Ueber
specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen, als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke.

Von

H. A. Schwarz.

Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Ges. d. Wiss. am 2. Juli 1887.

Die im Jahre 1761 von Lagrange gestellte Aufgabe, unter allen von derselben Randlinie begrenzten Flächen diejenige zu bestimmen, welche den kleinsten Flächeninhalt besitzt, hat zu einer grossen Zahl von Untersuchungen Veranlassung gegeben.

Den ersten Schritt zur Lösung der genannten Aufgabe hat Lagrange selbst gethan, indem er mit Hülfe der von ihm begründeten Variationsrechnung feststellte, dass die gesuchte Fläche einer bestimmten partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen muss.

Wie Meusnier bemerkte, ist diese Differentialgleichung analytischer Ausdruck der Bedingung, dass die mittlere Krümmung der zu bestimmenden Fläche in jedem Punkte derselben den Werth Null haben muss.

Dem Sprachgebrauche, mit dem Worte Minimalfläche eine krumme Fläche zu bezeichnen, deren mittlere Krümmung in jedem ihrer Punkte gleich Null ist, schliesse ich mich an.

Das von Lagrange gefundene Resultat hat viele Jahre später durch die Abhandlung »Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii«, welche Gauss im Jahre 1829 der hiesigen Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt hat, eine wesentliche Vervollständigung erfahren. In dieser Abhandlung hat Gauss zum ersten Male Variationen von Doppelintegralen, bei denen auch die Grenzen als veränderlich angesehen werden, in Betracht gezogen, hierdurch für die Untersuchungen über Minimalflächen ein höchst wichtiges, unentbehrliches Hülfsmittel geschaffen und alle, die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffenden Fragen, deren Beantwortung nur die Untersuchung der ersten Variation des Flächeninhalts erfordert, vollständig erledigt.

Mit der allgemeinen Integration der von Lagrange aufgestellten partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen sowie mit der Auffindung allgemeiner Eigenschaften dieser Flächen haben sich viele Mathematiker beschäftigt; in Frankreich und Belgien Monge, Legendre, Ch. Dupin, M. Roberts, O. Bonnet, E. Lamarle, in Italien Brioschi, Beltrami, Dini, in Schweden und Norwegen E. G. Björling, S. Lie, in Deutschland Minding, Weingarten, Weierstrass, Riemann.

Die beiden letztgenannten Mathematiker haben auch die Aufgabe behandelt, ein Minimalflächenstück zu bestimmen, dessen Begrenzung von einer vorgeschriebenen, aus geradlinigen Strecken bestehenden Randlinie gebildet wird. Für eine Reihe specieller Fälle habe ich diese Aufgabe vollständig durchgeführt, auch einige Fälle behandelt, in welchen die Begrenzung des zu bestimmenden Minimalflächenstückes nur zum Theil von gegebenen geradlinigen Strecken, zum andern Theile aber von Curvenstrecken gebildet wird, welche der Bedingung unterworfen werden, in gegebenen Ebenen zu liegen.

Von den Schriftstellern, welche ausser den Genannten zur Auffindung specieller Minimalflächen und zur genaueren Kenntniss der Eigenschaften derselben beigetragen haben, erwähne ich hier Scherk, Catalan, Enneper, L. Kiepert, L. Henneberg, A. Herzog, E. R. Neovius.

In Folge eines von Gauss ausgegangenen Vorschlages wurde von der philosophischen Facultät der hiesigen Universität für das Jahr 1831 eine die Rotationsfläche kleinsten Flächeninhalts betreffende Preisaufgabe gestellt, für deren Bearbeitung Goldschmidt den ausgesetzten Preis erhielt. In der gekrönten Preisschrift wird die durch Rotation einer Kettenlinie um ihre Directrix als Axe entstehende Minimalfläche, welche nach einem von Plateau ausgegangenen Vorschlage den Namen Catenoid erhalten hat, genauer untersucht. Insbesondere wird die Frage erledigt, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit es möglich sei, durch zwei Parallelkreise einer Rotationsfläche zwei von einander verschiedene Catenoide zu legen, unter welchen Bedingungen durch beide Kreise nur ein Catenoid, oder überhaupt kein Catenoid gelegt werden kann. Auf diejenigen Fragen, deren Erörterung mit der Untersuchung des Vorzeichens der Werthe zusammenhängt, welche die zweite Variation des Flächeninhalts einer von zwei Parallelkreisen begrenzten Zone eines Catenoids annehmen kann, geht Goldschmidt nicht ein.

Durch die Untersuchungen, auf welche im Vorstehenden hingewiesen wurde, hat indessen die Frage nach der kleinsten Fläche, die Frage nämlich, ob den gefundenen Flächen wirklich die Eigenschaft zukommt, dass geeignet ausgewählte Stücke derselben, sei es unter allen von derselben Randlinie begrenzten Flächenstücken überhaupt, sei es unter allen von derselben Randlinie begrenzten Flächenstücken, welche dem zu betrachtenden Flächenstücke hinreichend nahe liegen, den kleinsten Flächeninhalt haben, eine erschöpfende Beantwortung nicht gefunden.

Der Grund hiervon liegt in dem Umstande, dass bei jeder Aufgabe der Variationsrechnung das Verschwinden der ersten Variation des betrachteten Integrals zwar ein nothwendiges Erforderniss ist, wenn der Werth dieses Integrals unter den vorgeschriebenen Grenzbedingungen ein Minimum oder Maximum sein soll, dass aber ausserdem noch andere Bedingungen erfüllt werden müssen, welche bei den besprochenen Untersuchungen über Minimalflächen unberücksichtigt geblieben sind.

Den ersten Versuch, die hiernach in der Theorie der Flächen kleinsten Flächeninhalts noch vorhandene Lücke auszufüllen, hat meines Wissens Tédénat im Jahre 1816 gemacht, indem derselbe eine Untersuchung über das Vorzeichen der zweiten Variation des Flächeninhalts eines Minimalflächenstückes anstellte, bei welcher ihm eine die Brachistochrone betreffende von Lagrange herrührende Untersuchung zum Vorbilde diente. Die Anwendung der von Tédenat aufgestellten Formel ist aber auf solche Minimalflächenstücke beschränkt, für welche eine der drei rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes dieses Flächenstückes eine eindeutige Function der beiden andern rechtwinkligen Coordinaten desselben Punktes ist.

Später hat Clebsch allgemein die zweite Variation eines vielfachen Integrals in einer für die Beurtheilung ihres Vorzeichens geeigneten Form dargestellt, ohne jedoch die Ergebnisse seiner Untersuchung auf specielle Aufgaben anzuwenden. (Journal für Mathematik, Band 56.)

Einen ferneren Beitrag zur Untersuchung des Vorzeichens der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimalflächenstücken lieferte Steiner in einer im Jahre 1840 der Berliner Akademie der Wissenschaften gemachten Mittheilung, in welcher derselbe aus seinen allgemeinen Untersuchungen über äquidistante Flächenstücke die Folgerung zog, dass unter allen zu einem Minimalflächenstücke äquidistanten Flächenstücken das Minimalflächenstück selbst nicht den kleinsten, sondern den grössten Flächeninhalt besitze.

Von der Beschäftigung Steiners mit den Flächen kleinsten Flächeninhalts gibt auch der in der Abhandlung »Ueber das Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt« im Jahre 1842 veröffentlichte Satz Zeugniss, dass im Allgemeinen zwischen gegebenen Grenzen nur eine einzige Fläche möglich sei, welche ein Minimum von Flächeninhalt besitzt. (Gesammelte Werke, Band 2, Seite 298.)

Dieser Satz kann zwar in der Allgemeinheit, mit welcher Steiner denselben ausgesprochen hat, nicht aufrecht erhalten werden; denn es lassen sich Fälle in beliebig grosser Zahl angeben, in welchen durch dieselbe Begrenzungslinie mehr als ein Minimalflächenstück vollständig begrenzt wird, welches in seinem Innern von singulären Stellen frei ist und im Widerspruch mit dem von Steiner ausgesprochenen Satze unter allen ihm hinreichend nahe liegenden und von derselben Randlinie begrenzten Flächenstücken wirklich den kleinsten Flächeninhalt besitzt. Wenn aber zu dem Wortlaute des von Steiner ausgesprochenen Satzes ausdrücklich die Einschränkung hinzugefügt wird, dass bei der Zugrundelegung eines bestimmten Systemes von rechtwinkligen Coordinaten eine der drei Coordinaten aller Punkte jedes der zu betrachtenden Flächenstücke eine eindeutige Function der beiden andern Coordinaten derselben Punkte ist, so bleibt sowohl die Behauptung Steiners, als auch der von Steiner angegebene Beweis derselben unverändert bestehen.

Eine wesentliche Förderung erfuhr die Frage nach der kleinsten in vorgeschriebener Weise begrenzten Fläche durch Herrn Lindelöf. Derselbe hat in seinem im Jahre 1861 erschienenen Lehrbuche der Variationsrechnung im Anschlusse an eine Untersuchung über die zweite Variation des Flächeninhalts von Zonen des Catenoids, welche durch Parallelkreise begrenzt werden, einige das Catenoid betreffende specielle Lehrsätze veröffentlicht, welche über die in Rede stehende Frage viel Licht verbreiten und mir bei meinen eigenen Arbeiten über Minimalflächen von grösstem Nutzen gewesen sind. Die Lehrsätze, zu denen Herr Lindelöf gelangte, ergaben einerseits eine vollständige theoretische Erklärung für einige Versuche, welche Plateau kurze Zeit vorher über die Grenze der Stabilität flüssiger Lamellen von specieller Gestalt angestellt hatte, und enthielten andererseits den an speciellen Beispielen geführten Nachweis, dass es Fälle gibt, in welchen ein Stück einer Minimalfläche nicht kleineren Flächeninhalt besitzt, als alle ihm hinreichend nahe liegenden Flächenstücke, welche von derselben Randlinie begrenzt werden. Durch die von Herrn Lindelöf angestellte Untersuchung war somit, obgleich dieselbe sich nur auf eine specielle Fläche bezieht, thatsächlich bewiesen, dass das Verschwinden der ersten Variation des Flächeninhalts eines Flächenstückes nicht ausreicht, um den Schluss zu gestatten, dieses Flächenstück besitze unter allen ihm hinreichend nahe kommenden, von derselben Randlinie begrenzten Flächenstücken den kleinsten Flächeninhalt, dass vielmehr das

Eintreten des Minimums noch von dem Erfülltsein anderer Bedingungen abhängig sein müsse.

Die analoge Frage bezüglich der kürzesten Linien auf krummen Flächen hatte Jacobi durch die Betrachtung unendlich benachbarter geodätischer Linien und der Schnittpunkte derselben mit einander zur Entscheidung gebracht. Es war daher zu erwarten, dass die Entscheidung der gestellten Frage für ein bestimmtes Minimalflächenstück durch die Betrachtung eines geeignet auszuwählenden Minimalflächenstückes würde gewonnen werden können, welches dem zu untersuchenden unendlich benachbart ist. Diesen Gedanken hatte bereits Clebsch in allgemeinerer Fassung in einer im Jahre 1858 veröffentlichten Abhandlung »Ueber die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form« (Journal für Mathematik, Band 55, Seite 273) ausgesprochen.

In einer Abhandlung »Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimalflächen im Allgemeinen und von Theilen der Schraubenfläche im Besonderen«, welche im Jahrgang 1872 der Monatsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin veröffentlicht ist, habe ich versucht, die Frage, innerhalb welcher Grenzen einem Stücke einer gegebenen Minimalfläche die Eigenschaft des Minimums des Flächeninhalts wirklich zukomme, auf Grund einer Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts eines Minimalflächenstückes, dessen Randlinie bei der Variation als unveränderlich betrachtet wird, zu beantworten. Die Ergebnisse, zu welchen die in dieser Abhandlung mitgetheilte Untersuchung geführt hat, sind richtig; aber der Beweis der Richtigkeit, insbesondere der Nachweis, dass durch die in dieser Abhandlung angegebenen Kriterien die Entscheidung darüber, ob für ein bestimmtes Minimalflächenstück bei unverändert gelassener Randlinie ein Minimum des Flächeninhalts eintrete, oder nicht, in allen Fällen getroffen werden könne, in welchen zu dieser Entscheidung schliesslich die Betrachtung der zweiten Variation des Flächeninhalts ausreicht, bedurfte einer ziemlich umfangreichen Umarbeitung.

Ein Theil der der Variationsrechnung eigenthümlichen Beweismethoden hat nämlich, soweit diese Beweismethoden bis vor etwa zehn Jahren Gemeingut der Mathematiker waren, durch eine von Herrn Weierstrass herrührende principielle Einwendung ihre vermeintliche Beweiskraft eingebüsst, so dass es sich als unumgänglich nothwendig herausgestellt hat, nach Aufstellung eines vollständigen Systemes von Bedingungen, deren Erfülltsein für das Eintreten eines Maximums oder Minimums nothwendig ist und hinreicht, einige Hauptlehrsätze der Variationsrechnung in neuer, einwurfsfreier Weise zu begründen.

Dass und wie dies geschehen könne, hat Herr Weierstrass für eine grosse Zahl von Aufgaben der Variationsrechnung in seinen Vorlesungen auseinandergesetzt und dadurch einen Weg gezeigt, auf welchem man, wie zu hoffen ist, dahin gelangen wird, für alle Probleme der Variationsrechnung die bisher gebräuchlichen nicht vollkommen befriedigenden Methoden durch andere, einwurfsfreie zu ersetzen.

Die Schwierigkeiten, welche sich der Erfüllung derselben Forderung für die hier in Betracht kommende Frage der Flächen kleinsten Flächeninhalts entgegenstellten, schienen über Erwarten gross zu sein. Ueberdies handelte es sich darum, einige allgemeine Lehrsätze über particuläre Integrale einer gewissen Art von linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, von der früher nur ganz specielle Fälle eingehend untersucht worden waren, aufzustellen und zu beweisen.

In einer Abhandlung »Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung«, Festschrift zum siebzigsten Geburtstage des Herrn Weierstrass, (Acta Societatis Scientiarum Fennicae, tomus XV. Helsingfors 1885), habe ich diejenigen Untersuchungen zusammengestellt, welche schliesslich zur Ueberwindung dieser Schwierigkeiten geführt haben.

