

Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung der K. Ges. d. Wiss. am 2. August 1890.

§ 1. Ziele und Grundannahmen der Theorie.

Die grosse Reihe von Analogieen, welche nach der Beobachtung zwischen der electricen Erregung von Krystallen durch äussere Kräfte einerseits, durch Temperaturänderungen andererseits besteht, hat schon mehrere Forscher zu der Anschauung geführt, dass bei beiden Vorgängen die Deformation der Volumenelemente, gleichviel, ob sie durch Druck oder Erwärmung veranlasst ist, die directe Vorbedingung der electricen Erscheinungen bildet¹⁾. Eine allseitige und befriedigende Prüfung dieser Ansicht war nicht möglich, solange dieselbe nicht zur Grundlage einer strengen Theorie gemacht war, welche alle bezüglichen Erscheinungen auf die kleinstmögliche Anzahl von Constanten zurückführt und, nach deren Bestimmung aus den Beobachtungen, die bei verschiedenen Einwirkungen stattfindenden Erregungen nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ im Voraus zu berechnen gestattet.

Wenn ich unternommen habe, diese Theorie zu liefern, so war ich mir wohl bewusst, in mancher Hinsicht zunächst nur eine erste Näherung zu bieten. Denn die in Wirklichkeit bei piëzo- oder pyroelectricen Erregungen sich abspielenden Vorgänge sind äusserst complicirte. Ein einseitiger auf ein Krystallprisma ausgeübter Druck z. B. ändert in jedem Volumenelement das anfängliche electriche Moment, und die neue

1) Zuerst ausgesprochen von J. und P. Curie, C. R. **91**, 295, 1880, weiter besonders vertreten von W. C. Röntgen, Wied. Ann. **19**, 513, 1883.

electrische Vertheilung selbst bewirkt einerseits eine fernere von dem ausgeübten Druck direct nicht abhängige Deformation, andererseits erregt sie durch ihre inducirende Wirkung eine electrische Vertheilung zweiter Ordnung, die ihrerseits weiter deformirend und polarisirend wirkt. Ferner begleiten die Deformation, auch wenn sie ohne Wärmezufuhr von aussen stattfindet, Wärmeentwicklungen im Innern, die theils direct, theils durch ihren Einfluss auf die Deformationen pyro- und piëzo-electrisch erregend wirken.

Von allen diesen Wirkungen zweiter und höherer Ordnung soll im Folgenden abgesehen werden, d. h. es sollen die electrischen Erregungen in jedem Volumenelement als die Functionen der Deformationen nur eben dieses Volumenelementes betrachtet und weiter diese Deformationen aus den wirkenden Kräften und aus der stattfindenden Temperaturvertheilung nach den Regeln der gewöhnlichen Elasticitätstheorie und unter Benutzung der ohne Rücksicht auf die electrischen Erscheinungen bestimmten Constanten berechnet werden. Je kleiner die in jedem Volumenelement geschiedenen Electricitätsmengen sind, um so genauer wird hiernach im Allgemeinen die zu entwickelnde Theorie der Wirklichkeit entsprechen.

Im Grunde verfährt man in anderen Gebieten der Physik nicht anders, als soeben auseinandergesetzt; speciell die Elasticitätstheorie ist zunächst ohne Rücksicht auf diese Wirkungen zweiter Ordnung, z. B. thermischer Art, entwickelt und gilt streng nur für unendlich kleine Deformationen, hat sich aber auch bei sehr beträchtlichen äusserst vollkommen bestätigt. Die Wirkungen zweiter Ordnung sind dann später in zugefügten Correctionsgliedern zur Berücksichtigung gelangt und solche Glieder lassen sich ohne principielle Schwierigkeit, freilich nicht ohne grossen Aufwand von Rechnung auch bei unserm Problem entwickeln. Wie weit die auf einen Krystall ausgeübten mechanischen und thermischen Wirkungen gesteigert werden können, ohne dass deren Heranziehung erforderlich ist, hat die Beobachtung zu entscheiden.

Gemäss dem Gesagten betrachten wir weiterhin die electrischen Momente A , B , C der Volumeneinheit parallel den Axen X , Y , Z an

irgend einer Stelle x, y, z des Krystalles als Functionen nur der, aus den auf ihn ausgeübten Wirkungen zu bestimmenden, Deformationen $x_x, y_y, z_z, y_x, z_x, x_y$ an eben derselben Stelle. Welche Werthe die A, B, C in dem sogenannten natürlichen Zustande des Krystalles, d. h. bei normaler Temperatur und ohne Einwirkung äusserer Kräfte besitzen, ist uns im Allgemeinen unbekannt; bei einigen Krystallsystemen ist allerdings aus Symmetrierücksichten klar, dass sie im natürlichen wie in jedem in Folge von constantem Druck oder constanter Temperatur dilatirten Zustande verschwindende electricische Momente haben müssen; wo dies aber nicht stattfindet, besitzt in Folge der gleich viel wie geringen Leitungsfähigkeit seiner Oberfläche ein jeder Krystall von vorn herein eine electricische Oberflächenladung, welche die Wirkung der inneren Vertheilung für alle äussern Punkte compensirt. Diese Oberflächenschicht verändert sich, wenn sich die Momente im Innern ändern, und nimmt bei jedem deformirten Zustand des Krystalles, der längere Zeit andauert, allmählich wieder eine solche Dichte an, dass die Wirkung der innern Polarisation auf äussere Punkte vernichtet wird.

Denken wir den veränderten Zustand schnell hergestellt, so können wir für die erste Zeit von dieser zeitlichen Aenderung der Oberflächenschicht absehen. Es kommen dann die Aenderungen der electricischen Momente gegenüber den ursprünglichen Werthen A^0, B^0, C^0 auf äussere Punkte voll zur Wirkung; und diese Zuwachse

$$A - A^0 = a, \quad B - B^0 = b, \quad C - C^0 = c$$

wollen wir weiterhin der Untersuchung unterwerfen und kurz als die erregten Momente bezeichnen; ob der ursprüngliche Zustand der sogenannte natürliche oder ein irgendwie deformirter ist, kommt hierbei nicht in Betracht, wenn derselbe nur lange genug bestanden hatte, um die vollständige Ausbildung der Oberflächenbelegung zu gestatten.

Gemäss der Beobachtung, dass die erregten Electricitäten mit den sie bewirkenden Deformationen das Vorzeichen wechseln, müssen die Momente a, b, c ungerade Functionen der Deformationen $x_x \dots$ sein,

und die in der Elasticitätstheorie überhaupt und hier von Neuem festgesetzte Beschränkung auf unendlich kleine Deformationen gestattet uns, dieselben als lineäre Functionen zu betrachten. Wir machen daher den allgemeinen Ansatz

$$\begin{aligned}
 1) \quad a &= \varepsilon_{11} x_x + \varepsilon_{12} y_y + \varepsilon_{13} z_z + \varepsilon_{14} y_z + \varepsilon_{15} z_x + \varepsilon_{16} x_y, \\
 b &= \varepsilon_{21} x_x + \varepsilon_{22} y_y + \varepsilon_{23} z_z + \varepsilon_{24} y_z + \varepsilon_{25} z_x + \varepsilon_{26} x_y, \\
 c &= \varepsilon_{31} x_x + \varepsilon_{32} y_y + \varepsilon_{33} z_z + \varepsilon_{34} y_z + \varepsilon_{35} z_x + \varepsilon_{36} x_y,
 \end{aligned}$$

in welchem die achtzehn piëzoelectrischen Constanten ε_{hk} von der Substanz des Krystalles und der Lage des Coordinatensystems X, Y, Z in ihm abhängig sind. Besitzt der Krystall Symmetrieen, so lässt sich für passend gewählte Coordinatensysteme ihre Anzahl bedeutend reduciren und dadurch der Ansatz (1) vereinfachen.

Sind die Momente a, b, c für jede Stelle aus den ausgeübten Wirkungen gemäss dem Ansatz (1) bestimmt, so folgt aus ihnen das Potential des erregten Krystalles auf einen äussern positiv electricischen Einheitspunkt in x_1, y_1, z_1 gemäss der bekannten Formel

$$2) \quad V = \int \left(a \frac{\partial^1}{\partial r} + b \frac{\partial^1}{\partial y} + c \frac{\partial^1}{\partial z} \right) dk,$$

in welcher dk das Volumenelement des Krystalles und r seinen Abstand von dem Punkte x_1, y_1, z_1 bezeichnet. Sind a, b, c stetige Functionen der Coordinaten, und bezeichnet n die äussere Normale auf der Oberfläche des Krystalles, so erhält man durch theilweise Integration

$$\begin{aligned}
 3) \quad V &= \int \left(\bar{a} \cos(n, x) + \bar{b} \cos(n, y) + \bar{c} \cos(n, z) \right) \frac{do}{r} \\
 &\quad - \int \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) \frac{dk}{r},
 \end{aligned}$$

also das Newton'sche Potential einer Oberflächenbelegung von der Dichte

$$3') \quad \bar{\varepsilon} = \bar{a} \cos(n, x) + \bar{b} \cos(n, y) + \bar{c} \cos(n, z)$$

und einer räumlichen Vertheilung von der Dichte

$$3'') \quad \varepsilon = - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right).$$

Für der Oberfläche sehr nahe Punkte ist die erstere Grösse unter Umständen für die Art der erfolgenden Einwirkung massgebend; dies kommt besonders für das Verständniss der Resultate des Kundt'schen Bestäubungsverfahrens in Betracht. —

Es erscheint nothwendig, einige Worte über das Verhältniss der im Vorstehenden entwickelten Vorstellung zu der von Sir W. Thomson¹⁾ zunächst nur für Krystalle mit einer polaren Symmetrieaxe aufgestellten, und neuerdings besonders von meinem verehrten Freund E. Riecke²⁾ vertretenen und fortentwickelten Theorie zu sagen. Auch diese betrachtet die Aenderungen der electricischen Momente als lineäre Funktionen der Deformationen, welche der Krystall durch die gleichförmig vorausgesetzte Erwärmung erleidet; aber sie macht die specielle Annahme, dass die Einwirkung nur in soweit eintritt, als durch eine Dilatation des Volumens im Innern und eine Aenderung der Grösse der mit einer Oberflächenschicht bedeckten Flächen der Werth des ursprünglich vorhandenen Momentes der Volumeneinheit und die Dichte der Oberflächenschicht verändert wird. Diese Beschränkung hat bei dem speciellen von Herrn Riecke behandelten Problem der Pyroelectricität des Turmalines nichts Bedenkliches, wie denn auch der obige allgemeine Ansatz bis auf eine andere Bedeutung der Constanten im Falle der homogenen Erwärmung für den Turmalin ein mit dem Resultat von Herrn Riecke verträgliches liefert; aber bei einer Anwendung auf andere Fälle, als den genannten, hätte sie jedenfalls beseitigt werden müssen.

Denn einerseits vermag die so specialisirte Annahme nur die Veränderung eines schon vorhandenen Momentes, aber nicht die Entstehung eines ganz neuen zu erklären. Es giebt aber Krystalle, von denen wir aus ihren Symmetrieverhältnissen wissen, dass sie im natürlichen und jedem gleichförmig dilatirten

1) W. Thomson, Nichols Cyclopaedia of Phys. Sc. 2. ed. 1860, Math. phys. Papers 1. 315, 1882.

2) E. Riecke, Nachr. v. d. Gött. Ges. d. Wiss. 1887, 151, Wied. Ann. 31, 889, 1887.

Zustände keine electricischen Momente besitzen können, und in denen doch bei ungleichförmigen Dilatationen erfahrungsgemäss dergleichen eintreten. Ein Beispiel hierfür ist der Quarz, der nach Symmetrie im gleichförmig dilatirten Zustande drei gleiche electricische Axen haben müsste, also, da ein Körper nach der Definition der Hauptaxe als der Richtung grössten electricischen Momentes, wie bekannt, nur eine Hauptaxe haben kann, keine dergleichen haben muss, und der doch bei ungleichförmiger Dilatation electricisch erregt wird.

Und andererseits ist mit der erwähnten Beschränkung unvereinbar die Electricisirung eines Krystalles durch eine Deformation, welche seine Gestalt und seine Dichte un geändert lässt, wie z. B. die Drillung eines Kreiscylinders. Dass eine solche Erregung aber nicht existiren könne, ist schon von vorn herein nicht wahrscheinlich; ausserdem scheinen gewisse Beobachtungen von Herrn Röntgen das Gegentheil zu beweisen.

Hieraus folgt aber, dass für eine Erweiterung der Theorie, wie sie hier beabsichtigt ist, auch die Grundvorstellung Sir W. Thomsons einer Erweiterung bedurfte.

Dass ich dabei neben der in dem Ansatz (1) ausgesprochenen directen Einwirkung der Deformationen auf die electricischen Momente nicht noch die indirecte, welche durch die Aenderung der Dichte des Krystalles eintritt, ausdrücklich einführte, ist erklärlich, denn der Ansatz (1) ist so allgemein, dass er jene Wirkung, wenn man will, schon mit umfasst.

Nicht dasselbe gilt von der zweiten indirecten Wirkung, welche die Veränderung der inducirten Oberflächenbelegung in Folge der Dilatation der Oberflächenelemente betrifft. Diese ist nicht in dem Ansatz (1) enthalten, aber ich habe sie nicht in meine Theorie aufgenommen, weil ich keine Erscheinung kenne, die zur Erklärung die Annahme erfordert, dass jene Aenderungen der Oberflächendichte eine merkliche Stärke haben. Offenbar müsste man, um dieser Ursache einen erheblichen Antheil an den beobachteten Erscheinungen zu geben, der gesammten Dichte der Oberflächenladung eine enorme Grösse beilegen,

denn die Dilatationen, mit denen man experimentirt, sind ausserordentlich klein. Hält man dagegen, dass, wie oben erwähnt, eine ganze Anzahl von Krystallen nachweislich im natürlichen, wie im gleichförmig dilatirten Zustande nach Symmetrie gar keine Oberflächenladung haben können, aber bei mechanischen oder thermischen Einwirkungen Ladungen von derselben Grössenordnung zeigen, wie Krystalle, die ursprünglich eine Oberflächenladung besitzen können, so wird eine erhebliche Einwirkung der directen Veränderung der Oberflächenladung durch die Deformation nicht besonders wahrscheinlich. Es ist indessen klar und soll am Schlusse dieser Abhandlung noch besonders gezeigt werden, dass, wenn es irgend welche Beobachtungen fordern sollten, die Berücksichtigung dieses Umstandes nachträglich noch leicht erfolgen könnte. —

Was die im Folgenden gemachten Anwendungen der Theorie betrifft, so mussten dieselben in erster Linie die Ermöglichung einer Prüfung durch die Vergleichung mit schon vorliegenden Beobachtungen bezwecken. Wenngleich nun von diesen nur eine kleine Zahl — besonders solche der Herrn J. und P. Curie, Czermak und Röntgen — unter Verhältnissen angestellt ist, die eine Berechnung gestatten, so haben die der Theorie zugänglichen Fälle doch eine so vollständige Bestätigung der abgeleiteten Formeln in qualitativer und quantitativer Hinsicht erbracht, dass diese Prüfung als von der Theorie bestanden bezeichnet werden darf.

