948
5	0.133	0.176	0.372	0.509	0.589	0.709	0.812	0.872	0.932
6	0.078	0.110	0.288	0.430	0.527	0.646	0.771	0.841	0.916
7	0.042	0.068	0.222	0.360	0.462	0.594	0.733	0.812	0.901
8	0.024	0.041	0.174	0.303	0.406	0.546	0.695	0.784	0.885
9	0.013	0.026	0.133	0.255	0.355	0.501	0.658	0.757	0.870
10	0.007	0.015	0.102	0.214	0.313	0.458	0.625	0.732	0.855
11			0.080	0.181	0.275	0.420	0.594	0.706	0.841
12			0.062	0.152	0.240	0.386	0.563	0.683	0.826
13			0.047	0.127	0.211	0.353	0.535	0.658	0.812
14			0.036	0.108	0.187	0.324	0.508	0.636	0.797
15			0.028	0.090	0.164	0.297	0.481	0.613	0.783
16				0.075	0.144	0.272	0.457	0.593	0.770
17				0.064	0.124	0.249	0.434	0.572	0.756
18				0.053	0.110	0.229	0.412	0.553	0.744
19				0.045	0.097	0.210	0.390	0.535	0.731
20				0.038	0.084	0.192	0.370	0.516	0.718
25						0.124	0.285	0.432	0.658
30						0.080	0.219	0.364	0.600

2. Die Werthe des Argumentes r , für welche $d^2 z/dr^2$ verschwindet, und die Reihe der Functionswerte z_2, z_3, z_4, z_5 .

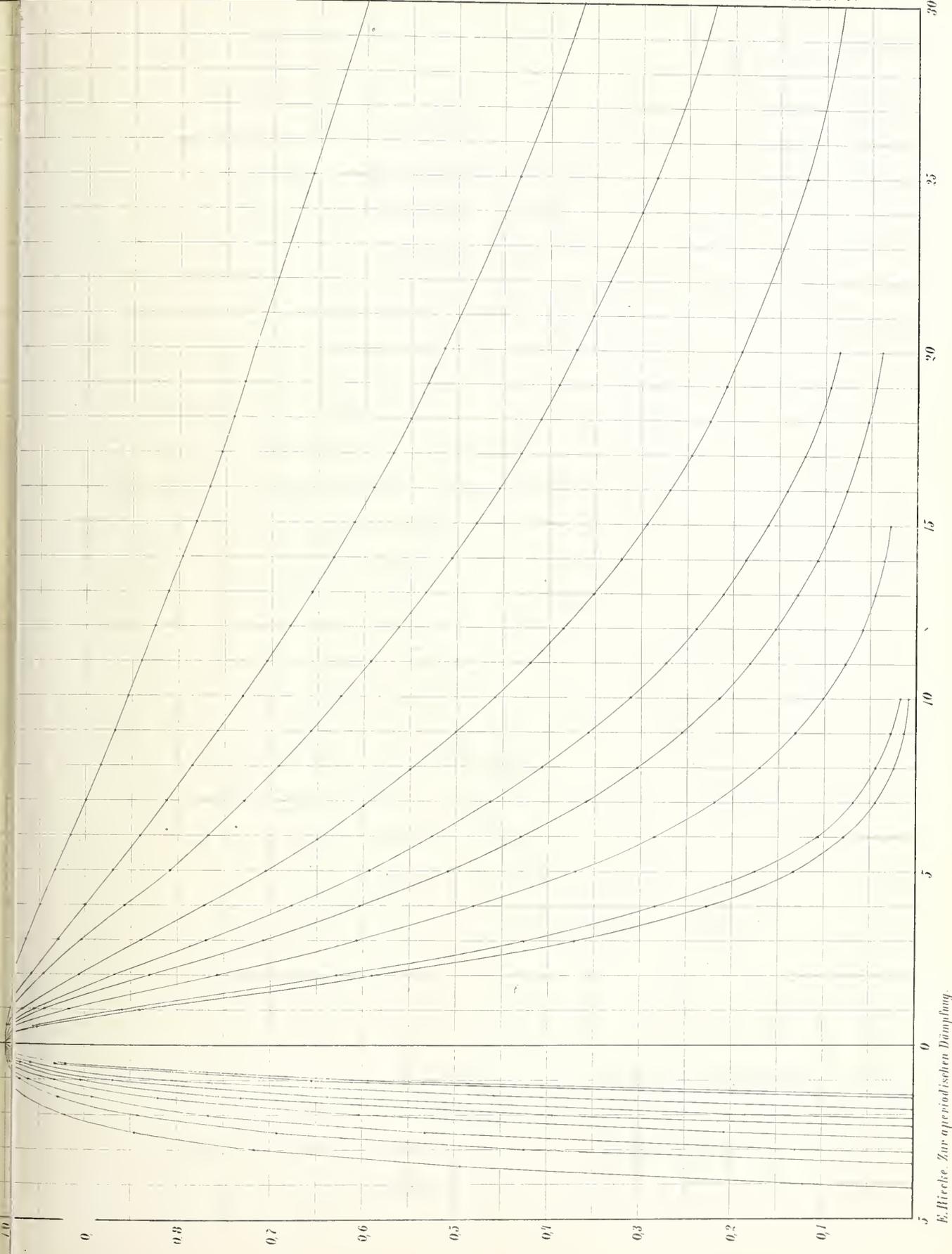
	Werthe von ϑ								
	45°	30°	15°	10°	7.5°	5°	3°	2°	1°
$-r_2$	1.414	1.501	1.863	2.139	2.355	2.680	3.116	3.478	4.121
z_2	0.736	0.745	0.783	0.811	0.832	0.861	0.894	0.917	0.947
z_3	0.406	0.428	0.511	0.574	0.621	0.686	0.761	0.813	0.881
z_4	0.199	0.221	0.320	0.398	0.459	0.544	0.647	0.720	0.820
z_5	0.092	0.110	0.198	0.275	0.340	0.430	0.550	0.638	0.763