Ein Hauptergebniss dieser Untersuchungen besteht darin, dass die Entscheidung über die Frage, ob ein bestimmtes Minimalflächenstück kleineren Flächeninhalt besitzt, als alle demselben benachbarten, von derselben Randlinie begrenzten Flächenstücke, oder nicht, — wenn von einem Grenzfalle, dessen Eintreten eine besondere Untersuchung erfordert, abgesehen wird, — stets von einem passend zu wählenden particulären Integrale einer bestimmten linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung abhängig gemacht wird.

Für die Auffindung eines solchen particulären Integrals lässt sich eine allgemeine Regel nicht wohl aufstellen; dagegen lassen sich specielle particuläre Integrale dieser Differentialgleichung in beliebig grosser Zahl angeben, mit deren Hülfe die Entscheidung in unendlich vielen speciellen Fällen durchgeführt werden kann.

Die nachfolgende Abhandlung hat zum Gegenstande die Untersuchung specieller zweifach zusammenhängender Minimalflächenstücke M*, deren Begrenzung gebildet wird von zwei regelmässigen Polygonen mit je einem Umlauf, mit gleich langen geradlinigen Seiten und gleich grosser Seitenzahl. Es wird vorausgesetzt, dass diese Polygone in parallelen Ebenen liegen und zu einander eine solche Lage haben, dass die geradlinigen Strecken, welche entsprechende Ecken beider Polygone verbinden, auf den Ebenen derselben senkrecht stehen. Die Seitenzahl dieser Polygone werde mit n, die Grösse $\frac{\pi}{n}$ werde mit α, die Länge des Radius des einbeschriebenen Kreises mit L, die Hälfte des Abstandes der Ebenen beider Polygone werde mit H bezeichnet. Die zu untersuchenden Minimalflächenstücke werden in ihrem Innern als von singulären Stellen frei vorausgesetzt. Ferner wird von der Voraussetzung ausgegangen, dass die $n+1$ Symmetrieebenen der Begrenzung der Minimalflächenstücke M* zugleich Symmetrieebenen dieser Minimalflächenstücke selbst sind.

Nächst der analytischen Bestimmung der Minimalflächenstücke M* und der Untersuchung der Gestalt derselben bestehen die Aufgaben der nachfolgenden Untersuchung in der Ermittelung des Intervalles, auf welches die Veränderlichkeit des Verhältnisses $\frac{H}{L}$ beschränkt ist, in der Beantwortung der Frage, wie viele von einander verschiedene Minimalflächenstücke M* bei gegebenen Werthen der drei Grössen n, L und H

existiren, endlich in der Ermittelung derjenigen Minimalflächenstücke M*, welche unter allen benachbarten von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücken den kleinsten Flächeninhalt besitzen.

Eine vollständige Lösung der vorstehenden Aufgaben ist meines Wissens bisher noch für keinen endlichen Werth der Zahl n gegeben worden. Für den Grenzfall $n = \infty$ ergibt sich der von Goldschmidt und von Herrn Lindelöf untersuchte Fall.

Untersuchungen, welche sich auf einen Theil der gestellten Aufgaben beziehen, sind für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ in dem Nachtrage zu der Schrift des Verfassers »Bestimmung einer speciellen Minimalfläche« Berlin 1871, auf den Seiten 88—90 und auf Seite 94 enthalten. Eines der Hauptergebnisse dieser Untersuchungen besteht darin, dass die Gleichung derjenigen Minimalflächen, von welchen die Flächenstücke M* Theile sind, für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ rational durch elliptische Functionen der Coordinaten ausgedrückt werden können. Die wirkliche Aufstellung dieser Gleichung ist für den Fall $n = 4$ in dem Aufsatze des Verfassers »Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen« (Monatsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1872, Seite 3—27) enthalten.

Ein aus dem Nachlasse Riemanns herrührendes Fragment »Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung« (Gesammelte Werke, Seite 417—426) durch dessen Bearbeitung der Herausgeber der Riemannschen Werke, Herr H. Weber, sich Anspruch auf den Dank der Mathematiker erworben hat, handelt ebenfalls von zweifach zusammenhängenden Minimalflächenstücken, welche bei angemessener Specialisirung in die vorhin charakterisirten Minimalflächenstücke M* übergehen. Eine am Schlusse der Bearbeitung dieses Fragmentes für den Fall $n = 3$ von Herrn H. Weber ausgesprochene Vermuthung findet durch eine im Nachfolgenden mitzutheilende allgemeinere Untersuchung ihre Bestätigung.

1.

Analytische Bestimmung der Minimalflächenstücke M*.

Diejenige Ebene, in Bezug auf welche jede der beiden Randlinien eines der zu betrachtenden Minimalflächenstücke M* zu der anderen Randlinie desselben symmetrische Lage hat, werde zur Ebene $z = 0$, die Gerade, welche die Mittelpunkte beider n-seitigen Polygone enthält, werde zur z-Axe eines Systems rechtwinkliger Punktcoordinaten gewählt, auf welches das betrachtete Flächenstück M* bezogen wird.

Der Coordinatenanfangspunkt O soll Mittelpunkt des Flächenstückes M* genannt werden, obwohl diese Benennung mit der gewöhnlichen Bedeutung des Begriffes eines Mittelpunktes nur für den Fall, dass die Zahl n eine grade Zahl ist, übereinstimmt. Die Coordinatenebenen $x = 0$ und $y = 0$ mögen so gewählt werden, dass der Mittelpunkt einer Seite eines der beiden das Flächenstück M* begrenzenden Polygone die Coordinaten

$$x = L, \quad y = 0, \quad z = H$$

erhält.

Von den $n+1$ Symmetrieebenen des Flächenstückes M* ist eine, nämlich die Ebene $z = 0$, ausgezeichnet; sie möge Aequatorebene des Flächenstückes M* genannt werden.

Von den übrigen n Symmetrieebenen des Flächenstückes M* werden vorzugsweise die Ebenen

$$y = 0 \quad \text{und} \quad x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0$$

in Betracht gezogen.

Die Gesammtheit derjenigen Punkte des Flächenstückes M*, deren Coordinaten den Bedingungen

$$0 \leqq y \lesseqqgtr x \operatorname{tg} \alpha, \quad 0 \leqq z$$

genügen, bildet ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, welches zum Unterschiede von M* mit M bezeichnet werden soll.

Die Begrenzung des Flächenstückes M wird gebildet von der geradlinigen Strecke

$$x = L, \quad 0 \leqq y \lesseqqgtr L \operatorname{tg} \alpha, \quad z = H$$

und von drei krummlinigen Strecken. Von diesen letzteren liegt je eine in einer der drei Symmetrieebenen

$$y = 0, \qquad z = 0, \qquad x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0.$$

Jede dieser drei krummlinigen Strecken ist daher ein Theil einer Krümmungslinie des Flächenstückes M*.

Die vier Ecken des Flächenstückes M mögen mit a, b, c, d bezeichnet werden und zwar bezeichne a den Eckpunkt, dessen Coordinaten

$$x = L, \qquad y = 0, \qquad z = H$$

sind, b bezeichne die auf der positiven Hälfte der x-Axe des Coordinatensystems liegende, c die auf der Geraden

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0, \qquad z = 0$$

liegende Ecke; d bezeichne den Eckpunkt, dessen Coordinaten

$$x = L, \qquad y = L \operatorname{tg}\alpha, \qquad z = H$$

sind. Siehe Fig. 1 der lithographirten Tafel.

Die Begrenzung des Minimalflächenstückes M wird hiernach gebildet von einem Stücke ab einer in der Ebene $y = 0$ liegenden Krümmungslinie, einem Stücke bc einer in der Aequatorebene $z = 0$ liegenden Krümmungslinie, einem Stücke cd einer in der Ebene

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0$$

liegenden Krümmungslinie und von der geradlinigen Strecke da. Die letztere ist, wie jede Gerade auf jeder krummen Fläche, ein Stück einer Asymptotenlinie des Flächenstückes M. Längs der Curvenstrecke ab wird die Ebene $y = 0$, längs der Curvenstrecke bc wird die Ebene $z = 0$, längs der Curvenstrecke cd wird die Ebene

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0$$

von dem Minimalflächenstücke M r e c h t w i n k l i g getroffen.

Die Aufgabe, das Minimalflächenstück aus den angegebenen Eigenschaften analytisch zu bestimmen, ist daher ein specieller Fall der allgemeineren Aufgabe: Gegeben ist eine zusammenhängende geschlossene K e t t e, deren Glieder von geradlinigen Strecken, oder von Ebenen, oder von geradlinigen Strecken und von Ebenen gebildet werden; gesucht wird eine einfach zusammenhängende, in ihrem Innern von singulären Stellen freie Minimalfläche, welche von den geradlinigen und von den ebenen Gliedern der Kette begrenzt wird und die letzteren rechtwinklig trifft.

In dem vorliegenden Falle besteht die erwähnte Kette aus einer geradlinigen Strecke und drei Ebenen. Eine besonders einfache Lösung der gestellten Aufgabe ergibt sich durch die Betrachtung zweier conformen Abbildungen des Minimalflächenstückes M.

Für die Begrenzung des Minimalflächenstückes M^* ist der Punkt a ein sogenannter Umkehrpunkt der Normale, da die geradlinige Strecke da im Punkte a mit der Ebene $y = 0$ einen rechten Winkel einschliesst und die Ebene $y = 0$ eine Symmetrieebene des Flächenstückes M^* ist.

Vom Punkte a gehen ausser der die Strecke da enthaltenden Geraden noch zwei Asymptotenlinien des Flächenstückes M^* aus, deren Tangenten im Punkte a mit dieser Geraden und mit einander Winkel von 60^0 einschliessen. Die Punkte b und c sind nichtsinguläre Punkte des Minimalflächenstückes M^*. In Folge dessen wird bei derjenigen conformen Abbildung des Minimalflächenstückes M auf eine Ebene, bei welcher den Krümmungslinien und den Asymptotenlinien des Minimalflächenstückes gerade Linien entsprechen, dem Flächenstücke $\dot{M}$ die Fläche eines Paralleltrapezes $a'\,b'\,c'\,d'$ zugeordnet, dessen Winkel $a'\,b'\,c'$, $b'\,c'\,d'$ rechte Winkel sind. Die Seite $a'\,b'$ dieses Paralleltrapezes ist daher der Seite $d'\,c'$ parallel, der Winkel $c'\,d'\,a'$ ist gleich der Hälfte eines rechten Winkels und der Winkel $d'\,a'\,b'$ beträgt 135^0. Siehe Fig. 2.

Es erscheint zweckmässig, bei der folgenden Untersuchung die Bezeichnungsweise möglichst beizubehalten, welche in der Abhandlung »Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen« Journal für Mathematik, Band 80, erklärt ist, und von der ich bei früheren Untersuchungen über Minimalflächen wiederholt Gebrauch gemacht habe. Demzufolge werde die complexe Grösse, welche durch einen Punkt in der Ebene des Paralleltrapezes $a'\,b'\,c'\,d'$ geometrisch dargestellt wird, mit σ bezeichnet. Der Punkt b' werde zum Nullpunkte, die Richtung der Strecke $b'\,c'$ zur positiven Richtung der Axe des Reellen in der σ-Ebene gewählt. Das Gebiet aller derjenigen Werthe der complexen Grösse σ, welche durch die dem Innern und der Begrenzung des Paralleltrapezes $a'\,b'\,c'\,d'$ angehörenden Punkte geometrisch dargestellt werden, werde mit Σ bezeichnet. Die zu der Grösse σ conjugirte complexe Grösse werde mit σ_1 bezeichnet. Der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte des Minimalflächenstückes M^*, dessen Coordinaten x, y, z sind, wird mit ϱ, die Cosinus der Winkel, welche die positive Richtung der Normale des Flächenstückes M^* in diesem Punkte mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen einschliesst, werden mit X, Y, Z bezeichnet; die Grössen s, s_1, und die Functionen $\mathfrak{F}(s)$, $\mathfrak{F}_1(s_1)$ (siehe die Abhandlung des Herrn Weierstrass »Untersuchungen über die Flächen, in denen die mittlere Krümmung überall gleich Null ist« Monatsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1866, Seite 618) sind durch die Gleichungen

$$s = \frac{X+Yi}{1-Z}, \qquad s_1 = \frac{X-Yi}{1-Z}$$

$$\mathfrak{F}(s) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2, \qquad \mathfrak{F}_1(s_1) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\sigma_1}{ds_1}\right)^2$$

erklärt. Es wird festgesetzt, dass die positive Richtung der Normale des Minimalflächenstückes M^* im Punkte b mit der positiven Richtung der x-Axe des Coordinatensystems übereinstimmen soll. Durch diese Festsetzung ist die positive Richtung der Normale für alle Punkte des Minimalflächenstückes M^* unzweideutig bestimmt. Dem Punkte b entspricht der Werth $s = 1$, dem Punkte c der Werth $s = e^{\alpha i}$, dem Punkte d der Werth $s = 0$. Dem Punkte a entspricht ein zwischen 0 und 1 liegender Werth der Grösse s, welcher mit R bezeichnet werden möge.

Die Bogenzahl des Winkels, welchen die positive Richtung der Normale des Minimalflächenstückes M^* im Punkte a mit der negativen Richtung der z-Axe des Coordinatensystems einschliesst, ist hiernach gleich $2 \operatorname{arc\,tg} R$.

Von dem Werthe des Parameters R hängt die Gestalt der Flächenstücke M^* hauptsächlich ab. Um daher einen Ueberblick über die Gesammtheit der verschiedenen Gestalten zu gewinnen, welche die Minimalflächenstücke M^* für denselben Werth der ganzen Zahl n annehmen können, ist es erforderlich, dem Parameter R alle Werthe des Intervalles $0 < R < 1$ beizulegen.

Für das in Betracht gezogene Minimalflächenstück M hat die Grösse R einen bestimmten Werth.