Um so mehr schien es mir geboten, in zweiter Linie auch Anwendungen der Theorie zu geben, welche die Directiven dafür liefern, in welchen Richtungen neue hierher gehörige Erscheinungen zu erwarten sind. Ich habe demgemäss im Folgenden Tafeln aufgestellt, die — meist für alle Krystallsysteme — diejenigen electricen Erregungen übersichtlich zusammenstellen, welche durch die einfachsten mechanischen und thermischen Einwirkungen, speciell allseitig gleichen Druck, einseitigen Druck, Biegung, Drillung, gleichförmige Erwärmung, oberflächliche Erwärmung, hervorgebracht werden können.

Man wird in denselben eine Fülle von Erscheinungen angedeutet finden, welche bisher noch nicht der Gegenstand der Untersuchung

gewesen sind und auf welche in der That die nicht durch eine Theorie geleitete Beobachtung kaum kommen konnte. Dabei ist allerdings zu bedenken, dass das Detail der angedeuteten Erscheinungen von den Werthen der piëzoelectrischen Constanten ϵ_{hk} für jeden einzelnen Krystall abhängt und demnach in manchen Fällen vor der Bestimmung dieser Constanten — zu welcher die Theorie die Mittel liefert — nicht zu übersehen ist. Nur in einzelnen Fällen werden die Erscheinungen bloß von einer Constante abhängig und lassen sich daher allgemein vollständig bestimmen; bei regulären Krystallen gilt dies stets, bei andern nur für bestimmte specielle Erscheinungen, z. B. für die Erregung einer oberflächlich erwärmten oder abgekühlten Kugel.

§. 2. Die electricischen Momente als Functionen der Deformationen bestimmt für sämtliche Krystallsysteme.

Der im Vorstehenden gemachte Ansatz (1) ist der allgemeinst mögliche und gilt für einen Krystall ohne alle Symmetrieen oder wenigstens für ein Coordinatensystem, welches in keinem Zusammenhang mit einem dem Krystall eignen Symmetrieaxensystem steht.

Wir wollen im Folgenden die Vereinfachungen entwickeln, welche sich ergeben, wenn ein Krystallsystem Symmetrieelemente besitzt und die Momente a , b , c auf ein geeignet gewähltes Coordinatensystem bezogen werden; dazu betrachten wir successive den Einfluss einer Symmetrieaxe, einer Symmetrieebene, eines Symmetriecentrums.

Bezüglich der Verwerthung dieser Symmetrieelemente machen wir dieselbe Annahme, welche sich in der Theorie der Elasticität und der innern Reibung fruchtbar erwiesen hat und welche darauf hinausläuft, dass wir die Symmetrie der Krystallform als stets niedriger oder gleich, aber nie höher betrachten, als die Symmetrie des physikalischen Verhaltens.

Hiernach sprechen wir zunächst für die Symmetrieaxen die Hypothese aus, dass, wenn die Drehung um eine feste Axe und um einen aliquoten Theil von 2π den Krystall mit sich selbst zur Deckung bringt, zwei Systeme von Deformationen, welche sich auf je eine dieser beiden

Positionen bezogen als gleichwerthig erweisen, auch electriche Momente von derselben Eigenschaft erregen müssen. Oder anders ausgedrückt: bezieht man den Krystall auf zwei gleichwerthige Coordinatensysteme, so müssen die correspondirenden Momente und Deformationen durch dieselben Gleichungen verbunden sein.

Für die Anwendung dieses Gedankens ist erforderlich, die electriche Momente und die Deformationen auf ein neues Coordinatensystem X', Y', Z' zu transformiren. Es bestehe der Zusammenhang

$$\begin{aligned} x &= x' \alpha_1 + y' \beta_1 + z' \gamma_1, \\ y &= x' \alpha_2 + y' \beta_2 + z' \gamma_2, \\ z &= x' \alpha_3 + y' \beta_3 + z' \gamma_3, \end{aligned} \tag{4}$$

dann gelten die analogen Gleichungen zwischen den Momenten; speciell ist

$$\begin{aligned} a' &= a \alpha_1 + b \alpha_2 + c \alpha_3, \\ b' &= a \beta_1 + b \beta_2 + c \beta_3, \\ c' &= a \gamma_1 + b \gamma_2 + c \gamma_3. \end{aligned} \tag{4'}$$

Die Deformationen transformiren sich durch Gleichungen, deren Coëfficienten folgendes System bilden:

	x'_z	y'_y	z'_z	y'_z	z'_x	x'_y
x_x	α_1^2	β_1^2	γ_1^2	$\beta_1 \gamma_1$	$\gamma_1 \alpha_1$	$\alpha_1 \beta_1$
y_y	α_2^2	β_2^2	γ_2^2	$\beta_2 \gamma_2$	$\gamma_2 \alpha_2$	$\alpha_2 \beta_2$
z_z	α_3^2	β_3^2	γ_3^2	$\beta_3 \gamma_3$	$\gamma_3 \alpha_3$	$\alpha_3 \beta_3$
y_z	$2\alpha_2 \alpha_3$	$2\beta_2 \beta_3$	$2\gamma_2 \gamma_3$	$(\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3)$	$(\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3)$	$(\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3)$
z_x	$2\alpha_3 \alpha_1$	$2\beta_3 \beta_1$	$2\gamma_3 \gamma_1$	$(\beta_3 \gamma_1 + \gamma_3 \beta_1)$	$(\gamma_3 \alpha_1 + \alpha_3 \gamma_1)$	$(\alpha_3 \beta_1 + \beta_3 \alpha_1)$
x_y	$2\alpha_1 \alpha_2$	$2\beta_1 \beta_2$	$2\gamma_1 \gamma_2$	$(\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2)$	$(\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2)$	$(\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2)$

5)

Ist die Z -Axe eine Symmetrieaxe des Krystalles, so muss das $X'Y'Z'$ -System durch eine Drehung um die Z -Axe aus dem XYZ -System entstanden sein. Wir setzen demgemäss

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= 1, \quad \alpha_3 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \\ \alpha_1 &= \alpha, \quad \beta_1 = \beta, \quad \alpha_2 = -\beta, \quad \beta_2 = \alpha, \end{aligned}$$

und erhalten so

$$\begin{aligned} x &= x' \alpha + y' \beta, & y &= -x' \beta + y' \alpha, & z &= z', \\ a' &= a \alpha - b \beta, & b' &= a \beta + b \alpha, & c' &= c. \end{aligned} \tag{6}$$

6)

Ferner geht das System (5) über in :

$$6'') \quad \begin{array}{c|cccccc} & x'_x & y'_y & z'_z & y'_z & z'_x & x'_y \\ \hline x_x & \alpha^2 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ y_y & \beta^2 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \\ z_z & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_z & 0 & 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ z_x & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 \\ x_y & -2\alpha\beta & 2\alpha\beta & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 - \beta^2 \end{array}$$

Berücksichtigt man dies und fasst die beiden ersten Gleichungen (1) mit den Factoren α , $-\beta$ und β , α zusammen, um a' und b' zu bilden, so erhält man dafür, dass das System X, Y, Z mit X', Y', Z' gleichwerthig ist, folgende Bedingungen:

$$7) \quad \begin{array}{l} \alpha^2 (\alpha \varepsilon_{11} - \beta \varepsilon_{21}) + \beta^2 (\alpha \varepsilon_{12} - \beta \varepsilon_{22}) - 2\alpha\beta (\alpha \varepsilon_{16} - \beta \varepsilon_{26}) = \varepsilon_{11}, \\ \beta^2 (\alpha \varepsilon_{11} - \beta \varepsilon_{21}) + \alpha^2 (\alpha \varepsilon_{12} - \beta \varepsilon_{22}) + 2\alpha\beta (\alpha \varepsilon_{16} - \beta \varepsilon_{26}) = \varepsilon_{12}, \\ \alpha\beta (\alpha \varepsilon_{11} - \beta \varepsilon_{21}) - \alpha\beta (\alpha \varepsilon_{12} - \beta \varepsilon_{22}) + (\alpha^2 - \beta^2) (\alpha \varepsilon_{16} - \beta \varepsilon_{26}) = \varepsilon_{16}, \\ \alpha^2 (\beta \varepsilon_{11} + \alpha \varepsilon_{21}) + \beta^2 (\beta \varepsilon_{12} + \alpha \varepsilon_{22}) - 2\alpha\beta (\beta \varepsilon_{16} + \alpha \varepsilon_{26}) = \varepsilon_{21}, \\ \beta^2 (\beta \varepsilon_{11} + \alpha \varepsilon_{21}) + \alpha^2 (\beta \varepsilon_{12} + \alpha \varepsilon_{22}) + 2\alpha\beta (\beta \varepsilon_{16} + \alpha \varepsilon_{26}) = \varepsilon_{22}, \\ \alpha\beta (\beta \varepsilon_{11} + \alpha \varepsilon_{21}) - \alpha\beta (\beta \varepsilon_{12} + \alpha \varepsilon_{22}) + (\alpha^2 - \beta^2) (\beta \varepsilon_{16} + \alpha \varepsilon_{26}) = \varepsilon_{26}, \end{array}$$

$$7) \quad \begin{array}{l} \alpha \varepsilon_{13} - \beta \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13}, \\ \beta \varepsilon_{13} + \alpha \varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}, \end{array}$$

$$7'') \quad \begin{array}{l} \alpha (\alpha \varepsilon_{14} - \beta \varepsilon_{24}) + \beta (\alpha \varepsilon_{15} - \beta \varepsilon_{25}) = \varepsilon_{14}, \\ -\beta (\alpha \varepsilon_{14} - \beta \varepsilon_{24}) + \alpha (\alpha \varepsilon_{15} - \beta \varepsilon_{25}) = \varepsilon_{15}, \\ \alpha (\beta \varepsilon_{14} + \alpha \varepsilon_{24}) + \beta (\beta \varepsilon_{15} + \alpha \varepsilon_{25}) = \varepsilon_{24}, \\ -\beta (\beta \varepsilon_{14} + \alpha \varepsilon_{24}) + \alpha (\beta \varepsilon_{15} + \alpha \varepsilon_{25}) = \varepsilon_{25}. \end{array}$$

Die dritte Formel (1) allein liefert als Bedingungen für die Gleichheit von c und c' :

$$7''') \quad \begin{array}{l} \alpha^2 \varepsilon_{31} + \beta^2 \varepsilon_{32} - 2\alpha\beta \varepsilon_{36} = \varepsilon_{31}, \\ \beta^2 \varepsilon_{31} + \alpha^2 \varepsilon_{32} + 2\alpha\beta \varepsilon_{36} = \varepsilon_{32}, \\ \alpha\beta \varepsilon_{31} - \alpha\beta \varepsilon_{32} + (\alpha^2 - \beta^2) \varepsilon_{36} = \varepsilon_{36}, \\ \alpha \varepsilon_{34} + \beta \varepsilon_{35} = \varepsilon_{34}, \\ -\beta \varepsilon_{34} + \alpha \varepsilon_{35} = \varepsilon_{35}. \end{array}$$

Diese Bedingungen wenden wir nun auf specielle Fälle an. Um dieselben einfach zu bezeichnen, soll das Symbol A_r^n andeuten, dass die Richtung r eine n -zählige Symmetrieaxe ist.

I. Ist die Z -Axe eine zweizählige Symmetrieaxe, also $\alpha = -1$, $\beta = 0$, so findet sich

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{16} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{26} = \varepsilon_{34} = \varepsilon_{35} = 0, \quad 8)$$

und das System (1) verwandelt sich in

$$A_z^2 \begin{cases} a = \varepsilon_{14} y_z + \varepsilon_{15} z_x, \\ b = \varepsilon_{24} y_z + \varepsilon_{25} z_x, \\ c = \varepsilon_{31} x_x + \varepsilon_{32} y_y + \varepsilon_{33} z_z + \varepsilon_{36} x_y. \end{cases} \quad 8')$$

Hieraus folgen durch cyclische Vertauschung die Systeme, welche gelten, wenn die X - oder Y -Axe zweizählige Symmetrieaxe ist, nämlich:

$$A_x^2 \begin{cases} a = \varepsilon_{11} x_x + \varepsilon_{12} y_y + \varepsilon_{13} z_z + \varepsilon_{14} y_z, \\ b = \varepsilon_{25} z_x + \varepsilon_{26} x_y, \\ c = \varepsilon_{35} z_x + \varepsilon_{36} x_y; \end{cases} \quad 8'')$$

$$A_y^2 \begin{cases} a = \varepsilon_{14} y_z + \varepsilon_{16} x_y, \\ b = \varepsilon_{21} x_x + \varepsilon_{22} y_y + \varepsilon_{23} z_z + \varepsilon_{25} z_x, \\ c = \varepsilon_{34} y_z + \varepsilon_{36} x_y. \end{cases} \quad 8''')$$

II. Ist die Z -Axe eine vierzählige Symmetrieaxe, so ist $\alpha = 0$, $\beta = \pm 1$ zu setzen; dadurch kommen zu den vorstehenden noch folgende Relationen:

$$\varepsilon_{14} = -\varepsilon_{25}, \quad \varepsilon_{15} = \varepsilon_{24}, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32}, \quad \varepsilon_{36} = 0, \quad 9)$$

und man erhält das System

$$A_z^4 \begin{cases} a = \varepsilon_{14} y_z + \varepsilon_{15} z_x, \\ b = \varepsilon_{15} y_z - \varepsilon_{14} z_x, \\ c = \varepsilon_{31}(x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z. \end{cases} \quad 9')$$

Diesen ordnen sich die folgenden beiden zu:

$$A_x^4 \begin{cases} a = \varepsilon_{11} x_x + \varepsilon_{12}(y_y + z_z), \\ b = \varepsilon_{26} z_x + \varepsilon_{26} x_y, \\ c = \varepsilon_{26} z_x - \varepsilon_{25} x_y; \end{cases} \quad 9'')$$

$$9''') \quad A_y^4 \begin{cases} a = -\varepsilon_{36} y_x + \varepsilon_{34} x_y, \\ b = \varepsilon_{23} x_x + \varepsilon_{22} y_y + \varepsilon_{23} z_x, \\ c = \varepsilon_{34} y_x + \varepsilon_{36} x_y. \end{cases}$$

III. Ist die Z -Axe eine dreizählige Symmetrieaxe, so ist $a = -\frac{1}{2}$, $\beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ zu setzen; dadurch folgen die Beziehungen:

$$10) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} = -\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{26}, \quad \varepsilon_{22} = -\varepsilon_{21} = -\varepsilon_{16}, \quad \varepsilon_{15} = \varepsilon_{24}, \quad \varepsilon_{14} = -\varepsilon_{25}, \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{34} = \varepsilon_{35} = \varepsilon_{36} = 0. \end{aligned}$$

und es gilt das System

$$10') \quad A_z^3 \begin{cases} a = \varepsilon_{11}(x_x - y_y) + \varepsilon_{14} y_x + \varepsilon_{15} z_x - \varepsilon_{22} x_y, \\ b = -\varepsilon_{22}(x_x - y_y) + \varepsilon_{15} y_x - \varepsilon_{14} z_x - \varepsilon_{11} x_y, \\ c = \varepsilon_{31}(x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_x. \end{cases}$$

IV. Ist endlich die Z -Axe eine sechszählige Symmetrieaxe, so ist $a = +\frac{1}{2}$, $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ zu setzen. Dadurch gelangt man zu dem mit (9') übereinstimmenden System:

$$11) \quad (A_z^6) \begin{cases} a = \varepsilon_{15} y_x + \varepsilon_{15} z_x, \\ b = \varepsilon_{15} y_x - \varepsilon_{14} z_x, \\ c = \varepsilon_{31}(x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_x. \end{cases}$$

V. Für den Fall eine geradzählige Symmetrieaxe in der Weise einseitig ist, dass um beide Enden dieselben Flächen gruppiert sind, und zwar so, dass das eine Ende durch eine Drehung um die Axe zum Spiegelbild des andern wird, muss ein mit dem gegebenen gleichwerthiges Coordinatensystem entstehen, wenn man das ursprüngliche um jene Symmetrieaxe um den betreffenden Winkel dreht und sodann alle Richtungen mit den entgegengesetzten vertauscht.

