Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle.

Von
W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Ges. d. Wiss. am 2 Juli 1887.

I. Ableitung der Grundgleichungen aus der Annahme mit Polarität begabter Moleküle.

Bekanntlich ist schon für die erstmalige Aufstellung der elastischen Differentialgleichungen durch Navier ¹⁾, Poisson ²⁾ und Cauchy ³⁾ die Hypothese wechselwirkender discreter Moleküle der Ausgangspunkt gewesen, aber diese Art der Ableitung hat späterhin an Ansehen verloren durch die Thatsache, dass ein wichtiges durch diese Theorie geliefertes Resultat — das numerische Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten für isotrope Medien — durch die Beobachtung nicht bestätigt worden ist. Man hat daher seit Cauchy ⁴⁾ und Lamé ⁵⁾ mit Vorliebe Wege zur Gewinnung der Grundgleichungen benutzt, welche die molekulare Vorstellung nicht nothwendig voraussetzen, sondern ebenso gut mit der dynamischen Hypothese über das Wesen der Materie vereinbar sind.

So wichtig nun ohne allen Zweifel dieses neuere Verfahren auch ist, so bietet doch auch die Verfolgung und Ausbildung des älteren

---

1) Navier, Mém. de l'Acad. T. 7, p. 375, 1824.

2) Poisson, Mém. de l'Acad. T. 8, p. 357, 1828.

3) Cauchy, Exerc. de Math. T. 3, p. 188, 1828; T. 4, p. 129, 1829.

4) Cauchy, ib. T. 4, p. 293.

5) Lamé, Leçons sur la Théorie de l'Élasticité, Paris 1852 und 1866.

ein grosses Interesse. Denn nicht die molekulare Vorstellung selbst ist durch die erwähnten Beobachtungsergebnisse widerlegt, sondern nur eine willkürlich specielle Annahme über die Wirkungsweise der Moleküle, die schon an sich unwahrscheinlich ist. Die genannten Arbeiten von Navier, Poisson und Cauchy setzen nämlich voraus, dass die Moleküle nach allen Richtungen hin mit gleicher Stärke wirken, und dies ist eine willkürliche Specialisirung des allgemeinst Denkbaren, die auch durch die Annahme, dass die Abstände der Moleküle von einander gross gegen ihre Dimensionen sind, nicht sonderlich begründet wird. Denn wenn jenes richtig ist, so bleibt das Entstehen des regelmässigen Aufbaus der Krystalle ein vollständiges Räthsel.

Poisson selbst hat in seiner letzten, unvollendeten Arbeit ¹⁾ die Beseitigung jener willkürlichen Beschränkung und die Berechnung der elastischen Kräfte aus der Annahme von mit der Richtung variirenden Molekularwirkungen in Angriff genommen. Aber wenn die von ihm erhaltenen Resultate wirklich die allgemeinsten wären, würde auch diese Theorie bereits durch die Beobachtungen widerlegt sein, denn die neuen Formeln Poisson's führen im allgemeinsten Falle auf eine Symmetrie nach drei zu einander normalen Ebenen, die im Widerspruche steht mit den Beobachtungen am Kalkspath und Bergkrystall.

Aber bei genauerer Prüfung erkennt man, dass nur durch einen Trugschluss Poisson für die Elementarwirkung zweier, mit ihren Axen parallel liegenden Moleküle diese dreifache Symmetrie erhält ²⁾ und dass auch jenes Resultat nur aus diesem Trugschluss hervorgeht.

Es ist also schon aus diesem Grunde eine Wiederholung jener Entwicklung auf allgemeinerer Grundlage geboten. Für sie sprechen auch noch andere Umstände.

Poisson lässt zwischen den einzelnen Molekülen zwar mit der Richtung wechselnde, — sagen wir kurz: polare — Kräfte wirken, er untersucht aber nicht, ob neben solchen nicht auch noch Drehungsmomente

---

1) Poisson, Mém. de l'Acad. T. 18, p. 3, 1842.

2) Poisson, ib. p. 41 u. f.

auftreten können oder müssen. Und doch sind solche nicht minder wahrscheinlich, als die polaren Kräfte; denn erst durch ihre Mitwirkung kann es geschehen, dass beim Wachsen eines Krystalles eine Molekularschicht nach der andern sich in genau derselben Weise an einander lagert.

Ferner ist die Poisson'sche Darstellung, meines Erachtens, wie im Ganzen sehr umständlich, so besonders dadurch wenig übersichtlich, dass sie die Elementarwirkung zwischen zwei parallelen Molekülen, ob sie gleich nur von drei Argumenten abhängt, als Function von vier nicht von einander unabhängigen behandelt; die Endresultate lassen sich in dieser Form nur schwer discutiren. Hier dürfte auch ein formaler Fortschritt möglich sein.

Im Folgenden gebe ich 1) die Ableitung einiger fundamentaler Eigenschaften der Elementarwirkungen aus dem Princip der Energie, 2) einige Sätze über die auf eine Fläche wirkenden elastischen Drucke und Drehungsmomente, 3) die Berechnung dieser Grössen aus den Elementarwirkungen, 4) die Specialisirung der Resultate für die einzelnen Krystallsysteme, 5) ihre Discussion, 6) Folgerungen daraus für isotrope Medien.

---

1. Wir denken uns das homogene krystallinische Medium bestehend aus einem System von Molekülen, welche durch ihre Wechselwirkungen einander im Gleichgewicht halten ¹⁾. Diese Wechselwirkungen sind Kräfte und Drehungsmomente, deren Componenten in unbekannter Weise mit der relativen Lage der Moleküle variiren. Die Anordnung der Moleküle sei in der Art regelmässig, dass ein jedes von ihnen in derselben Weise von Nachbarmolekülen umgeben ist. Für den Fall, dass dies der Wirklichkeit nicht entspräche, sondern mehrere Arten immer wiederkehrender Gruppierungen von Molekülen vorhanden wären, bedürfte unsere Theorie einer Erweiterung. Da die Moleküle nach unserer Annahme eine Polarität besitzen, so muss man sie wie endliche

---

1) Wollte man die kinetische Vorstellung benutzen, so hätte man mit den mittleren Lagen der Moleküle zu rechnen.

starre Körper behandeln und ihre Lage ausser durch die Coordinaten ihres Schwerpunktes noch durch die Richtung eines fest mit ihnen verbundenen Axensystemes bestimmen.

Die Coordinaten der Schwerpunkte in Bezug auf das absolut feste Axensystem bezeichnen wir mit x, y, z , die Richtungscosinus der mit ihnen beweglichen Axen gegen die festen mit $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, — die Verschiebungen parallel den festen Axen mit u, v, w , die Drehungen um dieselben mit l, m, n .

Aufschluss über die anzunehmenden Eigenschaften der wechselwirkenden Kräfte entnehmen wir dem Princip der Energie, welches verlangt, dass die von jenen Kräften bei einer beliebigen Veränderung des Systems geleistete Arbeit die vollständige Variation einer Function sein muss, welche nur von der Configuration des Systemes, d. h. der relativen Lage seiner Theile, abhängig ist.

Bezeichnen wir also mit X_{hk}, Y_{hk}, Z_{hk} die Componenten, mit L_{hk}, M_{hk}, N_{hk} die Momente der Einwirkung eines Moleküles m_k auf ein anderes m_h und benutzen $X_{kh}, Y_{kh}, Z_{kh}, L_{kh}, M_{kh}, N_{kh}$ in demselben Sinne, so muss das durch

$$(1) \quad \begin{aligned} -dF_{hk} = & X_{hk} dx_h + Y_{hk} dy_h + Z_{hk} dz_h + L_{hk} dl_h + M_{hk} dm_h + N_{hk} dn_h \\ & + X_{kh} dx_k + Y_{kh} dy_k + Z_{kh} dz_k + L_{kh} dl_k + M_{kh} dm_k + N_{kh} dn_k \end{aligned}$$

gegebene Elementar-Potential F_{hk} nur von der relativen Lage der beiden Moleküle abhängen. Da in dieser Formel rechts die vollständige Variation der Function F_{hk} stehen soll, so hat es den Anschein, als ob dieselbe von 12 Argumenten abhinge; da jedoch die relative Lage zweier Körper durch 6 Elemente bestimmt ist, so muss durch Umformung eine Gestalt zu gewinnen sein, in welcher nur 6 Differentiale auf der rechten Seite übrig bleiben.

Die relative Lage des Systems (m_h, m_k) ändert sich nicht bei einer gemeinsamen Verschiebung ohne Drehung, es muss also für

$$dx_h = dx_k, \quad dy_h = dy_k, \quad dz_h = dz_k, \quad \text{und} \quad dl_h = dl_k = dm_h = dm_k = dn_h = dn_k = 0$$

gelten:

$$dF_{hk} = 0$$

woraus folgt:

$$X_{hk} + X_{kh} = Y_{hb} + Y_{bh} = Z_{hb} + Z_{bh} = 0. \quad (2)$$

Sie ändert sich ferner nicht bei einer gemeinsamen Drehung, es muss also auch für

$$\begin{aligned} dl_h &= dl_k = dl, & dm_h &= dm_k = dm, & dn_h &= dn_k = dn \quad \text{und} \\ dx_h &= y_h dn - z_h dm, & dy_h &= z_h dl - x_h dn, & dz_h &= x_h dm - y_h dl, \\ dx_k &= y_k dn - z_k dm, & dy_k &= z_k dl - x_k dn, & dz_k &= x_k dm - y_k dl \end{aligned}$$

gelten:

$$dF_{hk} = 0,$$

woraus unter Rücksicht auf (2), falls man noch setzt:

$$x_h - x_k = x_{hk}, \quad y_h - y_k = y_{hk}, \quad z_h - z_k = z_{hk}$$

folgt:

$$\begin{aligned} L_{hk} + L_{kh} + Z_{hk} y_{hk} - Y_{hk} z_{hk} &= 0 \\ M_{hk} + M_{kh} + X_{hk} z_{hk} - Z_{hk} x_{hk} &= 0 \\ N_{hk} + N_{kh} + Y_{hk} x_{hk} - X_{hk} y_{hk} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Dieses System zeigt, dass wenn die Richtung der Wechselwirkung in die Verbindungslinie der beiden Moleküle fällt, d. h.:

$$X_{hk} = R_{hk} x_{hk}, \quad Y_{hk} = R_{hk} y_{hk}, \quad Z_{hk} = R_{hk} z_{hk}$$

ist, jederzeit gilt:

$$L_{hk} + L_{kh} = M_{hk} + M_{kh} = N_{hk} + N_{kh} = 0, \quad (4)$$

d. h. die Drehungsmomente entgegengesetzt gleich oder Null sind, und umgekehrt.

In diesem Falle gilt einfacher, wenn man auch einführt:

$$l_h - l_k = l_{hk}, \quad m_h - m_k = m_{hk}, \quad n_h - n_k = n_{hk},$$

die Relation:

$$\begin{aligned} -dF_{hk} &= X_{hk} dx_{hk} + Y_{hk} dy_{hk} + Z_{hk} dz_{hk} + L_{hk} dl_{hk} + M_{hk} dm_{hk} + N_{hk} dn_{hk}, \\ &= R_{hk} r_{hk} dr + L_{hk} dl_{hk} + M_{hk} dm_{hk} + N_{hk} dn_{hk}. \end{aligned} \quad (5)$$

Da der Ausdruck rechts die vollständige Variation von F_{hk} sein soll, so kann dieses in dem betrachteten Falle nur von den vier Argumenten abhängen, welche die gegenseitige Entfernung r_{hk} und die relativen Drehungen bestimmen. Sind die Drehungsmomente gleich Null, so bleibt nur:

$$dF_{hk} = R_{hk} r_{hk} dr_{hk},$$

also ein von r_{hk} allein abhängiges Potential.

Im allgemeinsten Falle kann man durch Einführung von

$$L_{hk} dl_h + L_{kh} dl_k = (L_{hk} + L_{kh}) d\left(\frac{l_h + l_k}{2}\right) + (L_{hk} - L_{kh}) d\left(\frac{l_h - l_k}{2}\right) \text{ u. s. f.}$$

und unter Benutzung von (3) leicht die Form gewinnen:

$$\begin{aligned} -dF_{hk} &= X_{hk} \left(dx_{hk} + y_{hk} d\frac{n_h + n_k}{2} - z_{hk} d\frac{m_h + m_k}{2} \right) \\ (6) \quad &+ Y_{hk} \left(dy_{hk} + z_{hk} d\frac{l_h + l_k}{2} - x_{hk} d\frac{n_h + n_k}{2} \right) \\ &+ Z_{hk} \left(dz_{hk} + x_{hk} d\frac{m_h + m_k}{2} - y_{hk} d\frac{l_h + l_k}{2} \right) \\ &+ (L_{hk} - L_{kh}) d\frac{l_h - l_k}{2} + (M_{hk} - M_{kh}) d\frac{m_h - m_k}{2} + (N_h^z - N_{kh}) d\frac{n_h - n_k}{2}. \end{aligned}$$

Denkt man mit m_h ein Axensystem A_h, B_h, C_h fest verbunden, das vor der Verschiebung mit X, Y, Z parallel war und sind a_{hk}, b_{hk}, c_{hk} die Coordinaten von m_k in Bezug auf m_h , so wird durch eine Drehung dieses Systems oder also des Moleküles m_h selbst um dl_h, dm_h, dn_h ein System Aenderungen hervorgebracht:

$$d'a_{hk} = y_{hk} dn_h - z_{hk} dm_h, \quad d'b_{hk} = z_{hk} dl_h - x_{hk} dn_h, \quad d'c_{hk} = x_{hk} dm_h - y_{hk} dl_h.$$

Ebenso findet sich für ein mit m_k fest verbundenes Axensystem

$$-d'a_{kh} = y_{hk} dn_k - z_{hk} dm_k, \quad -d'b_{kh} = z_{hk} dl_k - x_{hk} dn_k, \quad -d'c_{kh} = x_{hk} dm_k - y_{hk} dl_k.$$

Da die Axen A, B, C ursprünglich den X, Y, Z parallel waren, kann man auch schreiben:

$$dx_{hk} = \frac{d'a_{hk} - d'a_{kh}}{2}, \quad dy_{hk} = \frac{d'b_{hk} - d'b_{kh}}{2}, \quad dz_{hk} = \frac{d'c_{hk} - d'c_{kh}}{2},$$

unter d'' die Aenderung der relativen Coordinaten bei einer Verschiebung ohne Drehung verstanden, und erhält so schliesslich:

$$\begin{aligned} -dF_{hk} &= X_{hk} \frac{d(a_{hk} - a_{kh})}{2} + Y_{hk} \frac{d(b_{hk} - b_{kh})}{2} + Z_{hk} \frac{d(c_{hk} - c_{kh})}{2} \\ (7) \quad &+ (L_{hk} - L_{kh}) \frac{d(l_h - l_k)}{2} + (M_{hk} - M_{kh}) \frac{d(m_h - m_k)}{2} + (N_{hk} - N_{kh}) \frac{d(n_h - n_k)}{2}, \end{aligned}$$

wenn die da_{hk} u. s. f. die ganzen Aenderungen der relativen Coordinaten

gegen die beweglichen Systeme bedeuten, welche durch die Verschiebung und Drehung der Moleküle hervorgebracht wird. Hiermit ist eine Form erhalten, welche zeigt, wie die Function F_{hk} wirklich nur von den sechs Argumenten abhängt, welche die gegenseitige Lage der beiden Moleküle bestimmen.

Sind die beiden, gleichartig gedachten Moleküle mit ihren homologen Richtungen einander parallel, so ist ihre gegenseitige Lage durch drei Argumente, die drei relativen Coordinaten, bestimmt, welche sind $a_{hk} = -a_{kh}$, $b_{hk} = -b_{kh}$, $c_{hk} = -c_{kh}$. Es muss also für diesen Fall gelten:

$$\begin{aligned} L_{hk} &= L_{kh}, & M_{hk} &= M_{kh}, & N_{hk} &= N_{kh} & \text{und} \\ -dF_{hk} &= X_{hk} da_{hk} + Y_{hk} db_{hk} + Z_{hk} dc_{hk}. \end{aligned} \quad (8)$$

Soll demnach rechts ein vollständiges Differential stehen, so muss sein:

$$-X_{hk} = \frac{\partial F_{hk}}{\partial a_{hk}}, \quad -Y_{hk} = \frac{\partial F_{hk}}{\partial b_{hk}}, \quad -Z_{hk} = \frac{\partial F_{hk}}{\partial c_{hk}}, \quad (9a)$$

während daneben nach (3) gilt:

$$2L_{hk} = Y_{hk} z_{hk} - Z_{hk} y_{hk}, \quad 2M_{hk} = Z_{hk} x_{hk} - X_{hk} z_{hk}, \quad 2N_{hk} = X_{hk} y_{hk} - Y_{hk} x_{hk}. \quad (9b)$$

2. Im Innern des betrachteten elastischen Körpers sei an einer Stelle x, y, z ein Flächenelement ω_x normal zur X -Axe und über demselben parallel der $+X$ -Axe ein gerader Cylinder construirt. Die Summe der Componenten, welche alle Moleküle auf der negativen Seite der Ebene des Flächenelements ω_x auf die Moleküle im Cylinder ausüben, können wir, wenn ω_x zwar klein, aber gross gegen die Wirkungssphäre der Molekularkräfte ist, als mit ω_x proportional ansehen und durch Division mit ω_x auf die Einheit der Fläche reduciren. Den so gewonnenen sogenannten elastischen Druckcomponenten X_x, Y_x, Z_x ordnen wir analoge für die ausgeübten Drehungsmomente gebildete Summen zu, die wir mit L_x, M_x, N_x bezeichnen. Wie eben ein Flächenelement ω_x normal zur X -Axe betrachtet wurde, können solche auch normal zur Y - und Z -Axe oder zu einer beliebigen Richtung n gelegt werden, und führen dann zur Definition analoger Componenten $X_y, X_z, X_n, \dots$ und analoger Momente $L_y, L_z, L_n, \dots$.