Den Punkten der Curvenstrecke ab entsprechen die Werthe

$$s = r, \qquad R \leqq r \lesseqgtr 1.$$

Den Punkten der Curvenstrecke bc entsprechen die Werthe

$$s = e^{\varphi i}, \qquad 0 \leqq \varphi \lesseqgtr \alpha.$$

Den Punkten der Curvenstrecke cd entsprechen die Werthe

$$s = r \cdot e^{\alpha i}, \qquad 1 \gtreqless r \geqq 0.$$

Den Punkten der Geraden da entsprechen die Werthe

$$s = r, \qquad 0 \leqq r \lesseqgtr R.$$

Bei der durch parallele Normalen vermittelten conformen Abbildung des Minimalflächenstückes M* auf die Hülfskugel $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ entspricht dem Minimalflächenstücke M die Fläche eines sphärischen Dreiecks, dessen Ecken beziehlich die Coordinaten

$$\begin{array}{ccc} X & Y. & Z \\ 1, & 0, & 0 \\ \cos\alpha, & \sin\alpha, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{array}$$

haben. Der Fläche dieses sphärischen Dreiecks entspricht in der Ebene, deren Punkte die Werthe der complexen Grösse s geometrisch darstellen, die Fläche eines Kreissectors

$$s = r e^{\varphi i}, \qquad 0 \leqq r \lesseqgtr 1, \qquad 0 \leqq \varphi \lesseqgtr \alpha,$$

welche mit S bezeichnet werden möge. Siehe Fig. 3. Die den Ecken a, b, c, d des Minimalflächenstückes M entsprechenden Punkte der s-Ebene sind in dieser Figur beziehlich mit $(a), (b), (c), (d)$ bezeichnet.

Die conforme Abbildung der Fläche S des Kreissectors in der s-Ebene auf die Fläche Σ des Paralleltrapezes $a'b'c'd'$ in der σ-Ebene wird vermittelt durch die Function

$$\sigma = \int_1^s \frac{-Ci\, d\log s}{\sqrt[4]{(R^{-n} + R^n) - (s^{-n} + s^n)}},$$

und zwar ist hierbei der Wurzelgrösse

$$\sqrt[4]{(R^{-n}+R^{n})-(s^{-n}+s^{n})}$$

ihr Hauptwerth, der Constanten C ein positiver Werth beizulegen.

In Folge der zwischen den Grössen σ, s, $\mathfrak{F}(s)$ bestehenden Abhängigkeit ergibt sich für die Function $\mathfrak{F}(s)$ der Ausdruck

$$\mathfrak{F}(s) = -\frac{\frac{1}{2}C^2 s^{-2}}{\sqrt{(R^{-n}+R^{n})-(s^{-n}+s^{n})}},$$

wobei der Wurzelgrösse ihr Hauptwerth beizulegen ist.

Da die Grösse C^2 einen reellen Werth hat, so besteht für alle dem Intervalle $R < s < R^{-1}$ angehörenden Werthe der Grösse s die Gleichung $\mathfrak{F}_1(s) = \mathfrak{F}(s)$.

Durch Abänderung der Länge der Längeneinheit für das rechtwinklige Coordinatensystem, auf welches das Flächenstück M* bezogen wird, kann nun bewirkt werden, dass die Constante C einen beliebigen positiven Werth erhält. Die Freiheit, über den Werth dieser Grösse zu verfügen, kann zur Vereinfachung des Ausdruckes für die Function $\mathfrak{F}(s)$ benutzt werden. Aus diesem Grunde möge angenommen werden, es sei die Länge der Längeneinheit des Coordinatensystems so gewählt, dass die Constante C den Werth $\sqrt{2}$ erhält. Dieser Annahme zufolge ergibt sich für die Function $\mathfrak{F}(s)$ der Ausdruck

$$\mathfrak{F}(s) = -\frac{s^{-2}}{\sqrt{(R^{-n}+R^{n})-(s^{-n}+s^{n})}},$$

mit der Bestimmung, dass der Quadratwurzel ihr Hauptwerth beizulegen ist.

Das betrachtete Minimalflächenstück M wird mithin, wenn die Veränderlichkeit der Grösse s auf das Gebiet S beschränkt wird, durch folgende Formeln analytisch dargestellt:

$$\text{(A.)}\qquad \begin{aligned} x &= \Re U, & U &= L - \int_R^s \frac{(s^{-1}-s)\,d\log s}{\sqrt{(R^{-n}+R^{n})-(s^{-n}+s^{n})}}, \\ y &= \Re V, & V &= \int_R^s \frac{-i(s^{-1}+s)\,d\log s}{\sqrt{(R^{-n}+R^{n})-(s^{-n}+s^{n})}}, \\ z &= \Re W, & W &= \int_1^s \frac{-2\,d\log s}{\sqrt{(R^{-n}+R^{n})-(s^{-n}+s^{n})}}. \end{aligned}$$

Die im Vorhergehenden erklärten Grössen L und H sind mit dem Parameter R durch die Gleichungen

$$
\text{(B.)} \qquad
\begin{aligned}
L &= \operatorname{cotg}\alpha \int_0^R \frac{(r^{-1}+r)\,d\log r}{\sqrt{(r^{-n}+r^n)-(R^{-n}+R^n)}}\,, \\
H &= \int_R^1 \frac{2\,d\log r}{\sqrt{(R^{-n}+R^n)-(r^{-n}+r^n)}} = \int_0^1 \frac{2\,d\log r}{\sqrt{R^{-n}+R^n+r^{-n}+r^n}}
\end{aligned}
$$

verbunden; den Wurzelgrössen sind hierbei ihre positiven Werthe beizulegen. Zur Bestimmung der in dem Ausdrucke für die Grösse U vorkommenden Constanten sowie der unteren Grenzen der drei Integrale, durch deren reelle Theile die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes des Minimalflächenstückes M ausgedrückt werden, kann die Bemerkung dienen, dass die Coordinaten des dem Werthe $s = R$ entsprechenden Punktes a des Flächenstückes M beziehlich die Werthe

$$x = L, \qquad y = 0, \qquad z = H$$

haben.

Bei angemessener Ausdehnung des Bereiches der Veränderlichkeit der complexen Grösse s wird durch die Formeln (A.) nicht allein das Minimalflächenstück M, sondern auch das Minimalflächenstück M* analytisch dargestellt.

Es möge zunächst derjenige Bereich ins Auge gefasst werden, welcher durch symmetrische Wiederholung des Bereiches S in Bezug auf die Axe des Reellen in der s-Ebene entsteht. Hierbei soll angenommen werden, dass dieser Bereich, welcher mit S_1 bezeichnet werden möge, mit dem Bereiche S längs eines Theiles der Axe des Reellen der s-Ebene und zwar längs der Strecke $R \leqq s \gtreqless 1$, nicht aber längs der Strecke $0 \leqq s < R$ zusammenhänge. Siehe Fig. 3.

Die symmetrische Wiederholung des Bereiches Σ in Bezug auf die Axe des Imaginären der σ-Ebene werde mit Σ_1, die symmetrische Wiederholung des Minimalflächenstückes M in Bezug auf die Ebene $y = 0$ möge mit M_1 bezeichnet werden. Wird die Variabilität der Grösse s auf das Gebiet S_1 beschränkt, so ist Σ_1 der Bereich der complexen

Grösse σ und die Formeln (A.) stellen das Minimalflächenstück M_1 analytisch dar, welches ein Theil des Minimalflächenstückes M^* ist.

Durch symmetrische Wiederholung des Gebietes $\mathrm{S}+\mathrm{S}_1$ in Bezug auf den Einheitskreis der s-Ebene entsteht ein in der s-Ebene liegendes einfach zusammenhängendes Gebiet, welchem ein durch symmetrische Wiederholung des aus den beiden Minimalflächenstücken M und M_1 bestehenden Flächenstückes in Bezug auf die Aequatorebene $z=0$ entstehendes Minimalflächenstück entspricht.

Auch dieses Minimalflächenstück ist ein Theil des Minimalflächenstückes M^*. Auf diese Weise ist die Variabilität der Grösse $s=re^{\varphi i}$ auf ein Gebiet ausgedehnt worden, welches charakterisirt ist durch die Festsetzung, dass die beiden reellen veränderlichen Grössen r und φ unabhängig von einander alle den Intervallen

$$0 \leqq r \overline{\gtrless} +\infty, \qquad -\alpha \leqq \varphi \overline{\gtrless} \alpha$$

angehörende Werthe annehmen sollen, jedoch mit Ausschluss derjenigen Werthepaare, für welche entweder $\varphi=0$ und $0 \leqq r < R$, oder $\varphi=0$ und $R^{-1} < r \overline{\gtrless} \infty$ ist.

Es liegt nun nahe, die Veränderlichkeit der complexen Grösse $s=re^{\varphi i}$ auf ein Gebiet S^* auszudehnen, welches in seinem Innern und auf seiner Begrenzung alle reellen und complexen Werthe enthält. Hierbei wird Folgendes festgesetzt: Dem Innern des Bereiches S^* sollen angehören alle diejenigen reellen und complexen Werthe der Grösse s, für welche der Werth der Function

$$(R^{-n}-s^{-n})(1-R^n s^n) = (R^{-n}+R^n)-(s^{-n}+s^n)$$

nicht negativ ist.

Die Gesammtheit der Werthe, für welche die angegebene Function negative Werthe hat, mit andern Worten, die Gesammtheit der Werthe der Grösse s, für welche s^n positiv und kleiner als R^n, oder positiv und grösser als R^{-n} ist, bildet die Begrenzung des Bereiches S^*. Wenn es darauf ankommt, bei der Bezeichnung des Bereiches S^* zugleich den Werth des Parameters R anzugeben, auf welchen dieser Bereich sich bezieht, so wird der Werth des Parameters R in Klammern zu dem Zeichen S* hinzugefügt werden, so dass $S^*(R_0)$ den zu dem Werthe $R = R_0$ gehörenden Bereich S* bezeichnet. Der Bereich S* kann durch eine die s-Ebene überall lückenlos und einfach bedeckende, zweifach zusammenhängende Riemann sche Fläche geometrisch dargestellt werden. Die den Bereich S* geometrisch darstellende einblättrige Fläche unterscheidet sich von der schlichten s-Ebene durch $2n$ geradlinige Schnitte, von welchem die eine Hälfte den Punkt $s = 0$ mit den Punkten, für welche $s^n = R^n$ ist, verbindet; die übrigen n geradlinigen Schnitte erstrecken sich von den Punkten aus, für welche $s^n = R^{-n}$ ist, bis ins Unendliche, während die Rückwärtsverlängerungen derselben durch den Null-Punkt hindurchgehen. Wird die Veränderlichkeit der complexen Grösse s auf das Gebiet S* ausgedehnt, mit der Festsetzung, dass die Grösse s die Begrenzung des Bereiches S* nicht überschreiten darf, so stellen die Gleichungen (A.), vorausgesetzt, dass der Wurzelgrösse

$$\sqrt{(R^{-n}+R^n)-(s^{-n}+s^n)}$$

ihr Hauptwerth beigelegt wird, das Minimalflächenstück M* in der Weise analytisch dar, dass jedem dem Innern des Bereiches S* angehörenden Werthe der complexen Grösse s ein und nur ein dem Innern des Minimalflächenstückes M* angehörender Punkt zugeordnet wird und umgekehrt. Wird die Veränderlichkeit der Grösse s auf den innerhalb des Einheitskreises der s-Ebene liegenden Theil des Gebietes S* beschränkt, so stellen die Gleichungen (A.) die auf der positiven Seite der Aequatorebene $z = 0$ liegende Hälfte des Minimalflächenstückes M* analytisch dar. Die dem Einheitskreise der s-Ebene entsprechende in der Ebene $z = 0$ liegende krumme Linie, durch welche das Minimalflächenstück M* in zwei zu einander symmetrische Theile getheilt wird, soll Aequator des Flächenstückes M* genannt werden. Die vorhin betrachtete Curvenstrecke bc ist ein Theil dieses Aequators.

Bemerkung. Bei den vorstehenden Entwickelungen ist vorausgesetzt worden, dass die Zahl n einen ganzzahligen positiven Werth habe, der grösser als 2 ist. Diese Voraussetzung kann nachträglich abgeändert werden, z. B. wenn die Veränderlichkeit der Grösse s auf den

Bereich S beschränkt und die Festsetzung getroffen wird, dass, während der Grösse n nur reelle Werthe beigelegt werden, die grösser als 2 sind, den Potenzen s^n und s^{-n} ihr Hauptwerth beigelegt werden soll. Denn unter diesen Voraussetzungen behalten die Gleichungen (A.) auch für andere Werthe des Exponenten n, als ganzzahlige, eine bestimmte Bedeutung und es werden durch dieselben bestimmte Minimalflächenstücke analytisch dargestellt.

2.

Einführung der Grössen $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$.

Es ist zweckmässig, ausser den bestimmten Integralen, welche im Vorhergehenden mit L und H bezeichnet worden sind, noch vier andere zu betrachten, welche durch folgende Gleichungen erklärt werden.

$$(C.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{B}' &= \int_R^1 \frac{(r^{-1}-r)\,d\log r}{\sqrt{(R^{-n}+R^n)-(r^{-n}+r^n)}}, & \mathfrak{B}'' &= \int_0^1 \frac{(r^{-1}-r)\,d\log r}{\sqrt{R^{-n}+R^n+r^{-n}+r^n}}, \\ \mathfrak{S} &= \int_0^\alpha \frac{2\cos\chi\,d\chi}{\sqrt{R^{-n}+R^n-2\cos n\chi}}, & \mathfrak{T} &= \int_0^\alpha \frac{2\sin\chi\,d\chi}{\sqrt{R^{-n}+R^n-2\cos n\chi}}. \end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung der Werthe dieser bestimmten Integrale (vergl. Fig. 4) ist folgende:

Die Coordinaten des Punktes b sind

$$x = L - \mathfrak{B}', \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Die Coordinaten des Punktes c sind

$$x = L - \mathfrak{B}''\cos\alpha, \qquad y = \mathfrak{S}, \qquad z = 0.$$

Zwischen den Grössen $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, L bestehen die Gleichungen

$$(D.)\qquad \mathfrak{B}' + \mathfrak{T} = \mathfrak{B}''\cos\alpha, \qquad \mathfrak{S} + \mathfrak{B}''\sin\alpha = L\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Diese Gleichungen sind der analytische Ausdruck der Bedingung dafür, dass die Coordinaten x und y ihre Werthe nicht ändern, wenn die Variable s von einem der Begrenzung des Bereiches S angehörenden Werthe s_0 ausgehend die ganze Begrenzung des Bereiches S durchläuft und in den Werth s_0 zurückkehrt.