Ist die Z -Axe die einseitige zweizählige Symmetrieaxe, so ist die beschriebene Operation an dem Formelsystem (8') auszuführen und liefert als Bedingungen der Gleichwerthigkeit die Gleichungen

$$\epsilon_{25} = \epsilon_{14}, \quad \epsilon_{24} = -\epsilon_{15}, \quad \epsilon_{32} = -\epsilon_{31}, \quad \epsilon_{33} = 0; \quad (12)$$

das System selbst nimmt dadurch die Gestalt an

$$\bar{A}_z^2 \left| \begin{array}{l} a = \epsilon_{14} y_z + \epsilon_{15} z_x, \\ b = -\epsilon_{15} y_z + \epsilon_{14} z_x, \\ c = \epsilon_{31} (x_x - y_y) + \epsilon_{36} x_y. \end{array} \right. \quad (12')$$

Zu diesen Tabellen stellen wir die folgenden; die sich auf die Fälle beziehen, dass eine der Coordinatenebenen eine krystallographische Symmetrieebene ist. Wir deuten dies dadurch an, dass wir den Buchstaben *E* mit demjenigen Index versehen, welcher der Normale auf der Symmetrieebene entspricht.

VI. Sei zunächst die *X*-Axe auf einer Symmetrieebene normal. Zwei Systeme von Deformationen, welche zur *YZ*-Ebene symmetrisch liegen, also entgegengesetzte Werthe z_x und x_y ergeben, müssen dann auch symmetrisch gelegene electriche Axen d. h. entgegengesetzte Werthe *a*, aber gleiche *b* und *c* zur Folge haben. Hieraus folgt, dass

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{14} = \epsilon_{25} = \epsilon_{26} = \epsilon_{35} = \epsilon_{36} = 0 \quad (13)$$

sein muss, und es gilt:

$$(E_x) \left| \begin{array}{l} a = \epsilon_{15} z_x + \epsilon_{16} x_y, \\ b = \epsilon_{21} x_x + \epsilon_{22} y_y + \epsilon_{23} z_x + \epsilon_{24} y_z, \\ c = \epsilon_{31} x_x + \epsilon_{32} y_y + \epsilon_{33} z_x + \epsilon_{34} y_z. \end{array} \right. \quad (13')$$

Durch die analoge Ueberlegung finden sich die Systeme:

$$(E_y) \left| \begin{array}{l} a = \epsilon_{11} x_x + \epsilon_{12} y_y + \epsilon_{13} z_x + \epsilon_{15} z_x, \\ b = \epsilon_{24} y_z + \epsilon_{26} x_y, \\ c = \epsilon_{31} x_x + \epsilon_{32} y_y + \epsilon_{33} z_x + \epsilon_{35} z_x; \end{array} \right. \quad (13'')$$

$$(E_z) \left| \begin{array}{l} a = \epsilon_{11} x_x + \epsilon_{12} y_y + \epsilon_{13} z_x + \epsilon_{16} x_y, \\ b = \epsilon_{21} x_x + \epsilon_{22} y_y + \epsilon_{23} z_x + \epsilon_{26} x_y, \\ c = \epsilon_{34} y_z + \epsilon_{35} z_x, \end{array} \right. \quad (13''')$$

welche den Fällen entsprechen, dass die *Y*- oder *Z*-Axe auf einer Symmetrieebene senkrecht steht.

VII. Endlich ist noch der Fall zu erledigen, dass der Krystall ein Centrum der Symmetrie — weiterhin mit (*C*) angedeutet — besitzt.

Dann sind alle entgegengesetzten Richtungen gleichwerthig und es ist keine Möglichkeit einer Polarität vorhanden. Hier gilt also:

$$14) \quad (C) \quad | \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun leicht diejenigen Werthe der electricischen Momente bestimmen, welche nach den Symmetrieverhältnissen sämtlichen Krystallsystemen entsprechen. Dabei sind von allen Symmetrieelementen, welche jede einzelne Gruppe characterisiren, natürlich von vornherein nur die von einander unabhängigen für die Vereinfachung des allgemeinen Ansatzes (1) zu verwenden. Es zeigt sich aber, dass im Allgemeinen auch von diesen nicht alle zur Geltung kommen, sondern nach Berücksichtigung einiger die den übrigen entsprechenden Relationen von selbst erfüllt sind. So macht z. B. die Existenz eines Centrums der Symmetrie, welches alle Momente verschwinden lässt, die Anwendung irgend einer andern Relation zwischen den Constanten unmöglich.

Ich habe demgemäss im Folgenden neben den Namen der einzelnen Gruppen immer nur die Symbole derjenigen Symmetrieelemente gesetzt, welche zur Ableitung der für die bezüglichen Gruppen geltenden Grundformen nothwendig und hinreichend sind. Die Anzahl und Art der den einzelnen Gruppen eigenen polaren Axen ist in eckigen Klammern in leicht verständlicher Bezeichnung hinzugefügt.

Tabelle I.

I. Triklines System.

1) Holoedrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

2) Hemiëdrische Gruppe (kein Symmetrieelement).

$$a = \varepsilon_{11}x_x + \varepsilon_{12}y_y + \varepsilon_{13}z_z + \varepsilon_{14}y_z + \varepsilon_{15}z_x + \varepsilon_{16}x_y,$$

$$b = \varepsilon_{21}x_x + \varepsilon_{22}y_y + \varepsilon_{23}z_z + \varepsilon_{24}y_z + \varepsilon_{25}z_x + \varepsilon_{26}x_y,$$

$$c = \varepsilon_{31}x_x + \varepsilon_{32}y_y + \varepsilon_{33}z_z + \varepsilon_{34}y_z + \varepsilon_{35}z_x + \varepsilon_{36}x_y.$$

II. Monoklines System.

3) Holoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

4) Hemimorphe Gruppe (A_z^2), [$1P^2$].

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_{14} y_z + \varepsilon_{15} z_x, & b &= \varepsilon_{24} y_z + \varepsilon_{25} z_x, \\ c &= \varepsilon_{31} x_x + \varepsilon_{32} y_y + \varepsilon_{33} z_z + \varepsilon_{36} x_y. \end{aligned}$$

5) Hemiëdrische Gruppe (E_z).

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_{11} x_x + \varepsilon_{12} y_y + \varepsilon_{13} z_z + \varepsilon_{16} x_y, \\ b &= \varepsilon_{21} x_x + \varepsilon_{22} y_y + \varepsilon_{23} z_z + \varepsilon_{26} x_y, \\ c &= \varepsilon_{34} y_z + \varepsilon_{35} z_x. \end{aligned}$$

III. Rhombisches System.

6) Holoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

7) Hemimorphe Gruppe (A_z^2, E_z), [$1P^2$].

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_{15} z_x, & b &= \varepsilon_{24} y_z, \\ c &= \varepsilon_{31} x_x + \varepsilon_{32} y_y + \varepsilon_{33} z_z + \varepsilon_{36} x_y. \end{aligned}$$

8) Hemiëdrische Gruppe (A_x^2, A_y^2, A_z^2).

$$a = \varepsilon_{14} y_z, \quad b = \varepsilon_{25} z_x, \quad c = \varepsilon_{36} x_y.$$

IV. Quadratisches System.

9) Holoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

10) Hemimorph-hemiëdrische Gruppe (A_z^4, E_a), [$1P^4$].

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_{15} z_x, & b &= \varepsilon_{15} y_z, \\ c &= \varepsilon_{31} (x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z. \end{aligned}$$

11) Trapezoëdrisch-hemiëdrische Gruppe (A_x^4, A_a^2).

$$a = \varepsilon_{14} y_z, \quad b = -\varepsilon_{14} z_x, \quad c = 0.$$

12) Pyramidal-hemiëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

13) Hemimorph-tetartoëdrische Gruppe (A_z^4), [$1P^4$].

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_{14} y_z + \varepsilon_{15} z_x, & b &= \varepsilon_{15} y_z - \varepsilon_{14} z_x, \\ c &= \varepsilon_{31} (x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z. \end{aligned}$$

14) Sphenoidisch-hemiëdrische Gruppe ($A_z^2, A_x^2 = A_y^2$).

$$a = \varepsilon_{14} y_z, \quad b = \varepsilon_{14} z_x, \quad c = \varepsilon_{36} x_y.$$

15) Sphenoidisch-tetartoëdrische Gruppe (\bar{A}_x^2)¹⁾.

$$a = \varepsilon_{14} y_z + \varepsilon_{15} z_x, \quad b = -\varepsilon_{15} y_z + \varepsilon_{14} z_x, \\ c = \varepsilon_{31} (x_x - y_y) + \varepsilon_{36} x_y.$$

V. Hexagonales System.

16) Holoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

17) Hemimorph-hemiëdrische Gruppe (A_z^6, E_6), [1 P^6].

$$a = \varepsilon_{15} z_x, \quad b = \varepsilon_{15} y_z, \\ c = \varepsilon_{31} (x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z.$$

18) Trapezoëdrisch-hemiëdrische Gruppe (A_z^6, A_x^2, A_y^2).

$$a = \varepsilon_{14} y_z, \quad b = -\varepsilon_{14} z_x, \quad c = 0.$$

19) Pyramidal-hemiëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

20) Erste hemimorph-tetartoëdrische Gruppe (A_z^6), [1 P^6].

$$a = \varepsilon_{14} y_z + \varepsilon_{15} z_x, \quad b = \varepsilon_{15} y_z - \varepsilon_{14} z_x, \\ c = \varepsilon_{31} (x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z.$$

21) Sphenoidisch-hemiëdrische Gruppe (A_z^3, A_x^2, E_y), [3 P^3].

$$a = \varepsilon_{11} (x_x - y_y), \quad b = -\varepsilon_{11} x_y, \quad c = 0.$$

22) Sphenoidisch-tetartoëdrische Gruppe (A_z^3, E_x).

$$a = \varepsilon_{11} (x_x - y_y) - \varepsilon_{22} x_y, \\ b = -\varepsilon_{22} (x_x - y_y) - \varepsilon_{11} x_y, \quad c = 0.$$

23) Rhomboëdrisch-hemiëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

24) Zweite hemimorph-tetartoëdrische Gruppe ($A_z^3 E_x$), [1 P^6].

$$a = \varepsilon_{15} z_x - \varepsilon_{22} x_y, \quad b = -\varepsilon_{22} (x_x - y_y) + \varepsilon_{15} y_z, \\ c = \varepsilon_{31} (x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z.$$

1) Die Z-Axe ist nach der p. 12 unter V. erwähnten Weise einseitig.

25) Trapezoëdrisch-tetartoëdrische Gruppe (A_x^3, A_y^3), [$3 P^2$].

$$a = \varepsilon_{11}(x_x - y_y) + \varepsilon_{14}y_z, \quad b = -\varepsilon_{14}z_x - \varepsilon_{11}x_y, \quad c = 0.$$

26) Rhomboëdrisch-tetartoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

27) Ogdoëdrische Gruppe (A_x^3), [$1 P^3$].

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_{11}(x_x - y_y) + \varepsilon_{14}y_z + \varepsilon_{15}z_x - \varepsilon_{22}x_y, \\ b &= -\varepsilon_{22}(x_x - y_y) + \varepsilon_{15}y_z - \varepsilon_{14}z_x - \varepsilon_{11}x_y, \\ c &= \varepsilon_{31}(x_x + y_y) + \varepsilon_{33}z_z. \end{aligned}$$

VI. Reguläres System.

28) Holoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

29) Tetraëdrisch-hemiëdrische Gruppe ($A_x^2 = A_y^2 = A_z^2$), [$4 P^3$].

$$a = \varepsilon_{14}y_z, \quad b = \varepsilon_{14}z_x, \quad c = \varepsilon_{14}x_y.$$

30) Plagiëdrisch-hemiëdrische Gruppe ($A_x^4 = A_y^4 = A_z^4$).

$$a = b = c = 0.$$

31) Pentagonal-hemiëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

32) Tetartoëdrische Gruppe ($A_x^2 = A_y^2 = A_z^2$), [$4 P^3$].

$$a = \varepsilon_{14}y_z, \quad b = \varepsilon_{14}z_x, \quad c = \varepsilon_{14}x_y.$$

Ueberblickt man diese Zusammenstellung, so sieht man, dass aus der alleinigen Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse für alle Krystallgruppen, welche polare Symmetrieachsen besitzen, die Möglichkeit piëzoelectrischer Erregung folgt, dass aber unter einziger Anwendung dieses Kriteriums sich auch für die Gruppen 2), 5), 8), 11), 14), 15), 18) und 22) von Null verschiedene Werthe a , b , c ergeben. Freilich sind an Vertretern derselben electriche Erscheinungen noch nicht sicher beobachtet; es ist indess nicht ausgeschlossen, dass von den Krystallen jener Gruppen, für welche übrigens zum Theil überhaupt noch keine Vertreter bekannt sind, vielleicht nur einzelne diese Eigenschaft deutlich, die meisten nur sehr schwach besitzen.

Ueberdies wird sich zeigen, dass die verschiedenen Krystallgruppen, für welche sich vorstehend die Erregbarkeit ergeben hat, hinsichtlich der Art der Erregung ausserordentliche Unterschiede zeigen, und dass gewisse Krystalle nur unter ganz besonderen Verhältnissen eine electriche Vertheilung annehmen, welche nach aussen hin wirksam ist. Dies wird bei der späteren speciellen Untersuchung erst deutlich hervortreten.