Eigenschaften dieser Componenten- und Momenten-Summen erhalten wir durch die Betrachtung der Gleichgewichtsbedingungen von Volumenelementen im Innern oder an der Oberfläche des elastischen Körpers. Wir schreiben dieselben in folgender Form:

$$\begin{aligned}
 (10) \quad 0 &= \int \varepsilon dr X + \int do \bar{X} \\
 0 &= \int \varepsilon dr Y + \int do \bar{Y} \\
 0 &= \int \varepsilon dr Z + \int do \bar{Z} \\
 0 &= \int \varepsilon dr (L + yZ - zY) + \int do (\bar{L} + \bar{y}\bar{Z} - \bar{z}\bar{Y}) \\
 0 &= \int \varepsilon dr (M + zX - xZ) + \int do (\bar{M} + \bar{z}\bar{X} - \bar{x}\bar{Z}) \\
 0 &= \int \varepsilon dr (N + xY - yX) + \int do (\bar{N} + \bar{x}\bar{Y} - \bar{y}\bar{X}).
 \end{aligned}$$

Hierin bezeichnet ε die Dichte, dr das Raum-, do das Oberflächenelement des betrachteten Körpers oder Körperteiles; X, Y, Z sind von aussen auf innere Punkte ausgeübte Kraftcomponenten, L, M, N analoge Momente, beide bezogen auf die Masseneinheit; $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ sind von aussen auf die Oberflächenelemente ausgeübte Druckcomponenten, $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ analoge Drehmomente, beide bezogen auf die Flächeneinheit.

Wir wenden diese Formeln an auf Raumelemente, deren Dimensionen im oben besprochenen Sinne unendlich klein sein mögen und berücksichtigen in ihnen nur die Glieder niedrigster Ordnung.

Ist das Volumenelement ein ganz im Innern des Systems gelegener Cylinder, dessen Höhe wir entweder von höherer Ordnung unendlich klein annehmen als die Querdimensionen, oder doch als von jenen unabhängig, so erhalten wir, indem wir entweder Glieder höherer Ordnung vernachlässigen, oder aber die von der Höhe des Cylinders unabhängigen Glieder allein gleich Null setzen, falls wir die Richtung der innern Normalen auf den beiden Grundflächen mit $+n$ und $-n$ bezeichnen:

$$\begin{aligned}
 (11) \quad X_n + X_{-n} &= Y_n + Y_{-n} = Z_n + Z_{-n} = 0, \\
 L_n + L_{-n} &= M_n + M_{-n} = N_n + N_{-n} = 0.
 \end{aligned}$$

Ist die eine Grundfläche des Cylinders ein Element der freien Oberfläche, auf welche die Componenten $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ und die Momente $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$

wirken mögen (— wir behalten in diesem Sinne die Bezeichnung aus (10) bei —) so gilt:

$$\begin{aligned}\bar{X}_n + \bar{X} &= \bar{Y}_n + \bar{Y} = \bar{Z}_n + \bar{Z} = 0 \\ \bar{L}_n + \bar{L} &= \bar{M}_n + \bar{M} = \bar{N}_n + \bar{N} = 0,\end{aligned}\tag{12}$$

unter n die äussere Normale auf dem Körper verstanden. Da wir, wie es scheint, keine Mittel haben, praktisch auf die Moleküle der Oberflächenelemente Drehungsmomente auszuüben, sondern nur mit verschieden gerichteten Drucken operiren können, so ist in praxi

$$\bar{L}_n = \bar{M}_n = \bar{N}_n = 0\tag{12a}$$

zu setzen.

Nehmen wir ferner ein Raumelement, welches durch drei Flächenelemente normal zur X , Y und Z -Axe und eines normal zu einer Richtung n (welche positiv vom Koordinatenanfang hinweg gerechnet und durch die Winkel (n, x) , (n, y) , (n, z) definirt sei) begrenzt ist, so giebt sich bei Beschränkung auf die niedrigste Ordnung:

$$\begin{aligned}-X_{-n} &= X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z), \\ -Y_{-n} &= Y_n = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z), \\ -Z_{-n} &= Z_n = Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z), \\ -L_{-n} &= L_n = L_x \cos(n, x) + L_y \cos(n, y) + L_z \cos(n, z), \\ -M_{-n} &= M_n = M_x \cos(n, x) + M_y \cos(n, y) + M_z \cos(n, z), \\ -N_{-n} &= N_n = N_x \cos(n, x) + N_y \cos(n, y) + N_z \cos(n, z).\end{aligned}\tag{13}$$

Endlich erhält man durch Betrachtung eines unendlich kleinen Prismas parallel den Coordinatenebenen:

$$\begin{aligned}0 &= \varepsilon X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ 0 &= \varepsilon Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ 0 &= \varepsilon Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} \\ 0 &= \varepsilon L - \frac{\partial L_x}{\partial x} - \frac{\partial L_y}{\partial y} - \frac{\partial L_z}{\partial z} - Z_y + Y_z \\ 0 &= \varepsilon M - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_z}{\partial z} - X_z + Z_x \\ 0 &= \varepsilon N - \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial N_z}{\partial z} - Y_z + X_y.\end{aligned}\tag{14}$$

Hierin bezeichnen X, Y, Z, L, M, N , wie gesagt, etwa von aussen auf die Stelle x, y, z ausgeübte Componenten und Drehungsmomente, beide bezogen auf die Masseneinheit. L, M, N sind, wie $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$, in praxi der Regel nach gleich Null.

Die Gleichungen (11) bis (14) sind das allgemeinste über die $X_x \dots$ und $L_x \dots$ aus den fundamentalen Gleichgewichtsbedingungen (10) Ableitbare; denn von ihnen kann man zu jenen zurückgelangen.

Die erste Gleichung (14) liefert nämlich über ein beliebiges Stück des elastischen Körpers integrirt:

$$0 = \int \varepsilon X dr - \int d\sigma [\bar{X}_x \cos(n, x) + \bar{X}_y \cos(n, y) + \bar{X}_z \cos(n, z)],$$

woraus nach (12) und (13) folgt:

$$0 = \int \varepsilon X dr + \int d\sigma \bar{X};$$

ebenso das Analoge für die Y - und Z -Componente.

Aus der vierten Gleichung (14) folgt durch dieselbe Operation:

$$0 = \int \varepsilon L dr - \int d\sigma [\bar{L}_x \cos(n, x) + \bar{L}_y \cos(n, y) + \bar{L}_z \cos(n, z)] - \int dr (Z_y - Y_z);$$

hierin kann man schreiben:

$$-\int dr (Z_y - Y_z) = -\iint dx dz [y Z_y] + \int dr y \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \iint dx dy [z Y_z] - \int dr z \frac{\partial Y_z}{\partial z}$$

oder nach (14)

$$\begin{aligned} &= -\int d\sigma [\bar{y} \bar{Z}_y \cos(n, y) - \bar{z} \bar{Y}_z \cos(n, z)] + \int dr \left[y \left(\varepsilon Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) - z \left(\varepsilon Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} \right) \right] \\ &= -\int d\sigma \{ \bar{y} [\bar{Z}_x \cos(n, x) + \bar{Z}_y \cos(n, y) + \bar{Z}_z \cos(n, z)] \\ &\quad - \bar{z} [\bar{Y}_x \cos(n, x) + \bar{Y}_y \cos(n, y) + \bar{Y}_z \cos(n, z)] \} + \int \varepsilon dr (y Z - z Y) \end{aligned}$$

und wenn man dies einsetzt und zweimal die Formeln (12) und (13) benutzt, ergibt sich:

$$0 = \int \varepsilon L dr + \int \varepsilon dr (y Z - z Y) + \int d\sigma \bar{L} + \int d\sigma (\bar{y} \bar{Z} - \bar{z} \bar{Y});$$

ähnlich die beiden andern Formeln.

Damit sind aber die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (10) in der der Betrachtung zu Grunde gelegten erweiterten Form zurückgewonnen.

3. Es sollen nunmehr die allgemeinsten Werthe der elastischen Drucke und Momente an einer beliebigen Stelle berechnet werden. Wir construiren an jener Stelle ein sehr kleines Flächenelement ω_x senkrecht zur X -Axe und über demselben parallel mit der positiven X -Axe einen geraden Cylinder. Die Summe der Wirkungen aller Moleküle auf der negativen Seite von ω_x auf die Moleküle in jenem Cylinder liefert uns nach der Definition die Componenten X_x, Y_x, Z_x und die Momente L_x, M_x, N_x . Dabei soll, wie gesagt, das Flächenelement ω_x zwar klein gegen die Dimensionen des ganzen elastischen Körpers sein, aber gross gegen die Wirkungssphäre der Molekularkräfte, und letztere mögen wiederum gross gegen die Abstände der benachbarten Moleküle von einander sein. Hiernach würde eine über ω_x in der Höhe der Wirkungssphäre liegende Schicht von Molekülen zwar im gewöhnlichen Sinne nur verschwindende Dicke besitzen, aber doch eine sehr grosse Zahl von Einzelschichten enthalten.

Die Moleküle beziehen wir zunächst auf das absolut feste Coordinatensystem X, Y, Z und nennen x_k, y_k, z_k die Coordinaten der anziehenden, x_h, y_h, z_h die der angezogenen Moleküle. Diese Coordinaten bestimmen indess ihre Lagen noch nicht vollkommen, da, wie wir gesehen haben, nicht nur Verschiebungen sondern auch Drehungen in Betracht kommen. Letztere auszudrücken denken wir noch je ein Axensystem A_h, B_h, C_h mit jedem Molekül in derselben Weise fest verbunden und mit ihm beweglich; wir nehmen an, dass alle diese Systeme für den natürlichen Zustand des Krystalles unter sich und mit dem festen X, Y, Z -System parallel sind.

Sind die Verschiebungscomponenten der Punkte x_h, y_h, z_h und x_k, y_k, z_k resp. u_h, v_h, w_h und u_k, v_k, w_k , so ist die relative Verschiebung beider Punkte gegeben durch:

$$u_h - u_k = u_{hk}, \quad v_h - v_k = v_{hk}, \quad w_h - w_k = w_{hk}. \quad (15)$$

Diese relative Verschiebung lässt sich, da die u, v, w sich stetig mit dem Orte ändern, nach Potenzen der relativen Coordinaten der beiden Punkte entwickeln und wir nehmen an, dass die in Betracht kommen-

den Deformationen derart sind, dass man diese Entwicklung für Moleküle, die noch merklich auf einander wirken, mit den Gliedern erster Ordnung abbrechen, also die Dilatationen im Bereich der Molekularwirkungssphäre als constant ansehen kann.

Hiernach wird, wenn man wieder $x_h - x_k = x_{hk}$, $y_h - y_k = y_{hk}$, $z_h - z_k = z_{hk}$ setzt:

$$(16) \quad \begin{aligned} u_{hk} &= x_{hk} \frac{\partial u}{\partial x} + y_{hk} \frac{\partial u}{\partial y} + z_{hk} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ v_{hk} &= x_{hk} \frac{\partial v}{\partial x} + y_{hk} \frac{\partial v}{\partial y} + z_{hk} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ w_{hk} &= x_{hk} \frac{\partial w}{\partial x} + y_{hk} \frac{\partial w}{\partial y} + z_{hk} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Wie die Verschiebungen, so sind auch die Drehungen für die verschiedenen Moleküle verschieden, ändern sich aber längs unendlich kleiner Längen unendlich wenig. Wir werden demnach auch für sie uns mit dem niedrigsten Grad der Annäherung begnügen und, wie die Dilatationen, auch die Drehungen innerhalb des Bereiches der Molekularwirkung als constant ansehen. Demgemäss sind für das Bereich, auf welches sich unsere Betrachtungen zur Bestimmung der elastischen Drucke und Momente beziehen, die sämtlichen Moleküle als mit ihren Axen parallel liegend zu betrachten und wir legen ein einziges System A, B, C durch den Coordinatenanfang von X, Y, Z , um die Richtung von jenen allen anzudeuten. Auf dieses System A, B, C bezogen mögen die oben erwähnten zwei Moleküle (h) und (k) die Coordinaten $a_h, b_h, c_h, a_k, b_k, c_k$ haben, welche mit x_h, y_h, z_h und x_k, y_k, z_k verbunden sind durch lineäre Relationen, die wir sogleich auf die relativen Coordinaten $a_h - a_k = a_{hk}$, $b_h - b_k = b_{hk}$, $c_h - c_k = c_{hk}$ anwenden und demgemäss schreiben:

$$(17) \quad \begin{aligned} a_{hk} &= \alpha_1 x_{hk} + \alpha_2 y_{hk} + \alpha_3 z_{hk}, & x_{hk} &= \alpha_1 a_{hk} + \beta_1 b_{hk} + \gamma_1 c_{hk} \\ b_{hk} &= \beta_1 x_{hk} + \beta_2 y_{hk} + \beta_3 z_{hk}, & y_{hk} &= \alpha_2 a_{hk} + \beta_2 b_{hk} + \gamma_2 c_{hk} \\ c_{hk} &= \gamma_1 x_{hk} + \gamma_2 y_{hk} + \gamma_3 z_{hk}, & z_{hk} &= \alpha_3 a_{hk} + \beta_3 b_{hk} + \gamma_3 c_{hk}. \end{aligned}$$

Da wir nur unendlich kleine Deformationen in Betracht ziehen, so haben wir auch nur unendlich kleine Drehungen der Moleküle

zu erwarten, d. h., da das System A, B, C im natürlichen Zustande mit dem System X, Y, Z zusammenfiel, also $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$ und $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ war, werden wir für den deformirten Zustand schreiben können:

$$\begin{aligned} a_{hk} &= x_{hk} + y_{hk}n - z_{hk}m & x_{hk} &= a_{hk} - b_{hk}n + c_{hk}m \\ b_{hk} &= y_{hk} + z_{hk}l - x_{hk}n & y_{hk} &= b_{hk} - c_{hk}l + a_{hk}n \\ c_{hk} &= z_{hk} + x_{hk}m - y_{hk}l. & z_{hk} &= c_{hk} - a_{hk}m + b_{hk}l. \end{aligned} \quad (18)$$

Hierin bezeichnen l, m, n die unendlich kleinen Drehungen um die X -, Y - und Z -Axe, durch welche dies System A, B, C aus der ursprünglichen Lage parallel dem X -, Y -, Z -System in die verschobene gebracht ist.

Wir wollen nun zunächst den Druck gegen das Flächenelement ω_x normal zur X -Axe an der Stelle xyz bestimmen, d. h. summiren die X -, Y - und Z -Componenten der Wirkung aller Moleküle, welche auf der negativen Seite der Ebene von ω_x liegen auf diejenigen, welche sich in dem über ω_x construirten Cylinder befinden. Diese Summen durch ω_x dividirt geben dann die auf die Flächeneinheit bezogenen Componenten X_x, Y_x, Z_x . Wir denken uns dabei den Krystall bereits im deformirten Zustande befindlich.

Hiernach können wir schreiben:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{1}{\omega_x} \sum_{(h)} \sum_{(k)} X_{hk} \\ Y_x &= \frac{1}{\omega_x} \sum_{(h)} \sum_{(k)} Y_{hk} \\ Z_x &= \frac{1}{\omega_x} \sum_{(h)} \sum_{(k)} Z_{hk}. \end{aligned} \quad (19)$$

Dabei bezeichnet X_{hk}, Y_{hk}, Z_{hk} die Componenten der Wirkung des Moleküls (k) auf (h) ; die Summen sind zwar über alle (k) , d. h. alle Moleküle auf der negativen Seite des Elementes ω_x , und alle (h) , d. h. alle Moleküle des Cylinders über ω_x auszudehnen; wegen der unendlich kleinen Wirkungssphäre der Molekularkräfte geben aber nur die beiderseits unmerklich von ω_x entfernten Moleküle etwas zur Summe hinzu.

Die sechsfache Summe lässt sich auf eine dreifache reduciren.

Da nach unserer Annahme in einem homogenen Krystall die Moleküle in der Weise regelmässig angeordnet sind, dass ein jedes in derselben Weise von Nachbarmolekülen umgeben ist, und diese regelmässige Anordnung nach unserer Annahme in dem in Betracht kommenden unendlich kleinen Bereich um ω_x auch durch die Deformation nicht aufgehoben wird, so werden in der obigen Summe Molekül-Paare mit den gleichen relativen Coordinaten x_{hk} , y_{hk} , z_{hk} so oft vorkommen, als der Abschnitt des Cylinders von der Höhe x_{hk} überhaupt Moleküle enthält, d. h. wenn man die Anzahl in der Volumeneinheit liegender ν nennt, die Zahl $\nu x_{hk} \omega_x$. Berücksichtigt man dies und bedenkt, dass die Componenten X_{hk} , Y_{hk} , Z_{hk} nach dem oben Gesagten ausser von den Winkeln zwischen den Axen A, B, C und X, Y, Z , die für das ganze Bereich constant sind, nur von den relativen Coordinaten x_{hk} , y_{hk} , z_{hk} abhängen, so kann man die Summen schreiben:

$$(18) \quad \begin{aligned} X_x &= \nu \sum_0^{+\infty} x' \sum_{-\infty}^{+\infty} y' \sum_{-\infty}^{+\infty} z' x' X' \\ Y_x &= \nu \sum_0^{+\infty} x' \sum_{-\infty}^{+\infty} y' \sum_{-\infty}^{+\infty} z' x' Y' \\ Z_x &= \nu \sum_0^{+\infty} x' \sum_{-\infty}^{+\infty} y' \sum_{-\infty}^{+\infty} z' x' Z'; \end{aligned}$$

wodurch ausgedrückt werden soll, dass für ein bestimmtes aber beliebiges Molekül der Fläche ω_x genommen werden soll die Summe der von allen auf der negativen Seite von ω_x liegenden Moleküle ausgeübten Componenten, eine jede mit der bezüglichen relativen Coordinate der auf ω_x gelegenen multiplicirt. Dabei ist specieller x' , y' , z' an Stelle der x_{hk} , y_{hk} , z_{hk} getreten und die Bezeichnung X' , Y' , Z' soll andeuten, dass in die Werthe der Componenten X_{hk} , Y_{hk} , Z_{hk} ebenfalls die speciellen relativen Coordinaten $x' y' z'$ eingesetzt sind.