Die Grössen L, H, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ sind analytische Functionen des Parameters R, eindeutig erklärt mit dem Charakter ganzer Functionen für alle dem Innern des Intervalles

$$0 < R < 1$$

angehörenden Werthe desselben.

Fig. 4 stellt unter Zugrundelegung der Annahme, dass der ganzen Zahl n der Werth 4, dem Parameter R der Werth $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ beigelegt wird, in den Flächenstücken Q und Q_1 die orthographischen Projectionen der beiden Minimalflächenstücke M und M_1 auf die Aequatorebene $z = 0$ dar. O bezeichnet den Mittelpunkt des Minimalflächenstückes M*.

Die Curvenstrecke $c_1 b c$ stellt einen Theil des Aequators, die Punkte a'', d'', d_1'' stellen die orthographischen Projectionen der Punkte a, d, d_1 auf die Aequatorebene dar. Unter derselben die Zahl n und den Werth des Parameters R betreffenden Annahme, welche zu der in der mehrfach angeführten Schrift »Bestimmung einer speciellen Minimalfläche« auf den Seiten 80—83, sowie auf Seite 89 beschriebenen Minimalfläche führt, ist auch die in Fig. 1 dargestellte Skizze entworfen.

Es soll zunächst bewiesen werden, dass der Werth des Quotienten $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}''}$ beständig zunimmt, wenn der Parameter R zunimmt, und dass die Grösse $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}''}$ alle Werthe von 0 bis ∞ durchläuft, wenn dem Parameter R alle Werthe von 0 bis 1 beigelegt werden. Die Richtigkeit des ersten Theiles der vorstehenden Behauptung ergibt sich daraus, dass der Ausdruck

$$\mathfrak{B}''^2 \frac{d}{dR}\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}''}\right)$$

durch das Doppelintegral

$$(\mathrm{E.})\quad \mathfrak{B}'' \frac{d\mathfrak{S}}{dR} - \mathfrak{S}\frac{d\mathfrak{B}''}{dR} = \int_0^1\int_0^a \frac{n(R^{-n}-R^n)(r^{-1}-r)\cos\chi\,(r^{-n}+r^n+2\cos n\chi)\,d\log r\,d\chi}{R\left(\sqrt{R^{-n}+R^n+r^{-n}+r^n}\right)^3\left(\sqrt{R^{-n}+R^n-2\cos n\chi}\right)^3}$$

darstellbar ist, dessen Elemente sämmtlich positiv sind; es nimmt also der Werth des Quotienten $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}''}$ stets gleichzeitig mit dem Werthe des

Parameters R zu und ab. Die Richtigkeit des zweiten Theiles der aufgestellten Behauptung ergibt sich aus den Grenzwerthen

$$\lim_{(R=0)} \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}''} = 0, \qquad \lim_{(R=1)} \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}''} = \infty.$$

In Folge der Gleichung

$$\mathfrak{S} + \mathfrak{B}'' \sin\alpha = L \operatorname{tg}\alpha$$

ändert sich, wenn R beständig zunehmend alle Werthe von 0 bis 1 durchläuft, auch der Werth jedes der beiden Quotienten $\frac{\mathfrak{S}}{L}$ und $\frac{\mathfrak{B}''}{L}$ stets in demselben Sinne; der Werth des Quotienten $\frac{\mathfrak{S}}{L}$ nimmt beständig zu und zwar von 0 bis $\operatorname{tg}\alpha$; der Werth des Quotienten $\frac{\mathfrak{B}''}{L}$ nimmt beständig ab, und zwar von $\sec\alpha$ bis zu 0.

Eine ganz analoge Betrachtung lässt sich für den Werth des Quotienten $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{B}''}$ anstellen. Der Werth desselben nimmt, wenn R beständig zunehmend alle dem Intervalle

$$0 \leqq R \lesseqgtr 1$$

angehörenden Werthe durchläuft, beständig zu, und zwar von Null bis zu einer gewissen durch die Gleichung

$$g\int_0^1 \frac{(r^{-1}-r)\,d\log r}{r^{-\frac{1}{2}n}+r^{\frac{1}{2}n}} = \int_0^\alpha \frac{\sin\chi\,d\chi}{\sin(\frac{1}{2}n\chi)}$$

bestimmten Grösse g. In Folge der Gleichung

$$\mathfrak{B}' + \mathfrak{T} = \mathfrak{B}'' \cos\alpha$$

nimmt der Werth des Quotienten $\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}''}$ hierbei beständig ab und zwar von dem Werthe $\cos\alpha$ bis zu dem Werthe $\cos\alpha - g$.

Hieraus folgt, dass auch der Werth des Quotienten

$$\frac{\mathfrak{B}'}{L} = \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}''}\cdot\frac{\mathfrak{B}''}{L}$$

hierbei beständig abnimmt, weil jeder der beiden Factoren $\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}''}$, $\frac{\mathfrak{B}''}{L}$ diese Eigenschaft hat. Der Quotient $\frac{\mathfrak{B}'}{L}$ nimmt hierbei alle dem Intervalle von 1 bis 0 angehörenden Werthe an.

Wenn die Abstände der Punkte b und c des Minimalflächenstückes M* vom Mittelpunkte desselben mit $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ bezeichnet werden, so bestehen die Gleichungen

$$\text{(F.)} \qquad \mathfrak{R}' = L - \mathfrak{B}' = \mathfrak{S} \operatorname{cotg} \alpha + \mathfrak{T}, \qquad \mathfrak{R}'' = L \sec \alpha - \mathfrak{B}'' = \mathfrak{S} \operatorname{cosec} \alpha$$

und es lässt sich als ein Ergebniss der vorhergehenden Untersuchung der Satz aussprechen:

Wenn der Parameter R stetig zunehmend alle Werthe des Intervalles $0 \leqq R \lesseqgtr 1$ durchläuft, so durchlaufen auch die Quotienten

$$\frac{\mathfrak{R}'}{L}, \qquad \frac{\mathfrak{R}''}{L \sec \alpha},$$

ebenfalls stetig zunehmend alle Werthe desselben Intervalles.

3.

Untersuchung der durch die Functionen U, V, W vermittelten conformen Abbildungen des Gebietes S.

Die durch die Gleichungen (A.) erklärten Functionen U, V, W des complexen Argumentes s vermitteln drei conforme Abbildungen des Gebietes S, zu deren Veranschaulichung die in den Figuren 5, 6 und 7 dargestellten Skizzen dienen können. In diesen Skizzen bezeichnen U, V, W die durch die Functionen U, V, W vermittelten conformen Abbildungen des Bereiches S, beziehungsweise des Flächenstückes M, dagegen U_1, V_1, W_1 die durch dieselben Functionen vermittelten conformen Abbildungen des Bereiches S_1, beziehungsweise des Flächenstückes M_1. Die den Punkten a, b, c, d des Flächenstückes M bei diesen drei Abbildungen entsprechenden Punkte sind mit $(a), (b), (c), (d)$ bezeichnet.

Von den drei Gebieten U, V, W enthält keines in seinem Innern einen singulären Punkt. Aus der Gestalt der Begrenzungslinie des Gebietes W ergibt sich, dass der Werth der Coordinate z für jeden Punkt des Flächenstückes M dem Intervalle $0 \leqq z \overline{\gtrless} H$ angehört, und den Werth H nur für die der geradlinigen Strecke da angehörenden Punkte annimmt. Es ergibt sich hieraus, dass alle Punkte des Minimalflächenstückes M*, welche keiner der beiden Begrenzungslinien desselben angehören, zwischen den beiden Ebenen $z = -H$ und $z = +H$ liegen.

Diese Skizzen sind unter Zugrundelegung derselben Annahme entworfen, wie die in den Figuren 1 und 4 dargestellten Skizzen. Auf Grund der in der Schrift »Bestimmung einer speciellen Minimalfläche« auf den Seiten 80 und 100 angegebenen Rechnungsergebnisse haben sich für die Grössen L, H, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$ folgende Werthe ergeben:

$$\begin{array}{lllll} L = 0{,}7624, & H = 0{,}5391, & \mathfrak{B}' = 0{,}2284, & \mathfrak{B}'' = 0{,}5391, & \multirow{2}{*}{$\dfrac{\mathfrak{R}''}{\mathfrak{R}'} = 1{,}0095.$} \\ \mathfrak{S} = 0{,}3812, & \mathfrak{T} = 0{,}1528, & \mathfrak{R}' = 0{,}5340, & \mathfrak{R}'' = 0{,}5391, & \end{array}$$

Die Strecke $(d)(a)$ in der Figur 5 hat die Länge 0,5960,
" " $(a)(b)$ " " " 6 " " " 0,5960,
" " $(b)(c)$ " " " 7 " " " 0,4214.

Die krummlinigen Theile der Begrenzungen der Bereiche U und V sind zu einander symmetrisch. Diese Eigenschaft besteht, wenn der Zahl n der Werth 4 beigelegt wird, für jeden Werth des Parameters R. Für andere Werthe der Zahl n sind diese Curven, wie eine nähere Untersuchung zeigt, symmetrisch-affin.

Der Krümmungsradius der krummlinigen Theile der Begrenzungen der Bereiche U und V in den dem Punkte c entsprechenden Punkten hat die Grösse $\frac{1}{4}\sqrt{2} = 0{,}3536$.

Die Figuren 1, 4, 5, 6, 7 beziehen sich auf dieselbe Längeneinheit. Nach einem von Riemann herrührenden Lehrsatze beträgt der Flächeninhalt des Flächenstückes M die Hälfte der Summe der Flächeninhalte der Bereiche U, V, W.

4.

Herleitung eines Hülfssatzes.

Es mögen s, s_1 zwei complexe veränderliche Grössen, denen nur conjugirte Werthe beigelegt werden sollen, $f(s)$, $F(s_1)$ zwei analytische Functionen derselben, x, y zwei reelle veränderliche Grössen bezeichnen. Es wird vorausgesetzt, dass zwischen den Grössen s, s_1, x, y die Gleichung

$$x+yi = f(s)+F(s_1)$$

bestehe.

Bei der geometrischen Darstellung der complexen Grössen s, s_1, $x+yi$ ergibt sich im Allgemeinen eine punktweise Beziehung derjenigen Bereiche auf einander, deren Punkte die Werthe der complexen Grössen s, s_1, $x+yi$ geometrisch darstellen. Diese drei Bereiche mögen beziehlich mit S, S_1, Q bezeichnet werden.

Die Beziehung des Bereiches Q auf den Bereich S ist nur dann eine in den kleinsten Theilen ähnliche, wenn sich entweder die Function $F(s_1)$, oder die Function $f(s)$ auf eine Constante reducirt. Jenachdem der erste oder der zweite dieser beiden Fälle eintritt, ist die conforme Abbildung eine in den kleinsten Theilen gleichstimmig oder ungleichstimmig ähnliche.

Die durch die angegebene Gleichung vermittelte Beziehung zwischen den betrachteten drei Bereichen kann, auch wenn keine der beiden Functionen $F(s_1)$, $f(s)$ sich auf eine Constante reducirt, in ähnlicher Weise durch Zuhülfenahme von Hülfsvorstellungen der Anschauung näher gebracht werden, wie dies im Falle der durch eine Function complexen Argumentes vermittelten conformen Abbildung geschieht.

An die Stelle der Aehnlichkeit tritt hierbei Affinität der kleinsten Theile der auf einander bezogenen zweidimensionalen Gebiete.

Es ergibt sich auf diese Weise eine gewisse Verallgemeinerung des Begriffes derjenigen Riemannschen Flächen, durch welche conforme Abbildungen zweidimensionaler Bereiche auf einander veranschaulicht werden. Während bei diesen letzteren die Singularitäten vorzugsweise in dem Auftreten von Windungspunkten bestehen, treten bei den hier zu betrachtenden Flächengebilden auch Umfaltungen auf.

Wenn die Betrachtung auf den Fall beschränkt wird, in welchem die beiden Functionen $f(s)$ und $F(s_1)$ innerhalb der Gebiete S, S_1 den Charakter ganzer Functionen besitzen, so sind nur diejenigen Stellen als singuläre zu bezeichnen, für welche die Beziehung

$$|f'(s)| = |F'(s_1)|$$

besteht. Hierbei wird an der Voraussetzung festgehalten, dass die Grössen s, s_1 nur conjugirte Werthe annehmen sollen.

Der Fall, in welchem die vorstehende Gleichung für alle Paare zusammengehörender Werthe der Grössen s, s_1 erfüllt ist, kann als Ausnahmefall von der Betrachtung ausgeschlossen werden. In diesem Falle ergibt sich nämlich, wenn mit $F_1(s)$ die zu der Grösse $F(s_1)$ conjugirte complexe Grösse bezeichnet wird, dass der Quotient $\frac{F_1'(s)}{f'(s)}$ für alle Werthe des Argumentes s den absoluten Betrag 1 hat, sich demnach auf eine Constante $e^{2\delta i}$ reducirt.

In Folge dieser zwischen den Functionen $f'(s)$ und $F_1'(s)$ bestehenden Beziehung ergibt sich die Gleichung

$$F_1(s) = e^{2\delta i} f(s) + C'$$

wo C' eine Constante bezeichnet. Es ergibt sich dann, wenn mit $f_1(s_1)$, C_1' die zu den Grössen $f(s)$, C' conjugirten complexen Grössen bezeichnet werden, dass die Gleichung besteht

$$x+yi = f(s)+e^{-2\delta i} f_1(s_1)+C_1' = e^{-\delta i}\{e^{\delta i} f(s)+e^{-\delta i} f_1(s_1)\} + C_1'.$$

Hieraus ergibt sich aber, da die Klammergrösse für alle in Betracht kommenden Werthepaare s, s_1 reelle Werthe hat, dass das den zweidimensionalen Gebieten S, S_1 entsprechende Gebiet Q nur ein eindimensionales ist und sich auf eine geradlinige Strecke reducirt. Wenn also von diesem Falle als einem Ausnahmefalle abgesehen wird, so ist die Gleichung

$$|f'(s)| = |F'(s_1)|$$

innerhalb des betrachteten Gebietes mit Einschluss der Begrenzung desselben nur in einzelnen Punkten oder längs einzelner Linien erfüllt.