Immerhin ist nicht ausgeschlossen, dass Umstände existiren, welche sich nicht in den Symmetrieverhältnissen der Krystalle geltend machen und doch die electriche Erregung bei Krystallen mit nicht polaren Axen vollständig verhindern, nämlich die Werthe der Constanten ϵ_{hk} zu Null machen. Dass freilich irgend ein Grund die electriche Erregung bei sphenoidisch-hemiëdrischen Krystallen des III. und IV. Systems ausschliessen, dagegen bei den teträëdrisch-hemiëdrischen, wo sie unzweifelhaft stattfindet, zulassen sollte, erscheint bei den Beziehungen zwischen beiden Gruppenarten sehr unwahrscheinlich. Ist aber erst bei einer Gruppe das Princip, dass eine polare Axe für die Möglichkeit electriche Erregung die Vorbedingung ist, erschüttert, so ist kein Grund vorhanden, dasselbe überhaupt für innerlich begründet anzusehen. —

Keine electriche Erregbarkeit ergibt sich aus den Symmetrieverhältnissen, ausser bei den mit einem Symmetrieeentrum behafteten Gruppen, nur bei Gruppe 30). Trotzdem treten die Resultate scheinbar noch in Widerspruch mit einem Theil der von Herrn Hankel mitgetheilten Beobachtungen, da jene auch an centriscly symmetrischen Krystallen bei Erhitzung oder Abkühlung electriche Ladungen ergaben. Ohne den Versuch einer Erklärung wagen zu wollen, kann man aber doch sicher behaupten, dass, wenn wirklich in jenen Krystallen entgegengesetzte Richtungen gleichwerthig gewesen wären, eine Polarisirung nicht hätte eintreten können. Es ist daraus zu schliessen, dass bei jenen Beobachtungen Umstände, welche den Structurverhältnissen der benutzten Krystalle fremd sind, Verschiedenheiten in dieser Hinsicht verursacht haben müssen. Ob bei der ziemlich starken Erwärmung des Innern und der oberflächlichen Abkühlung nicht vielleicht schon die Temperaturdifferenz

zu beiden Seiten der Oberflächenschicht genügt hat, um die Richtung nach Aussen derjenigen nach Innen ungleichwerthig zu machen, ist schwer zu entscheiden. Jedenfalls ist aber klar, dass bei Benutzung nur der Glieder erster Ordnung, wie in dieser Theorie, jene Einfüsse keinen Ausdruck gewinnen können und dass daher auf die Erklärung jener Beobachtungen von dem eingenommenen Standpunkt aus verzichtet werden muss. —

Die vorstehenden Formelgruppen der Tabelle I zerfallen in zwei Gattungen, insofern sie zum Theil die lineären Dilatationen x_x, y_y, z_z enthalten, zum Theil aber nicht. Erstere Formeln gelten für solche Krystalle, bei denen die nach dem Experiment electricisch ausgezeichneten Richtungen, die man gewöhnlich electricische Axen nennt, in eine Coordinatenaxe oder -Ebene fallen, letztere für solche, wo dies nicht stattfindet; zu diesen gehören z. B. die regulären Krystalle der Gruppen 29) und 32), welche vier dreizählige polare Axen besitzen, die mit den drei Coordinatenaxen gleiche Winkel bilden. Es ist von Interesse und Nutzen, die ihnen entsprechenden Formeln auf ein neues Coordinatensystem $X' Y' Z'$ zu transformiren, dessen Z' -Axe in einer der ausgezeichneten Richtungen liegt.

Allerdings haben wir im Grunde bisher noch keine analytische Definition der electricischen Axen, oder, wie wir, um Verwechslungen mit der Axe des electricischen Hauptmomentes zu vermeiden, lieber sagen wollen, der electricischen Hauptrichtungen; indess können wir durch Vergleichung der Beobachtungen mit den vorstehenden Formelsystemen vorläufig den Schluss ziehen, dass eine beliebige Richtung s dann eine electricische Hauptrichtung sein wird, wenn das nach ihr genommene electricische Moment nur abhängt von den lineären Dilatationen parallel und normal zu s sowie von der Winkeländerung zwischen den zu s normalen Richtungen, — nicht also von den Aenderungen der Winkel von s gegen ursprünglich zu ihr normale Linien. Beispielsweise ist die Z -Axe eine electricische Hauptrichtung, wenn c von x_x, y_y, z_z und x_y abhängig, von y_z und z_x unabhängig ist.

Wir gehen aus von den Formeln $a = \epsilon_{14} y_z, b = \epsilon_{25} z_x, c = \epsilon_{36} x_y$

für Gruppe III S), welche die Formeln für die Gruppen IV 11) und 14), V 18) und VI 29) und 32) als specielle Fälle enthalten.

Setzen wir wieder

$$x = x' \alpha_1 + y' \beta_1 + z' \gamma_1, \quad y = x' \alpha_2 + y' \beta_2 + z' \gamma_2, \quad z = x' \alpha_3 + y' \beta_3 + z' \gamma_3,$$

so erhalten wir nach (4') die Momente für die X' -, Y' -, Z' -Axe durch Zusammenfassung von a , b , c mit den Factoren α_1 , α_2 , α_3 ; β_1 , β_2 , β_3 ; γ_1 , γ_2 , γ_3 , so dass zunächst resultirt

$$\begin{aligned} a' &= \varepsilon_{14} \alpha_1 y_z + \varepsilon_{25} \alpha_2 z_x + \varepsilon_{36} \alpha_3 x_y, \\ 15) \quad b' &= \varepsilon_{14} \beta_1 y_x + \varepsilon_{25} \beta_2 z_x + \varepsilon_{36} \beta_3 x_y, \\ c' &= \varepsilon_{14} \gamma_1 y_x + \varepsilon_{25} \gamma_2 z_x + \varepsilon_{36} \gamma_3 x_y. \end{aligned}$$

Hierin sind y_z , z_x , x_y nach (5) durch x'_x , y'_y . . . auszudrücken.

Soll die Z' -Richtung im obigen Sinne ausgezeichnet sein, so müssen in c' die Coefficienten von y'_z und z'_x verschwinden. Dies liefert die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} 16) \quad \varepsilon_{14} \gamma_1 (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) + \varepsilon_{25} \gamma_2 (\beta_3 \gamma_1 + \gamma_3 \beta_1) + \varepsilon_{36} \gamma_3 (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) &= 0, \\ \varepsilon_{14} \gamma_1 (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) + \varepsilon_{25} \gamma_2 (\gamma_3 \alpha_1 + \alpha_3 \gamma_1) + \varepsilon_{36} \gamma_3 (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) &= 0, \end{aligned}$$

welche zusammen mit

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

die Lage der electricischen Hauptrichtung Z' bestimmen. Man erhält aus ihnen leicht die einfache Beziehung

$$\begin{aligned} 16') \quad \frac{1 - 2\gamma_1^2}{\varepsilon_{14}} &= \frac{1 - 2\gamma_2^2}{\varepsilon_{25}} = \frac{1 - 2\gamma_3^2}{\varepsilon_{36}}, \\ \text{oder} \quad \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_{25} + \varepsilon_{36}} &= \frac{\gamma_2^2}{\varepsilon_{36} + \varepsilon_{14}} = \frac{\gamma_3^2}{\varepsilon_{14} + \varepsilon_{25}}, \end{aligned}$$

welche die Richtung von Z' zu construiren gestattet. Die Momente nehmen dann die Werthe an

$$\begin{aligned} a' &= x'_x 2(\varepsilon_{14} + \varepsilon_{25} + \varepsilon_{36}) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + y'_y 2(\varepsilon_{14} \alpha_1 \beta_2 \beta_3 + \varepsilon_{25} \alpha_2 \beta_3 \beta_1 + \varepsilon_{36} \alpha_3 \beta_1 \beta_2) \\ &\quad + z'_z 2(\varepsilon_{14} \alpha_1 \gamma_2 \gamma_3 + \varepsilon_{25} \alpha_2 \gamma_3 \gamma_1 + \varepsilon_{36} \alpha_3 \gamma_1 \gamma_2) \\ 17) \quad &+ y'_z (\varepsilon_{14} \alpha_1 (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) + \varepsilon_{25} \alpha_2 (\beta_3 \gamma_1 + \gamma_3 \beta_1) + \varepsilon_{36} \alpha_3 (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2)) \\ &+ z'_x (\varepsilon_{14} \alpha_1 (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) + \varepsilon_{25} \alpha_2 (\gamma_3 \alpha_1 + \alpha_3 \gamma_1) + \varepsilon_{36} \alpha_3 (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2)) \\ &+ x'_y (\varepsilon_{14} \alpha_1 (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3) + \varepsilon_{25} \alpha_2 (\alpha_3 \beta_1 + \beta_3 \alpha_1) + \varepsilon_{36} \alpha_3 (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b' &= x'_z 2(\varepsilon_{14} \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon_{25} \beta_2 \alpha_3 \alpha_1 + \varepsilon_{36} \beta_3 \alpha_1 \alpha_2) + y'_y 2(\varepsilon_{14} + \varepsilon_{25} + \varepsilon_{36}) \beta_1 \beta_2 \beta_3 \\
 &\quad + z'_z 2(\varepsilon_{14} \beta_1 \gamma_2 \gamma_3 + \varepsilon_{25} \beta_2 \gamma_3 \gamma_1 + \varepsilon_{36} \beta_3 \gamma_1 \gamma_2) \\
 &\quad + y'_z (\varepsilon_{14} \beta_1 (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) + \varepsilon_{25} \beta_2 (\beta_3 \gamma_1 + \gamma_3 \beta_1) + \varepsilon_{36} \beta_3 (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2)) \\
 &\quad + z'_x (\varepsilon_{14} \beta_1 (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) + \varepsilon_{25} \beta_2 (\gamma_3 \alpha_1 + \alpha_3 \gamma_1) + \varepsilon_{36} \beta_3 (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2)) \\
 &\quad + x'_y (\varepsilon_{14} \beta_1 (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3) + \varepsilon_{25} \beta_2 (\alpha_3 \beta_1 + \beta_3 \alpha_1) + \varepsilon_{36} \beta_3 (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2)) \\
 c' &= x'_x 2(\varepsilon_{14} \gamma_1 \alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon_{25} \gamma_2 \alpha_3 \alpha_1 + \varepsilon_{36} \gamma_3 \alpha_1 \alpha_2) + y'_y 2(\varepsilon_{14} \gamma_1 \beta_2 \beta_3 + \varepsilon_{25} \gamma_2 \beta_3 \beta_1 + \varepsilon_{36} \gamma_3 \beta_1 \beta_2) \\
 &\quad + z'_z 2(\varepsilon_{14} + \varepsilon_{25} + \varepsilon_{36}) \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \\
 &\quad + x'_y (\varepsilon_{14} \gamma_1 (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3) + \varepsilon_{25} \gamma_2 (\alpha_3 \beta_1 + \beta_3 \alpha_1) + \varepsilon_{36} \gamma_3 (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2)).
 \end{aligned}$$

Für das reguläre System ergeben die Bedingungen (16'):

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2;$$

aus ihnen folgt für den ersten Octanten:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

Hierdurch nehmen die Momente a' , b' , c' folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
 a' &= +\varepsilon_{14} \left[(x'_z - y'_y) 6 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \frac{z'_z}{\sqrt{3}} - x'_y 6 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \right], \\
 b' &= -\varepsilon_{14} \left[(x'_z - y'_y) 6 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + \frac{y'_z}{\sqrt{3}} + x'_y 6 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \right], \\
 c' &= -\frac{\varepsilon_{14}}{\sqrt{3}} (x'_z + y'_y - 2z'_z).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Diese Gleichungen fallen unter die Form (10') und deuten darauf hin, dass die Richtung $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$, d. h. die Octaëdernormale, eine dreizählige (polare) Axe ist.

Legt man noch die $Y'Z'$ -Ebene durch die Y -Axe, so ist:

$$\alpha_1 = -\alpha_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = \beta_3 = -\sqrt{\frac{1}{6}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
 a' &= -\frac{\varepsilon_{14}}{\sqrt{3}} (z'_z + x'_y \sqrt{2}), \\
 b' &= -\frac{\varepsilon_{14}}{\sqrt{3}} ((x'_z - y'_y) \sqrt{2} + y'_z), \\
 c' &= -\frac{\varepsilon_{14}}{\sqrt{3}} (x'_z + y'_y - 2z'_z).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Diese Werthe sind der Form nach identisch mit den für Gruppe 24) (Turmalin) gültigen; in der That sind die Symmetrieelemente der Gruppen 29) und 32) bei Einführung dieses X', Y', Z' -Systemes auch identisch mit denen, welche für Gruppe 24) characteristisch sind.

§ 3. Die electricischen Momente als Functionen der inneren Spannungen.

Der im vorigen Abschnitt eingeschlagene Weg zur Ableitung der speciellen Werthe der electricischen Momente für alle Krystallsysteme ist ebenso, wie für die elastischen Deformationen als Unabhängige, so für die elastischen Spannungen, welche ja lineäre Functionen der Deformationen sind, anwendbar, und die im letzteren Falle folgenden Resultate sind für gewisse Anwendungen besonders bequem.

Der allgemeine Ansatz sei:

$$\begin{aligned}
 20) \quad & -a = \delta_{11} X_x + \delta_{12} Y_y + \delta_{13} Z_z + \delta_{14} Y_x + \delta_{15} Z_x + \delta_{16} X_y, \\
 & -b = \delta_{21} X_x + \delta_{22} Y_y + \delta_{23} Z_z + \delta_{24} Y_x + \delta_{25} Z_x + \delta_{26} X_y, \\
 & -c = \delta_{31} X_x + \delta_{32} Y_y + \delta_{33} Z_z + \delta_{34} Y_x + \delta_{35} Z_x + \delta_{36} X_y.
 \end{aligned}$$

Für die Transformation auf ein neues System X', Y', Z' gelten Gleichungen, die etwas von den oben benutzten (5) abweichen, nämlich folgende Coëfficienten besitzen:

$$21) \quad \begin{array}{c|cccccc} & X'_x & Y'_y & Z'_z & Y'_x & Z'_x & X'_y \\ \hline X_x & \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\beta_1 \gamma_1 & 2\gamma_1 \alpha_1 & 2\alpha_1 \beta_1 \\ Y_y & \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\beta_2 \gamma_2 & 2\gamma_2 \alpha_2 & 2\alpha_2 \beta_2 \\ Z_z & \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\beta_3 \gamma_3 & 2\gamma_3 \alpha_3 & 2\alpha_3 \beta_3 \\ Y_x & \alpha_2 \alpha_3 & \beta_2 \beta_3 & \gamma_2 \gamma_3 & (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) & (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) & (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3) \\ Z_x & \alpha_3 \alpha_1 & \beta_3 \beta_1 & \gamma_3 \gamma_1 & (\beta_3 \gamma_1 + \gamma_3 \beta_1) & (\gamma_3 \alpha_1 + \alpha_3 \gamma_1) & (\alpha_3 \beta_1 + \beta_3 \alpha_1) \\ X_y & \alpha_1 \alpha_2 & \beta_1 \beta_2 & \gamma_1 \gamma_2 & (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) & (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) & (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2). \end{array}$$

Fallen die Z - und Z' -Axen zusammen und ist daher $\alpha_1 = \beta_2 = \alpha$,
 $-\alpha_2 = +\beta_1 = \beta$, so wird hieraus

	X'_z	Y'_y	Z'_z	Y'_z	Z'_x	X'_y	
X_x	α^2	β^2	0	0	0	$2\alpha\beta$	
Y_y	β^2	α^2	0	0	0	$-2\alpha\beta$	
Z_z	0	0	1	0	0	0	21')
Y_z	0	0	0	α	$-\beta$	0	
Z_x	0	0	0	β	α	0	
X_y	$-\alpha\beta$	$\alpha\beta$	0	0	0	$\alpha^2 - \beta^2$.	