Da der Krystall sich im deformirten Zustande befindet, so sind die Axen der Moleküle A, B, C den festen Axen X, Y, Z nicht parallel. Nennen wir die Componenten der Elementarwirkungen, den ersteren parallel gerechnet, A', B', C' , so erhalten wir nach (18):

$$X' = A' - nB' + mC', \quad Y' = B' - lC' + nA', \quad Z' = C' - mA' + lB'. \quad (19)$$

Die Componenten A' , B' , C' beziehen sich auf den deformirten Zustand, d. h. auf relative Coordinaten a' , b' , c' der wechselwirkenden Moleküle, wie sie durch Zuwachse $\delta a'$, $\delta b'$, $\delta c'$ aus den ursprünglichen (a'), (b'), (c') entstanden sind. Da A' , B' , C' nur von diesen a' , b' , c' abhängen, so können wir ihre Werthe durch Glieder ausdrücken, die sich auf den ursprünglichen Zustand beziehen und durch Einklamern als solche bezeichnet werden mögen, indem wir entwickeln:

$$\begin{aligned} A' &= (A') + \left(\frac{\partial A'}{\partial a'}\right) \delta a' + \left(\frac{\partial A'}{\partial b'}\right) \delta b' + \left(\frac{\partial A'}{\partial c'}\right) \delta c', \\ B' &= (B') + \left(\frac{\partial B'}{\partial a'}\right) \delta a' + \left(\frac{\partial B'}{\partial b'}\right) \delta b' + \left(\frac{\partial B'}{\partial c'}\right) \delta c', \\ C' &= (C') + \left(\frac{\partial C'}{\partial a'}\right) \delta a' + \left(\frac{\partial C'}{\partial b'}\right) \delta b' + \left(\frac{\partial C'}{\partial c'}\right) \delta c'. \end{aligned} \quad (20)$$

Hierin ist unter Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung $u'.n$ u. dergl. nach (18), da die Verschiebungen aus dem natürlichen Zustand stattfinden:

$$\delta a' = u' + (b')n - (c')m, \quad \delta b' = v' + (c')l - (a')n, \quad \delta c' = w' + (a')m - (b')l,$$

oder unter Rücksicht auf (16) auch

$$\begin{aligned} \delta a' &= (a') \frac{\partial u}{\partial x} + (b') \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n\right) + (c') \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m\right), \\ \delta b' &= (a') \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n\right) + (b') \frac{\partial v}{\partial y} + (c') \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l\right), \\ \delta c' &= (a') \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m\right) + (b') \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l\right) + (c') \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (21)$$

Endlich ist noch

$$x' = (a') \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + (b') \frac{\partial u}{\partial y} + (c') \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Setzt man dies ein, so ergibt sich unter abermaliger Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung:

---

1) Obgleich für den ursprünglichen Zustand (a') = (x'), (b') = (y'), (c') = (z') ist, habe ich vorgezogen a' , b' , c' als Summationsvariable zu wählen, um hervortreten zu lassen, dass sie parallel den Axen der Moleküle gerechnet werden.

$$\begin{aligned}
+ X_x &= \nu \sum_0^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} c' \left\{ (A'a') \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (A'b') \frac{\partial u}{\partial y} + (A'c') \frac{\partial u}{\partial z} - (B'a')n + (C'a')m \right. \\
&\quad + \left(\frac{\partial A'}{\partial a'} a' \right) \left[(a') \frac{\partial u}{\partial x} + (b') \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n \right) + (c') \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m \right) \right] \\
&\quad + \left(\frac{\partial A'}{\partial b'} a' \right) \left[(a') \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n \right) + (b') \frac{\partial v}{\partial y} + (c') \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l \right) \right] \\
&\quad + \left. \left(\frac{\partial A'}{\partial c'} a' \right) \left[(a') \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m \right) + (b') \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l \right) + (c') \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right\}, \\
+ Y_x &= \nu \sum_0^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} c' \left\{ (B'a') \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (B'b') \frac{\partial u}{\partial y} + (B'c') \frac{\partial u}{\partial z} - (C'a')l + (A'a')m \right. \\
&\quad + \left(\frac{\partial B'}{\partial a'} a' \right) \left[(a') \frac{\partial u}{\partial x} + (b') \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n \right) + (c') \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m \right) \right] \\
(22) \quad &\quad + \left(\frac{\partial B'}{\partial b'} a' \right) \left[(a') \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n \right) + (b') \frac{\partial v}{\partial y} + (c') \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l \right) \right] \\
&\quad + \left. \left(\frac{\partial B'}{\partial c'} a' \right) \left[(a') \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m \right) + (b') \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l \right) + (c') \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right\}, \\
+ Z_x &= \nu \sum_0^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} c' \left\{ (C'a') \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (C'b') \frac{\partial u}{\partial y} + (C'c') \frac{\partial u}{\partial z} - (A'a')m + (B'a')l \right. \\
&\quad + \left(\frac{\partial C'}{\partial a'} a' \right) \left[(a') \frac{\partial u}{\partial x} + (b') \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n \right) + (c') \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m \right) \right] \\
&\quad + \left(\frac{\partial C'}{\partial b'} a' \right) \left[(a') \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n \right) + (b') \frac{\partial v}{\partial y} + (c') \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l \right) \right] \\
&\quad + \left. \left(\frac{\partial C'}{\partial c'} a' \right) \left[(a') \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m \right) + (b') \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l \right) + (c') \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Hierzu ist noch zu erinnern, dass ν als die Anzahl der in der Volumeneinheit befindlichen Moleküle nach der Deformation einen anderen Werth besitzt als vor derselben; es ist nämlich

$$(23) \quad \nu = (\nu) \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right);$$

der Factor von (ν) würde aber nur in den ersten Gliedern der obigen Formeln zu berücksichtigen sein.

Die Summen, welche in ihnen vorkommen, haben, da sie nur die Variablen a', b', c' enthalten, den Sinn, dass für den Punkt x, y, z sumirt werden sollen alle Componenten der Wirkungen (oder ihre Differentialquotienten), welche von allen auf der negativen Seite einer durch diesen Punkt und normal zur X-Axe gelegten Ebene liegenden Mole-

külen ausgehen, eine jede multiplicirt mit einer oder mehreren relativen Coordinaten des Punkts x, y, z gegen das betreffende Molekül.

Diese Summen lassen sich noch anders ausdrücken.

Nach den Gleichungen (2) ist:

$$\begin{aligned} A'(a', b', c') &= -A'(-a', -b', -c'), & B'(a', b', c') &= B'(-a', -b', -c'), \\ C'(a', b', c') &= -C'(-a', -b', -c') \end{aligned} \quad (24)$$

und da die Anordnung der Moleküle durch die wirkenden Kräfte bestimmt ist, so hat man anzunehmen, dass dieselbe um entgegengesetzte Richtungen in gleicher Weise geschieht.

Daraus folgt aber, dass:

$$\begin{aligned} \sum_0^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} c' A' a' &= \frac{1}{2} \frac{\sum_0^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} c' A' a'}{-\infty} \\ \sum_0^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} c' A' b' &= \frac{1}{2} \frac{\sum_0^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} c' A' b'}{-\infty} \\ \sum_0^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} c' A' c' &= \frac{1}{2} \frac{\sum_0^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} c' A' c'}{-\infty} \end{aligned} \quad (25)$$

und Analoges für B' und C' gilt. Es sind demgemäss die Coefficienten der ersten fünf Glieder der obigen Formeln zu verwandeln.

Die ersten Differentialquotienten werden nach (24) ihr Vorzeichen behalten, wenn man die Vorzeichen aller drei Argumente umkehrt; da sie aber in allen Summen mit zwei Coordinaten multiplicirt auftreten, wird auch für die Summen, die sie enthalten, die Vertauschung der Summation in Bezug auf a' von 0 bis ∞ mit einer von $-\infty$ bis $+\infty$ gestattet sein, wenn man den Summen den Factor $\frac{1}{2}$ vorstellt.

Wendet man diese Formeln auf den natürlichen Zustand an und bedenkt, dass für denselben alle elastischen Drucke verschwinden, so erhält man, wenn man die dreifache von $-\infty$ bis $+\infty$ zunehmende Summe in eine abkürzt:

$$0 = \sum(A'a') = \sum(B'a') = \sum(C'a').$$

Die Betrachtung eines Flächenelementes senkrecht zur Y - und zur Z -Axe würde analog ergeben:

$$0 = \sum(A'b') = \sum(B'b') = \sum(C'b')$$

$$0 = \sum(A'c') = \sum(B'c') = \sum(C'c').$$

Hierdurch tritt eine bedeutende Vereinfachung der obigen Formeln ein und es wird, wenn man noch berücksichtigt, dass

$$A' = -\frac{\partial F'}{\partial a'}, \quad B' = -\frac{\partial F'}{\partial b'}, \quad C' = -\frac{\partial F'}{\partial c'}$$

ist:

$$(27) \quad \begin{aligned} -X_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial a'^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'b' \frac{\partial^2 F'}{\partial a'^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'c' \frac{\partial^2 F'}{\partial a'^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial b'} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'b' \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial b'} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'c' \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial b'} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial c'} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'b' \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial c'} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'c' \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial c'} \right), \\ -Y_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial b'} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'b' \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial b'} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'c' \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial b'} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial b'^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'b' \frac{\partial^2 F'}{\partial b'^2} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'c' \frac{\partial^2 F'}{\partial b'^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial b' \partial c'} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'b' \frac{\partial^2 F'}{\partial b' \partial c'} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'c' \frac{\partial^2 F'}{\partial b' \partial c'} \right), \\ -Z_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial c'} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'b' \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial c'} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'c' \frac{\partial^2 F'}{\partial a' \partial c'} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial b' \partial c'} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'b' \frac{\partial^2 F'}{\partial b' \partial c'} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'c' \frac{\partial^2 F'}{\partial b' \partial c'} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'^2 \frac{\partial^2 F'}{\partial c'^2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l \right) \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'b' \frac{\partial^2 F'}{\partial c'^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{(\nu)}{2} \sum \left(a'c' \frac{\partial^2 F'}{\partial c'^2} \right). \end{aligned}$$

Die in diesen Ausdrücken und den entsprechenden für $X_y, Y_y, Z_y, X_z, Y_z, Z_z$ auftretenden Summen, welche nur noch von der Natur der krystallinischen Substanz abhängen und daher in einem gewissen Zusammenhang mit ihren Elasticitätsconstanten stehen müssen, wollen wir nun in den Buchstaben D_{hk}^{mn} abkürzen und durch die oberen Indices die Factoren, durch die unteren die Nenner der in den Summen vorkommenden Differentialquotienten andeuten, so dass also

$$(28) \quad \frac{(\nu)}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(a'c' \frac{\partial^2 F'}{\partial b' \partial c'} \right) = D_{23}^{13}$$

gesetzt werden würde und ähnlich die anderen.

Dann erhalten wir in den neun in der ersten Colonne untereinander stehenden Componenten für die neun in der obern Reihe stehenden Argumente das folgende System Coefficienten :

$$\left| \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m \right) \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n \right) \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l \right) \right| \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l \right) \frac{\partial w}{\partial z} \right| \\
 \hline
 \begin{array}{l}
 -X_x \\
 -X_y \\
 -X_z \\
 \hline
 -Y_x \\
 -Y_y \\
 -Y_z \\
 \hline
 -Z_x \\
 -Z_y \\
 -Z_z
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 D_{11}^{11} & D_{11}^{12} & D_{11}^{13} \\
 D_{11}^{21} & D_{11}^{22} & D_{11}^{23} \\
 D_{11}^{31} & D_{11}^{32} & D_{11}^{33} \\
 \hline
 D_{21}^{11} & D_{21}^{12} & D_{21}^{13} \\
 D_{21}^{21} & D_{21}^{22} & D_{21}^{23} \\
 D_{21}^{31} & D_{21}^{32} & D_{21}^{33} \\
 \hline
 D_{31}^{11} & D_{31}^{12} & D_{31}^{13} \\
 D_{31}^{21} & D_{31}^{22} & D_{31}^{23} \\
 D_{31}^{31} & D_{31}^{32} & D_{31}^{33}
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 D_{12}^{11} & D_{12}^{12} & D_{12}^{13} \\
 D_{12}^{21} & D_{12}^{22} & D_{12}^{23} \\
 D_{12}^{31} & D_{12}^{32} & D_{12}^{33} \\
 \hline
 D_{22}^{11} & D_{22}^{12} & D_{22}^{13} \\
 D_{22}^{21} & D_{22}^{22} & D_{22}^{23} \\
 D_{22}^{31} & D_{22}^{32} & D_{22}^{33} \\
 \hline
 D_{32}^{11} & D_{32}^{12} & D_{32}^{13} \\
 D_{32}^{21} & D_{32}^{22} & D_{32}^{23} \\
 D_{32}^{31} & D_{32}^{32} & D_{32}^{33}
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 D_{13}^{11} & D_{13}^{12} & D_{13}^{13} \\
 D_{13}^{21} & D_{13}^{22} & D_{13}^{23} \\
 D_{13}^{31} & D_{13}^{32} & D_{13}^{33} \\
 \hline
 D_{23}^{11} & D_{23}^{12} & D_{23}^{13} \\
 D_{23}^{21} & D_{23}^{22} & D_{23}^{23} \\
 D_{23}^{31} & D_{23}^{32} & D_{23}^{33} \\
 \hline
 D_{33}^{11} & D_{33}^{12} & D_{33}^{13} \\
 D_{33}^{21} & D_{33}^{22} & D_{33}^{23} \\
 D_{33}^{31} & D_{33}^{32} & D_{33}^{33}
 \end{array}
 \end{array} \right. \quad (29)$$

Da $D_{hk}^{mn} = D_{kh}^{nm} = D_{kh}^{mn} = D_{hk}^{nm}$ ist, so sind unter diesen 81 Coefficienten 36 von einander verschieden.

Um nun auch die Drehungsmomente L_x, M_x, N_x zu bestimmen und ihre Constanten in analoger Form zu erhalten, wie die in $X_x \dots$ vorkommenden, wollen wir benutzen, dass nach den Gleichungen (9b) die Drehungsmomente um die Coordinatenaxen L_{hk}, M_{hk}, N_{hk} , welche von dem Moleküle (k) auf das parallele (h) ausgeübt werden, mit den entsprechenden Componenten X_{hk}, Y_{hk}, Z_{hk} und den relativen Coordinaten $x_h - x_k = x_{hk}, y_h - y_k = y_{hk}, z_h - z_k = z_{hk}$ durch die Relationen verbunden sind:

$$Z_{hk} y_{hk} - Y_{hk} z_{hk} + 2L_{hk} = 0, \quad X_{hk} z_{hk} - Z_{hk} x_{hk} + 2M_{hk} = 0, \quad Y_{hk} x_{hk} - X_{hk} y_{hk} + 2N_{hk} = 0.$$

Wir können daher sogleich im Anschluss an die für die Bestimmung der X_x, Y_x, Z_x angestellten Betrachtungen schreiben:

$$\begin{aligned}
 L_x &= \sqrt{\sum_0^{\infty} x' \sum_{-\infty}^{+\infty} y' \sum_{-\infty}^{+\infty} z' x' (Y' z' - Z' y')}, \\
 M_x &= \sqrt{\sum_0^{\infty} x' \sum_{-\infty}^{+\infty} y' \sum_{-\infty}^{+\infty} z' x' (Z' x' - X' z')}, \\
 N_x &= \sqrt{\sum_0^{\infty} x' \sum_{-\infty}^{+\infty} y' \sum_{-\infty}^{+\infty} z' x' (X' y' - Y' x')}.
 \end{aligned} \quad (30)$$

Hierin gehen wir wiederum zu den auf die beweglichen Axen A, B, C bezüglichen Grössen über, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} Y'z' - Z'y' &= B'e' - C'b' - n(C'a' - A'c') + m(A'b' - B'a'), \\ Z'x' - X'z' &= C'a' - A'c' - l(A'b' - B'a') + n(B'e' - C'b'), \\ X'y' - Y'x' &= A'b' - B'a' - m(B'e' - C'b') + l(C'a' - A'c'), \\ x' &= a' - b'n + c'm. \end{aligned} \quad (31)$$

Da wir aber den Krystall im deformirten Zustand betrachten, so sind die relativen Coordinaten:

$$a' = (a') + \delta a', \quad b' = (b') + \delta b', \quad c' = (c') + \delta c',$$

die Componenten:

$$\begin{aligned} A' &= (A') + \left(\frac{\partial A'}{\partial a'}\right) \delta a' + \left(\frac{\partial A'}{\partial b'}\right) \delta b' + \left(\frac{\partial A'}{\partial c'}\right) \delta c' \\ B' &= (B') + \left(\frac{\partial B'}{\partial a'}\right) \delta a' + \left(\frac{\partial B'}{\partial b'}\right) \delta b' + \left(\frac{\partial B'}{\partial c'}\right) \delta c' \\ C' &= (C') + \left(\frac{\partial C'}{\partial a'}\right) \delta a' + \left(\frac{\partial C'}{\partial b'}\right) \delta b' + \left(\frac{\partial C'}{\partial c'}\right) \delta c', \end{aligned}$$

worin wiederum die Klammern bedeuten, dass die bezüglichen Werthe für den ursprünglichen Zustand zu nehmen sind.

Durch das Einsetzen erhält man z. B.:

$$\begin{aligned} L_x &= \sqrt{\sum_0^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} c'} \left[[(B'e') - (C'b')][(a') + u'] + (B'a') \delta c' - (C'a') \delta b' \right. \\ (32) \quad &+ (a') \left\{ \left[\left(\frac{\partial B'}{\partial a'} c'\right) - \left(\frac{\partial C'}{\partial a'} b'\right) \right] \delta a' + \left[\left(\frac{\partial B'}{\partial b'} c'\right) - \left(\frac{\partial C'}{\partial b'} b'\right) \right] \delta b' + \left[\left(\frac{\partial B'}{\partial c'} c'\right) - \left(\frac{\partial C'}{\partial c'} b'\right) \right] \delta c' \right. \\ &\quad \left. \left. - n[(C'a') - (A'c')] + m[(A'b') - (B'a')] \right\} \right] \end{aligned}$$

und ähnlich die übrigen.