Jeder im Innern des Gebietes S liegenden Linie, längs welcher diese Gleichung erfüllt ist, entspricht die Rückkehrcurve einer Falte des Gebietes Q, d. h. einer Linie, längs welcher zwei übereinander liegende Theile des Gebietes Q, eine Falte bildend, mit einander zusammenhängen. Ein Windungspunkt tritt in der, das Gebiet Q geometrisch darstellenden Fläche nur dann auf, wenn innerhalb des Gebietes S die Gleichung

$$f'(s) = F'(s_1) = 0$$

befriedigt wird.

Analogerweise, wie zwischen gleichstimmiger und ungleichstimmiger Aehnlichkeit, kann auch zwischen gleichstimmiger und ungleichstimmiger Affinität der kleinsten Theile unterschieden werden. Zwischen den in der Umgebung eines bestimmten Werthes s liegenden Theilen des Gebietes S und den entsprechenden Theilen des Gebietes Q findet gleichstimmige oder ungleichstimmige Affinität statt, jenachdem $f'(s)$ dem absoluten Betrage nach grösser oder kleiner als $F'(s_1)$ ist.

Die Ordnungszahl des Zusammenhanges des Bereiches Q ist gleich der Ordnungszahl des Zusammenhanges des Bereiches S.

Es besteht also der Hülfssatz: Wenn die Gleichungen

$$|f'(s)| = |F_1'(s)|, \qquad f'(s) = 0$$

innerhalb des Gebietes S an keiner Stelle befriedigt werden, so entspricht diesem Gebiete S in Folge der Gleichung

$$x + yi = f(s) + F(s_1)$$

ein in seinem Innern keinen Windungspunkt und keine Umfaltung enthaltendes Gebiet Q, für welches die Ordnungszahl des Zusammenhanges gleich ist der Ordnungszahl des Zusammenhanges des Gebietes S.

5.

Anwendung des Hülfssatzes. Erklärung des Bereiches Q*.

Der im Vorhergehenden bewiesene Hülfssatz kann dazu dienen, die Gestalt der orthographischen Projection des Minimalflächenstückes M* auf die Aequatorebene $z = 0$ zu untersuchen. Wenn x, y, U, V die in den Gleichungen (A.) erklärten Functionen bezeichnen, so besteht die Gleichung

$$x + yi = \Re U + i\Re V.$$

Wird die Grösse $x+yi$ auf die Form $f(s)+F(s_1)$ gebracht, so ergibt sich

$$f'(s) = \frac{1}{\sqrt{(R^{-n}+R^n)-(s^{-n}+s^n)}}, \qquad F'(s_1) = \frac{-s_1^{-2}}{\sqrt{(R^{-n}+R^n)-(s_1^{-n}+s_1^n)}}.$$

Bei der Beschränkung der Veränderlichkeit der complexen Grösse s auf das Gebiet S* sind die Punkte des Einheitskreises die einzigen, für welche die Gleichung

$$|f'(s)| = |F'(s_1)|$$

befriedigt ist. Innerhalb des Gebietes S* liegt keine Wurzel der Gleichung $f'(s) = 0$. Das Gebiet Q*, welches dem Gebiete S* bei der durch die Gleichung

$$x + yi = \Re U + i\Re V = f(s) + F(s_1)$$

vermittelten Beziehung entspricht, ist demnach ein zweifach zusammenhängender Bereich, welcher in seinem Innern keinen Windungspunkt, wohl aber eine dem Einheitskreise der s-Ebene entsprechende Falte enthält.

Wird die Veränderlichkeit der complexen Grösse s auf dasjenige Gebiet S beschränkt, welchem das Minimalflächenstück M entspricht, so ist das entsprechende Gebiet Q ein einfach zusammenhängender in seinem Innern keinen singulären Punkt enthaltender Bereich, welcher einen Theil der Ebene, deren Punkte die complexe Grösse $x+yi$ geometrisch darstellen, d. h. die Aequatorebene $z = 0$, lückenlos und einfach bedeckt. Den der Begrenzung des Flächenstückes M angehörenden

Curvenstrecken ab, cd und der geraden Strecke da entsprechen die geradlinigen Theile $a''b$, $c''d$, $d''a''$ der Begrenzung des Gebietes Q (siehe die Figur 4). Die der Begrenzung des Flächenstückes M angehörende Curvenstrecke bc fällt mit der der Begrenzung des Bereiches Q angehörenden Curvenstrecke bc zusammen.

Das Gebiet Q* besteht aus $4n$ Flächenstücken, von denen die eine Hälfte dem soeben beschriebenen Flächenstücke congruent, die andere Hälfte zu demselben symmetrisch ist. Durch die Substitutionen

$$s \parallel s e^{2\alpha i}, \qquad s_1 \parallel s_1 e^{-2\alpha i}$$

geht $x+yi$ in $(x+yi)e^{2\alpha i}$ über. Bei den Substitutionen

$$s \left\| \frac{1}{s_1}, \qquad s_1 \right\| \frac{1}{s}$$

bleibt $x+yi$ ungeändert. Bei der Vertauschung von s und s geht $x+yi$ in $x-yi$ über.

Die beiden Begrenzungslinien der das Gebiet Q* geometrisch darstellenden zweiblättrigen Fläche sind zwei regelmässige den Randlinien des Minimalflächenstückes M* congruente n-seitige Polygone.

Zwischen dem Minimalflächenstücke M* und dem Gebiete Q* besteht ein punktweises gegenseitig eindeutiges Entsprechen. Aus den die Gestalt des Gebietes Q* betreffenden Untersuchungen ergibt sich, dass das Minimalflächenstück M* ausserhalb eines Cylinders liegt, dessen erzeugende Gerade der z-Axe des Coordinatensystems parallel sind und dessen Leitlinie mit dem Aequator des Flächenstückes M* zusammenfällt.

6.

Untersuchung der Gestalt des Aequators.

Die den Aequator des Minimalflächenstückes M* bildende in der Ebene $z = 0$ liegende Curve besitzt n durch den Mittelpunkt von M* hindurchgehende Symmetrieaxen. Die Schnittpunkte der Symmetrieaxen mit dem Aequator können Scheitel desselben genannt werden.

Die Punkte b und c der Begrenzung von M sind zwei solche

Scheitel, deren Abstände vom Mittelpunkte mit $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ bezeichnet wurden. Der Abstand eines beliebigen Punktes des Aequators vom Mittelpunkte kann der zu diesem Punkte gehörende Radius genannt werden.

Um zu beweisen, dass dieser Radius n Minima und n Maxima besitzt, welche für die Scheitel des Aequators eintreten, genügt es, darzuthun, dass, wenn ein Punkt P die Curvenstrecke bc des Aequators durchläuft, der zu diesem Punkte gehörende Radius beständig zunimmt. Dies kann wie folgt gezeigt werden.

Der geometrischen Bedeutung der Grösse s zufolge, deren absoluter Betrag für die Punkte des Aequators den Werth 1 hat, bestimmt, wenn $s = e^{\varphi i}$ gesetzt wird, die Grösse $\frac{1}{2}\pi + \varphi$ den Unterschied der positiven Richtung der Tangente des Aequators in dem, dem Werthe φ entsprechenden Punkte P und der positiven Richtung der x-Axe des Coordinatensystems. Der Krümmungsradius ϱ des Aequators in dem Punkte P stimmt überein mit dem Hauptkrümmungsradius des Minimalflächenstückes M^* in demselben Punkte und zwar ergibt sich

$$\varrho = \varrho(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{R^{-n} + R^{n} - 2\cos n\varphi}}.$$

Wenn die Grösse φ stetig zunehmend alle Werthe von 0 bis α durchläuft, nimmt die Länge des Krümmungsradius von dem Werthe

$$\varrho' = \frac{2}{R^{-\frac{1}{2}n} - R^{\frac{1}{2}n}}$$

bis zu dem Werthe

$$\varrho'' = \frac{2}{R^{-\frac{1}{2}n} + R^{\frac{1}{2}n}}$$

beständig ab. Es sind daher die Werthe, welche die Grösse $\frac{d\varrho(\varphi)}{d\varphi}$ für die dem Intervalle $0 < \varphi < \alpha$ angehörenden Werthe der Grösse φ annimmt, negativ.

Es bestehen nun, wenn x, y die Coordinaten des dem Werthe $s = e^{\varphi i}$ entsprechenden Punktes P des Aequators bezeichnen, folgende Gleichungen:

$$\text{(G.)} \quad \begin{aligned} & dx = -\varrho(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi, \qquad dy = \varrho(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi, \\ & \cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy = 0, \qquad \cos\varphi\, dy - \sin\varphi\, dx = \varrho(\varphi)\, d\varphi \\ & x = \mathfrak{R}' - \int_0^\varphi \varrho(\chi)\sin\chi\, d\chi, \qquad y = \int_0^\varphi \varrho(\chi)\cos\chi\, d\chi. \end{aligned}$$

Wird für $\mathfrak{R}'$ sein Werth

$$\operatorname{cotg}\alpha \int_0^\alpha \varrho(\chi)\cos\chi\, d\chi + \int_0^\alpha \varrho(\chi)\sin\chi\, d\chi$$

gesetzt, so ergibt sich

$$x = \operatorname{cotg}\alpha \int_0^\varphi \varrho(\chi)\cos\chi\, d\chi + \operatorname{cosec}\alpha \int_\varphi^\alpha \varrho(\chi)\cos(\alpha-\chi)\, d\chi,$$

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = \int_\varphi^\alpha \varrho(\chi)\cos(\alpha-\chi)\, d\chi,$$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \operatorname{cosec}\alpha \left[\int_0^\varphi \varrho(\chi)\cos\chi\cos(\alpha-\varphi)\, d\chi + \int_\varphi^\alpha \varrho(\chi)\cos\varphi\cos(\alpha-\chi)\, d\chi\right].$$

$$y\cos\varphi - x\sin\varphi = \operatorname{cosec}\alpha \left[\int_0^\varphi \varrho(\chi)\cos\chi\sin(\alpha-\varphi)\, d\chi - \int_\varphi^\alpha \varrho(\chi)\sin\varphi\cos(\alpha-\chi)\, d\chi\right].$$

Durch theilweise Integration kann die letzte der vorstehenden Gleichungen übergeführt werden in die folgende

$$y\cos\varphi - x\sin\varphi = -\operatorname{cosec}\alpha \left[\int_0^\varphi \sin\chi\sin(\alpha-\varphi)\, d\varrho(\chi) + \int_\varphi^\alpha \sin\varphi\sin(\alpha-\chi)\, d\varrho(\chi)\right],$$

aus welcher sich ergibt, dass die Grösse $y\cos\varphi - x\sin\varphi$ für alle dem Intervalle $0 < \varphi < \alpha$ angehörenden Werthe der Grösse φ positive Werthe besitzt.

Das Integral

$$\int_\varphi^\alpha \varrho(\chi)\cos(\alpha-\chi)\, d\chi$$

bedeutet den Abstand des Punktes P des Aequators von der Symmetrieaxe $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$.

Es bestehen die Gleichungen

$$
\text{(H.)}\quad
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= (x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2+(y\cos\varphi-x\sin\varphi)^2\\
\frac{d}{d\varphi}(x\cos\varphi+y\sin\varphi) &= y\cos\varphi-x\sin\varphi,\\
\frac{d}{d\varphi}(y\cos\varphi-x\sin\varphi) &= -(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+\varrho(\varphi),\\
\frac{d}{d\varphi}\sqrt{x^2+y^2} &= \varrho(\varphi)\frac{y\cos\varphi-x\sin\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich, da die Ableitungen

$$\frac{d}{d\varphi}\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \frac{d}{d\varphi}(x\cos\varphi+y\sin\varphi)$$

für die dem Intervalle $0<\varphi<\alpha$ angehörenden Werthe der Grösse φ positiv sind, folgender Satz: Wenn die veränderliche Grösse φ stetig zunehmend alle Werthe des Intervalles $0<\varphi<\alpha$ durchläuft, so durchläuft jede der beiden Grössen

$$\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad x\cos\varphi+y\sin\varphi$$

ebenfalls stetig zunehmend alle Werthe des Intervalles von $\mathfrak{R}'$ bis $\mathfrak{R}''$.

Die Gleichungen

$$p = x\cos\varphi+y\sin\varphi, \qquad q = y\cos\varphi-x\sin\varphi$$

sind, wenn den Grössen p, q die Bedeutung des Radius vector, der Grösse φ die Bedeutung des Polarwinkels beigelegt wird, die Polargleichungen der Fusspunktcurve des Aequators und der Fusspunktcurve der Evolute des Aequators für den Coordinatenanfangspunkt als Pol.

Der Aequator des Minimalflächenstückes M* ist eine einfache, geschlossene, convexe Curve.

7.

Einführung der den Minimalflächenstücken M*(R) ähnlichen Minimalflächenstücke $\mathfrak{M}$*(R).

Um die Gesammtheit der Gestalten besser überblicken zu können, welche das Minimalflächenstück M* für verschiedene Werthe des Parameters R annehmen kann, ist es zweckmässig, ausser dem Minimalflächenstücke M* ein demselben ähnliches und in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt als Aehnlichkeitspunkt ähnlich liegendes Minimalflächenstück $\mathfrak{M}^*$ zu betrachten.