Die hierdurch sich ergebenden Gleichungen für die Gleichwerthigkeit der zwei Coordinaten-Systeme unterscheiden sich von den früheren (7) bis (7''') nur dadurch, dass $2\varepsilon_{16}$, $2\varepsilon_{26}$, $2\varepsilon_{36}$, resp. mit δ_{16} , δ_{26} , δ_{36} — alle übrigen ε_{nk} aber mit den entsprechenden δ_{nk} vertauscht sind. Nach dieser Bemerkung bleiben die Formeln, die für den Fall zweizähliger, vierzähliger und sechszähliger Symmetrieaxen gelten, bis auf die Bezeichnung ungeändert; nur die für eine mit der Z -Axe zusammenfallende dreizählige Axe lauten jetzt:

$$(A_z^3) \left\{ \begin{array}{l} -a = \delta_{11}(X_x - Y_y) + \delta_{14}Y_z + \delta_{15}Z_x - 2\delta_{22}X_y, \\ -b = -\delta_{22}(X_x - Y_y) + \delta_{15}Y_z - \delta_{14}Z_x - 2\delta_{11}X_y, \\ -c = \delta_{31}(X_x + Y_y) + \delta_{33}Z_z. \end{array} \right. \quad 21'')$$

Die für einseitige Axen, Symmetrieebenen und Symmetriecentren charakteristischen Beziehungen erleiden gleichfalls keine Aenderung.

Sonach ergibt sich folgende nur in Einzelheiten von Tabelle I abweichende Zusammenstellung, die ich der bequemerer Anwendung halber vollständig gebe.

Tabelle II.

I. Triklines System.

1) Holoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

2) Hemiëdrische Gruppe (kein Symmetrieelement).

$$\begin{array}{l} -a = \delta_{11}X_x + \delta_{12}Y_y + \delta_{13}Z_z + \delta_{14}Y_z + \delta_{15}Z_x + \delta_{16}X_y, \\ -b = \delta_{21}X_x + \delta_{22}Y_y + \delta_{23}Z_z + \delta_{24}Y_z + \delta_{25}Z_x + \delta_{26}X_y, \\ -c = \delta_{31}X_x + \delta_{32}Y_y + \delta_{33}Z_z + \delta_{34}Y_z + \delta_{35}Z_x + \delta_{36}X_y. \end{array}$$

II. Monoklines System.

3) Holoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

4) Hemimorphe Gruppe (A_z^2), [$1P^2$].

$$\begin{aligned} -a &= \delta_{14} Y_z + \delta_{15} Z_z, & -b &= \delta_{24} Y_z + \delta_{25} Z_z, \\ -c &= \delta_{31} X_z + \delta_{32} Y_z + \delta_{33} Z_z + \delta_{36} X_y. \end{aligned}$$

5) Hemiëdrische Gruppe (E_z).

$$\begin{aligned} -a &= \delta_{11} X_z + \delta_{12} Y_z + \delta_{13} Z_z + \delta_{16} X_y, \\ -b &= \delta_{21} X_z + \delta_{22} Y_z + \delta_{23} Z_z + \delta_{26} X_y, \\ -c &= \delta_{34} Y_z + \delta_{35} Z_z. \end{aligned}$$

III. Rhombisches System.

6) Holoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

7) Hemimorphe Gruppe (A_z^2, E_z), [$1P^2$].

$$\begin{aligned} -a &= \delta_{16} Z_z, & -b &= \delta_{24} Y_z, \\ -c &= \delta_{31} X_z + \delta_{32} Y_z + \delta_{33} Z_z + \delta_{36} X_y. \end{aligned}$$

8) Hemiëdrische Gruppe (A_z^2, A_y^2, A_z^2).

$$-a = \delta_{14} Y_z, \quad -b = \delta_{25} Z_z, \quad -c = \delta_{36} X_y.$$

IV. Quadratisches System.

9) Holoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

10) Hemimorph-hemiëdrische Gruppe (A_z^2, E_z), [$1P^2$].

$$\begin{aligned} -a &= \delta_{15} Z_z, & -b &= \delta_{15} Y_z, \\ -c &= \delta_{31} (X_z + Y_z) + \delta_{33} Z_z. \end{aligned}$$

11) Trapezoëdrisch-hemiëdrische Gruppe (A_z^2, A_z^2).

$$-a = \delta_{14} Y_z, \quad -b = -\delta_{14} Z_z, \quad c = 0.$$

12) Pyramidal-hemiëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

13) Hemimorph-tetartoëdrische Gruppe (A_z^4), [$1 P^4$].

$$\begin{aligned} -a &= \delta_{14} Y_z + \delta_{15} Z_x, & -b &= \delta_{15} Y_z - \delta_{14} Z_x, \\ -c &= \delta_{31} (X_x + Y_y) + \delta_{33} Z_z. \end{aligned}$$

14) Sphenoidisch-hemiëdrische Gruppe ($A_z^2, A_x^2 = A_y^2$).

$$-a = \delta_{14} Y_z, \quad -b = \delta_{14} Z_x, \quad -c = \delta_{36} X_y.$$

15) Sphenoidisch-tetartoëdrische Gruppe (\bar{A}_z^2)¹⁾.

$$\begin{aligned} -a &= \delta_{14} Y_z + \delta_{15} Z_x, & -b &= -\delta_{15} Y_z + \delta_{14} Z_x, \\ -c &= \delta_{31} (X_x - Y_y) + \delta_{36} X_y. \end{aligned}$$

V. Hexagonales System.

16) Holoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

17) Hemimorph-hemiëdrische Gruppe (A_z^6, E_x), [$1 P^6$].

$$\begin{aligned} -a &= \delta_{15} Z_x, & -b &= \delta_{15} Y_z, \\ -c &= \delta_{31} (X_x + Y_y) + \delta_{33} Z_z. \end{aligned}$$

18) Trapezoëdrisch-hemiëdrische Gruppe (A_z^6, A_x^2).

$$-a = \delta_{14} Y_z, \quad -b = -\delta_{14} Z_x, \quad c = 0.$$

19) Pyramidal-hemiëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

20) Erste hemimorph-tetartoëdrische Gruppe (A_z^6), [$1 P^6$].

$$\begin{aligned} -a &= \delta_{14} Y_z - \delta_{15} Z_x, & -b &= \delta_{15} Y_z - \delta_{14} Z_x, \\ -c &= \delta_{31} (X_x + Y_y) + \delta_{33} Z_z. \end{aligned}$$

21) Sphenoidisch-hemiëdrische Gruppe (A_z^3, A_x^2, E_y), [$3 P^2$].

$$-a = \delta_{11} (X_x - Y_y), \quad -b = -2\delta_{11} X_y, \quad c = 0.$$

22) Sphenoidisch-tetartoëdrische Gruppe (A_z^3, E_x).

$$\begin{aligned} -a &= \delta_{11} (X_x - Y_y) - 2\delta_{22} X_y, \\ -b &= -\delta_{22} (X_x - Y_y) - 2\delta_{11} X_y, \quad c = 0. \end{aligned}$$

23) Rhomboëdrisch-hemiëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

1) Die Z -Axe ist nach der p. 12 unter V. erwähnten Weise einseitig.

24) Zweite hemimorph-tetartoëdrische Gruppe (A_x^3, E_z), [1 P^6].

$$\begin{aligned} -a &= \delta_{13} Z_x - 2\delta_{32} X_y, & -b &= -\delta_{22}(X_x - Y_y) + \delta_{15} Y_x, \\ & & -c &= \delta_{31}(X_x + Y_y) + \delta_{33} Z_x. \end{aligned}$$

25) Trapezoëdrisch-tetartoëdrische Gruppe (A_x^3, A_y^2), [3 P^2].

$$-a = \delta_{11}(X_x - Y_y) + \delta_{14} Y_x, \quad +b = +\delta_{14} Z_x + 2\delta_{11} X_y, \quad c = 0.$$

26) Rhomboëdrisch-tetartoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

27) Ogdoëdrische Gruppe (A_x^3), [1 P^8].

$$\begin{aligned} -a &= \delta_{11}(X_x - Y_y) + \delta_{14} Y_x + \delta_{16} Z_x - 2\delta_{22} X_y, \\ -b &= -\delta_{22}(X_x - Y_y) + \delta_{15} Y_x - \delta_{14} Z_x - 2\delta_{11} X_y, \\ -c &= \delta_{31}(X_x + Y_y) + \delta_{33} Z_x. \end{aligned}$$

VI. Reguläres System.

28) Holoëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

29) Tetraëdrisch-hemiëdrische Gruppe ($A_x^2 = A_y^2 = A_z^2$), [4 P^3].

$$-a = \delta_{14} Y_x, \quad -b = \delta_{14} Z_x, \quad -c = \delta_{14} X_y.$$

30) Plagiëdrisch-hemiëdrische Gruppe ($A_x^4 = A_y^4 = A_z^4$).

$$a = b = c = 0.$$

31) Pentagonal-hemiëdrische Gruppe (C).

$$a = b = c = 0.$$

32) Tetartoëdrische Gruppe ($A_x^2 = A_y^2 = A_z^2$), [4 P^3].

$$-a = \delta_{14} Y_x, \quad -b = \delta_{14} Z_x, \quad -c = \delta_{14} X_y.$$

Auch das System (19) für die Momente der Gruppen (29) und (32), falls man eine Octoëdernormale zur Z' -Axe und eine durch sie gelegte Symmetrie-Ebene zur $Y'Z'$ -Ebene wählt, nimmt, wenn man die Spannungen als Unabhängige wählt, eine etwas geänderte Gestalt an. Es wird nämlich

$$\begin{aligned}
 a' &= + \frac{\delta_{14}}{\sqrt{3}} (Z'_x + X'_y 2\sqrt{2}), \\
 b' &= + \frac{\delta_{14}}{\sqrt{3}} ((X'_x - Y'_y)\sqrt{2} + Y'_z), \\
 c' &= + \frac{\delta_{14}}{\sqrt{3}} (X'_x + Y'_y - 2Z'_z).
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Die vorstehenden Formeln ergaben sich direct durch Anwendung der Symmetrieeigenschaften der verschiedenen Krystallgruppen auf den allgemeinen Ansatz (20), sie hätten sich auch finden lassen durch Einführung der Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in dem früheren Ansatz (1). Dieser Weg hätte neben der Form jener Gleichungen auch die Werthe der Constanten δ_{ik} ausgedrückt in den ϵ_{hk} geliefert. Man erhält dieselben leicht nachträglich, wenn man die Beziehungen (23) und (23') des nächsten Abschnittes benutzt. Durch sie resultirt

$$\delta_{ik} = \sum_k \epsilon_{ik} s_{hk}, \quad \epsilon_{ik} = \sum_k \delta_{ik} c_{hk};
 \tag{22'}$$

die Summen sind hier, wie weiterhin überall, wo dieselbe Bezeichnung angewandt wird, über die Zahlen 1 bis 6 auszudehnen. —

§ 4. Elastische und thermische Constanten für die verschiedenen Krystallsysteme. Einige allgemeine Sätze.

Die Anwendung der vorstehend allgemein entwickelten Formeln auf bestimmte Phänomene zu erleichtern, stelle ich im Folgenden die weiterhin zu benutzenden Beziehungen und Constanten der Elasticitätstheorie übersichtlich zusammen.

Zwischen den elastischen Spannungen $X_x \dots$ und den Deformationen x_x bestehen lineare Beziehungen von der Form

$$-X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y,
 \tag{23}$$

welche nach den x_x aufgelöst lauten

$$-x_x = s_{11}X_x + s_{12}Y_y + s_{13}Z_z + s_{14}Y_z + s_{15}Z_x + s_{16}X_y,
 \tag{23'}$$

Die Factoren c_{hk} nennen wir die Elasticitätsconstanten, die s_{hk} die Elasticitätsmoduln des betreffenden Krystalls.

Die Werthe (23) und (23') beziehen sich auf eine bestimmte normale Temperatur. Bei einer Steigerung der Temperatur um ϑ wachsen die elastischen Drucke um Glieder von der Form

$$24) \quad \begin{aligned} -A_x &= q_1 \vartheta, & -B_y &= q_2 \vartheta, & -C_z &= q_3 \vartheta, \\ -B_x &= -C_y &= q_4 \vartheta, & -C_x &= -A_z &= q_5 \vartheta, & -A_y &= -B_z &= q_6 \vartheta, \end{aligned}$$

worin man die $q_h \vartheta$ als die thermischen Drucke bezeichnet. Ist die Temperaturänderung gleichförmig in dem ganzen Krystall, so wachsen die Deformationen um Glieder von der Form

$$24') \quad \begin{aligned} a_x &= a_1 \vartheta, & b_y &= a_2 \vartheta, & c_z &= a_3 \vartheta, \\ b_x &= -c_y &= a_4 \vartheta, & c_x &= -a_z &= a_5 \vartheta, & a_y &= -b_z &= a_6 \vartheta. \end{aligned}$$

Hierin sind a_1, a_2, a_3 die Coefficienten der thermischen lineären Dilatationen parallel den Hauptaxen X, Y, Z und a_4, a_5, a_6 die Coefficienten der thermischen Aenderung der von ihnen eingeschlossenen Winkel. Zwischen beiden Arten von Constanten gelten die Beziehungen:

$$25) \quad \begin{aligned} q_h &= c_{h1} a_1 + c_{h2} a_2 + c_{h3} a_3 + c_{h4} a_4 + c_{h5} a_5 + c_{h6} a_6, \text{ sowie} \\ a_h &= s_{h1} q_1 + s_{h2} q_2 + s_{h3} q_3 + s_{h4} q_4 + s_{h5} q_5 + s_{h6} q_6. \end{aligned}$$

Alle diese Formeln mögen sich auf das schon oben benutzte, durch seine Symmetrieverhältnisse ausgezeichnete Haupt-Coordinatensystem X, Y, Z beziehen. Ausser diesem führen wir noch gemäss den Beziehungen (4) ein willkürlich gelegenes System X', Y', Z' ein und unterscheiden die darauf bezogenen Variablen und Constanten von den obigen durch einen obern Index. Der Zusammenhang zwischen den Elasticitätsconstanten c_{hk} und c'_{hk} sowie den Elasticitätsmoduln s_{hk} und s'_{hk} folgt aus der Art, wie sich die $X_{\sigma} \dots$ und $x_{\sigma} \dots$ transformiren. Es sind dafür massgebend die Beziehungen (5'') und (21); bezeichnet man die Coefficienten des ersten Systems mit d_{hk} , die des zweiten mit d'_{hk} , wo sich der erste Index auf die Reihe, der zweite auf die Colonne bezieht, so ist:

$$26) \quad \begin{aligned} c_{hi} &= \sum_k \sum_n d'_{hk} d'_{in} c'_{kn}, & c'_{hi} &= \sum_k \sum_n d_{kh} d_{ni} c_{kn}, \\ s_{ab} &= \sum_h \sum_k d_{ah} d_{bk} s'_{hk}, & s'_{ab} &= \sum_h \sum_k d'_{ha} d'_{kb} s_{hk}. \end{aligned}$$

Die Coëfficienten q_h der thermischen Drucke transformiren sich wie die Drucke selbst, es ist also

$$q_k = \sum_h q'_h d'_{hk}, \quad q'_k = \sum_h q_h d_{hk}. \quad (26')$$

Die Coëfficienten der thermischen Deformationen endlich transformiren sich wie die Deformationen selbst, d. h. es ist

$$a_k = \sum_k a'_k d'_{kk}, \quad a'_k = \sum_k a_k d_{kk}. \quad (26'')$$

Für die verschiedenen Krystallsysteme und Gruppen bilden die auf das Hauptaxensystem bezogenen Constanten $c_{hk} = c_{kh}$, $s_{hk} = s_{kh}$, q_k , a_k folgende Schemata.