Eine weitere Entwicklung der Werthe ist nicht erforderlich, denn man erkennt, dass als Coefficienten der Argumente $\frac{\partial u}{\partial x} \dots$ und l, m, n hier Summen von der Form auftreten:

$$\sum_0^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} c' (B'a'c') \quad \text{und} \quad \sum_0^{+\infty} a' \sum_{-\infty}^{+\infty} b' \sum_{-\infty}^{+\infty} c' \left(\frac{\partial B'}{\partial a'} a'b'c' \right),$$

die man als von gleicher Grössenordnung ansehen kann, in denen nämlich die Componenten selbst in ein Product von zwei, und ihre Differentialquotienten in ein Product von drei Coordinaten multiplicirt er-

scheinen. Da aber die Elemente der Summen nur in so weit merkliche Werthe geben, als die Variabeln a', b', c' unmerklich klein sind, so sind die in den Ausdrücken für die Drehungsmomente vorkommenden Coefficienten als unendlich klein gegen die in den Componenten $X_x \dots$ auftretenden anzusehen.

Dies hat den Effect, dass in dem zweiten Tripel der Gleichgewichtsbedingungen (14) in allen den Fällen, wo sich die Drehungsmomente $L_x \dots$ nicht ausserordentlich schnell mit den Coordinaten x, y, z ändern, ihre Differentialquotienten neben den übrigen-Gliedern zu vernachlässigen sind, — in Uebereinstimmung mit dem Umstande, dass bei allen bekannten Problemen an der Oberfläche der elastischen Körper $\bar{L}_n, \bar{M}_n, \bar{N}_n$ gleich Null zu setzen ist — und dass sonach jene Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ 0 &= \varepsilon Y - \frac{\partial Y_x}{\partial z} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ 0 &= \varepsilon Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \\ 0 &= \varepsilon L - Z_y + Y_z, \quad 0 = \varepsilon M - X_z + Z_x, \quad 0 = \varepsilon N - Y_x + X_y. \end{aligned} \tag{33}$$

Multiplieirt man diese Gleichungen resp. mit $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial l}{\partial t}, \frac{\partial m}{\partial t}, \frac{\partial n}{\partial t}$ und integrirt über den ganzen elastischen Körper, so resultirt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \varepsilon dr \left(X \frac{\partial u}{\partial t} + Y \frac{\partial v}{\partial t} + Z \frac{\partial w}{\partial t} + L \frac{\partial l}{\partial t} + M \frac{\partial m}{\partial t} + N \frac{\partial n}{\partial t} \right) \\ &+ \int do \left(\bar{X} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{Y} \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{Z} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \\ &+ \int dr \left[X_x \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + Y_y \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + Z_z \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} + Y_y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l \right) + Z_y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l \right) \right. \\ &\left. + Z_x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m \right) + X_z \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m \right) + X_y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n \right) + Y_x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n \right) \right]. \end{aligned} \tag{34}$$

Das letzte Integral ist die Arbeit der inneren Kräfte, welche nach unserer Grundannahme von der Gültigkeit des Energieprinzips ein Potential haben muss. Man muss also setzen können:

$$(34) \quad X_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}, \quad X_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y} + n\right)} \text{ u. s. f.}$$

oder es muss gelten:

$$\frac{\partial X_x}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y} + n\right)} = \frac{\partial X_y}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \text{ u. s. f.}$$

Die Uebereinstimmung unserer Resultate mit dieser Forderung beweist die in Bezug auf die Diagonale symmetrische Gestalt des Systemes der Coefficienten (29).

Für die weiteren Entwicklungen ist es nützlich, wenigstens das zweite Tripel der Gleichungen (33) ausführlich hinzuschreiben.

$$(35) \quad \begin{aligned} 0 &= \varepsilon L + \frac{\partial u}{\partial x} (D_{31}^{21} - D_{21}^{31}) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n\right) (D_{31}^{22} - D_{21}^{32}) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m\right) (D_{31}^{23} - D_{21}^{33}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n\right) (D_{32}^{21} - D_{22}^{31}) + \frac{\partial v}{\partial y} (D_{32}^{22} - D_{22}^{32}) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l\right) (D_{32}^{23} - D_{22}^{33}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m\right) (D_{33}^{21} - D_{23}^{31}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l\right) (D_{33}^{22} - D_{23}^{32}) + \frac{\partial w}{\partial z} (D_{33}^{23} - D_{23}^{33}), \\ 0 &= \varepsilon M + \frac{\partial u}{\partial x} (D_{11}^{31} - D_{31}^{11}) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n\right) (D_{11}^{32} - D_{31}^{12}) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m\right) (D_{11}^{33} - D_{31}^{13}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n\right) (D_{12}^{31} - D_{32}^{11}) + \frac{\partial v}{\partial y} (D_{12}^{32} - D_{32}^{12}) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l\right) (D_{12}^{33} - D_{32}^{13}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m\right) (D_{13}^{31} - D_{33}^{11}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l\right) (D_{13}^{32} - D_{33}^{12}) + \frac{\partial w}{\partial z} (D_{13}^{33} - D_{33}^{13}), \\ 0 &= \varepsilon N + \frac{\partial u}{\partial x} (D_{21}^{11} - D_{11}^{21}) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + n\right) (D_{21}^{12} - D_{11}^{22}) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m\right) (D_{21}^{13} - D_{11}^{23}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n\right) (D_{22}^{11} - D_{21}^{12}) + \frac{\partial v}{\partial y} (D_{22}^{12} - D_{12}^{22}) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l\right) (D_{22}^{13} - D_{12}^{23}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m\right) (D_{23}^{11} - D_{13}^{21}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l\right) (D_{23}^{12} - D_{13}^{22}) + \frac{\partial w}{\partial z} (D_{23}^{13} - D_{13}^{23}). \end{aligned}$$

Diese Formeln gestatten relativ sehr einfache und ganz allgemeine Werthe der l , m , n abzuleiten.

Fasst man hierzu die von l , m , n freien Glieder in jeder Gleichung in den Buchstaben f zusammen und nennt die Factoren von l , m , n kurz λ , μ , ν , so gewinnen diese Gleichungen die Form:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 l + \mu_1 m + \nu_1 n + f_1, \\ 0 &= \lambda_2 l + \mu_2 m + \nu_2 n + f_2, \\ 0 &= \lambda_3 l + \mu_3 m + \nu_3 n + f_3. \end{aligned} \tag{35'}$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2D_{23}^{23} - (D_{22}^{33} + D_{33}^{22}), \quad \mu_2 = 2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33}), \quad \nu_3 = 2D_{12}^{12} - (D_{11}^{22} + D_{22}^{11}), \\ \nu_2 &= \mu_3 = (D_{11}^{23} + D_{23}^{11}) - (D_{31}^{12} + D_{12}^{31}), \quad \lambda_3 = \nu_1 = (D_{22}^{31} + D_{31}^{22}) - (D_{12}^{23} + D_{23}^{12}), \\ \mu_1 &= \lambda_2 = (D_{33}^{12} + D_{12}^{33}) - (D_{23}^{31} + D_{31}^{23}). \end{aligned} \tag{35''}$$

Setzt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = \Pi,$$

so erhält man die Formeln:

$$\begin{aligned} -l\Pi &= f_1(\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2) + f_2(\nu_3\nu_1 - \mu_1\nu_3) + f_3(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1), \\ -m\Pi &= f_1(\nu_2\lambda_3 - \nu_3\lambda_2) + f_2(\nu_3\lambda_1 - \nu_1\lambda_3) + f_3(\nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1), \\ -n\Pi &= f_1(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) + f_2(\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3) + f_3(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) \end{aligned} \tag{36}$$

zur Bestimmung der Drehungen l, m, n , wenn die Dilatationen $\partial u/\partial x \dots$ bestimmt sind, durch diese und die gegebenen Momente L, M, N .

Wichtiger als die Bestimmung dieser Grössen ist aber ihre Elimination aus den in den Gleichgewichtsgleichungen (33) vorkommenden $X_x, Y_y, \dots$

Zu diesem Zwecke fügen wir zu den obigen drei Gleichungen (35') noch die aus (29) sich ergebende für den Werth einer beliebigen der Druckcomponenten, die mit K bezeichnet werden mag, in der (35') analogen Form, und erhalten so das System:

$$\begin{aligned} -K &= \lambda l + \mu m + \nu n + f, \\ 0 &= \lambda_1 l + \mu_1 m + \nu_1 n + f_1, \\ 0 &= \lambda_2 l + \mu_2 m + \nu_2 n + f_2, \\ 0 &= \lambda_3 l + \mu_3 m + \nu_3 n + f_3. \end{aligned} \tag{37}$$

Nun kann man, indem man die f mit einer beliebigen Grösse p multiplicirt und dividirt, die vier Gleichungen nach p auflösen und erhält dann, da p wieder herausfällt:

$$-K \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = -KH = \begin{vmatrix} f & \lambda & \mu & \nu \\ f_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ f_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ f_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}, \tag{38}$$

und damit die von l, m, n freie Form von $-K$. Die f sind lineäre Functionen von $\partial u/\partial x \dots$; nennt man die Coefficienten eines beliebigen dieser Argumente in den f, f_1, f_2, f_3 resp. $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, so wird der Coefficient k dieses selben Argumentes in der definitiven Form von $-K$ gegeben sein durch:

$$(38') \quad +k\Pi = \begin{vmatrix} \alpha & \lambda & \mu & \nu \\ \alpha_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \alpha_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \alpha_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}.$$

Die Anzahl der so erhaltenen Coefficienten der Differentialausdrücke $\partial u/\partial x, \dots$ ist zunächst wieder 81, da neun Componenten mit je neun Gliedern vorhanden sind. Aber diese sind bei weitem nicht alle verschieden.

Zunächst müssen, da Y_z und Z_y, Z_x und X_z, X_y und Y_x nur um resp. $\epsilon L, \epsilon M, \epsilon N$ von einander verschieden sind, die in diesen Componentenpaaren auftretenden je zweimal neun Coefficienten der $\partial u/\partial x \dots$ einander gleich sein; hierdurch reducirt sich die gesammte Anzahl derselben auf 54.

Ferner dürfen die Glieder

$$\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$$

nur in den Combinationen

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

vorkommen, da die elastischen Componenten nur von den Deformationen und nicht etwa auch von den Drehungen der Volumenelemente abhängen können.

Wir wollen beweisen, dass unsere Theorie dies Resultat wirklich ergibt und haben dadurch dann die Anzahl der Factoren der Dilatationen $\partial u/\partial x \dots$ weiter auf 36 reducirt.

Seien $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ und $\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3$ die Factoren von zwei Gliedern obiger Paare von Differentialausdrücken in den Eliminationsgleichungen, α' und

x'' in dem Werth einer beliebigen der Componenten $X_x \dots, k'$ und k'' die nach der Elimination von l, m, n in derselben Formel auftretenden, so erfordert das oben Gesagte, dass:

$$k' = k''$$

ist. Diese Bedingung reducirt sich auf:

$$\begin{vmatrix} (x' - x'') \lambda & \mu & \nu \\ (x'_1 - x''_1) \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ (x'_2 - x''_2) \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ (x'_3 - x''_3) \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun sind aber die λ, μ, ν die Coefficienten von l, m, n in denselben vier erwähnten Gleichungen; beachtet man, dass dieselben in (29) nur in den Combinationen

$$\frac{\partial v}{\partial z} + l, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - l, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + m, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - m, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + n, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - n$$

vorkommen, so erkennt man, dass, welche Verfügung man auch trifft, in der fraglichen Determinante stets eine der drei letzten Verticalreihen der ersten Verticalreihe gleich, das Ganze also gleich Null sein muss.

Hiernach werden also die durch Elimination von l, m, n erhaltenen Werthe der elastischen Drucke in der That nur von den sechs Argumenten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = y_y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = z_z, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = y_z, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = z_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = x_y$$

abhängig.

Endlich gelten aber noch die Relationen für die von l, m, n freien Componenten $X_x, \dots$, dass:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x_y} = \frac{\partial X_y}{\partial x_x}, \quad \frac{\partial X_x}{\partial y_z} = \frac{\partial Y_z}{\partial x_x} \quad \text{u. s. f.}$$

Hierzu ist erforderlich, dass dieselben in der Reihenfolge $X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z$ geschrieben nach den Argumenten in der Reihenfolge $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ geordnet ein in Bezug auf die Diagonale symmetrisches System von Coefficienten zeigen.

D*

Dies weist sich leicht nach durch Rücksicht auf das System (29) und (35).

Denn nimmt man in zwei beliebigen Componenten (etwa der h . und k .) zwei entsprechende Glieder (also das k . und h .), so werden die Coefficienten nach (38') sich so bestimmen:

$$k_h^k \Pi = \begin{vmatrix} \chi_h^k & \lambda_h & \mu_h & \nu_h \\ \chi_1^k & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \chi_2^k & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \chi_3^k & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}, \quad h_k^h \Pi = \begin{vmatrix} \chi_k^h & \lambda_k & \mu_k & \nu_k \\ \chi_1^h & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \chi_2^h & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \chi_3^h & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}.$$

Hierin ist aber nach (29):

$$\chi_h^k = \chi_k^h$$

und nach (29) und (35):

$$\begin{aligned} -\lambda_h &= \chi_1^h, & -\mu_h &= \chi_2^h, & -\nu_h &= \chi_3^h \\ -\lambda_k &= \chi_1^k, & -\mu_k &= \chi_2^k, & -\nu_k &= \chi_3^k. \end{aligned}$$

Da ferner nach (35'):

$$\mu_1 = \lambda_2, \quad \nu_2 = \mu_3, \quad \lambda_3 = \nu_1$$

ist, so können die beiden obigen Determinanten durch Umkehren des Vorzeichens der ersten Reihe und der ersten Colonne in einer von ihnen auf eine Form gebracht werden, in welcher die Reihen der einen mit den Columnen der andern übereinstimmen: sie sind also gleich.

Hierdurch reducirt sich schliesslich die Anzahl der von einander verschiedenen Coefficienten der $\partial u / \partial x \dots$ im allgemeinsten Falle auf 21, in Uebereinstimmung mit dem Resultat der nicht auf die molekulare Hypothese basirten Theorien.

Was die Drehungsmomente L , M , N , anbetrifft, so haben sie in der ersten der Gleichungen (37) stets den Factor Null, in den folgenden tritt nur je eine mit dem Factor ε auf. Man kann also die Coefficienten k' , k'' , k''' , mit welchen behaftet sie in den Werth von $-K$ eingehen, sogleich hinschreiben; es ist nämlich:

$$(38'') \quad k' \Pi = -\varepsilon \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}, \quad k'' \Pi = -\varepsilon \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}, \quad k''' \Pi = -\varepsilon \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}$$

Es treten also im Allgemeinen alle drei Momente L, M, N in jeder der Druckcomponenten auf.

Das Resultat dieser allgemeinen Untersuchungen ist also, dass die durch Elimination von l, m, n erhaltenen Werthe der elastischen Componenten ein System von Constanten enthalten, welches folgende Gemässigkeit zeigt:

	x_x	y_y	z_z	y_z	z_x	x_y	$-\varepsilon L$	$-\varepsilon M$	$-\varepsilon N$
$-X_x$	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}	E_{11}	E_{12}	E_{13}
$-Y_y$	D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}	D_{26}	E_{21}	E_{22}	E_{23}
$-Z_z$	D_{31}	D_{32}	D_{33}	D_{34}	D_{35}	D_{36}	E_{31}	E_{32}	E_{33}
$-Y_x$	D_{41}	D_{42}	D_{43}	D_{44}	D_{45}	D_{46}	E_{41}	E_{42}	E_{43}
$-Z_y$	D_{41}	D_{42}	D_{43}	D_{44}	D_{45}	D_{46}	$1 + E_{41}$	E_{42}	E_{43}
$-Z_x$	D_{51}	D_{52}	D_{53}	D_{54}	D_{55}	D_{56}	E_{51}	E_{52}	E_{53}
$-X_z$	D_{51}	D_{52}	D_{53}	D_{54}	D_{55}	D_{56}	E_{51}	$1 + E_{52}$	E_{53}
$-X_y$	D_{61}	D_{62}	D_{63}	D_{64}	D_{65}	D_{66}	E_{61}	E_{62}	E_{63}
$-Y_z$	D_{61}	D_{62}	D_{63}	D_{64}	D_{65}	D_{66}	E_{61}	E_{62}	$1 + E_{63}$

(39)

Hierin ist D_{hk} gleich D_{kh} aber nicht E_{hk} gleich E_{kh} .

So lange L, M, N von Null verschieden sind, ist Y_x und Z_y, Z_x und X_z, X_y und Y_z nicht gleich, und es sind daher diese Werthe beim Einsetzen in die Gleichgewichtsgleichungen sorgfältig auseinander zu halten.

Wir behalten die Drehungsmomente L, M, N in den Formeln bei, obgleich bisher noch keine Mittel in Anwendung sind, dergleichen auf die Moleküle direct auszuüben, weil es nach der neuerdings von Herrn Prof. Riecke¹⁾ vertretenen Annahme einer permanenten electricen Polarität der Moleküle nicht undenkbar scheint, solche Momente durch electriche Einwirkungen zu erhalten; überdies geben sie zu interessanten theoretischen Folgerungen Veranlassung.

4. Wir haben im Vorstehenden den Nachweis ganz allgemein durchgeführt, dass die auf Wechselwirkung polarisirter Moleküle gegründete Elasticitätstheorie für die gewöhnlichen Anwendungen auf dieselbe Form der Differentialgleichungen und dieselben Werthe der ela-

1) E. Riecke, Gött. Nachrichten, 1887, No. 7, p. 194.

stischen Druckcomponenten führt, als diejenigen Theorien, welche über die Ursache der Elasticitätserscheinungen keine Annahme machen; aber wir haben nicht die allgemeinen Endformeln zum Vergleich mit den älteren zusammengestellt. Die nach Elimination der Molekulardrehungen l, m, n erhaltenen Werthe der elastischen Componenten sind in der nur die Summen D_{hk}^{mn} enthaltenden Form sehr complicirt und vorläufig noch ohne practische Wichtigkeit.