Es wird hierbei festgesetzt, dass, wenn x', y', z' die Coordinaten eines Punktes von $\mathfrak{M}^*$, x, y, z die Coordinaten des entsprechenden Punktes von M^* bezeichnen, die Gleichungen

$$x' = \frac{x}{L}, \qquad y' = \frac{y}{L}, \qquad z' = \frac{z}{L}$$

bestehen sollen. Wenn es nöthig ist, bei der Bezeichnung $\mathfrak{M}^*$ den Werth des Parameters R anzugeben, auf welchen dieses Flächenstück sich bezieht, so soll derselbe in Klammern gesetzt zu dem Zeichen $\mathfrak{M}^*$ hinzugefügt werden, so dass $\mathfrak{M}^*(R_0)$ dasjenige Minimalflächenstück $\mathfrak{M}^*$ bezeichnet, welches dem Werthe R_0 des Parameters entspricht.

Die Begrenzung jedes Minimalflächenstückes $\mathfrak{M}^*(R)$ besteht aus zwei getrennten Theilen; jeder dieser Theile ist ein regelmässiges, einem Kreise vom Radius Eins umschriebenes n-seitiges Polygon.

Der Abstand jedes dieser beiden Polygone von der Aequatorebene ist gleich dem Werthe des Quotienten $\frac{H}{L}$.

Es soll nun bewiesen werden, dass, wenn R_1, R_2 zwei der Bedingung

$$0 < R_1 < R_2 < 1$$

genügende Werthe des Parameters R bezeichnen, der Aequator des Minimalflächenstückes $\mathfrak{M}^*(R_2)$ den Aequator des Minimalflächenstückes $\mathfrak{M}^*(R_1)$ völlig umschliesst.

Hierzu reicht es aus, darzuthun, dass, wenn die Grössen p, x, y die im vorhergehenden Artikel erklärte Bedeutung haben, für jeden dem Intervalle

$$0 < \varphi < \alpha$$

angehörenden Werth der Grösse φ die Grösse

$$\frac{p}{L} = \frac{x \cos\varphi + y \sin\varphi}{L} = \frac{Xx + Yy}{L}$$

als Function des Parameters R betrachtet, stets gleichzeitig mit dem Werthe des Parameters zunimmt und abnimmt. Um diesen Nachweis zu führen, kann man von den Gleichungen

$$\text{(J.)}\quad \begin{aligned} x &= L - \mathfrak{B}'' \cos\alpha + \int_{\varphi}^{\alpha} \varrho(\chi) \sin\chi \, d\chi, \\ y &= L \operatorname{tg}\alpha - \mathfrak{B}'' \sin\alpha - \int_{\varphi}^{\alpha} \varrho(\chi) \cos\chi \, d\chi \end{aligned}$$

ausgehen, aus welchen sich

$$\begin{aligned} p &= x\cos\varphi + y\sin\varphi = Xx + Yy \\ &= L\sec\alpha\cos(\alpha-\varphi) - \mathfrak{B}''\cos(\alpha-\varphi) + \int_{\varphi}^{\alpha} \varrho(\chi)\sin(\chi-\varphi)\,d\chi \end{aligned}$$

und, wenn der Werth des Integrals

$$\int_{\varphi}^{\alpha} \varrho(\chi)\sin(\chi-\varphi)\,d\chi$$

mit $\mathfrak{T}(\varphi)$ bezeichnet wird,

$$\text{(K.)}\qquad \frac{p}{L} = \sec\alpha\cos(\alpha-\varphi) - \frac{\mathfrak{B}''}{L}\left[\cos(\alpha-\varphi) - \frac{\mathfrak{T}(\varphi)}{\mathfrak{B}''}\right]$$

ergibt.

Der erste der beiden Bestandtheile der Grösse $\frac{p}{L}$ ist von dem Werthe des Parameters R unabhängig; jeder der beiden Factoren des zweiten Bestandtheiles hat die Eigenschaft, dass sein absoluter Betrag abnimmt, wenn der Werth des Parameters R zunimmt. Von dem Factor $\frac{\mathfrak{B}''}{L}$ wurde dies bereits bewiesen. Dass auch der zweite Factor dieselbe Eigenschaft besitzt, kann wie folgt gezeigt werden. Die Grösse $\mathfrak{T}(\varphi)$ erlangt den grössten Werth, den dieselbe für die dem Intervalle $0 \leqq \varphi \lesseqgtr \alpha$ angehörenden Werthe der Grösse φ annehmen kann, für den Werth $\varphi = 0$, nämlich den Werth

$$\int_{0}^{\alpha} \varrho(\chi)\sin\chi\,d\chi = \mathfrak{T}.$$

In Folge der Gleichung

$$\mathfrak{T} + \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}''\cos\alpha$$

ist $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{B}''}$ stets kleiner als $\cos\alpha$, mithin ist um so mehr $\frac{\mathfrak{T}(\varphi)}{\mathfrak{B}''}$ kleiner als $\cos(\alpha-\varphi)$, folglich hat die Grösse

$$\cos(\alpha-\varphi)-\frac{\mathfrak{T}(\varphi)}{\mathfrak{B}''}$$

stets einen positiven Werth. Der Ausdruck

$$\mathfrak{B}''^2\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\mathfrak{T}(\varphi)}{\mathfrak{B}''}\right)=\mathfrak{B}''\frac{\partial\mathfrak{T}(\varphi)}{\partial R}-\mathfrak{T}(\varphi)\frac{d\mathfrak{B}''}{dR}$$

ist gleich dem Werthe des Doppelintegrals

$$\int_0^1\int_\varphi^\alpha\frac{n(R^{-n}-R^n)(r^{-1}-r)\sin(\chi-\varphi)(r^{-n}+r^n+2\cos n\chi)\,d\log r\,d\chi}{R\left(\sqrt{R^{-n}+R^n+r^{-n}+r^n}\right)^3\left(\sqrt{R^{-n}+R^n-2\cos n\chi}\right)^3},$$

dessen Elemente sämmtlich positive Werthe haben. Es nimmt aus diesem Grunde der Quotient $\frac{\mathfrak{T}(\varphi)}{\mathfrak{B}''}$, als Function des Parameters R betrachtet, stets gleichzeitig mit dem Parameter zu und ab.

Hieraus ergibt sich, dass die Grösse

$$\frac{p}{L}=\frac{Xx+Yy}{L},$$

als Function des Parameters R betrachtet, beständig zunimmt, wenn R beständig zunehmend alle Werthe des Intervalles $0<R<1$ durchläuft. Da für alle dem Innern des Intervalles $0<R<1$ angehörenden Werthe des Parameters die Ableitungen

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{\mathfrak{B}''}{L}\right)\quad\text{und}\quad\frac{\partial}{\partial R}\left(\cos(\alpha-\varphi)-\frac{\mathfrak{T}(\varphi)}{\mathfrak{B}''}\right)$$

von Null verschiedene negative Werthe haben, so besteht der Satz:

Für alle Werthe der Grösse φ und für alle dem Innern des Intervalles $0<R<1$ angehörenden Werthe des Parameters R hat die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{Xx+Yy}{L}\right]$$

von Null verschiedene positive Werthe.

Aus diesem Satze ergibt sich, dass die Fusspunktcurve des Aequators des Minimalflächenstückes $\mathfrak{M}^*(R_2)$ die Fusspunktcurve des Aequators des Minimalflächenstückes $\mathfrak{M}^*(R_1)$ ganz umschliesst, vorausgesetzt, dass für beide Fusspunktcurven der Coordinatenanfangspunkt zum Pol gewählt wird. Als eine unmittelbare Folge dieser Beziehung der beiden betrachteten Fusspunktcurven ergibt sich, dass auch der Aequator des Minimalflächenstückes $\mathfrak{M}^*(R_2)$ den Aequator des Minimalflächenstückes $\mathfrak{M}^*(R_1)$ ganz umschliesst.

Bei dem Uebergange zu dem Grenzwerthe $R = 0$ ergibt sich für jeden Werth der Grösse φ

$$\lim_{(R=0)} \frac{Xx + Yy}{L} = 0.$$

Beim Uebergange zu dem Grenzwerthe $R = 1$ ergibt sich für die dem Intervalle

$$0 < \varphi < 2\alpha$$

angehörenden Werthe der Grösse φ in Folge der Gleichung (K.)

$$\lim_{(R=1)} \frac{Xx + Yy}{L} = \sec\alpha \cos(\alpha - \varphi).$$

Bei diesem Grenzübergange geht also die Fusspunktcurve des Aequators in eine aus n Kreisbogen gebildete krumme Linie über.

Durch die vorstehende Untersuchung ist zugleich der Nachweis geführt, dass die Gesammtheit der Curven, welche die dem Intervalle $0 < R < 1$ entsprechende Schaar von Minimalflächenstücken $\mathfrak{M}^*$ mit der Aequatorebene gemeinsam hat, die Fläche eines einem Kreise mit dem Radius 1 umschriebenen regelmässigen Polygons von n Seiten lückenlos und einfach erfüllt.

8.

Untersuchung des Ganges des Quotienten $\frac{H}{L}$ in dem Intervalle $R_0 < R < 1$. Flächenstücke kleinsten Flächeninhalts.

Der Quotient $\frac{H}{L}$ hat sowohl für unendlich kleine Werthe von R, als auch für unendlich kleine Werthe von $1-R$ ebenfalls unendlich kleine Werthe, wie eine besondere Untersuchung ergibt. Für alle dem Intervalle $0 < R < 1$ angehörenden Werthe des Parameters R nimmt der Quotient $\frac{H}{L}$ ausschliesslich positive Werthe an und besitzt, als Function des Parameters R betrachtet, den Charakter einer ganzen Function.

Hieraus folgt, dass es unter allen Werthen, welche der Quotient $\frac{H}{L}$ annehmen kann, vorausgesetzt, dass der Grösse n stets derselbe Werth beigelegt wird, einen grössten Werth giebt, welcher mit ω oder, wenn auch der Werth der Grösse n angegeben werden soll, mit $\omega(n)$ bezeichnet werden möge.

Der Ausdruck

$$\text{(L.)} \qquad L^2 \frac{d}{dR}\left(\frac{H}{L}\right) = L\frac{dH}{dR} - H\frac{dL}{dR} = D(R),$$

welcher eine analytische Function des Argumentes R ist, und für alle dem betrachteten Intervalle angehörenden Werthe desselben ebenfalls den Charakter einer ganzen Function besitzt, muss daher in diesem Intervalle mindestens für einen Werth des Argumentes den Werth Null annehmen. Wie eine besondere Untersuchung ergibt, ist $\lim\limits_{(R=1)} D(R) = -\infty$.

Im Folgenden wird bewiesen werden, dass die Gleichung $D(R) = 0$ in dem angegebenen Intervalle nur eine einzige Wurzel besitzt. Einstweilen aber möge, indem die Frage, ob die Gleichung $D(R) = 0$ in dem betrachteten Intervalle nur eine, oder mehr als eine Wurzel besitzt, vorläufig noch unentschieden gelassen wird, angenommen werden, dass R_0 die dem Innern des Intervalles $0 < R < 1$ angehörende, dem Werthe 1 zunächst liegende Wurzel der Gleichung $D(R) = 0$ bezeichnen solle. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich, dass die Function $D(R)$ für alle dem Intervalle $R_0 < R < 1$ angehörenden Werthe des Parameters R negative Werthe hat und dass daher der Quotient $\frac{H}{L}$ beständig abnimmt, wenn die Grösse R beständig zunehmend alle diesem Intervalle angehörenden Werthe durchläuft.

Es soll nun bewiesen werden, dass jedes Minimalflächenstück $\mathfrak{A}^*$, welches einem dem Intervalle $R_0 < R < 1$ angehörenden Werthe des Parameters entspricht, kleineren Flächeninhalt besitzt, als alle demselben hinreichend nahe kommenden, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung kann auf Grund der Entwickelungen geführt werden, welche in der Abhandlung: »Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung« enthalten sind. Diesen Entwickelungen zufolge kommt es nur darauf an, eine für das in Betracht kommende Gebiet $S^*(R)$ der partiellen Differentialgleichug

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s \, \partial s_1} + \frac{2\psi}{(1+ss_1)^2} = 0$$

genügende Function $\psi(s, s_1; R)$ der beiden complexen Grössen s, s_1 zu ermitteln, welche für conjugirte complexe Werthe dieser Grössen im Innern des Gebietes $S^*(R)$ sich regulär verhält und sowohl im Innern, als auch längs der Begrenzung dieses Gebietes nur positive, von Null verschiedene Werthe annimmt. Sobald die Existenz einer solchen Function dargethan ist, ist es möglich, zu dem betrachteten Minimalflächenstücke $\mathfrak{M}^*(R)$ eine Schaar benachbarter Minimalflächenstücke zu construiren, welche so beschaffen sind, dass der Abstand je zweier unendlich benachbarten Minimalflächenstücke der Schaar in der ganzen Ausdehnung dieser Flächenstücke einschliesslich des Randes derselben eine unendlich kleine Grösse derselben Ordnung ist.

Für die hier betrachteten Minimalflächenstücke $\mathfrak{M}^*(R)$ ergibt sich nun eine solche Schaar durch die Ueberlegung, dass die den Werthen des Parameters R, welche dem Intervalle $R_0 < R < 1$ angehören, entsprechenden Minimalflächenstücke $\mathfrak{M}^*$ selbst eine solche Schaar von Minimalflächenstücken bilden, so dass es sich also nur darum handelt, den Nachweis zu führen, dass je zwei benachbarte, dieser Schaar angehörende Flächenstücke der angegebenen Bedingung wirklich Genüge leisten. Diese Erwägung führt zu der Bestimmung einer Function

$$\text{(M.)} \qquad \psi(s, s_1; R) = \frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{Xx+Yy+Zz}{L}\right],$$

welche dem unendlich kleinen Abstande zweier unendlich benachbarten

Minimalflächenstücke der Schaar an der dem Werthepaare s, s_1 entsprechenden Stelle proportional ist.

Für die Werthepaare

$$s = e^{\varphi i}, \qquad s_1 = e^{-\varphi i},$$

für welche die Grösse z den Werth 0 erhält, geht die durch die vorstehende Gleichung erklärte Function in die Function

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{Xx+Yy}{L}\right]$$

über, welche im Art. 7 untersucht wurde. Es ergibt sich also aus der a. a. O. angestellten Untersuchung, dass die Function $\psi(s, s_1; R)$ längs des Einheitskreises der s-Ebene nicht blos für die dem Intervalle $R_0 < R < 1$, sondern für alle dem Intervalle $0 < R < 1$ angehörenden Werthe von R positive von Null verschiedene Werthe hat.