3. Werthe von $z = \frac{\cos \vartheta e^{r \sin \vartheta} - \sin \vartheta e^{r \cos \vartheta}}{\cos \vartheta - \sin \vartheta}$ für positive Werthe des Argumentes r .

Werthe von r	Werthe von ϑ								
	45°	30°	15°	10°	7.5°	5°	3°	2°	1°
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.5	0.921	0.932	0.961	0.974	0.980	0.987	0.992	0.995	0.998
1	0.594	0.654	0.808	0.871	0.904	0.935	0.962	0.974	0.987
1.5			0.455	0.637	0.730	0.822	0.894	0.930	0.965
2				0.184	0.394	0.602	0.765	0.844	0.924
2.5						0.206	0.532	0.691	0.847
3							0.129	0.425	0.716
3.5									0.494
4									0.121

I n h a l t.

	Seite
I. Die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung . . .	3
II. Formeln und Tabellen zu numerischer Berechnung	8
III. Anwendung auf Galvanometrie	12
IV. Beobachtungen an einem Galvanometer von grosser Empfindlichkeit zur experimentellen Prüfung der Theorie . . .	21
V. Berechnung der Constanten der gedämpften Schwingung . .	34
VI. Prüfung der allgemeinen Theorie und Bestimmung der Empfindlichkeit des Galvanometers	37
Tabellen	44



E. Hirsch. Zur aperiodischen Dämpfung.

Verh. d. Ges. d. Naturf. u. Ingenieure.



ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen](#)

Jahr/Year: 1883

Band/Volume: [30](#)

Autor(en)/Author(s): Riecke Eduard

Artikel/Article: [Zur Lehre von der aperiodischen Dämpfung und zur Galvanometrie. 3-46](#)