Dagegen sollen nunmehr für die durch Symmetrieen ausgezeichneten Krystallsysteme diese, wie auch die Werthe der Molekulardrehungen selbst abgeleitet und mitgetheilt werden. Indessen soll die Zusammenstellung nur das Wichtigste geben; die wenigen hemiëdrischen und hemimorphen Gebilde, die nach der krystallographischen Symmetrie zu urtheilen, sich von dem elastischen Verhalten der holoëdrischen Formen entfernen, sollen nur erwähnt, nicht behandelt werden.

Wir betrachten, wie in der früheren Theorie für das elastische Potential, so hier für das Verhalten des Potentials F der Elementarwirkung zwischen den Molekülen, welches in den die Coefficienten D_{hk}^{mn} definirenden Summen auftritt, die Symmetrieverhältnisse der Krystallform als massgebend, weil die Beobachtungen gezeigt haben, dass die Krystalle in allen bekannten physikalischen Eigenschaften (z. B. gegenüber Licht und Wärme) mindestens die Symmetrien der Form, zumeist sogar noch höhere Symmetrien besitzen. Darum scheint es angemessen aus der Krystallform das allgemeinste Symmetriegesetz der krystallinischen Substanz abzulesen und vorauszusetzen, dass es für alle physikalischen Eigenschaften derselben das sie umfassende Gesetz darstellt. Aus demselben Grunde erscheint es aber nicht zulässig, andere physikalische Eigenschaften der Krystalle, welche speciellere Gesetze befolgen, als die Krystallform allein darbietet, zur Specialisirung der elastischen Potentiale zu benutzen ¹⁾, abgesehen davon,

---

1) Ich kann mich deshalb mit dem Verfahren Herrn Minnigerode's (Götting. Nachr. 1884, Nr. 6, p. 219), in gewissen Fällen das optische Verhalten der Krystalle heranzuziehen, nicht einverstanden erklären.

dass die wenig zahlreichen vorliegenden Beobachtungen über die Elasticitätserscheinungen der Krystalle bereits gezeigt haben, dass dieselben allgemeinere und complicirtere Symmetrieverhältnisse darbieten, als die optischen und thermischen Erscheinungen. So vorsichtig indess auch die Beschränkung auf dieses eine Mittel der Specialisirung erscheint, so bleibt es doch hypothetisch und der Bestätigung durch die Beobachtung bedürftig.

Die Elemente der Symmetrie, welche die Krystallform bestimmen, sind Symmetriecentrum, Symmetrieaxe und Symmetrieebene; ihre Definitionen sind bekanntlich folgende¹⁾.

Ein Symmetriecentrum ist ein Punkt der alle durch ihn gezogenen und beiderseitig von dem Krystallpolyöder begrenzten Geraden halbirt.

Eine Symmetrieaxe ist jede Gerade, um welche man das Polyöder um einen aliquoten Theil einer ganzen Umdrehung derart drehen kann, dass es in allen seinen Punkten mit Punkten seiner ersten Lage zusammenfällt. Ist $2\pi/n$ der kleinste zur Axe gehörige Drehungswinkel, so heisst die Symmetrieaxe n zählig. Krystallographisch möglich sind nur die Fälle $n = 2, 3, 4, 6$. Zwei Symmetrieaxen heissen gleich, wenn die Anordnung der Flächen und Kanten um die eine dieselbe ist, wie um die andere. Sind hiernach die beiden Seiten einer und derselben Axe gleich, so nennt man die Symmetrieaxe zweiseitig.

Eine Symmetrieebene ist jede Ebene, welche das Krystallpolyöder so theilt, dass die eine Hälfte das Spiegelbild der andern in Bezug auf die Symmetrieebene bildet. Zwei Symmetrieebenen heissen gleich, wenn die Anordnung der Flächen und Kanten in Bezug auf beide identisch ist.

Für unsern speciellen Zweck der Anwendung auf die Specialisirung der Werthe der elastischen Potentiale und Druckkräfte ist von besonderer Wichtigkeit die Frage: welche von gleichzeitig auftretenden gleich-

---

1) Vergl. Liebisch, Krystallographie, Leipzig 1881, p. 191 u. f.

oder verschiedenartigen Symmetrieelementen von einander unabhängig, also speciell in Betracht zu ziehen sind.

In Bezug hierauf existirt eine Anzahl leicht zu beweisender Sätze. Für Symmetriearien allein die Folgenden:

Sind zwei gleiche zweizählige Symmetriearien vorhanden so müssen sie mit einander den Winkel $2\pi/3$, $2\pi/4$ oder $2\pi/6$ einschliessen und es existiren gleichzeitig mit ihnen noch 1, 2 oder 4 gleiche Axen ¹⁾, die in derselben Ebene liegen und die gleichen Winkel mit den Nachbaraxen einschliessen. Die Halbierungslinien dieser Winkel sind gleichfalls unter sich gleiche, von den ersteren verschiedene zweizählige Symmetriearien, die Richtung normal zu ihrer Ebene ist eine zweiseitige resp. 3, 4 oder 6zählige Symmetriearie. Dieser Satz lässt sich auch so umkehren, dass die Existenz der zweiseitigen 3, 4 oder 6zähligen Symmetriearie die der zweizähligen Nebenaxen zur Folge hat.

Mehrere gleiche dreizählige Symmetriearien sind nur in dem Falle möglich, dass sie in die vier Eckdiagonalen des regulären Hexaëders fallen: mit ihnen gleichzeitig treten dann drei vierzählige gleiche parallel den Kanten und sechs zweizählige gleiche parallel den Flächen-diagonalen des Hexaëders auf.

Mehrere gleiche vierzählige Symmetriearien treten nur zu drei auf einander normal stehend auf, mit ihnen gleichzeitig die eben genannten drei- und zweizähligen.

Für Symmetrieebenen gilt ferner:

Schneiden sich mehrere Symmetrieebenen in einer Geraden, so sind sie entweder alle gleich oder ordnen sich in zwei Gruppen untereinander gleicher, welche abwechselnd auftreten. Benachbarte Symmetrieebenen schliessen dabei mit einander gleiche Winkel ein und die Ebenen der einen Gruppe halbiren die von denjenigen der andern Gruppe gebildeten Winkel. Die Schnittlinie ist n zählige Symmetriearie, wenn n Symmetrieebenen sich in ihr schneiden.

Ist ein Centrum der Symmetrie vorhanden, so folgt aus dem Vor-

1) In den beiden letzten Fällen fallen je zwei Axen in entgegengesetzte Richtungen und bilden zusammen eine zweiseitige Symmetriearie.

handensein zwei normaler Symmetrieebenen die Existenz einer dritten zu den beiden ersten normalen.

Alle drei Symmetrieelemente verbindet der Satz: dass ein Centrum der Symmetrie, eine geradzählige Symmetrieaxe und eine zu ihr normale Symmetrieebene drei Stücke sind, von denen das Vorhandensein zweier dasjenige des dritten nothwendig nach sich zieht.

Hiernach lässt sich in jedem Falle aus der Zahl der an einer Krystallform wahrgenommenen Symmetrieelemente das Unabhängige und daher für die Anwendung einzig Wesentliche aussondern.

Eine noch weitere Vereinfachung liefert die Ausnutzung des aus der Gleichung (2) oder dem Princip der Gleichheit von actio und reactio hervorgehenden Resultates, dass ganz allgemein für beliebige homogene elastische Medien entgegengesetzte Richtungen in elastischer Hinsicht gleichwerthig sind, in dieser also stets ein Centrum der Symmetrie existirt. Hieraus folgt, dass die obigen Sätze, welche an die Existenz eines Symmetriecentrums anknüpfen, in Rücksicht auf das elastische Verhalten der Krystalle immer erfüllt sind. In diesem Sinne steht also auf jeder geradzähligen Symmetrieaxe eine Symmetrieebene senkrecht und umgekehrt, u. dergl. Allgemein kann man die Regel aussprechen, dass die für das elastische Verhalten massgebenden Symmetrieverhältnisse nicht diejenigen der Krystallform selbst sind, sondern die einer Umbildung oder Vervollständigung, welche man aus derselben erhält, indem man zu jeder Fläche der Form die gegenüberliegende hinzufügt, falls dieselbe fehlt. Hieraus folgt sogleich, dass alle diejenigen hemiëdrischen und hemimorphen Formen, welche man aus holoëdrischen dadurch erhalten kann, dass man in letzteren von Paaren gegenüberliegender Flächen eine verschwinden lässt, sich in elastischer Hinsicht den holoëdrischen Krystallen gleich verhalten müssen.

Von den Symmetrieelementen kommen als massgebend für die Specialisirung des elastischen Potentials oder des Potentials der Elementarwirkung nach dem Vorstehenden im Grunde nur noch Symmetrieaxen in Betracht. Denn alle Symmetrieebenen sind hier nothwendig mit gewissen Symmetrieaxen verbunden und erscheinen als deren Folge

was umgekehrt nicht gilt. Die oben schon allgemein ausgesprochene Hypothese, dass jeder Symmetrie der Form die gleiche Symmetrie des elastischen Verhaltens entspricht, wird demnach die folgende specielle Form annehmen:

Besitzt die (wie oben gesagt »vervollständigte«) Krystallform eine Symmetrieaxe, d. h. giebt es eine Richtung, um welche als Drehungsaxe um einen aliquoten Theil von 2π gedreht die Krystallform (also auch das Punktsystem, welches die Oerter der Moleküle giebt) mit ihrer ursprünglichen Lage in allen Punkten zur Deckung kommt, so muss das Potential auf ein dementsprechend gedrehtes Coordinatensystem transformirt die ursprüngliche Form vollständig wieder annehmen.

Indessen ist es für unsere Anwendungen häufig bequemer, statt der Eigenschaft einer vorhandenen geradzähligen Symmetrieaxe die der damit verbundenen normalen Symmetrieebene zu benutzen; denn letztere ergibt ohne alle Rechnung für alle die Summen D_{hk}^{mn} , deren Argumente auf den beiden Seiten der Symmetrieebene entgegengesetzte Werthe besitzen, den Werth Null.

Das monokline System ist charakterisirt¹⁾ durch die Existenz einer zweizähligen krystallographischen Symmetrieaxe, auf welcher nach dem Vorstehenden stets eine elastische Symmetrieebene normal steht.

Wählt man die YZ - zur Symmetrieebene, so müssen alle die Coefficienten D_{hk}^{mn} verschwinden, in welchen der Index 1 ein oder drei Mal auftritt; demgemäss werden im System (29) X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_y frei von

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + n\right), \left(\frac{\partial v}{\partial x} - n\right), \left(\frac{\partial w}{\partial x} + m\right), \left(\frac{\partial u}{\partial z} - m\right)$$

und X_y, Y_x, X_z, Z_x frei von

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \left(\frac{\partial v}{\partial z} + l\right), \left(\frac{\partial w}{\partial y} - l\right).$$

Demgemäss wird:

1) Liebisch, l. c. p. 212 und 380; Minnigerode, l. c. p. 216.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2D_{23}^{23} - (D_{22}^{33} + D_{33}^{22}), & \mu_2 &= 2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33}), & \nu_3 &= 2D_{12}^{12} - (D_{11}^{22} + D_{22}^{11}), \\ \nu_2 &= \mu_3 = (D_{11}^{23} + D_{23}^{11}) - (D_{31}^{12} + D_{12}^{31}), & \lambda_3 &= \nu_1 = 0, & \mu_1 &= \lambda_2 = 0; \\ f_1 &= \varepsilon L + \frac{\partial u}{\partial x}(D_{31}^{12} - D_{12}^{31}) + \frac{\partial v}{\partial y}(D_{23}^{22} - D_{22}^{23}) + \frac{\partial w}{\partial z}(D_{33}^{23} - D_{23}^{33}) + \frac{\partial v}{\partial z}(D_{23}^{23} - D_{22}^{33}) + \frac{\partial w}{\partial y}(D_{33}^{22} - D_{23}^{33}), \quad (40) \\ f_2 &= \varepsilon M + \frac{\partial u}{\partial y}(D_{11}^{23} - D_{31}^{12}) + \frac{\partial u}{\partial z}(D_{11}^{33} - D_{31}^{31}) + \frac{\partial v}{\partial x}(D_{12}^{31} - D_{23}^{11}) + \frac{\partial w}{\partial x}(D_{31}^{31} - D_{11}^{33}), \\ f_3 &= \varepsilon N + \frac{\partial u}{\partial y}(D_{12}^{12} - D_{11}^{22}) + \frac{\partial u}{\partial z}(D_{12}^{31} - D_{11}^{23}) + \frac{\partial v}{\partial x}(D_{22}^{11} - D_{12}^{12}) + \frac{\partial w}{\partial x}(D_{23}^{11} - D_{31}^{12}); \end{aligned}$$

es gilt also:

$$\Pi = \lambda_1(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3)$$

und daher nach (36):

$$\begin{aligned} -l\lambda_1 &= f_1 \\ -m(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) &= f_2 \nu_3 - f_3 \nu_2, \\ -n(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) &= -f_2 \mu_3 + f_3 \mu_2. \end{aligned} \quad (41)$$

Ebenso giebt einfacher (38'):

$$k\lambda_1(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) = \begin{vmatrix} x & \lambda & \mu & \nu \\ x_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & \mu_2 & \nu_2 \\ x_3 & 0 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \quad (42)$$

und (38''):

$$k'\lambda_1 = -\varepsilon\lambda, \quad k''(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) = -\varepsilon(\mu\nu_3 - \nu\mu_3), \quad k'''(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) = -\varepsilon(\mu_2 \nu - \nu_2 \mu).$$

Hiernach berechnen sich leicht die von l, m, n befreiten Werthe der Componenten:

$$\begin{aligned} -X_x &= D_{11}x_x + D_{12}y_y + D_{13}z_z + D_{14}y_z & -E_{11}\varepsilon L, \\ -Y_y &= D_{21}x_x + D_{22}y_y + D_{23}z_z + D_{24}y_z & -E_{21}\varepsilon L, \\ -Z_z &= D_{31}x_x + D_{32}y_y + D_{33}z_z + D_{34}y_z & -E_{31}\varepsilon L, \\ -Y_z &= D_{41}x_x + D_{42}y_y + D_{43}z_z + D_{44}y_z & -E_{41}\varepsilon L, \\ -Z_y &= D_{41}x_x + D_{42}y_y + D_{43}z_z + D_{44}y_z & -(1+E_{41})\varepsilon L, \\ -Z_x &= & D_{55}z_z + D_{56}x_y & -E_{52}\varepsilon M & -E_{53}\varepsilon N, \\ -X_z &= & D_{55}z_z + D_{56}x_y & -(1+E_{52})\varepsilon M & -E_{53}\varepsilon N, \\ -X_y &= & D_{65}z_z + D_{66}x_y & -E_{62}\varepsilon M & -E_{63}\varepsilon N, \\ -Y_x &= & D_{65}z_z + D_{66}x_y & -E_{62}\varepsilon M & -(1+E_{63})\varepsilon N. \end{aligned} \quad (43)$$

Darin bezeichnen die D_{hk} und E_{hk} folgende Aggregate der D_{hk}^{mn} :

$$\lambda_1 D_{11} = \lambda_1 D_{11}^{11} - (D_{12}^{13} - D_{13}^{12})^2, \quad \lambda_1 D_{22} = \lambda_1 D_{22}^{22} - (D_{22}^{23} - D_{23}^{22})^2, \quad \lambda_1 D_{33} = \lambda_1 D_{33}^{33} - (D_{32}^{33} - D_{33}^{32})^2,$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 D_{23} &= \lambda_1 D_{32} = \lambda_1 D_{23}^{23} - (D_{22}^{23} - D_{23}^{22})(D_{32}^{33} - D_{33}^{32}), \\
\lambda_1 D_{31} &= \lambda_1 D_{13} = \lambda_1 D_{31}^{31} - (D_{32}^{33} - D_{33}^{32})(D_{12}^{13} - D_{13}^{12}), \\
\lambda_1 D_{12} &= \lambda_1 D_{21} = \lambda_1 D_{12}^{12} - (D_{12}^{13} - D_{13}^{12})(D_{22}^{23} - D_{23}^{22}), \\
\lambda_1 D_{14} &= \lambda_1 D_{41} = D_{12}^{13}(D_{33}^{22} - D_{23}^{23}) + D_{13}^{12}(D_{22}^{33} - D_{23}^{23}), \\
\lambda_1 D_{24} &= \lambda_1 D_{42} = D_{22}^{23}(D_{33}^{22} - D_{23}^{23}) + D_{23}^{22}(D_{22}^{33} - D_{23}^{23}), \\
\lambda_1 D_{34} &= \lambda_1 D_{43} = D_{32}^{33}(D_{33}^{22} - D_{23}^{23}) + D_{33}^{32}(D_{22}^{33} - D_{23}^{23}), \\
\lambda_1 D_{44} &= D_{22}^{33}(D_{23}^{23} - D_{23}^{22}) + D_{23}^{23}(D_{23}^{33} - D_{22}^{33}) = D_{23}^{23} D_{23}^{33} - D_{22}^{33} D_{33}^{22}, \\
(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) D_{55} &= \begin{vmatrix} D_{31}^{13}(D_{33}^{11} - D_{31}^{13})(D_{31}^{12} - D_{32}^{11}) \\ (D_{11}^{33} - D_{31}^{13}) & \mu_2 & \nu_2 \\ (D_{21}^{13} - D_{11}^{23}) & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}, \\
(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) D_{66} &= \begin{vmatrix} D_{11}^{22}(D_{13}^{21} - D_{11}^{23})(D_{11}^{22} - D_{12}^{21}) \\ (D_{11}^{32} - D_{31}^{12}) & \mu_2 & \nu_2 \\ (D_{21}^{12} - D_{11}^{22}) & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}, \\
(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) D_{66} &= \begin{vmatrix} D_{11}^{23}(D_{13}^{21} - D_{11}^{23})(D_{11}^{22} - D_{12}^{21}) \\ (D_{11}^{33} - D_{31}^{13}) & \mu_2 & \nu_2 \\ (D_{21}^{13} - D_{11}^{23}) & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}, \\
\lambda_1 E_{11} &= (D_{12}^{13} - D_{13}^{12}), \quad \lambda_1 E_{21} = (D_{22}^{23} - D_{23}^{22}), \quad \lambda_1 E_{31} = (D_{32}^{33} - D_{33}^{32}), \quad \lambda_1 E_{41} = (D_{22}^{33} - D_{23}^{32}), \\
E_{52}(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) &= [(D_{33}^{11} - D_{31}^{13}) \nu_3 - (D_{31}^{12} - D_{32}^{11}) \mu_3], \\
E_{53}(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) &= [(D_{31}^{12} - D_{32}^{11}) \mu_2 - (D_{33}^{11} - D_{31}^{13}) \nu_2], \\
E_{62}(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) &= [(D_{13}^{21} - D_{11}^{23}) \nu_3 - (D_{11}^{22} - D_{12}^{21}) \mu_3], \\
E_{63}(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) &= [(D_{11}^{22} - D_{12}^{21}) \mu_2 - (D_{13}^{21} - D_{11}^{23}) \nu_2].
\end{aligned}
\tag{44}$$

Für die Discussion sind diese Formeln immer noch reichlich complicirt, sie sollen hier auch nur als Ausgangspunkt für einfachere Gestalten stehen.