Tabelle III.

I. Gruppe 1) und 2).

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
c_{61}	c_{62}	c_{63}	c_{64}	c_{65}	c_{66}	s_{61}	s_{62}	s_{63}	s_{64}	s_{65}	s_{66}
$q_{1'}$	$q_{2'}$	$q_{3'}$	$q_{4'}$	$q_{5'}$	$q_{6'}$	$a_{1'}$	$a_{2'}$	$a_{3'}$	$a_{4'}$	$a_{5'}$	$a_{6'}$

II. Gruppe 3) bis 5).

c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	c_{16}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	s_{16}	
c_{21}	c_{22}	c_{23}	0	0	c_{26}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	0	0	s_{26}	
c_{31}	c_{32}	c_{33}	0	0	c_{36}	s_{31}	s_{32}	s_{33}	0	0	s_{36}	
0	0	0	c_{44}	c_{45}	0	0	0	0	s_{44}	s_{45}	0	
0	0	0	c_{54}	c_{55}	0	0	0	0	s_{54}	s_{55}	0	
c_{61}	c_{62}	c_{63}	0	0	c_{66}	s_{61}	s_{62}	s_{63}	0	0	s_{66}	
$q_{1'}$	$q_{2'}$	$q_{3'}$	$q_{6'}$				$a_{1'}$	$a_{2'}$	$a_{3'}$	$a_{6'}$		

III. Gruppe 6) bis 8).

c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	0	s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	0
c_{21}	c_{22}	c_{23}	0	0	0	s_{21}	s_{22}	s_{23}	0	0	0
c_{31}	c_{32}	c_{33}	0	0	0	s_{31}	s_{32}	s_{33}	0	0	0
0	0	0	c_{44}	0	0	0	0	0	s_{44}	0	0
0	0	0	0	c_{55}	0	0	0	0	0	s_{55}	0
0	0	0	0	0	c_{66}	0	0	0	0	0	s_{66}
$q_{1'}$, $q_{2'}$, $q_{3'}$;						$a_{1'}$, $a_{2'}$, $a_{3'}$.					

IV. Gruppe 9) 10) 11) 14).

$$\begin{array}{cccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{21} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & s_{21} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{31} & c_{31} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & s_{31} & s_{31} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}
 \end{array}$$

$$q_1 = q_2, q_3$$

$$a_1 = a_2, a_3.$$

IV. Gruppe 12) 13) 15).

$$\begin{array}{cccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} & s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\
 c_{21} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} & s_{21} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & -s_{16} \\
 c_{31} & c_{31} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & s_{31} & s_{31} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\
 c_{61} & -c_{61} & 0 & 0 & 0 & c_{65} & s_{61} & -s_{61} & 0 & 0 & 0 & s_{66}
 \end{array}$$

$$q_1 = q_2, q_3;$$

$$a_1 = a_2, a_3.$$

V. Gruppe 16) bis 22).

$$\begin{array}{cccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{21} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & s_{21} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{31} & c_{31} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & s_{31} & s_{31} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}-s_{12})
 \end{array}$$

$$q_1 = q_2, q_3;$$

$$a_1 = a_2, a_3.$$

V. Gruppe 23) bis 25).

$$\begin{array}{cccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 & s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & 0 & 0 \\
 c_{21} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 & s_{21} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & 0 & 0 \\
 c_{31} & c_{31} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & s_{31} & s_{31} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{41} & -c_{41} & 0 & c_{44} & 0 & 0 & s_{41} & -s_{41} & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 2s_{41} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2s_{14} & 2(s_{11}-s_{12}).
 \end{array}$$

$$q_1 = q_2, q_3;$$

$$a_1 = a_2, a_3.$$

V. Gruppe 26) und 27).

$$\begin{array}{cccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & -c_{25} & 0 \\
 c_{21} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & c_{25} & 0 \\
 c_{31} & c_{31} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{41} & -c_{41} & 0 & c_{44} & 0 & c_{52} \\
 -c_{52} & c_{52} & 0 & 0 & c_{44} & c_{41} \\
 0 & 0 & 0 & c_{25} & c_{14} & \frac{c_{11}-c_{22}}{2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccccc}
 s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & -s_{25} & 0 \\
 s_{21} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & s_{25} & 0 \\
 s_{31} & s_{31} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\
 s_{41} & -s_{41} & 0 & s_{44} & 0 & 2s_{52} \\
 -s_{52} & s_{52} & 0 & 0 & s_{44} & 2s_{41} \\
 0 & 0 & 0 & 2s_{25} & 2s_{14} & 2(s_{11}-s_{12})
 \end{array}$$

$$q_1 = q_2, q_3;$$

$$a_1 = a_2, a_3.$$

VI. Gruppe 28) bis 32).

$$\begin{array}{cccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{21} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{21} & c_{21} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccccc}
 s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 s_{21} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 s_{21} & s_{21} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}
 \end{array}$$

$$q_1 = q_2 = q_3;$$

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

Für ein beliebiges Coordinatensystem X', Y', Z' bilden die bezüglichen Constanten analoge Systeme, wenn die Coordinatenachsen dieselben Symmetrieeigenschaften besitzen, welche zu vorstehenden Resultaten geführt haben, z. B. wird, wenn die Z' -Axe eine dreizählige Symmetrieaxe ist, stets das vorletzte dieser Systeme den $c'_{hk}, s'_{hk}, q'_h, a'_k$ entsprechen. —

Die Bedingungen des Gleichgewichts für einen äussern Kräften X, Y, Z und Oberflächendrücken $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ unterworfenen elastischen Körper sind bei Berücksichtigung der thermischen Drucke :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon X &= \frac{\partial(X_x + A_x)}{\partial x} + \frac{\partial(X_y + A_y)}{\partial y} + \frac{\partial(X_z + A_z)}{\partial z}, \\
 \varepsilon Y &= \frac{\partial(Y_x + B_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Y_y + B_y)}{\partial y} + \frac{\partial(Y_z + B_z)}{\partial z}, \\
 \varepsilon Z &= \frac{\partial(Z_x + C_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Z_y + C_y)}{\partial y} + \frac{\partial(Z_z + C_z)}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{27'}$$

für jeden innern Punkt, dazu für die Oberfläche :

$$\begin{aligned}
 0 &= \bar{X} + (\bar{X}_x + \bar{A}_x) \cos(n, x) + (\bar{X}_y + \bar{A}_y) \cos(n, y) + (\bar{X}_z + \bar{A}_z) \cos(n, z), \\
 0 &= \bar{Y} + (\bar{Y}_x + \bar{B}_x) \cos(n, x) + (\bar{Y}_y + \bar{B}_y) \cos(n, y) + (\bar{Y}_z + \bar{B}_z) \cos(n, z), \\
 0 &= \bar{Z} + (\bar{Z}_x + \bar{C}_x) \cos(n, x) + (\bar{Z}_y + \bar{C}_y) \cos(n, y) + (\bar{Z}_z + \bar{C}_z) \cos(n, z).
 \end{aligned} \tag{27'}$$

Ausser diesen Gleichungen gelten gewisse Bedingungen, welche die Verbindung des Coordinatensystems mit dem Körper, oder, anders betrachtet, die Befestigung des letzteren bestimmen; dieselben kommen hier aber, wo es sich nur um die den gegebenen äussern Einwirkungen entsprechenden Deformationen handelt, nicht in Betracht. —

Die Ansätze der Tabelle II gestatten bei Combination mit den Formeln (27') und der Definition (3') der oberflächlichen aequivalenten Dichte $\bar{\varepsilon}$ einige allgemeine Sätze über letztere abzuleiten. Zunächst sei der Fall normaler Temperatur betrachtet, wo $A_x = A_y = \dots = 0$ ist.

Wir nehmen an, der Krystall sei in einem Theil begrenzt durch die Flächen eines Cylinders oder Prismas von beliebigem Querschnitt und erfahre auf diesen Flächen keine äussere Einwirkung. Legen wir eine Z' -Axe in die Cylinderaxe, eine X' - und Y' - beliebig dazu senkrecht, und bezeichnen wir den Winkel, den die Normale auf jenen Flächen mit der X' -Axe macht, durch φ , so lauten die Bedingungen für diese freien Oberflächen:

$$\bar{X}'_x \cos \varphi + \bar{X}'_y \sin \varphi = \bar{Y}'_x \cos \varphi + \bar{Y}'_y \sin \varphi = \bar{Z}'_x \cos \varphi + \bar{Z}'_y \sin \varphi = 0;$$

zugleich wird das Moment \bar{n} um die äussere Normale und die Oberflächendichte $\bar{\varepsilon}$ gegeben durch

$$\bar{n} = \bar{\varepsilon} = \bar{a}' \cos \varphi + \bar{b}' \sin \varphi.$$

Benutzt man die Zusammenstellung der Werthe a und b in Tabelle II, so erkennt man leicht die Richtigkeit folgender Sätze.

Ist die Z' -Axe eine vier- oder sechszählige Symmetrieaxe, durch welche eine Symmetrieebene geht (Eigenschaft der Hauptaxe in Gruppe 10) und 17)), so ist auf den betrachteten Flächen die Dichte $\bar{\varepsilon}$ bei allen Deformationen verschwindend.

Ist die Z' -Axe eine zweizählige Symmetrieaxe, auf welcher zwei unter einander gleiche zweizählige Symmetrieaxen X' und Y' senkrecht

stehen (Eigenschaft der Z -Axe in Gruppe 14), der X, Y, Z -Axe in Gruppe 29) und 32)), so gilt

$$\bar{n} = \bar{\varepsilon} = \delta'_{14} \bar{Y}'_z \cos \varphi (1 - tg^2 \varphi) = -\delta'_{14} \bar{Z}'_z \sin \varphi (1 - ctg^2 \varphi);$$

die Dichte $\bar{\varepsilon}$ verschwindet also an allen denjenigen Stellen der Mantelfläche, wo die Normalen die Winkel zwischen der $\perp X'$ - und $\perp Y'$ -Axe halbiren, gleichviel, wie immer der Cylinder deformirt wird.

Ist die Z' -Axe eine dreizählige Symmetrieaxe, und gehen hindurch drei Symmetrieebenen, von denen die $Y'Z'$ -Ebene die eine sein mag (Eigenschaft der Z -Axe in Gruppe 24), der Octaëdernormale in Gruppe 29) und 32)), so ist

$$\bar{n} = \bar{\varepsilon} = -\frac{2\bar{X}'_y \delta'_{22}}{\sin 2\varphi} \sin 3\varphi,$$

worin $\bar{X}'_y / \sin 2\varphi$ stets endlich ist; die Dichte $\bar{\varepsilon}$ verschwindet also bei jeder Deformation an allen Stellen der Mantelfläche, deren Normale auf einer der drei Symmetrieebenen senkrecht steht.

Ist ferner die Z' -Axe eine Kante zwischen zwei ebenen Theilen der Oberfläche des Krystalles, welche nächst der Kante keine äussere Einwirkung erfahren mögen, und ist sie zugleich eine zwei-, drei-, vier- oder sechszählige Symmetrieaxe, so ist an der Kante \bar{n} und $\bar{\varepsilon}$ stets gleich Null.

Endlich gilt auch noch ganz allgemein der Satz, dass an jeder Ecke die Dichte $\bar{\varepsilon}$ verschwinden muss.

Um unrichtige Schlüsse aus diesen Sätzen zu vermeiden, beachte man, dass nur dann, wenn die Aenderungen der Momente a, b, c mit den Coordinaten, bezogen auf die Längeneinheit, sehr klein gegen ihre absoluten Werthe sind, die Dichte $\bar{\varepsilon}$ an einer Stelle der Oberfläche die Wirkung auf nahe äussere Punkte in erster Linie bestimmt, in andern Fällen aber die Wirkung der innern Elemente diejenige der Oberflächendichte $\bar{\varepsilon}$ völlig compensiren kann. —

Den vorstehenden analoge Sätze lassen sich auch für den Fall ableiten, dass die Deformation allein durch Verschiedenheit der Temperatur im Innern des Krystalles bewirkt ist.

Bildet wiederum einen Theil der Oberfläche des Krystals ein der Z' -Axe paralleler Cylinder, so nehmen die Grenzbedingungen (27'), da äussere Kräfte fehlen, die Form an:

$$\begin{aligned} (\bar{X}'_x + q'_1 \vartheta) \cos \varphi + (\bar{X}'_y + q'_6 \vartheta) \sin \varphi &= (\bar{Y}'_x + q'_6 \vartheta) \cos \varphi + (\bar{Y}'_y + q'_2 \vartheta) \sin \varphi \\ &= (\bar{Z}'_x + q'_6 \vartheta) \cos \varphi + (\bar{Z}'_y + q'_4 \vartheta) \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Wenn zudem die Z' -Axe eine drei-, vier- oder sechszählige elastische Symmetrieaxe ist, so wird

$$q'_1 = q'_2, \quad q'_4 = q'_6 = q'_6 = 0,$$

und es gilt Folgendes.

Ist die Z' -Axe eine vier- oder sechszählige Symmetrieaxe, durch welche eine krystallographische Symmetrieebene geht (Eigenschaft der Z -Axe in den Gruppen 10) und 17)), so erhält die betrachtete Mantelfläche durch keine Art der Temperaturvertheilung eine oberflächliche Dichte $\bar{\varepsilon}$.

Ist die Cylinderaxe eine zweizählige Symmetrieaxe, und stehen zu ihr zwei unter sich gleiche zweizählige Symmetrieaxen senkrecht (Eigenschaft der Hauptaxe in den Gruppen 14) und jeder krystallographischen Axe in 29) und 32)), so verschwindet bei jeder Temperaturvertheilung die Dichte auf denjenigen Oberflächentheilen, deren Normalen die Winkel der beiden gleichen Symmetrieaxen halbiren.

Ist die Cylinderaxe eine dreizählige Symmetrieaxe, und gehen durch sie drei krystallographische Symmetrieebenen (Eigenschaft der Hauptaxe von Gruppe 24) und der Octaëdernormalen in 29) und 32)), so wird bei jeder Temperaturvertheilung die Dichte $\bar{\varepsilon}$ auf denjenigen Theilen der Mantelfläche verschwinden, deren Normalen senkrecht zu einer Symmetrieebene stehen.