Längs der ganzen Begrenzung des Bereiches $S^*(R)$ ist der Werth der Function

$$\frac{Xx+Yy}{L}$$

von dem Werthe des Parameters R unabhängig.

Für die Werthe

$$s = s_1 = r, \qquad 0 < r < R$$

ergibt sich beispielsweise

$$x = L, \qquad Y = 0, \qquad \frac{Xx+Yy}{L} = X.$$

Wird für die eine der beiden Begrenzungslinien des Bereiches $S^*(R)$ $s^n = r^n$, für die andere $s^n = r^{-n}$ gesetzt, wo $0 \leqq r \gtreqless R$ anzunehmen ist, so ergibt sich, da die Grösse z an den beiden Begrenzungen beziehlich die Werthe $H, -H$, die Grösse Z beziehlich die Werthe

$$-\frac{1-r^2}{1+r^2}, \qquad \frac{1-r^2}{1+r^2}$$

annimmt, dass der Werth der Function $\psi(s, s_1; R)$ sich längs der Begrenzung des Bereiches $S^*(R)$ auf den Werth

$$-\frac{1-r^2}{1+r^2}\cdot\frac{d}{dR}\left(\frac{H}{L}\right) = -\frac{1-r^2}{1+r^2}\cdot\frac{D(R)}{L^2}$$

reducirt.

Wird nun die Veränderlichkeit des Parameters R auf das Intervall $R_0 < R < 1$ beschränkt, so hat $D(R)$ negative, von Null verschiedene Werthe; es ergibt sich also, dass die erklärte Function $\psi(s, s_1; R)$ sowohl längs des Einheitskreises, als auch längs der ganzen Begrenzung des Bereiches $S^*(R)$ positive Werthe hat.

Hieraus kann nun geschlossen werden, dass die erklärte Function $\psi(s, s_1; R)$ im ganzen Bereiche $S^*(R)$ nur positive von Null verschiedene Werthe annimmt.

In Folge der durch die Gleichung

$$\psi(s_1^{-1}, s^{-1}; R) = \psi(s, s_1; R)$$

ausgedrückten Eigenschaft der betrachteten Function $\psi(s, s_1; R)$ genügt es, diesen Schluss für alle diejenigen Werthe der complexen Grössen s, s_1 zu ziehen, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist.

Angenommen, es erhielte die erklärte Function $\psi(s, s_1; R)$ innerhalb desjenigen Theiles des Gebietes $S^*(R)$, welcher innerhalb des Einheitskreises der s-Ebene liegt, negative Werthe. Dann müsste die Gesammtheit derjenigen diesem Gebietstheile angehörenden Stellen, für welche $\psi(s, s_1; R) \leqq 0$ ist, einen oder mehrere zusammenhängende Bereiche bilden, von denen jeder ein Theil der Fläche des Einheitskreises wäre. Jeder dieser Bereiche müsste in Bezug auf die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial s_1} + \frac{2\psi}{(1+ss_1)^2} = 0$$

ein Grenzbereich, d. h. ein solcher Bereich sein, in dessen Innerem sich ein particuläres Integral dieser Differentialgleichung regulär verhält und von Null verschieden bleibt, während dasselbe längs der ganzen Begrenzung dieses Bereiches den Werth Null annimmt. Die Fläche des Einheitskreises ist ein solcher Grenzbereich, wie die Function

$$\psi = \frac{1-ss_1}{1+ss_1}$$

zeigt.

Nach einem im Art. 21 der erwähnten Festschrift bewiesenen Satze kann aber ein Bereich, welcher in Bezug auf die angegebene Differentialgleichung ein Grenzbereich ist, niemals Theil eines anderen Bereiches sein, der in Bezug auf dieselbe Differentialgleichung gleichfalls ein Grenzbereich ist.

Hieraus folgt, dass die Annahme, die Function $\psi(s, s_1; R)$ könne für einen dem Intervalle $R_0 < R < 1$ angehörenden Werth des Parameters R im Innern des innerhalb des Einheitskreises der s-Ebene liegenden Theiles des Bereiches $S^*(R)$ negative Werthe annehmen, unzulässig ist.

Die Function $\psi(s, s_1; R)$ kann hiernach für die dem Intervalle $R_0 < R < 1$ angehörenden Werthe des Parameters R im Innern des Gebietes $S^*(R)$ negative Werthe überhaupt nicht annehmen.

Auch den Werth 0 kann eine solche Function $\psi(s, s_1; R)$ im Innern des Bereiches $S^*(R)$ nicht annehmen. Denn es besteht der Satz, dass ein particuläres Integral der angegebenen partiellen Differentialgleichung, welches im Innern eines gewissen Bereiches sich regulär verhält und negative Werthe nicht annimmt, den kleinsten Werth, den dasselbe überhaupt für einen Punkt dieses Bereiches annehmen kann, stets in einem Punkte der Begrenzung dieses Bereiches annimmt.

Der kleinste Werth, den die erklärte Function $\psi(s, s_1; R)$ für Punkte des Bereiches $S^*(R)$ annehmen kann, ist daher der Werth

$$-\frac{1-R^2}{1+R^2} \cdot \frac{D(R)}{L^2},$$

welcher den gestellten Bedingungen zufolge von Null verschieden und positiv ist.

Hiermit ist bewiesen, dass jedes der betrachteten Minimalflächenstücke $\mathfrak{M}^*$, welches einem dem Intervalle $R_0 < R < 1$ angehörenden Werthe des Parameters R entspricht, kleineren Flächeninhalt besitzt, als jedes andere demselben hinreichend nahe kommende, von denselben Randlinien begrenzte Flächenstück.

Diese Eigenschaft kommt selbstverständlich auch den Minimalflächenstücken M* zu, welche einem der betrachteten Minimalflächenstücke $\mathfrak{M}^*$ ähnlich sind.

9.

Untersuchung des Ganges des Quotienten $\frac{H}{L}$ in dem Intervalle $0 < R < R_0$.

Es handelt sich nun darum, den Gang des Quotienten $\frac{H}{L}$ in dem Intervalle $0 < R < R_0$ zu untersuchen.

Es bezeichne ε eine veränderliche Grösse, deren Veränderlichkeit auf kleine positive Werthe beschränkt ist. Es ist, wenn dem Parameter der Werth $R = R_0 - \varepsilon$ beigelegt wird, das Vorzeichen der Grösse $D(R_0-\varepsilon)$ zu bestimmen.

Die Grösse $D(R_0-\varepsilon)$ kann nicht constant den Werth Null haben, denn es ist $D(R)$ eine analytische Function des Parameters R. Es kann aber auch die Grösse $D(R_0-\varepsilon)$ nicht negativ sein. Denn, gesetzt, es wäre $D(R_0-\varepsilon)$ negativ, so würde die Function $\psi(s, s_1: R_0-\varepsilon)$ längs des Einheitskreises der s-Ebene und längs der ganzen Begrenzung des Bereiches $S^*(R_0-\varepsilon)$ positive Werthe haben. Es würde hieraus gerade so, wie im vorhergehenden Artikel, gefolgert werden können, dass die Function $\psi(s, s_1; R_0-\varepsilon)$ auch im ganzen Innern des Bereiches $S^*(R_0-\varepsilon)$ positive Werthe annehmen müsste. Dann würde aber eine der angegebenen partiellen Differentialgleichung genügende und im Innern des Bereiches $S^*(R_0)$ sich regulär verhaltende Function, nämlich die Function $\psi(s, s_1; R_0-\varepsilon)$, existiren, welche im Innern und längs der ganzen Begrenzung des Bereiches $S^*(R_0)$ nur positive, von Null verschiedene Werthe annähme; es könnte in Folge dessen der Bereich $S^*(R_0)$ kein Grenzbereich sein. Wegen dieses Widerspruches ist die Annahme, dass $D(R_0-\varepsilon) < 0$ sei, unzulässig. Hieraus folgt, dass

$D(R_0-\varepsilon)$ einen positiven Werth haben muss. Es entspricht also, da $D(R_0-\varepsilon)>0$, $D(R_0+\varepsilon)<0$ ist, dem Werthe $R=R_0$ ein Maximum des Quotienten $\frac{H}{L}$.

Gesetzt nun, es läge in dem Intervalle $0<R<R_0$ eine oder mehr als eine Wurzel der Gleichung $D(R)=0$. Unter dieser Voraussetzung möge die diesem Intervalle angehörende, dem Werthe R_0 zunächst liegende Wurzel mit R'_0 bezeichnet werden. Die Function $D(R)$ nimmt für die dem Intervalle $R'_0<R<R_0$ angehörenden Werthe des Parameters nur positive Werthe an. Die dem Werthe R'_0 entsprechende Function $\psi(s, s_1; R'_0)$ besitzt der früheren Ermittelung zufolge längs des Einheitskreises der s-Ebene positive, von Null verschiedene Werthe, längs der ganzen Begrenzung des Bereiches $S^*(R'_0)$ hingegen würde dieselbe den Werth Null annehmen. Es kann aber die Function $\psi(s, s_1; R'_0)$ weder im Innern des Bereiches $S^*(R'_0)$ beständig positive Werthe, noch für einzelne Theile dieses Bereiches negative Werthe annehmen. Das Erstere würde der Eigenschaft des Bereiches $S^*(R_0)$, ein Grenzbereich zu sein, widersprechen. da die Function $\psi(s, s_0; R'_0)$ im ganzen Innern und überdies längs eines Theiles der Begrenzung des Bereiches $S^*(R_0)$ positive Werthe annehmen würde, was bei einem Grenzbereiche nicht eintreten kann. Das Letztere würde unvereinbar sein mit dem Satze, dass für die angegebene Differentialgleichung kein Theil eines Grenzbereiches, nämlich des Inneren, beziehungsweise des Aeusseren des Einheitskreises, gleichfalls ein Grenzbereich sein kann.

Es ist hiermit dargethan, dass die transcendente Gleichung $D(R)=0$ überhaupt keine dem Innern des Intervalles $0<R<R_0$ angehörende Wurzel besitzt; folglich hat die Function $D(R)$ für die diesem Intervalle angehörenden Werthe des Parameters R positive Werthe. Der Quotient $\frac{H}{L}$ nimmt daher, wenn der Parameter R stetig zunehmend alle Werthe des Intervalles $0<R<R_0$ durchläuft, ebenfalls beständig zu, erreicht seinen grössten Werth ω für $R=R_0$, und nimmt, wenn R stetig zunehmend alle Werthe des Intervalles $R_0<R<1$ durchläuft, beständig ab. Der Quotient $\frac{H}{L}$ nimmt hiernach jeden positiven Werth, welcher kleiner als ω ist, für zwei und nur für zwei dem Intervalle $0 < R < 1$ angehörende Werthe des Parameters R an.

Für alle dem Intervalle $0 < R < R_0^1$ angehörenden Werthe des Parameters R hat die Function $\psi(s, s_1; R)$ längs der ganzen Begrenzung des Bereiches $S^*(R)$ negative, längs des im Innern des Bereiches liegenden Einheitskreises positive Werthe.

Hieraus folgt, dass im Innern jedes dieser Bereiche $S^*(R)$ zwei geschlossene Linien liegen, längs welcher die Function $\psi(s, s_1; R)$ den Werth Null annimmt. Eine dieser beiden Linien liegt innerhalb, die andere liegt ausserhalb des Einheitskreises der s-Ebene. Die Gesammtheit derjenigen, dem Innern des Bereiches $S^*(R)$ angehörenden Stellen, für welche die Function $\psi(s, s_1; R)$ positive Werthe oder den Werth Null annimmt, bildet für die angegebene Differentialgleichung einen Grenzbereich. Da dieser Grenzbereich ein Theil des Bereiches $S^*(R)$ ist, so ergibt sich auf Grund der in der Schrift »Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung« enthaltenen Entwickelungen, dass unter den dem Intervalle $0 < R < R_0$ entsprechenden Minimalflächenstücken $\mathfrak{M}^*(R)$ kein einziges die Eigenschaft besitzt, kleineren Flächeninhalt zu haben, als alle ihm hinreichend nahe liegenden, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke.

Den beiden Curven innerhalb des Gebietes $S^*(R)$, längs welcher die Gleichung $\psi(s, s_1; R) = 0$ erfüllt ist, entsprechen zwei auf dem Minimalflächenstück $\mathfrak{M}^*(R)$ liegende und in Bezug auf die Aequatorebene desselben zu einander symmetrische Curven, welche mit $C(R)$ bezeichnet werden mögen. Längs der Curven $C(R)$ wird das Minimalflächenstück $\mathfrak{M}^*(R)$ von den ihm unendlich benachbarten der betrachteten Schaar angehörenden Flächenstücken geschnitten.

Der geometrische Ort der Curven $C(R)$ ist eine krumme Fläche Φ, welche von den dem Intervalle $0 < R < R_0$ entsprechenden Minimalflächenstücken $\mathfrak{M}^*(R)$ eingehüllt wird.

F 2

Die Hüllfläche Φ wird begrenzt von den beiden Begrenzungslinien des Minimalflächenstückes $\mathfrak{M}^*(R_0)$.

Für kleine Werthe des Parameters R besteht die Gleichung

$$L = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})} R^{\frac{1}{2}n-1}(1+(R)),$$

in welcher (R) eine Grösse bezeichnet, welche für unendlich kleine Werthe des Parameters R ebenfalls unendlich klein wird.

Unter derselben Voraussetzung besteht, wenn die Veränderlichkeit der Grösse s der Beschränkung unterworfen wird, dass für $\lim R = 0$ auch

$$\lim \left| \frac{s^{-n}+s^n}{R^{-n}+R^n} \right| = 0$$

ist, die Gleichung

$$\frac{1}{L}\mathfrak{F}(s) = -\frac{n\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{n})} R s^{-2}\left[1+\left(R,\ \frac{s^{-n}+s^n}{R^{-n}+R^n}\right)\right],$$

in welcher

$$\left(R,\ \frac{s^{-n}+s^n}{R^{-n}+R^n}\right)$$

eine Grösse bezeichnet, welche für alle unendlich kleinen Werthe der beiden Grössen

$$R,\ \frac{s^{-n}+s^n}{R^{-n}+R^n}$$

ebenfalls unendlich kleine Werthe hat.