In Krystallen des rhombischen Systemes (mit Ausnahme der seltenen »hemimorphen Formen zweiter Art«) giebt es dem elastischen Verhalten nach drei zu einander normale Symmetrieebenen¹⁾, es verschwinden also alle diejenigen D_{hk}^{mn} , in deren Indices irgend eine der Zahlen 1, 2, 3 nur einmal vorkömmt.

Dadurch wird:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 2D_{23}^{32} - (D_{22}^{33} + D_{33}^{22}), \quad \mu_1 = 0, \quad \nu_1 = 0, \\
\lambda_2 &= 0, \quad \mu_2 = 2D_{31}^{13} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33}), \quad \nu_2 = 0, \\
\lambda_3 &= 0, \quad \mu_3 = 0, \quad \nu_3 = 2D_{12}^{21} - (D_{11}^{22} + D_{22}^{11}),
\end{aligned}
\tag{45}$$

Liebisch, l. c. p. 212 und 365; Minigerode, l. c. p. 215.

$$\begin{aligned} f_1 &= \varepsilon L + \frac{\partial v}{\partial z} (D_{32}^{23} - D_{22}^{33}) + \frac{\partial w}{\partial y} (D_{33}^{22} - D_{23}^{32}), \\ f_2 &= \varepsilon M + \frac{\partial w}{\partial x} (D_{13}^{31} - D_{33}^{11}) + \frac{\partial u}{\partial z} (D_{11}^{33} - D_{31}^{13}), \\ f_3 &= \varepsilon N + \frac{\partial u}{\partial y} (D_{21}^{12} - D_{11}^{22}) + \frac{\partial v}{\partial x} (D_{22}^{11} - D_{12}^{21}), \end{aligned}$$

und alle Resultate vereinfachen sich in hohem Grade.

Zunächst ist:

$$-\lambda_1 = f_1, \quad -m\nu_2 = f_2, \quad -n\nu_3 = f_3;$$

dafür kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\varepsilon L + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) (D_{33}^{22} - D_{22}^{33})}{2D_{23}^{32} - (D_{22}^{22} + D_{33}^{22})} = \varphi - \frac{\varepsilon L + \frac{1}{2} y_z (D_{33}^{22} - D_{22}^{33})}{2D_{23}^{32} - (D_{22}^{22} + D_{33}^{22})}, \\ m &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\varepsilon M + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) (D_{11}^{33} - D_{33}^{11})}{2D_{31}^{13} - (D_{33}^{33} + D_{11}^{33})} = \psi - \frac{\varepsilon M + \frac{1}{2} z_x (D_{11}^{33} - D_{33}^{11})}{2D_{31}^{13} - (D_{33}^{33} + D_{11}^{33})}, \quad (46) \\ n &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\varepsilon N + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (D_{22}^{11} - D_{11}^{22})}{2D_{12}^{21} - (D_{11}^{22} + D_{22}^{11})} = \chi - \frac{\varepsilon N + \frac{1}{2} x_y (D_{22}^{11} - D_{11}^{22})}{2D_{12}^{21} - (D_{11}^{22} + D_{22}^{11})}, \end{aligned}$$

falls man mit φ , ψ , χ die Drehungswinkel des ganzen Volumenelementes an der Stelle x , y , z bezeichnet.

Ferner wird:

$$\begin{aligned} -X_x &= D_{11} x_x + D_{12} y_y + D_{13} z_z = D_{11}^{11} x_x + D_{12}^{12} y_y + D_{13}^{13} z_z, \\ -Y_y &= D_{21} x_x + D_{22} y_y + D_{23} z_z = D_{21}^{21} x_x + D_{22}^{22} y_y + D_{23}^{23} z_z, \\ -Z_z &= D_{31} x_x + D_{32} y_y + D_{33} z_z = D_{31}^{31} x_x + D_{32}^{32} y_y + D_{33}^{33} z_z, \\ -Y_z &= D_{44} y_z - E_{41} \varepsilon L = \frac{(D_{23}^{23} D_{23}^{23} - D_{22}^{33} D_{33}^{22}) y_z - (D_{22}^{33} - D_{23}^{23}) \varepsilon L}{2D_{23}^{23} - (D_{22}^{33} + D_{33}^{22})}, \quad (47) \\ -Z_y &= D_{44} y_z - (1 + E_{41}) \varepsilon L = \frac{(D_{23}^{23} D_{23}^{23} - D_{22}^{33} D_{33}^{22}) y_z - (D_{23}^{23} - D_{33}^{22}) \varepsilon L}{2D_{23}^{23} - (D_{22}^{33} + D_{33}^{22})}, \\ -Z_x &= D_{55} z_x - E_{52} \varepsilon M = \frac{(D_{31}^{31} D_{31}^{31} - D_{33}^{11} D_{11}^{33}) z_x - (D_{33}^{11} - D_{31}^{31}) \varepsilon M}{2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33})}, \\ -X_z &= D_{55} z_x - (1 + E_{52}) \varepsilon M = \frac{(D_{31}^{31} D_{31}^{31} - D_{33}^{11} D_{11}^{33}) z_x - (D_{31}^{31} - D_{11}^{33}) \varepsilon M}{2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33})}, \\ -X_y &= D_{66} x_y - E_{63} \varepsilon N = \frac{(D_{12}^{12} D_{12}^{12} - D_{21}^{11} D_{22}^{11}) x_y - (D_{11}^{22} - D_{12}^{12}) \varepsilon N}{2D_{12}^{12} - (D_{11}^{22} + D_{22}^{11})}, \\ -Y_x &= D_{66} x_y - (1 + E_{63}) \varepsilon N = \frac{(D_{12}^{12} D_{12}^{12} - D_{21}^{11} D_{22}^{11}) x_y - (D_{12}^{12} - D_{22}^{11}) \varepsilon N}{2D_{12}^{12} - (D_{11}^{22} + D_{22}^{11})}. \end{aligned}$$

Die Krystalle des quadratischen Systems besitzen mit Ausnahme der pyramidal-hemiödrischen, der rhombotyp- und sphenoidisch-tetartoëdrischen Formen nach ihrem elastischen Verhalten zwei normale gleichwerthige Symmetrieebenen¹⁾; daraus resultirt, falls man die *Z*-Axe als ausgezeichnete wählt und also die *X*- und *Y*-Richtung als unterschiedslos ansieht, folgende Reihe von Werthen:

$$\begin{aligned}
 l &= \varphi - \frac{\varepsilon L + \frac{1}{2} y_z (D_{33}^{11} - D_{11}^{33})}{2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33})}, \\
 m &= \psi - \frac{\varepsilon M + \frac{1}{2} z_x (D_{11}^{33} - D_{33}^{11})}{2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33})}, \\
 n &= \chi - \frac{\varepsilon N}{2(D_{12}^{12} - D_{11}^{22})}, \\
 -X_x &= D_{11}^{11} x_x + D_{12}^{12} y_y + D_{13}^{13} z_z, & -Y_y &= D_{12}^{12} x_x + D_{11}^{11} y_y + D_{13}^{13} z_z, \\
 & -Z_z &= D_{13}^{13} x_x + D_{13}^{13} y_y + D_{33}^{33} z_z, \\
 (48) \quad -Y_z &= \frac{(D_{31}^{31} D_{31}^{31} - D_{11}^{33} D_{33}^{11}) y_z - (D_{33}^{33} - D_{31}^{31}) \varepsilon L}{2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33})}, \\
 -Z_y &= \frac{(D_{31}^{31} D_{31}^{31} - D_{11}^{33} D_{33}^{11}) y_z - (D_{31}^{31} - D_{33}^{33}) \varepsilon L}{2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33})}, \\
 -Z_x &= \frac{(D_{31}^{31} D_{31}^{31} - D_{11}^{33} D_{33}^{11}) z_x - (D_{33}^{33} - D_{31}^{31}) \varepsilon M}{2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33})}, \\
 -X_z &= \frac{(D_{31}^{31} D_{31}^{31} - D_{11}^{33} D_{33}^{11}) z_x - (D_{31}^{31} - D_{11}^{33}) \varepsilon M}{2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33})}, \\
 -X_y &= \frac{(D_{12}^{12} + D_{11}^{22}) x_y + \varepsilon N}{2}, & -Y_x &= \frac{(D_{12}^{12} + D_{11}^{22}) x_y - \varepsilon N}{2}.
 \end{aligned}$$

Während sich also bei dem rhombischen und den niedriger symmetrischen Systemen, auch wenn keine äussern Drehungsmomente *L*, *M*, *N* wirken, eine selbstständige Drehung der Moleküle ergibt, nämlich die *l*, *m*, *n* von φ , ψ , χ , den Drehungen des Volumenelementes, verschieden sind, so zeigt sich beim quadratischen System, dass um die ausgezeichnete (*Z*-)Axe diese selbstständige Drehung verschwindet.

Für das reguläre System³⁾, wo alle drei normalen Symmetrieebe-

1) Liebisch, l. c. p. 212 und 339. Minnigerode, l. c. p. 213.

2) Diese Unterschiedslosigkeit hat zwar zur Folge, dass $D_{11}^{11} = D_{22}^{22}$ und $D_{11}^{22} = D_{22}^{11} =$ wird, nicht aber gilt deswegen auch $D_{11}^{11} = D_{11}^{22}$, wie leicht des Genaueren zu zeigen ist.

3) Liebisch, l. c. p. 211 und 223; Minnigerode, l. c. p. 209.

nen unterschiedslos sind, führt man am besten abgekürzte Bezeichnungen ein. Setzt man:

$$D_{11}^{11} = D_{22}^{22} = D_{33}^{33} = A, \quad D_{23}^{23} = D_{31}^{31} = D_{12}^{12} = B, \\ D_{33}^{22} = D_{22}^{33} = D_{11}^{33} = D_{33}^{11} = D_{22}^{11} = D_{11}^{22} = C,$$

so gilt hier für alle Formen des Systems:

$$l = \varphi - \frac{\varepsilon L}{2(B-C)}, \quad m = \psi - \frac{\varepsilon M}{2(B-C)}, \quad n = \chi - \frac{\varepsilon N}{2(B-C)}, \\ -X_x = Ax_x + By_y + Bz_z, \quad -Y_y = Bx_x + Ay_y + Bz_z, \quad -Z_z = Bx_x + By_y + Az_z, \\ -Y_z = \frac{B+C}{2}y_z + \frac{\varepsilon L}{2}, \quad -Z_y = \frac{B+C}{2}y_z - \frac{\varepsilon L}{2}, \quad (49) \\ -Z_x = \frac{B+C}{2}z_x + \frac{\varepsilon M}{2}, \quad -X_z = \frac{B+C}{2}z_x - \frac{\varepsilon M}{2}, \\ -X_y = \frac{B+C}{2}x_y + \frac{\varepsilon N}{2}, \quad -Y_x = \frac{B+C}{2}x_y - \frac{\varepsilon N}{2}.$$

Hier findet also bei alleiniger Einwirkung von Druckkräften und bei verschwindenden Momenten L , M , N niemals eine selbstständige Drehung der Moleküle in den Volumenelementen statt, denn es ist stets $l = \psi$, $m = \varphi$, $n = \chi$.

Die Formeln für die Krystalle des hexagonalen Systems — ausser den rhombödrischen Formen, die wir für sich behandeln — erhält man am leichtesten, wenn man benutzt, dass die an ihnen vorhandenen Symmetrieelemente in der oben (p. 33) angeführten Weise vervollständigt, ihnen sämtlich eine sechszählige Symmetrieaxe und damit notwendig verbunden zweimal sechs zu ihr normale gleichwerthige zweizählige Symmetrieaxen oder zweimal drei ihr parallele gleichwerthige Symmetrieebenen geben, welche untereinander gleiche Winkel einschliessen¹⁾. Legt man die sechszählige (Haupt-)Axe in die Z -Axe, so muss das Elementarpotential bei Drehung des Coordinatensystems um diese in sechs um 60° gegeneinander geneigten Lagen desselben die Eigenschaft der dreifachen Symmetrie in Bezug auf die Coordinatenebenen und dabei die identische Form annehmen.

Eine derartige Lage sei als Anfangslage des Coordinatensystems

1) Liebisch, l. c. p. 211 und 279; Minnigerode, l. c. p. 379 u. f.

gewählt, so gilt für dieselbe das System (46) und (47); eine Drehung der X - und Y - um die Z -Axe giebt die Substitution:

$$\begin{aligned} x = a &= \xi\alpha + \eta\beta, & \xi &= a\alpha - b\beta, \\ y = b &= -\xi\beta + \eta\alpha, & \eta &= a\beta + b\alpha; \end{aligned}$$

sie ist nun in die D_{hk}^{mn} definirenden Summen einzuführen.

So ergibt sich z. B.

$$D_{11}^{11} = \sum \alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = \sum (\alpha^2 \xi^2 + \beta^2 \eta^2 + 2\alpha\beta\xi\eta) \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \right),$$

oder indem man für das neue System die Abkürzung Δ_{hk}^{mn} in demselben Sinne, wie D_{hk}^{mn} für das alte einführt:

$$D_{11}^{11} = \alpha^4 \Delta_{11}^{11} + \beta^4 \Delta_{22}^{22} + \alpha^2 \beta^2 (\Delta_{11}^{22} + \Delta_{22}^{11} + 4\Delta_{12}^{12}) + \alpha^3 \beta (\Delta_{12}^{11} + 2\Delta_{11}^{12}) + \alpha\beta^3 (\Delta_{12}^{22} + 2\Delta_{22}^{12}).$$

Soll das neue System dem alten gleichwerthig sein, so müssen die Δ_{hk}^{mn} den D_{hk}^{mn} gleich sein, also muss gelten, da die Coordinatenebenen Symmetrieebenen sein sollen:

$$D_{11}^{11} = \alpha^4 D_{11}^{11} + \beta^4 D_{22}^{22} + \alpha^2 \beta^2 (D_{11}^{22} + D_{22}^{11} + 4D_{12}^{12}).$$

Ebenso findet sich:

$$(50) \quad \begin{aligned} D_{22}^{22} &= \beta^4 D_{11}^{11} + \alpha^4 D_{22}^{22} + \alpha^2 \beta^2 (D_{11}^{22} + D_{22}^{11} + 4D_{12}^{12}) \\ D_{11}^{22} &= \alpha^2 \beta^2 (D_{11}^{11} + D_{22}^{22} - 4D_{12}^{12}) + \alpha^4 D_{11}^{22} + \beta^4 D_{22}^{11}, \\ D_{22}^{11} &= \alpha^2 \beta^2 (D_{11}^{11} + D_{22}^{22} - 4D_{12}^{12}) + \beta^4 D_{11}^{22} + \alpha^4 D_{22}^{11}, \\ D_{12}^{12} &= \alpha^2 \beta^2 (D_{11}^{11} + D_{22}^{22} - D_{11}^{22} - D_{22}^{11}) + (\alpha^2 - \beta^2)^2 D_{12}^{12}, \\ D_{13}^{13} &= \alpha^2 D_{13}^{13} + \beta^2 D_{23}^{23}, & D_{23}^{23} &= \beta^2 D_{13}^{13} + \alpha^2 D_{23}^{23}, \\ D_{33}^{11} &= \alpha^2 D_{33}^{11} + \beta^2 D_{33}^{22}, & D_{33}^{22} &= \beta^2 D_{33}^{11} + \alpha^2 D_{33}^{22}, \\ D_{11}^{33} &= \alpha^2 D_{11}^{33} + \beta^2 D_{22}^{33}, & D_{11}^{33} &= \beta^2 D_{22}^{33} + \alpha^2 D_{22}^{33}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für jedes α und β , das von 1 und 0 abweicht:

$$(51) \quad D_{11}^{11} = D_{22}^{22}, \quad D_{11}^{22} = D_{22}^{11}, \quad 2D_{12}^{12} = D_{11}^{11} - D_{11}^{22}, \quad D_{13}^{13} = D_{23}^{23}, \quad D_{33}^{11} = D_{33}^{22}, \quad D_{11}^{33} = D_{22}^{33}.$$

Diese Relationen müssen denn auch für das hexagonale System gelten und ergeben zusammen mit (46) und (47) folgende Werthe:

$$\begin{aligned} l &= \varphi - \frac{\varepsilon L + \frac{1}{2} y_z (D_{33}^{11} - D_{11}^{33})}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, & m &= \phi - \frac{\varepsilon M + \frac{1}{2} z_x (D_{11}^{33} - D_{33}^{11})}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, \\ n &= \varphi - \frac{\varepsilon N}{2(3D_{12}^{12} - D_{11}^{11})}, \\ -X_x &= D_{11}^{11} x_x + D_{12}^{12} y_y + D_{13}^{13} z_z, & -Y_y &= D_{12}^{12} x_x + D_{11}^{11} y_y + D_{13}^{13} z_z, \\ -Z_z &= D_{13}^{13} x_x + D_{13}^{13} y_y + D_{33}^{33} z_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -Y_y &= \frac{(D_{13}^{13} D_{13}^{13} - D_{11}^{33} D_{33}^{11}) y_z - (D_{11}^{33} - D_{13}^{13}) \varepsilon L}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, \\
 -Z_y &= \frac{(D_{13}^{13} D_{13}^{13} - D_{11}^{33} D_{33}^{11}) y_z - (D_{13}^{13} - D_{33}^{11}) \varepsilon L}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, \\
 -Z_x &= \frac{(D_{13}^{13} D_{13}^{13} - D_{11}^{33} D_{33}^{11}) z_x - (D_{33}^{11} - D_{13}^{13}) \varepsilon M}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, \\
 -X_z &= \frac{(D_{13}^{13} D_{13}^{13} - D_{11}^{33} D_{33}^{11}) z_x - (D_{13}^{13} - D_{33}^{11}) \varepsilon M}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, \\
 -X_x &= \frac{D_{11}^{11} - D_{12}^{12}}{2} x_y + \frac{\varepsilon N}{2}, \quad -Y_x = \frac{D_{11}^{11} - D_{13}^{13}}{2} x_y - \frac{\varepsilon N}{2}.
 \end{aligned} \tag{52}$$

Dies System stimmt bis auf die Werthe der l, m, n , welche die ältere Theorie nicht giebt, und die Coefficienten der L, M, N , welche jene nicht berücksichtigt, genau mit den längst bekannten Formeln überein.