Das letztere findet auch statt, wenn die drei Symmetrieebenen fehlen, aber die Temperaturvertheilung derart ist, dass die Kanten des Cylinders der Z' -Axe parallel geblieben sind, nämlich z'_{xz} , z'_{yz} und in Folge dessen Z'_{xz} , Z'_{yz} verschwinden.

Längs einer Kante, welche einer drei-, vier- oder sechszähligen Symmetrieaxe parallel ist, tritt bei beliebiger Erwärmung keine Dichte $\bar{\varepsilon}$ auf.

An einer Ecke ist die electriche Erregung durch jede beliebige Temperaturvertheilung dieselbe, als wenn der ganze Krystall gleichförmig die Temperatur der Ecke besässe.

Dies letztere folgt daraus, dass an jeder Ecke sämtliche Glieder von der Form $(\bar{X}_e + q_1\bar{Y})$ verschwinden müssen, und dass diese Beziehungen, wie wir später sehen werden, bei gleichförmiger Temperatur im ganzen Innern des Krystalles erfüllt sind.

§ 5. Electriche Erregung durch allseitigen gleichförmigen Druck.

Die theoretisch einfachste Art der mechanischen Einwirkung auf einen beliebig gestalteten Krystall oder ein Stück eines solchen ist die Deformation durch einen allseitig gleichen normalen Druck, wie er im Piëzometer ausgeübt werden kann. Hierbei sind alle innern Spannungen und Deformation constant; in Folge dessen verschwindet auch die innere Dichte ϵ und es bleibt auf äussere Punkte nur die Oberflächendichte $\bar{\epsilon}$ wirksam.

Belegt man die Oberfläche des Krystalles mit einem Leiter, etwa durch Ueberziehen mit Zinnfolie, so wird in diesem an jeder Stelle die $\bar{\epsilon}$ entgegengesetzt gleiche Dichte gebunden, die $\bar{\epsilon}$ gleiche aber frei. Besteht der Leiter aus zwei getrennten Stücken, von denen das eine die Stellen positiver, das andere die Stellen negativer Dichte $\bar{\epsilon}$ bedeckt, so lässt sich die Gesamtmenge der freiwerdenden positiven oder negativen Electricität und hierdurch $\bar{\epsilon}$ bestimmen, indem man den einen Theil des Leiters direct, den andern durch ein Entladungselectrometer zur Erde ableitet und die Deformation des Krystalles so allmählig stattfinden lässt, dass man die dabei stattfindenden Entladungen zählen kann.

Eine andere Methode zu Bestimmung von $\bar{\epsilon}$ ist die, dass man den einen Theil des Leiters zur Erde ableitet, den andern mit einem Thomson'schen Electrometer verbindet. Man kann dann die beiden belegten Flächenstücke als zwei Condensatoren betrachten, von denen der eine nicht auf den andern wirkt. Bezeichnet man die Capacität des mit dem Electrometer verbundenen Theiles inclusive des Electrometers mit C ,

so steigt das Potential in ihm durch die Erregung der Oberflächendichte $\bar{\varepsilon}$ um $\int \bar{\varepsilon} dQ/C$, worin dQ das Element der Oberfläche des Krystalles bezeichnet, welche durch den mit dem Electrometer verbundenen Leiter bedeckt ist. Ist die Oberflächendichte $\bar{\varepsilon}$ auf Q constant, so findet sich die Potentialänderung W am Electrometer gleich $Q\bar{\varepsilon}/C$. Dabei ist C als unbekannt zu betrachten, lässt sich aber eliminiren, wenn man das Electrometer mit einem Condensator von bekannter Capacität C_1 verbindet und abermals die Potentialänderung in Folge der Compression am Electrometer bestimmt. Der so beobachtete Werth W_1 ist gleich $Q\bar{\varepsilon}/(C+C_1)$, also findet sich

$$\bar{\varepsilon} = \frac{C_1 W W_1}{Q(W - W_1)}.$$

Beobachtungen der Erregung durch allseitig gleichen Druck sind noch nicht angestellt; sie würden aber für die Prüfung der Theorie nicht ohne Interesse sein. —

Bezeichnet man den äussern Druck auf die Flächeneinheit mit p und setzt die Summe der drei Elasticitätsmoduln

$$s_{h1} + s_{h2} + s_{h3} = s_h,$$

so gelten, wie sich leicht zeigen lässt, die folgenden Werthe der Deformationen:

$$2S) \quad x_x = -ps_1, \quad y_y = -ps_2, \quad z_z = -ps_3, \quad y_z = -ps_4, \quad z_x = -ps_5, \quad x_y = -ps_6.$$

Berücksichtigt man die Angaben der Tabellen I und III, so erhält man folgendes Bild der electricischen Erregung durch allseitig gleichen Druck bei den überhaupt erregbaren Krystall-Gruppen.

Tabelle IV.

- I. Gruppe 2). $a = -p \sum_h \varepsilon_{1h} s_h, \quad b = -p \sum_h \varepsilon_{2h} s_h, \quad c = -p \sum_h \varepsilon_{3h} s_h.$
 II. Gruppe 4). $a = b = 0, \quad c = -p(\varepsilon_{31} s_1 + \varepsilon_{32} s_2 + \varepsilon_{33} s_3 + \varepsilon_{36} s_6).$
 „ 5). $a = -p(\varepsilon_{11} s_1 + \varepsilon_{12} s_2 + \varepsilon_{13} s_3 + \varepsilon_{16} s_6),$
 $b = -p(\varepsilon_{21} s_1 + \varepsilon_{22} s_2 + \varepsilon_{23} s_3 + \varepsilon_{26} s_6), \quad c = 0.$
 III. Gruppe 7). $a = b = 0, \quad c = -p(\varepsilon_{31} s_1 + \varepsilon_{32} s_2 + \varepsilon_{33} s_3).$
 „ 8). $a = b = c = 0.$
 IV. Gruppe 10) und 13). $a = b = 0, \quad c = -p(2\varepsilon_{31} s_1 + \varepsilon_{33} s_3).$
 „ 11), 14) und 15). $a = b = c = 0.$

V. Gruppe 17), 20), 24), 27). $a = b = 0$, $c = -p(2\varepsilon_{31}s_1 + \varepsilon_{33}s_3)$.

Gruppe 18), 21), 22), 25). $a = b = c = 0$.

VI. Gruppe 29) und 32). $a = b = c = 0$.

Bei Gruppe 2) ist die Lage der electricischen Axe nicht allgemein angebar, bei Gruppe 4) liegt sie in der Symmetrieaxe, bei 5) in der Symmetrieebene. Von den übrigen Gruppen zeigen bei allseitigem Druck nur diejenigen eine electricische Erregbarkeit, welche eine einzige polare Symmetrieaxe besitzen; dass dies selbstverständlich ist, haben wir schon oben erörtert.

Hieraus ergibt sich, dass wir aus den bei allseitig gleichem Druck eintretenden Erscheinungen keine exacte Definition der gemeinhin sogenannten electricischen Axen abstrahiren können.

§ 6. Electricische Erregung eines Cylinders von beliebigem Querschnitt durch einseitige Compression und durch gleichförmige Biegung.

Für die in diesem und in dem folgenden Abschnitt zu behandelnden Probleme ist es vortheilhaft, ein mit dem Cylinder fest verbundenes Coordinatensystem X' , Y' , Z' zu benutzen und, wie die Coordinaten, so auch die auf dasselbe bezogenen Kräfte und verschiedenen physikalischen Constanten durch den obern Index auszuzeichnen. Der Coordinatenanfang falle vor der Deformation in den Schwerpunkt des Endquerschnittes $z' = 0$, die X' - und Y' -Axe in seine Hauptträgheitsaxen, also die Z' -Axe in die Längsaxe des Cylinders. Auf den Endquerschnitt $z' = l$ wirken äussere Kräfte, welche parallel der X' - und Y' -Axe verschwindende Gesamtcomponenten, parallel der Z' -Axe die Resultante Γ' , um die X' -, Y' -, Z' -Axe resp. die Drehungsmomente Λ' , M' , N' ergeben.

Wirken dann, wie in der Ueberschrift dieses Abschnittes vorausgesetzt ist, nur die Zugkraft Γ' parallel der Längsaxe und die Momente M' und Λ' um die Queraxen, bezeichnet man mit x_x und x_y die Trägheitsradien des Querschnitts Q_z um die X' - und Y' -Axe, und setzt man kurz

$$\frac{1}{Q_z} \left(I' - \frac{M' x'}{x_y^2} + \frac{\Lambda' y'}{x_x^2} \right) = K'_z$$

dann gelten für jeden beliebigen Querschnitt die Formeln¹⁾

$$29) \quad x'_x = s'_{13} K'_z, \quad y'_y = s'_{23} K'_z, \quad z'_z = s'_{33} K'_z, \quad y'_x = s'_{33} K'_z, \quad z'_y = s'_{63} K'_z, \quad x'_y = s'_{63} K'_z.$$

Für manche Anwendungen ist es bequem, die X' - oder Y' -Axe an Stelle der Z' -Axe zur Längsaxe des Stabes zu machen. Die hierfür gültigen Formeln erhält man durch cyclische Vertauschung der Buchstaben x, y, z , der Kräfte A', B', I' , der Momente Λ', M', N' , der Indices 1, 2, 3 und 4, 5, 6.

Z. B. wird dem Fall, dass die X' -Axe in die Längsrichtung fällt, entsprechen

$$\frac{1}{Q_x} \left(A' - \frac{N' y'}{x_z^2} + \frac{M' z'}{x_y^2} \right) = K'_x$$

$$29') \quad x'_x = s'_{21} K'_z, \quad y'_y = s'_{21} K'_z, \quad \dots;$$

dagegen dem Falle, dass die Y' -Axe in die Längsrichtung fällt:

$$\frac{1}{Q_y} \left(B' - \frac{\Lambda' z'}{x_x^2} + \frac{N' x'}{x_z^2} \right) = K'_y,$$

$$29'') \quad x'_x = s'_{12} K'_y, \quad y'_y = s'_{22} K'_y, \quad \dots$$

Das Einsetzen dieser Werthe in die Ausdrücke der Tabelle I giebt für alle Krystallgruppen die gesuchten Momente. —

Wir werden nun die beiden Gattungen mechanischer Einwirkung: Dehnung (oder einseitige Compression) und gleichförmige Biegung, getrennt behandeln.

Die erstere ist experimentell von hervorragender Wichtigkeit; man operirt bei der Beobachtung zumeist mit Druck- statt mit Zugkräften, und daher ist es bequem für I' einen negativen Werth einzusetzen. Ferner benutzt man zumeist Krystallpräparate in der Form rechteckiger

1) W. Voigt, Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Göttingen 1887 (auch im 34. Bd. d. Abh. d. K. G. d. W.) p. 64 u. f.

Prismen und lässt den Druck successive auf alle drei Flächenpaare wirken. Wir legen dieselben den Coordinatenebenen des $X' Y' Z'$ -Systems parallel und setzen die auf die Flächeneinheit bezogenen Drucke allgemein:

$$-\frac{A'}{Q} = +p'_x, \quad -\frac{B'}{Q} = +p'_y, \quad -\frac{\Gamma'}{Q} = +p'_z. \quad (30)$$

Aus den Formeln 29) folgt dann in den angedeuteten drei Fällen:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad x'_x &= -p'_x s'_{11}, \quad y'_y = -p'_y s'_{12}, \quad \dots \\ \beta) \quad x'_x &= -p'_y s'_{21}, \quad y'_y = -p'_y s'_{22}, \quad \dots \\ \gamma) \quad x'_x &= -p'_z s'_{31}, \quad y'_y = -p'_z s'_{32}, \quad \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Sämmtliche Deformationen sind constant und es gelten demgemäss die am Anfang des vorigen Abschnittes gemachten Bemerkungen bezüglich der Beobachtung der erregten Electricität auch hier. Lassen wir das System $X' Y' Z'$ mit dem System der Hauptaxen XYZ zusammenfallen, so erhalten wir durch Combination der Resultate der Tabellen I und III folgende Werthe für die Momente a, b, c , bei welchen die Druckrichtung durch einen Index angedeutet ist.

Tabelle V.

I. Gruppe 2).

$$a_x = -p_x \sum_h \varepsilon_{1h} s_{1h}, \quad b_x = -p_x \sum_h \varepsilon_{2h} s_{1h}, \quad c_x = -p_x \sum_h \varepsilon_{3h} s_{1h};$$

ebenso die übrigen.

II. Gruppe 4).

$$a_x = b_x = 0, \quad c_x = -p_x (\varepsilon_{31} s_{11} + \varepsilon_{32} s_{12} + \varepsilon_{33} s_{13} + \varepsilon_{36} s_{16});$$

$$a_y = b_y = 0, \quad c_y = -p_y (\varepsilon_{31} s_{21} + \varepsilon_{32} s_{22} + \varepsilon_{33} s_{23} + \varepsilon_{36} s_{26});$$

$$a_z = b_z = 0, \quad c_z = -p_z (\varepsilon_{31} s_{31} + \varepsilon_{32} s_{32} + \varepsilon_{33} s_{33} + \varepsilon_{36} s_{36}).$$

Gruppe 5).

$$a_x = -p_x (\varepsilon_{11} s_{11} + \varepsilon_{12} s_{12} + \varepsilon_{13} s_{13} + \varepsilon_{16} s_{16}), \quad b_x = -p_x (\varepsilon_{21} s_{11} + \varepsilon_{22} s_{12} + \varepsilon_{23} s_{13} + \varepsilon_{26} s_{16}), \quad c_x = 0;$$

$$a_y = -p_y (\varepsilon_{11} s_{21} + \varepsilon_{12} s_{22} + \varepsilon_{13} s_{23} + \varepsilon_{16} s_{26}), \quad b_y = -p_y (\varepsilon_{21} s_{21} + \varepsilon_{22} s_{22} + \varepsilon_{23} s_{23} + \varepsilon_{26} s_{26}), \quad c_y = 0;$$

$$a_z = -p_z (\varepsilon_{11} s_{31} + \varepsilon_{12} s_{32} + \varepsilon_{13} s_{33} + \varepsilon_{16} s_{36}), \quad b_z = -p_z (\varepsilon_{21} s_{31} + \varepsilon_{22} s_{32} + \varepsilon_{23} s_{33} + \varepsilon_{26} s_{36}), \quad c_z = 0.$$

Die electricische Axe liegt im ersteren Falle in der Symmetrieaxe, im letzteren in der Symmetrieebene.

III. Gruppe 7).

$$\begin{aligned} a_x &= b_x = 0, c_x = -p_x (\varepsilon_{31} s_{11} + \varepsilon_{32} s_{12} + \varepsilon_{33} s_{13}); \\ a_y &= b_y = 0, c_y = -p_y (\varepsilon_{31} s_{21} + \varepsilon_{32} s_{22} + \varepsilon_{33} s_{23}); \\ a_z &= b_z = 0, c_z = -p_z (\varepsilon_{31} s_{31} + \varepsilon_{32} s_{32} + \varepsilon_{33} s_{33}). \end{aligned}$$

Die electricische Axe fällt hier stets in die Hauptaxe, die Grösse des erregten Momentes ist verschieden je nach der Richtung des ausgeübten Druckes.