Hieraus ergibt sich, dass ein Minimalflächenstück $\mathfrak{M}^*(R)$ dem der Gleichung

$$\mathfrak{F}(s) = -\frac{n\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{n})} R s^{-2}$$

entsprechenden Catenoid um so näher kommt, je kleinere Werthe dem Parameter R beigelegt werden, wenn bei diesem Grenzübergange die Betrachtung auf einen solchen Theil des Minimalflächenstückes $\mathfrak{M}^*(R)$ beschränkt wird, für welchen die angegebene, die Grösse

$$\frac{s^{-n}+s^n}{R^{-n}+R^n}$$

betreffende Voraussetzung zutrifft.

Hieraus folgt, dass die erwähnte Hüllfläche Φ in demjenigen Theile, welcher unendlich kleinen Werthen des Parameters R entspricht, näherungsweise dieselbe Gestalt besitzt, wie der die betrachtete Schaar ähnlich liegender Catenoide einhüllende Rotations-Kegel, dessen Gleichung

$$x^2+y^2 = c^2z^2 \quad \text{ist.}$$

Bezeichnet b die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$(e^b+e^{-b})-b(e^b-e^{-b}) = 0,$$

deren Werth angenähert $1{,}1996786\ldots$ ist, so wird der Werth der Constante c durch die Gleichung

$$c = \frac{e^b+e^{-b}}{2b} = \frac{e^b-e^{-b}}{2} = 1{,}50888\cdots$$

bestimmt.

Die Hüllfläche Φ enthält hiernach den Mittelpunkt aller der betrachteten Schaar angehörenden Flächenstücke; derselbe ist ein konischer Doppelpunkt der Fläche Φ. Die Gleichung

$$x^2+y^2 = c^2z^2$$

ist die Gleichung desjenigen Kegels, welcher die Fläche Φ im Coordinatenanfangspunkte einhüllend berührt.

Es besteht also die Hüllfläche Φ aus zwei trichterförmig gestalteten, in Bezug auf die Aequatorebene zu einander symmetrisch liegenden Theilen, welche im Coordinatenanfangspunkte mit einander zusammenhängen.

Die Betrachtungen, welche Herr Lindelöf in seinem Lehrbuche der Variationsrechnung auf den Seiten 210—214 in Bezug auf eine Schaar ähnlich liegender Catenoide mit gemeinsamem Mittelpunkt angestellt hat, gestatten eine sinngemässe Anwendung auf die dem Intervalle $0 < R \lesseqgtr R_0$ entsprechenden Minimalflächenstücke $\mathfrak{A}^*(R)$.

Werden zwei gürtelförmige Streifen der Hüllfläche Φ, welche einerseits von je einer der Begrenzungslinien des Minimalflächenstückes $\mathfrak{A}^*(R_0)$, andererseits von je einer der beiden Curven $C(R)$ begrenzt werden, durch das gürtelförmige von den beiden Curven $C(R)$ begrenzte

Stück des Flächenstückes $\mathfrak{M}^*(R)$ mit einander verbunden, so entsteht ein zweifach zusammenhängendes Flächenstück, welches mit $\Psi(R)$ bezeichnet werden möge.

Das Flächenstück $\Psi(R)$ hat für jeden dem Intervalle $0 < R < R_0$ angehörenden Werth des Parameters R mit dem Minimalflächenstücke $\mathfrak{M}^*(R_0)$ die Begrenzung gemein und besitzt ebenso grossen Flächeninhalt, als dieses. Da das Flächenstück $\Psi(R)$ nicht in seiner ganzen Ausdehnung ein Minimalflächenstück ist, so gibt es in beliebiger Nähe desselben solche Flächenstücke, welche von denselben Randlinien begrenzt werden und kleineren Flächeninhalt haben, als das Flächenstück $\Psi(R)$. Aus dem Umstande, dass diese Flächenstücke dadurch, dass dem Parameter R ein dem Werthe R_0 hinreichend nahe kommender Werth beigelegt wird, dem Flächenstücke $\mathfrak{M}^*(R_0)$ in der ganzen Ausdehnung desselben beliebig nahe gebracht werden können, ergibt sich, dass dem Minimalflächenstücke $\mathfrak{M}^*(R_0)$ die Eigenschaft nicht zukommt, kleineren Flächeninhalt zu besitzen, als alle ihm hinreichend nahe kommenden von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke.

Hieraus folgt:

Die dem Intervalle $R_0 < R < 1$ entsprechenden Minimalflächenstücke $\mathfrak{M}^*(R)$ und $M^*(R)$ sind die einzigen den betrachteten Schaaren von Minimalflächenstücken angehörenden Flächenstücke, welche die Eigenschaft haben, kleineren Flächeninhalt zu besitzen, als alle denselben hinreichend nahe kommenden, von denselben beiden regelmässigen n-seitigen Polygonen begrenzten Flächenstücke.

Aus der vorstehenden Untersuchung hat sich ergeben, dass, wenn R_1 einem dem Intervalle $0 < R_1 < R_0$ angehörenden Werth des Parameters R bezeichnet, es stets einen und nur einen dem Intervalle $R_0 < R_2 < 1$ angehörenden Werth R_2 des Parameters gibt, für welchen das Verhältniss $\frac{H}{L}$ denselben Werth besitzt, wie für den Werth $R = R_1$. Die beiden zweifach zusammenhängenden Minimalflächenstücke $\mathfrak{M}(R_1)$ und $\mathfrak{M}(R_2)$ haben dieselbe Begrenzung, aber nur das Minimalflächenstück $\mathfrak{M}(R_2)$ ist ein Flächenstück kleinsten Flächeninhalts.

10.

Uebergang zu der Grenze $n = \infty$. Werthe der Grössen R_0 und ω für den Fall $n = 4$.

Der Uebergang zu der Grenze $\lim n = \infty$ kann, vorausgesetzt, dass die Veränderlichkeit der Grösse s auf das Gebiet

$$R < |s| < R^{-1}$$

beschränkt wird, auf Grund der folgenden Formeln ausgeführt werden.

Für $\lim n = \infty$ bestehen die Gleichungen:

$$\text{(N.)}\qquad \begin{aligned}
\lim R^{-\frac{1}{2}n}\, L &= R^{-1}+R,\\
\lim R^{-\frac{1}{2}n}\, \mathfrak{F}(s) &= -s^{-2},\\
\lim R^{-\frac{1}{2}n}\, x &= \Re(s^{-1}+s),\\
\lim R^{-\frac{1}{2}n}\, y &= \Re i(s^{-1}-s),\\
\lim R^{-\frac{1}{2}n}\, z &= \Re\, 2\log(s^{-1}).
\end{aligned}$$

Bei diesem Grenzübergange geht also jedes Minimalflächenstück $\mathfrak{M}^*(R)$ in eine dem Gebiete

$$R < |s| < R^{-1}$$

entsprechende Zone desjenigen Catenoids über, welches der durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}(s) = -\frac{s^{-2}}{R^{-1}+R}$$

bestimmten Function $\mathfrak{F}(s)$ entspricht. Für diesen Grenzfall, welcher experimentell von Plateau, mit den Hülfsmitteln der Variationsrechnung zuerst von Herrn Lindelöf untersucht wurde, ergibt sich

$$\frac{H}{L} = \frac{2\log R^{-1}}{R^{-1}+R}.$$

Der vorstehende Ausdruck erlangt seinen grössten Werth

$$\omega(\infty) = 0{,}662744\cdots \quad \text{für } \log R^{-1} = \log R_0^{-1} = 1{,}1996786\cdots$$
$$R_0 = 0{,}30129\cdots = \operatorname{tg} 16^\circ 46' 1'',5.$$

Durch die Experimentaluntersuchungen Plateau's ist die Uebereinstimmung festgestellt worden, welche auf diesem Untersuchungsgebiete zwischen dem Ergebnisse der theoretischen Untersuchung und dem Ergebnisse des Experiments besteht.

Dieselben Zahlen, welche theoretisch die Grenze bestimmen, bis zu welcher gewissen Minimalflächenstücken in dem angegebenen Sinne die Eigenschaft des kleinsten Flächeninhalts wirklich zukommt, bestimmen zugleich die Grenze der Stabilität flüssiger Lamellen, deren Gestalt durch geeignete Vorkehrungen mit der Gestalt jener Minimalflächenstücke zur Uebereinstimmung gebracht worden ist.

Um eins der Hauptergebnisse der in der vorliegenden Abhandlung mitgetheilten Untersuchung für einen anderen Werth der Zahl n, als den Grenzwerth $n = \infty$, mit dem Ergebnisse von speciell für diesen Zweck anzustellenden Experimenten vergleichen zu können, habe ich für den Fall, in welchem die Begrenzung der Minimalflächenstücke $\mathfrak{A}^*$ von zwei Quadraten gebildet wird, also für den Fall $n = 4$, die Gleichung $D(R) = 0$ näherungsweise aufgelöst und den grössten Werth ω, welchen der Quotient $\frac{H}{L}$ für den angegebenen Werth der Zahl n annehmen kann, näherungsweise bestimmt. Ohne an dieser Stelle auf die Einzelheiten der Rechnung einzugehen, theile ich hier nur das Endergebniss derselben mit.

Unter der Voraussetzung, dass der Zahl n der Werth 4 beigelegt wird, ergibt sich für die Grösse R_0 der Werth

$$R_0 = 0{,}43188\cdot\cdot = \operatorname{tg}(23^\circ 21' 31''\cdot\cdot),$$

für die Grösse ω der Werth

$$\omega(4) = 0{,}720146\cdot\cdot$$

Da die Grösse

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = 0{,}517638\cdot\cdot$$

grösser ist als 0,43188.., so besitzt das den Werthen

$$n = 4, \quad R = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

entsprechende Minimalflächenstück $\mathfrak{A}^*$ kleineren Flächeninhalt, als alle demselben hinreichend nahe kommenden, von denselben beiden Quadraten begrenzten Flächenstücke.

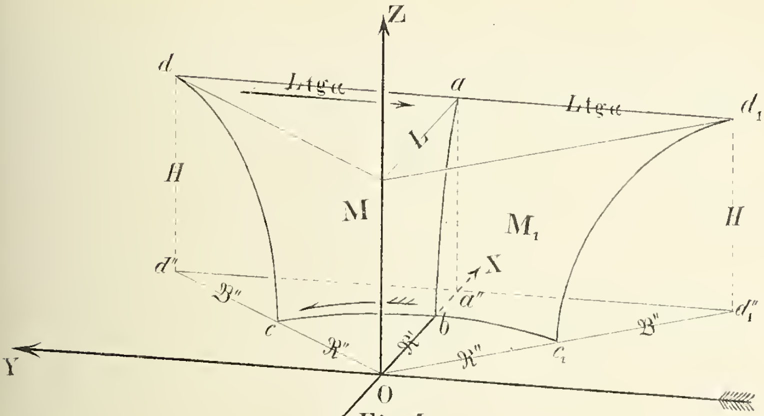

Fig. 1.

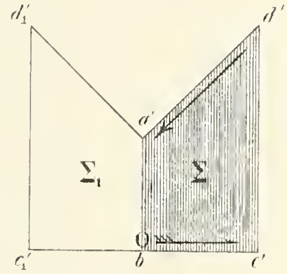

Fig. 2.

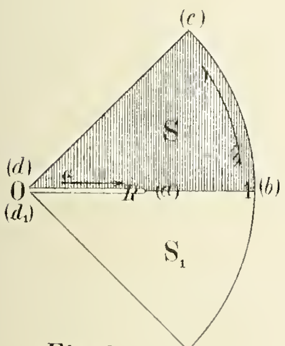

Fig. 3.

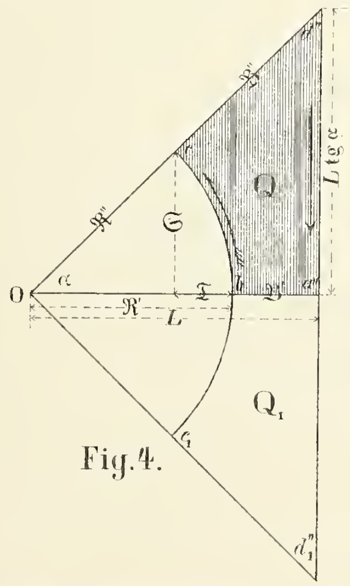

Fig. 4.

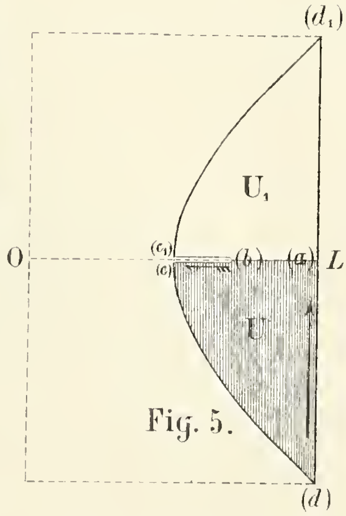

Fig. 5.

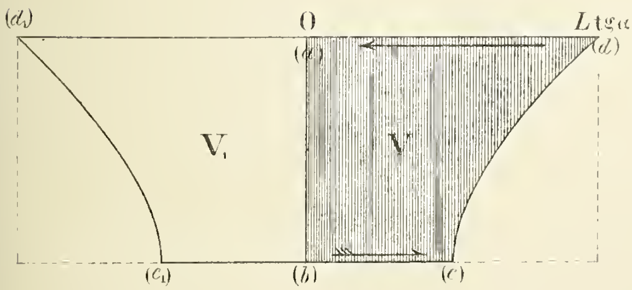

Fig. 6.

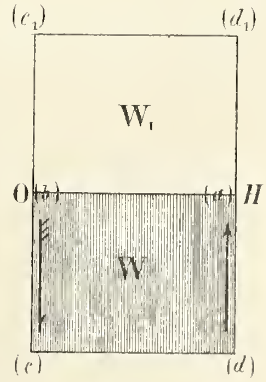

Fig. 7.