Die Anzahl der von einander unabhängigen D_{ik}^{mn} darinnen ist sechs.

Um endlich noch die rhomboëdrischen Formen zu erledigen, benutzen wir, dass sie, wiederum unter Rücksicht auf die früheren allgemeinen Bemerkungen angesehen, in elastischer Hinsicht eine dreizählige Hauptaxe und daher zweimal drei zu jener normale gleichwerthige Nebensymmetrieachsen, oder drei gleichwerthige jener parallele Symmetrieebenen besitzen, die untereinander gleiche Winkel einschliessen¹⁾. Ausgeschlossen sind nur die Formen der rhomboëdrischen Tetartoëdrie und der vierten Hemimorphie. Legt man wieder die Hauptaxe in die Z -Richtung, so muss das Elementarpotential beim Drehen der X - und Y -Richtung um dieselbe bei drei gegeneinander um 120° geneigten Lagen die Eigenschaft der Symmetrie in Bezug auf eine durch die Z -Axe gehende Ebene, etwa die YZ -Ebene und dabei die identische Form zeigen.

Eine derartige Lage sei zur Ausgangslage gewählt, so gilt für dieselbe das System (43). Eine Drehung der X - und Y -Axe um die Z - nach der Substitution:

$$\begin{aligned}
 x &= a = \xi\alpha + \eta\beta, & \xi &= a\alpha - b\beta \\
 y &= b = -\xi\beta + \eta\alpha, & \eta &= a\beta + b\alpha
 \end{aligned}$$

1) Liebisch, l. c. p. 211 und 299; Minnigerode, l. c. p. 379 u. f.
Mathem. Classe XXXVIII. 1. F

giebt, für die Summen D_{11}^{11} , D_{22}^{22} , D_{22}^{11} , D_{11}^{22} , D_{12}^{12} , D_{13}^{13} , D_{23}^{23} , D_{33}^{33} , D_{11}^{33} , D_{33}^{11} , D_{33}^{22} , D_{22}^{33} die im System (50) zusammengestellten Werthe und daher zwischen diesen dieselben Relationen (51) für das rhomboëdrische, wie für das hexagonale System. Die ausser diesen noch in (43) vorkommenden Summen finden sich in Rücksicht darauf, dass die HZ - mit YZ - gleichwerthige Symmetrieebene ist, folgendermassen bestimmt:

$$(53) \quad \begin{aligned} D_{11}^{23} &= D_{11}^{23} \alpha^3 + D_{22}^{23} \alpha \beta^2 - D_{12}^{13} 2\alpha \beta^2, & D_{23}^{11} &= D_{23}^{11} \alpha^3 + D_{23}^{22} \alpha \beta^2 - D_{13}^{12} 2\alpha \beta^2, \\ D_{22}^{23} &= D_{11}^{23} \alpha \beta^2 + D_{22}^{23} \alpha^3 + D_{12}^{13} 2\alpha \beta^2, & D_{23}^{22} &= D_{23}^{11} \alpha \beta^2 + D_{23}^{22} \alpha^3 + D_{13}^{12} 2\alpha \beta^2, \\ D_{12}^{13} &= D_{12}^{13} \alpha (\alpha^2 - \beta^2) + \alpha \beta^2 (D_{23}^{23} - D_{11}^{23}), & D_{13}^{12} &= D_{13}^{12} \alpha (\alpha^2 - \beta^2) + \alpha \beta^2 (D_{23}^{22} - D_{23}^{11}), \\ & & D_{23}^{33} &= \alpha D_{23}^{33}, & D_{33}^{23} &= \alpha D_{33}^{23}. \end{aligned}$$

Die vorstehenden Formeln führen zu folgenden Resultaten:

$$\begin{aligned} D_{11}^{23} + D_{22}^{23} &= 0, & D_{12}^{13} &= \frac{2D_{11}^{23} \alpha \beta^2}{\alpha(\alpha^2 - \beta^2) - 1}, & D_{23}^{33} &= 0, \\ D_{23}^{11} + D_{23}^{22} &= 0, & D_{13}^{12} &= \frac{2D_{23}^{11} \alpha \beta^2}{\alpha(\alpha^2 - \beta^2) - 1}, & D_{33}^{23} &= 0. \end{aligned}$$

Also sind nur zwei dieser Relationen vom Drehungswinkel abhängig; da letzterer hier 120° beträgt, so ist $\alpha = -1/2$, $\beta = -\sqrt{3}/2$ und die bezüglichen Werthe lauten daher vollständig:

$$(54) \quad \begin{aligned} D_{11}^{11} &= D_{22}^{22}, & D_{11}^{22} &= D_{22}^{11}, & 2D_{12}^{12} &= D_{11}^{11} - D_{11}^{22}, & D_{13}^{13} &= D_{23}^{23}, & D_{33}^{11} &= D_{33}^{22}, & D_{11}^{33} &= D_{22}^{33}, \\ D_{11}^{23} &= -D_{22}^{23} = D_{12}^{13}, & D_{23}^{11} &= -D_{23}^{22} = D_{13}^{12}, & D_{23}^{33} &= D_{33}^{23} = 0. \end{aligned}$$

Hierdurch erhält man schliesslich folgendes für die rhomboëdrischen Krystalle gültiges System:

$$(55) \quad \begin{aligned} l &= \varphi - \frac{\varepsilon L + \frac{1}{2} y_z (D_{33}^{11} - D_{11}^{33})}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, \\ m &= \psi - \frac{\varepsilon M + \frac{1}{2} z_x (D_{11}^{33} - D_{33}^{11})}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, \\ n &= \chi - \frac{\varepsilon N}{2(3D_{12}^{12} - D_{11}^{11})}, \\ -X_x &= D_{11} x_x + D_{12} y_y + D_{13} z_z + D_{14} y_z & -E_{11} \varepsilon L, \\ -Y_y &= D_{12} x_x + D_{11} y_y + D_{13} z_z - D_{14} y_z & +E_{11} \varepsilon L, \\ -Z_z &= D_{13} x_x + D_{13} y_y + D_{33} z_z, \\ -Y_z &= D_{14} x_x - D_{14} y_y & +D_{44} y_z & -E_{41} \varepsilon L, \\ -Z_y &= D_{14} x_x - D_{14} y_y & +D_{44} y_z & - (1 + E_{41}) \varepsilon L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-Z_x &= D_{55} z_x - D_{14} x_y - E_{52} \varepsilon M, \\
-X_x &= D_{55} z_x - D_{14} x_y - (1 + E_{52}) \varepsilon M, \\
-X_y &= -D_{14} z_x + \frac{D_{11} - D_{12}}{2} x_y - E_{62} \varepsilon M + \frac{1}{2} \varepsilon N, \\
-Y_x &= -D_{14} z_x + \frac{D_{11} - D_{12}}{2} x_y - E_{62} \varepsilon M - \frac{1}{2} \varepsilon N.
\end{aligned}$$

Darin haben die Coefficienten folgende Werthe:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= D_{11}^{11} - \frac{(D_{11}^{23} - D_{23}^{11})^2}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, & D_{33} &= D_{33}^{33}, & D_{12} &= D_{12}^{12}, & D_{13} &= D_{13}^{13}, \\
D_{14} &= \frac{D_{11}^{23}(D_{33}^{11} - D_{13}^{13}) + D_{23}^{11}(D_{11}^{33} - D_{13}^{13})}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, & D_{44} &= \frac{D_{13}^{13} D_{13}^{13} - D_{11}^{33} D_{33}^{11}}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, \\
E_{11} &= \frac{D_{11}^{23} - D_{23}^{11}}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, & E_{41} &= \frac{D_{11}^{33} - D_{13}^{13}}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, \\
E_{52} &= \frac{D_{33}^{11} - D_{13}^{13}}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}, & E_{62} &= \frac{D_{13}^{12} - D_{11}^{23}}{2D_{13}^{13} - (D_{11}^{33} + D_{33}^{11})}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Die Werthe weichen in mehrfacher Hinsicht erheblich von den für die hexagonalen Krystalle gültigen ab.

5) Die vorstehenden Formeln für die verschiedenen Krystallsysteme unterscheiden sich äusserlich von den gewöhnlich benutzten nur durch das Auftreten der Drehungsmomente L , M , N und der Drehungswinkel l , m , n , die sich nicht auf die Volumelemente des Krystalles, sondern auf die einzelnen Moleküle beziehen. Wir wollen die bezüglichen Glieder daher zuerst der Discussion unterwerfen.

Drehungen l , m , n der Moleküle, die selbstständig nicht mit dem ganzen Volumelement stattfinden, treten in Folge der gewöhnlichen mechanischen Einwirkungen¹⁾ im regulären System überhaupt nicht, im quadratischen und hexagonalen nur um die Nebenaxen auf; wir wollen daher die Formeln des rhombischen Systemes (46) und (47) als des niedrigsten, welches überhaupt die allgemeine Erscheinung zeigt, darauf hin befragen, ob sie gestatten, die bei einer beliebigen Defor-

1) Unter rein „mechanischen“ Einwirkungen verstehen wir solche, die L , M , N gleich Null werden lassen, also ausschliesslich fernwirkende Zugkräfte und Oberflächendrucke, — im Gegensatz zu Kräften electrischen oder magnetischen Ursprungs, welche den L , M , N endliche Werthe geben können.

mation eintretenden Molekulardrehungen wirklich zu berechnen; specieller, ob die Constanten, die ihre Grösse bestimmen, aus den Beobachtungen mit mechanischen Einwirkungen abzuleiten sind.

Diese Beobachtungsmethoden führen nach (47) zur Kenntniss der neun Constanten:

$$(56) \quad \frac{D_{23}^{23} D_{23}^{23} - D_{22}^{33} D_{33}^{22}}{2D_{23}^{23} - (D_{22}^{33} + D_{33}^{22})}, \quad \frac{D_{31}^{31} D_{11}^{31} - D_{33}^{11} D_{11}^{33}}{2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33})}, \quad \frac{D_{12}^{12} D_{12}^{12} - D_{11}^{22} D_{22}^{11}}{2D_{12}^{12} - (D_{11}^{22} + D_{22}^{11})}$$

während in den Gleichungen (46) für l, m, n die folgenden drei vorkommen:

$$\frac{D_{33}^{22} - D_{22}^{33}}{2D_{23}^{23} - (D_{22}^{33} + D_{33}^{22})}, \quad \frac{D_{11}^{33} - D_{33}^{11}}{2D_{31}^{31} - (D_{33}^{11} + D_{11}^{33})}, \quad \frac{D_{22}^{11} - D_{11}^{22}}{2D_{12}^{12} - (D_{11}^{22} + D_{22}^{11})}.$$

Man erkennt ohne alle Rechnung, dass die letzteren Aggregate von den ersteren unabhängig sind und kann sonach für das rhombische und um so mehr für die niedriger symmetrischen Krystallssysteme — aber, wie leicht zu sehen, auch für die höher symmetrischen — die folgende Behauptung aussprechen:

»Beobachtungen der Deformationen, welche durch rein mechanische Kräfte hervorgebracht werden, führen nicht zur Kenntniss derjenigen Constanten, von welchen die selbstständigen Molekulardrehungen abhängen«.

Diese Constanten würden sich aber bestimmen lassen, wenn es gelänge, Deformationen der Messung zu unterwerfen, welche durch auf die Moleküle ausgeübte Drehungsmomente L, M, N hervorgebracht werden. Solche Drehungsmomente sind vielleicht ausser durch electrostatische Kräfte in Krystallen auch durch die Einwirkung eines galvanischen Stromes in permanent magnetisirtem Stahl zu erhalten, falls man dessen Moleküle ähnlich wie die eines Krystalles als dauernd polarisirt ansehen darf.

Da das Problem noeh keine unmittelbare practische Bedeutung hat, so will ich nur an einem speciellen Falle darthun, wie eine der angeführten Einwirkungen in der That zur Bestimmung eines neuen Aggregates der D_{hk}^{mn} führt und dadurch die Mittel zur Erledigung der Frage bietet.

Sei gegeben ein rechteckiges Prisma aus einem rhombischen Krystall, die Begrenzungen parallel den krystallographischen Hauptebenen; auf dasselbe wirke ein constantes Moment L um die X -Axe, dazu tangentielle Kräfte auf die Flächen parallel der X -Axe; die Befestigung sei so gewählt, dass die Drehung des ganzen Prismas φ gleich Null ist. Dann gilt, falls die Kräfte P parallel der $\perp Y$ -Axe auf die Flächen normal zur $\perp Z$ -Axe wirken: $-Y_z = P$, $Z_y = 0$ und daher nach (33):

$$P = \varepsilon L$$

und nach (47):

$$y_z = \frac{\varepsilon L (D_{23}^{23} - D_{33}^{22})}{D_{23}^{23} D_{23}^{23} - D_{33}^{22} D_{22}^{33}};$$

dagegen wenn die Kräfte Q parallel der $\perp Z$ -Axe auf die Flächen normal der $\perp Y$ -Axe wirken, analog $-Y_z = 0$, $Z_y = Q$ und daher:

$$Q = \varepsilon L,$$

$$y_z = \frac{\varepsilon L (D_{22}^{33} - D_{23}^{23})}{D_{23}^{23} D_{23}^{23} - D_{33}^{22} D_{22}^{33}}.$$

Ist es also möglich die Winkeländerung $y_z/2$ zwischen den Flächen normal zur Y - und Z -Axe zu messen, so ist dadurch eine neue Constantenbestimmung gewonnen.

Beobachtungen ähnlicher Art mit Momenten M und N gestatten drei Beziehungen aufzustellen, welche mit den bekannten Constanten (56) vereint alle zwölf D_{ik}^{mn} berechnen lassen; durch sie ist dann auch die Molekulardrehung vollständig bestimmt. —

Für die weiteren Betrachtungen wollen wir nun rein mechanische Einwirkungen voraussetzen, also L , M , N in den Werthen der $X_x \dots$ gleich Null setzen, wodurch dann zugleich $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$ wird.

Wir erhalten so die Gestalt der elastischen Druckcomponenten, wie sie den bisherigen Beobachtungen über Krystallelasticität zum Grunde gelegt ist und es bietet sich die Frage, in welcher Weise die durch die Messungen erhaltenen Zahlenwerthe der darin auftretenden Constanten theoretisch zu verwerthen sind.

Zunächst bemerkt man, dass für den Fall nicht polarer Elementarwirkung, d. h. für allein von den relativen Entfernungen abhängige Wechselwirkung zwischen den Molekülen auch das Potential derselben F nur eine Function der relativen Entfernung r' sein kann, die gegeben ist durch:

$$r'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

hier ist dann z. B.:

$$\frac{\partial F}{\partial a'} = \frac{a'}{r'} \frac{\partial F}{\partial r'}$$

also

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a'^2} = \frac{1}{r'} \frac{\partial F}{\partial r'} + \frac{a'^2}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \frac{1}{r'} \frac{\partial F}{\partial r'}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a' \partial b'} = \frac{a' b'}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \frac{1}{r'} \frac{\partial F}{\partial r'}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a' \partial c'} = \frac{a' c'}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \frac{1}{r'} \frac{\partial F}{\partial r'};$$

da nun nach (26) die neun Summen von der Form

$$\sum (a' A') = -\sum \left(a' \frac{\partial F}{\partial a'} \right), \quad \sum (a' B') = -\sum \left(a' \frac{\partial F}{\partial b'} \right)$$

verschwinden, so sind für nicht polare Kräfte auch die mit ihnen identischen sechs Summen von der Form

$$\sum \frac{a'^2}{r'} \frac{\partial F}{\partial r'}, \quad \sum \frac{a' b'}{r'} \frac{\partial F}{\partial r'}$$

gleich Null und wir erhalten aus Obigem:

$$\sum \left(a'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial a'^2} \right) = \sum \frac{a'^4}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \frac{1}{r'} \frac{\partial F}{\partial r'}, \quad \sum \left(b' c' \frac{\partial^2 F}{\partial a'^2} \right) = \sum \frac{a'^2 b' c'}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \frac{1}{r'} \frac{\partial F}{\partial r'}$$

u. s. f. Hieraus folgt für nicht polare Kräfte die charakteristische Bedingung:

$$D_{hk}^{mn} = D_{mn}^{hk} = D_{hn}^{km} = D_{kn}^{hm} \text{ etc.},$$

oder die Regel, dass sich die vier Indices eines D_{hk}^{mn} beliebig mit einander vertauschen lassen.

Ihre Berücksichtigung lässt erkennen, dass aus dem allgemeinen System (29) die Molekulardrehungen vollständig verschwinden und das System Coefficienten für triklone Krystalle gegeben ist durch das Schema:

	x_x	y_y	z_z	y_z	z_x	x_y
$-X_x$	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}
$-Y_y$	D_{12}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}	D_{26}
$-Z_z$	D_{13}	D_{23}	D_{33}	D_{34}	D_{35}	D_{36}
$-Y_z$	D_{14}	D_{24}	D_{34}	D_{23}	D_{36}	D_{25}
$-Z_x$	D_{15}	D_{25}	D_{35}	D_{36}	D_{31}	D_{14}
$-X_y$	D_{16}	D_{26}	D_{36}	D_{25}	D_{14}	D_{12}

(57)

welches 15 verschiedene Constanten enthält. Es unterscheidet sich von System (39) ausser durch die Abwesenheit der Glieder mit L, M, N durch die Gültigkeit der sechs Bedingungen:

$$D_{44} = D_{23}, D_{55} = D_{31}, D_{66} = D_{12}, D_{56} = D_{14}, D_{64} = D_{25}, D_{45} = D_{36}. \quad (57')$$

Man kann also schliessen, dass in Krystallen, für welche die Beobachtung diese Bedingungen als erfüllt zeigt, die Molekularwirkungen nahe gleichmässig nach allen Richtungen stattfinden, die Moleküle also nur sehr geringe Polarität besitzen.

Stimmen die Beobachtungen mit diesen Relationen nicht überein, so kann man unter Umständen aus dem Sinne der Abweichungen einen Schluss über das Verhalten der Elementarwirkung ziehen.

Sei Beispiels halber das Elementarpotential F rings um die Z -Axe constant also nur eine Function von $e'^2 = a'^2 + b'^2$ und c' , so kann man in allen denjenigen D_{hk}^{mn} welche nur die Indices 1 und 2 enthalten, diese beliebig vertauschen, also setzen $D_{11}^{22} = D_{22}^{11} = D_{12}^{12}$, $D_{11}^{12} = D_{12}^{11}$, $D_{22}^{12} = D_{12}^{22}$, ebenso wenn der eine der oberen oder unteren Indices 3 ist, also setzen $D_{11}^{32} = D_{12}^{31}$, $D_{22}^{31} = D_{12}^{32}$, $D_{32}^{11} = D_{31}^{12}$, $D_{31}^{22} = D_{32}^{12}$, $D_{31}^{32} = D_{32}^{31}$; die übrigen Relationen sind aber nicht gültig.

Für einen hexagonalen Krystall mit der Z -Axe als Hauptaxe würde dies nach (51) ergeben $3D_{12}^{12} = D_{11}^{11}$, also D_{66} , den Factor von x_y in der Gleichung für $-X_y$ in (52) gleich D_{12}^{12} .

6. Nach dem Vorgang von Navier, Poisson, Cauchy hat man bisher, soweit mir bekannt, stets um die durch Berechnung der Molekularwirkungen erhaltenen allgemeinen elastischen Gleichungen für isotrope Medien zu specialisiren, in dieselben die Annahme eingeführt, dass

jene Medien Moleküle besitzen, welche keine Polarität zeigen und in allen Richtungen hin im Mittel gleichmässig angeordnet sind. So ist man zu der Relation zwischen den beiden Elasticitätsconstanten für isotrope Medien gelangt, welche als im Widerspruch mit der Beobachtung, so vielfach Anstoss erregt hat.

Aber jene eingeführte Hypothese ist im Grunde ausserordentlich willkürlich, denn einer Substanz, die in krystallisirter Modification polarisirte Moleküle besitzt, kann man wohl kaum in amorpher Modification unpolarisirte Moleküle zuschreiben, und wenn, wie wir wissen, die rein mechanischen Einwirkungen zu grob sind, um auf die einzelnen Moleküle zu wirken, so ist es doch überaus plausibel, anzunehmen, dass auch bei der Bildung amorpher Körper stets zunächst kleinere oder grössere Krystallfragmente entstehen und erst diese durch die mechanischen Kräfte durcheinander gerührt werden. Die Thatsache, dass wir für jede Art von Gesteinen — von den mit blossem Auge bis zu den nur mit starken Vergrösserungen in Aggregate von Krystallfragmenten auflösbaren — Beispiele in Menge kennen, bestätigt diese Anschauung.

Ihre theoretische Verfolgung liefert aber hinsichtlich der Elasticitätsverhältnisse ganz andere Resultate als die Annahme unpolarisirter Moleküle.

Einem sehr kleinen Flächenelement lagern nach ihr in einer homogenen Substanz Krystallfragmente in allen möglichen Orientirungen an und die resultirenden Werthe der Druckcomponenten werden demgemäss als die Mittelwerthe erhalten von denjenigen, die sich für die regelmässig krystallisirte Substanz bei allen möglichen Orientirungen des Flächenelementes gegen den Krystall ergeben.

Diese Mittelwerthe sind nun zu berechnen. Man benutzt hierzu am besten das Potential der elastischen Kräfte, welches defnirt ist durch:

$$-X_x = \frac{\partial F}{\partial x_x}, \quad -X_y = -Y_x = \frac{\partial F}{\partial x_y} \text{ u. s. f.}$$

und im allgemeinsten Falle eines triklinen Krystalles eine Function zweiten Grades der $x_x \dots$ mit 21 Constanten ist.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$x_x = x_1, \quad y_y = x_2, \quad z_z = x_3, \quad y_z = x_4, \quad z_x = x_5, \quad x_y = x_6,$$

so kann man kurz schreiben:

$$2F = \sum_m \sum_n D_{mn} x_m x_n, \tag{58}$$

die Summe von 1 bis 6 genommen.

Nun sei ein zweites Coordinatensystem Ξ, H, Z in seiner Lage gegen X, Y, Z gegeben durch:

$$\begin{aligned} x &= \xi \alpha_1 + \eta \beta_1 + \zeta \gamma_1, & \xi &= x \alpha_1 + y \alpha_2 + z \alpha_3, \\ y &= \xi \alpha_2 + \eta \beta_2 + \zeta \gamma_2, & \eta &= x \beta_1 + y \beta_2 + z \beta_3, \\ z &= \xi \alpha_3 + \eta \beta_3 + \zeta \gamma_3, & \zeta &= x \gamma_1 + y \gamma_2 + z \gamma_3, \end{aligned} \tag{59}$$

und die Deformationsgrößen, auf dieses bezogen, ähnlich abgekürzt:

$$\xi_\xi = \xi_1, \quad \eta_\eta = \xi_2, \quad \zeta_\zeta = \xi_3, \quad \eta_\zeta = \xi_4, \quad \zeta_\xi = \xi_5, \quad \xi_\eta = \xi_6,$$

so muss sich in denselben ausdrücken:

$$2F = \sum_\mu \sum_\nu \Delta_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu \tag{60}$$

die Summen ebenfalls von 1 bis 6 ausgedehnt. Darin sind die $\Delta_{\mu\nu}$ die »abgeleiteten Elasticitätsconstanten« der Substanz für das System Ξ, H, Z .

Die letztere Form des Potentials muss mittelst der Gleichungen (59) aus der ersten folgen. Aus denselben schliessen wir zunächst die Relationen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1^2 \xi_1 + \gamma_1^2 \xi_2 + \gamma_1^2 \xi_3 + \beta_1 \gamma_1 \xi_4 + \gamma_1 \alpha_1 \xi_5 + \alpha_1 \beta_1 \xi_6 = \sum_\nu c_{1\nu} \xi_\nu, \\ x_2 &= \alpha_2^2 \xi_1 + \beta_2^2 \xi_2 + \gamma_2^2 \xi_3 + \beta_2 \gamma_2 \xi_4 + \gamma_2 \alpha_2 \xi_5 + \alpha_2 \beta_2 \xi_6 = \sum_\nu c_{2\nu} \xi_\nu, \\ x_3 &= \alpha_3^2 \xi_1 + \beta_3^2 \xi_2 + \gamma_3^2 \xi_3 + \beta_3 \gamma_3 \xi_4 + \gamma_3 \alpha_3 \xi_5 + \alpha_3 \beta_3 \xi_6 = \sum_\nu c_{3\nu} \xi_\nu, \\ x_4 &= 2\alpha_2 \alpha_3 \xi_1 + 2\beta_2 \beta_3 \xi_2 + 2\gamma_2 \gamma_3 \xi_3 + (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) \xi_4 + (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) \xi_5 + (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3) \xi_6 = \sum_\nu c_{4\nu} \xi_\nu, \\ x_5 &= 2\alpha_3 \alpha_1 \xi_1 + 2\beta_3 \beta_1 \xi_2 + 2\gamma_3 \gamma_1 \xi_3 + (\beta_3 \gamma_1 + \gamma_3 \beta_1) \xi_4 + (\gamma_3 \alpha_1 + \alpha_3 \gamma_1) \xi_5 + (\alpha_3 \beta_1 + \beta_3 \alpha_1) \xi_6 = \sum_\nu c_{5\nu} \xi_\nu, \\ x_6 &= 2\alpha_1 \alpha_2 \xi_1 + 2\beta_1 \beta_2 \xi_2 + 2\gamma_1 \gamma_2 \xi_3 + (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) \xi_4 + (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) \xi_5 + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) \xi_6 = \sum_\nu c_{6\nu} \xi_\nu, \end{aligned} \tag{61}$$

die kurz in:

$$x_n = \sum_\nu c_{n\nu} \xi_\nu$$

zusammengefasst werden können.

Ihre Einführung in (58) giebt

$$\begin{aligned} 2F &= \sum_m \sum_n D_{mn} \sum_v c_{nv} \xi_v \sum_u c_{mu} \xi_u \\ &= \sum_{\mu} \sum_v \xi_v \xi_{\mu} \sum_m \sum_n D_{mn} c_{m\mu} c_{nv} \end{aligned}$$

woraus durch Vergleichung mit (60) folgt:

$$\Delta_{\mu\nu} = \sum_m \sum_n D_{mn} c_{m\mu} c_{nv}.$$

Die $\Delta_{\mu\nu}$ sind von der Lage des Coordinatensystems abhängig; bilden wir ihren Mittelwerth ($\Delta_{\mu\nu}$) für alle möglichen Lagen desselben, so erhalten wir nach dem Obengesagten denjenigen Coefficienten, mit welchem das Product $x_\mu x_\nu$ oder $\xi_\mu \xi_\nu$ in der Form des Potentials auftritt, die nach der entwickelten Vorstellung einer isotropen Substanz entspricht, falls sie als ein Aggregat sehr vieler verschieden orientirter Krystallfragmente angesehen werden kann.

Da wir nach den Symmetrieverhältnissen wissen, dass nur die Coefficienten

$$(62) \quad \begin{aligned} (\Delta_{11}) &= (\Delta_{22}) = (\Delta_{33}) = A, & (\Delta_{23}) &= (\Delta_{31}) = (\Delta_{12}) = B, \\ (\Delta_{44}) &= (\Delta_{55}) = (\Delta_{66}) = C = \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

von Null verschieden sein können, so reducirt sich die Aufgabe auf die Berechnung von nur dreien resp. nur zweien von ihnen.

Es ist zunächst

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= D_{11} a_1^4 + 2D_{12} a_1^2 a_2^2 + 2D_{13} a_1^2 a_3^2 + 2D_{14} a_1^2 a_2 a_3 + 2D_{15} a_1^2 a_3 a_1 + 2D_{16} a_1^2 a_1 a_2 \\ &\quad + D_{22} a_2^4 + 2D_{23} a_2^2 a_3^2 + 2D_{24} a_2^2 a_2 a_3 + 2D_{25} a_2^2 a_3 a_1 + 2D_{26} a_2^2 a_1 a_2 \\ &\quad + D_{33} a_3^4 + 2D_{34} a_3^2 a_2 a_3 + 2D_{35} a_3^2 a_3 a_1 + 2D_{36} a_3^2 a_1 a_2 \\ &\quad + 4D_{44} a_2^2 a_3^2 + 8D_{45} a_2 a_3 a_3 a_1 + 8D_{46} a_2 a_3 a_1 a_2 \\ &\quad + 4D_{55} a_3^2 a_1^2 + 8D_{56} a_3 a_1 a_1 a_2 \\ &\quad + 4D_{66} a_1^2 a_2^2. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass bei der Bildung des Mittelwerthes hierin alle Glieder verschwinden müssen, die eine ungerade Potenz eines der Richtungs-cosinus a_1, a_2, a_3 enthalten; schreiben wir diese Glieder nicht aus, so ist kürzer:

$$(63') \quad \begin{aligned} \Delta_{11} &= (D_{11} a_1^4 + D_{22} a_2^4 + D_{33} a_3^4) + 4(D_{44} a_2^2 a_3^2 + D_{55} a_3^2 a_1^2 + D_{66} a_1^2 a_2^2) \\ &\quad + 2(D_{23} a_2^2 a_3^2 + D_{31} a_3^2 a_1^2 + D_{12} a_1^2 a_2^2) + \dots \end{aligned}$$

Lässt man in den andern $\Delta_{\mu\nu}$ ebenfalls diejenigen Glieder hinweg, die nach Symmetrierücksichten aus dem Endresultat herausfallen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= (D_{11}\alpha_1^2\beta_1^2 + D_{22}\alpha_2^2\beta_2^2 + D_{33}\alpha_3^2\beta_3^2) + 4(D_{44}\alpha_2\alpha_3\beta_2\beta_3 + D_{55}\alpha_3\alpha_1\beta_3\beta_1 + D_{66}\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2) \\ &\quad + [D_{23}(\alpha_2^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_2^2) + D_{31}(\alpha_3^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_3^2) + D_{12}(\alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2)] + \dots, \quad (63'') \\ \Delta_{44} &= (D_{11}\beta_1^2\gamma_1^2 + D_{22}\beta_2^2\gamma_2^2 + D_{33}\beta_3^2\gamma_3^2) + [D_{44}(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2)^2 + D_{55}(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3)^2 + D_{66}(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)^2] \\ &\quad + 2(D_{23}\beta_2\gamma_2\beta_3\gamma_3 + D_{31}\beta_3\gamma_3\beta_1\gamma_1 + D_{12}\beta_1\gamma_1\beta_2\gamma_2) + \dots \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Mittelwerthe dieser $\Delta_{\mu\nu}$ kommt heraus auf die Berechnung der fünf durch die Klammern als solche bezeichneten Mittelwerthe:

$$(\alpha_h^4), (\alpha_h^2\alpha_k^2), (\alpha_h^2\beta_h^2), (\alpha_h^2\beta_k^2), (\alpha_h\beta_h\alpha_k\beta_k),$$

denn nach Symmetrieeen fallen alle vorhandenen Glieder beim Nehmen des arithmetischen Mittels mit einem dieser fünf zusammen.

Zur Berechnung dieser Grössen wollen wir specieller die Fälle:

$$(\alpha_3^4), (\alpha_1^2\alpha_2^2), (\alpha_1^2\beta_1^2), (\alpha_1^2\beta_2^2), (\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2)$$

in Betracht ziehen. Wir können dann setzen, wenn der Winkel der Richtung Ξ mit der Z -Axe φ , der Winkel zwischen der Ebene $\mathbf{XZ}$ und ΞZ aber χ genannt wird:

$$\alpha_3 = \cos \varphi, \quad \alpha_1 = \sin \varphi \cos \chi, \quad \alpha_2 = \sin \varphi \sin \chi.$$

Setzt man ferner den Winkel zwischen den Ebenen ΞX und ΞY gleich ψ , den zwischen ΞX und ΞH gleich ω so ist:

$$\beta_1 = \cos \omega \sqrt{1 - \alpha_1^2}, \quad \beta_2 = \cos(\psi - \omega) \sqrt{1 - \alpha_2^2}.$$

Die ersten beiden Mittelwerthe sind von den Richtungscosinussen nur einer der Axen Ξ, H, Z zu nehmen, sie erhalten sich also durch einfache Integration über eine Kugelfläche und Division durch 4π .

$$\begin{aligned} (\alpha_3^4) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^\pi d\varphi \cos^4 \varphi \sin \varphi = \frac{1}{5} \\ (\alpha_1^2\alpha_2^2) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\chi \cos^2 \chi \sin^2 \chi \int_0^\pi \sin^5 \varphi d\varphi = \frac{1}{15}. \end{aligned} \quad (64')$$

Die letzteren beziehen sich auf die Richtungscosinus zweier Axen; um für diese alle möglichen Lagen zu erhalten drehen wir zunächst die H -Axe um die Ξ durch Integration über ω und bewegen dann die

Ξ -Axe indem wir über eine Kugelfläche integrieren; der Nenner ist hier also $8\pi^2$. So erhält man:

$$\begin{aligned}(\alpha_1^2 \beta_1^2) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\varphi d\chi \sin^3 \varphi \cos^2 \chi (1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \chi) \int_0^{2\pi} d\omega \cos^2 \omega = \frac{1}{15} \\(64'') \quad (\alpha_1^2 \beta_2^2) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\varphi d\chi \sin^3 \varphi \cos^2 \chi (1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \chi) \int_0^{2\pi} d\omega \cos^2(\psi - \omega) = \frac{2}{15} \\(\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2) &= \\ \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\varphi d\chi \sin^3 \varphi \cos \chi \sin \chi \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \chi} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \chi} \int_0^{2\pi} d\omega \cos \omega \cos(\psi - \omega) \\ &= -\frac{1}{30}.\end{aligned}$$

Setzt man kurz:

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = 3A, \quad D_{23} + D_{31} + D_{12} = 3B, \quad D_{44} + D_{55} + D_{66} = 3\Gamma,$$

so ergibt sich hiernach aus (63):

$$\begin{aligned}(65) \quad A &= (\Delta_{11}) = \frac{1}{5}(3A + 2B + 4\Gamma), \\ B &= (\Delta_{12}) = \frac{1}{5}(A + 4B - 2\Gamma), \\ C &= (\Delta_{44}) = \frac{1}{5}(A - B + 3\Gamma).\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$C = \frac{A - B}{2}$$

in Uebereinstimmung mit dem Resultate aller anderen Theorien; aber die anstössige Relation

$$A = 3B$$

ergibt sich nur für den speciellen Werth $B = \Gamma$, der zwar, wie wir gesehen haben, nothwendig auftritt, wenn man Moleküle ohne Polarität voraussetzt, der aber durch die allgemeine Theorie nicht geliefert wird.

Durch die Annahme polarisirter Moleküle, welche aus vielen andern Gründen geboten erscheint, wird also der Widerspruch zwischen der molekularen Elasticitätstheorie und der Beobachtung vollständig gehoben.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen](#)

Jahr/Year: 1887

Band/Volume: [34](#)

Autor(en)/Author(s): Voigt Woldemar

Artikel/Article: [Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. 3-52](#)