Gruppe 8). $a = b = c = 0$, für p_x, p_y und p_z .

IV. Gruppe 10) und 13) gibt für p_x und p_y gleiche Resultate, nämlich:

$$\begin{aligned} a_x &= b_x = 0, c_x = -p_x (\varepsilon_{31} (s_{11} + s_{12}) + \varepsilon_{33} s_{13}); \text{ dazu} \\ a_z &= b_z = 0, c_z = -p_z (2\varepsilon_{31} s_{31} + \varepsilon_{33} s_{33}). \end{aligned}$$

Gruppe 11) und 14) gibt für p_x, p_y, p_z

$$a = b = c = 0.$$

Gruppe 15).

$$\begin{aligned} a_x &= b_x = 0, c_x = -p_x \varepsilon_{31} (s_{11} - s_{12}); \\ a_y &= b_y = 0, c_y = +p_y \varepsilon_{31} (s_{11} - s_{12}); \\ a_z &= b_z = c_z = 0. \end{aligned}$$

V. Gruppe 17) und 20).

$$\begin{aligned} a_x &= b_x = 0, c_x = -p_x (\varepsilon_{31} (s_{11} + s_{12}) + \varepsilon_{33} s_{13}); \\ a_y &= b_y = 0, c_y = -p_y (\varepsilon_{31} (s_{11} + s_{12}) + \varepsilon_{33} s_{13}); \\ a_z &= b_z = 0, c_z = -p_z (2\varepsilon_{31} s_{31} + \varepsilon_{33} s_{33}). \end{aligned}$$

Gruppe 18). $a = b = c = 0$ für p_x, p_y, p_z .

Gruppe 21).

$$\begin{aligned} a_x &= -p_x \varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12}), b_x = 0, c_x = 0; \\ a_y &= +p_y \varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12}), b_y = 0, c_y = 0; \\ a_z &= b_z = c_z = 0. \end{aligned}$$

Gruppe 22).

$$\begin{aligned} a_x &= -p_x \varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12}), b_x = +p_x \varepsilon_{22} (s_{11} - s_{12}), c_x = 0; \\ a_y &= +p_y \varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12}), b_y = -p_y \varepsilon_{22} (s_{11} - s_{12}), c_y = 0; \\ a_z &= b_z = c_z = 0. \end{aligned}$$

Gruppe 24).

$$\begin{aligned} a_x &= 0, b_x = +p_x(\varepsilon_{22}(s_{11} - s_{12}) - \varepsilon_{15} s_{14}), c_x = -p_x(\varepsilon_{31}(s_{11} + s_{12}) + \varepsilon_{33} s_{13}); \\ a_y &= 0, b_y = -p_y(\varepsilon_{22}(s_{11} - s_{12}) - \varepsilon_{15} s_{14}), c_y = -p_y(\varepsilon_{31}(s_{11} + s_{12}) + \varepsilon_{33} s_{13}); \\ a_z &= b_z = 0, c_z = -p_z(2\varepsilon_{31} s_{31} + \varepsilon_{33} s_{33}). \end{aligned}$$

Gruppe 25).

$$\begin{aligned} a_x &= -p_x(\varepsilon_{11}(s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14} s_{14}), b_x = c_x = 0; \\ a_y &= +p_y(\varepsilon_{11}(s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14} s_{14}), b_y = c_y = 0; \\ a_z &= b_z = c_z = 0. \end{aligned}$$

Gruppe 27).

$$\begin{aligned} a_x &= -p_x(\varepsilon_{11}(s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14} s_{14} - \varepsilon_{15} s_{25}), b_x = +p_x(\varepsilon_{22}(s_{11} - s_{12}) - \varepsilon_{15} s_{14} - \varepsilon_{14} s_{25}), \\ c_x &= -p_x(\varepsilon_{31}(s_{11} + s_{12}) + \varepsilon_{33} s_{13}); \\ a_y &= +p_y(\varepsilon_{11}(s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14} s_{14} - \varepsilon_{15} s_{25}), b_y = -p_y(\varepsilon_{22}(s_{11} - s_{12}) - \varepsilon_{15} s_{14} - \varepsilon_{14} s_{25}), \\ c_y &= -p_y(\varepsilon_{31}(s_{11} + s_{12}) + \varepsilon_{33} s_{13}); \\ a_z &= b_z = 0, c_z = -p_z(2\varepsilon_{31} s_{31} + \varepsilon_{33} s_{33}). \end{aligned}$$

VI. Gruppe 29) bis 32). $a = b = c = 0$ für p_x, p_y, p_z .

Von diesen Resultaten sind besonders die auf Gruppe 24) und 25) bezüglichen von Interesse, weil über das Verhalten eines wie vorausgesetzt orientirten Prismas von Turmalin und Quarz bei einseitigem Druck nicht nur qualitative, sondern auch quantitative Beobachtungen der Herren J. und P. Curie¹⁾ vorliegen.

Dieselben beziehen sich bei Turmalin auf die Electricitätsmengen oder die durch sie veranlassten Potentialänderungen, welche man erhält, wenn man die zur Hauptaxe normalen Flächen des betreffenden Prismas mit Zinnplatten armirt, eine derselben mit einem Electrometer, die andere mit der Erde in Verbindung bringt und darnach das Prisma parallel einer beliebigen Kante comprimirt.

Da die Belegungen auf den Flächen normal zur Z -Axe angebracht waren, so war also $\pm c$ die Dichte $\bar{\varepsilon}$ der Oberflächenschicht auf den \pm Grundflächen; demgemäss wurde, jenachdem die eine oder die andere

1) J. und P. Curie, Journ. d. Phys. (2) 1, p. 245, 1882.

Belegung mit dem Electrometer verbunden war, die Menge $\pm Q_x c$ an demselben wirksam und konnte in der Seite 35 und 36 beschriebenen Weise bestimmt werden.

Nach der Theorie sind diese Electricitätsmengen m_s in den drei Fällen, wo der Druck parallel der X , Y und Z -Axe ausgeübt wurde,

$$\begin{aligned}
 m_x &= A \frac{Q_z}{Q_x} (\varepsilon_{31} (s_{11} + s_{12}) + \varepsilon_{33} s_{13}), \\
 32) \quad m_y &= B \frac{Q_z}{Q_y} (\varepsilon_{31} (s_{11} + s_{12}) + \varepsilon_{33} s_{13}), \\
 m_z &= \Gamma (2 \varepsilon_{31} s_{31} + \varepsilon_{33} s_{33}).
 \end{aligned}$$

Diese Formeln zeigen zunächst, dass die entwickelte Electricitätsmenge bei gegebenen Gesamtdrücken unabhängig sein musste von der absoluten Grösse des Krystallprismas, dass sie, im Falle der Druck der Hauptaxe parallel wirkte, auch nicht von dem Verhältniss seiner Kanten abhängen konnte, dass dagegen, wenn die Kanten parallel den Coordinatenaxen mit α, β, γ bezeichnet werden, m_x mit α/γ und m_y mit β/γ proportional sein, und endlich, dass ein Druck parallel der X - und Y -Axe die gleiche Wirkung üben musste. Alles dies ist in genauer Uebereinstimmung mit der Beobachtung.

Einen numerischen Werth haben die Beobachter nur für den letzten der Klammerausdrücke in den Formeln (32) bestimmt, bezüglich des ersteren haben sie allein constatirt, dass er von demselben Vorzeichen ist, wie jener. Man kann, da für Turmalin s_{13} viel kleiner ist, als $(s_{11} + s_{12})$ und s_{33} , hieraus schliessen, dass ε_{31} und ε_{33} gleiches Vorzeichen haben werden, was immerhin für einige Anwendungen nützlich ist. Lässt man das »analoge« Ende des Krystalles in die $+Z$ -Axe fallen, so ist ε_{31} und ε_{33} positiv. —

Noch überraschender als beim Turmalin ist die Uebereinstimmung der Theorie mit den Resultaten der Beobachtung am Quarz. Hier waren der Gegenstand der Messung die Electricitätsmengen, welche durch die Drucke A, B, Γ in den Belegungen der Endfläche normal zu einer Nebenaxe X hervorgerufen wurden. Die Theorie ergibt hierfür:

$$\begin{aligned}
 m_x &= +A (\varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14} s_{14}), \\
 m_y &= -B \frac{Q_x}{Q_y} (\varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14} s_{14}), \quad m_z = 0.
 \end{aligned}
 \tag{32'}$$

Zu den schon oben aus den entsprechenden Formeln abgeleiteten Folgerungen kömmt hier noch besonders die, dass der Factor von A dem von BQ_x/Q_y entgegengesetzt gleich, der von Γ aber stets Null ist. Bei gleichen Dimensionen α muss geben also gleiche Drucke parallel der X- und Y-Axe entgegengesetzt gleiche Electricitätsmengen, Drucke parallel der Z-Axe dagegen überhaupt keine electriche Erregung.

Dies ist aber das empirische Resultat der Herren J. und P. Curie. —

Für weitere Prüfungen der Theorie wäre es besonders erwünscht, systematische quantitative Bestimmungen mit anders, als parallel den Hauptaxen orientirten Prismen vorzunehmen. Allerdings sind die hierfür geltenden Formeln im Allgemeinen recht complicirt, indessen lassen sich specielle Fälle angeben, wo sie einigermassen übersichtlich werden.

Man verfährt am besten so, dass man zunächst die auf die Hauptaxen bezogenen Deformationen x_x, \dots bei beliebiger Druckrichtung bestimmt und mit ihrer Hülfe die auf dieselben Axen bezogenen Momente a, b, c berechnet, nach den Formeln (4') finden sich dann leicht die Momente a', b', c' nach den beliebigen Axen X', Y', Z' .

Ist die Druckrichtung die Z'-Axe des wie in (4) definirten $X'Y'Z'$ -Systems, so findet sich das System der Deformationen:

$$\begin{aligned}
 x_x &= -p'_z (s_{11} \gamma_1^2 + s_{12} \gamma_2^2 + s_{13} \gamma_3^2 + s_{14} \gamma_2 \gamma_3 + s_{15} \gamma_3 \gamma_1 + s_{16} \gamma_1 \gamma_2), \\
 x_y &= -p'_z (s_{61} \gamma_1^2 + s_{62} \gamma_2^2 + s_{63} \gamma_3^2 + s_{64} \gamma_2 \gamma_3 + s_{65} \gamma_3 \gamma_1 + s_{66} \gamma_1 \gamma_2).
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Diese Werthe sind in die Ausdrücke der Tabelle I einzusetzen, um a, b, c zu erhalten.

Für die Gruppe (25) (Quarz) erhält man insbesondere, indem man zugleich das System der hier allein von Null verschiedenen s_{ik} nach Seite 30 berücksichtigt, die folgenden Momente a, b, c nach den Hauptaxen. .

$$34) \quad \begin{aligned} a &= -p'_z [(\varepsilon_{11}(s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14}s_{14})(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) + (2\varepsilon_{11}s_{14} + \varepsilon_{14}s_{44})\gamma_2\gamma_3], \\ b &= +p'_z [(2\varepsilon_{11}s_{14} + \varepsilon_{14}s_{44})\gamma_1\gamma_3 + (\varepsilon_{11}(s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14}s_{14})2\gamma_1\gamma_2], \quad c = 0. \end{aligned}$$

Wir wollen, um übersichtliche Formeln zu erhalten, nun die Druckrichtung Z' successive in jede der drei Coordinatenebenen und die X' -Axe zugleich normal dazu legen. Es ergeben sich dann folgende Resultate:

1) Druckrichtung in der YZ -Ebene;

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \gamma_1 = 0, \quad \beta_2 = \gamma_3, \quad \beta_3 = -\gamma_2, \quad \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1; \\ a' &= a, \quad b' = b\gamma_3 - c\gamma_2, \quad c' = b\gamma_2 + c\gamma_3. \end{aligned}$$

$$35) \quad \begin{aligned} a' &= +p'_z [(\varepsilon_{11}(s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14}s_{14})\gamma_2^2 - (2\varepsilon_{11}s_{14} + \varepsilon_{14}s_{44})\gamma_2\gamma_3], \\ b' &= c' = 0. \end{aligned}$$

2) Druckrichtung in der ZX -Ebene;

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 1, \quad \alpha_3 = \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0, \quad \beta_3 = \gamma_1, \quad \beta_1 = -\gamma_3, \quad \gamma_3^2 + \gamma_1^2 = 1; \\ a' &= b, \quad b' = c\gamma_1 - a\gamma_3, \quad c' = a\gamma_1 + c\gamma_3. \end{aligned}$$

$$a' = +p'_z [\varepsilon_{14}s_{44} + 2\varepsilon_{11}s_{14}]\gamma_1\gamma_3,$$

$$35'') \quad b' = +p'_z [\varepsilon_{11}(s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14}s_{14}]\gamma_1^2\gamma_3,$$

$$c' = -p'_z [\varepsilon_{11}(s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14}s_{14}]\gamma_1^3$$

3) Druckrichtung in der XY -Ebene;

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \gamma_3 = 0, \quad \beta_1 = \gamma_2, \quad \beta_2 = -\gamma_1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1; \\ a' &= c, \quad b' = a\gamma_2 - b\gamma_1, \quad c' = a\gamma_1 + b\gamma_2. \end{aligned}$$

$$35''') \quad a' = 0, \quad b' = -p'_z [\varepsilon_{11}(s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14}s_{14}]\gamma_2(3\gamma_1^2 - \gamma_2^2),$$

$$c' = +p'_z [\varepsilon_{11}(s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14}s_{14}]\gamma_1(3\gamma_2^2 - \gamma_1^2).$$

Die letzten Werthe sind von besonderer Einfachheit. Nennt man nämlich φ den Winkel zwischen der Druckrichtung und der X -Axe (welche eine der krystallographischen Nebenaxen und der electricen Hauptrichtungen ist), setzt also $\gamma_1 = \cos \varphi$, $\gamma_2 = \sin \varphi$, und bezeichnet man die Klammer kurz mit C , so ergeben die letzten drei Formeln

$$a' = 0, \quad b' = -p'_z C \sin 3\varphi, \quad c' = -p'_z C \cos 3\varphi.$$

Dies Resultat entspricht natürlich genau den Symmetrieverhältnissen

der Gruppe und es finden die drei Maxima von c' und die Minima von b' dann statt, wenn die Druckrichtung in einer der drei electricen Nebenaxen liegt.

Was das numerische Gesetz angeht, so liegt eine Beobachtung von Herrn Czermak¹⁾ vor, welche seine Prüfung gestattet.

Herr Czermak hat bei zwei Platten von Quarz die Potentiale gemessen, welche in der einen der auf den gedrückten Flächen angebrachten Belegungen durch verschiedene Drucke erregt wurden, wenn die zweite zur Erde abgeleitet war. Die eine Platte war nahe parallel unserm XYZ-System orientirt, die andere sollte um einen Winkel von 15° um die Z-Axe gegen diese Orientirung gedreht sein. Hiebei hätten die beiden Flächenpaare parallel der Z-Axe eine gleiche Ladung annehmen müssen, wenn man den Druck normal zu ihnen ausübte; denn vertauscht man φ mit $\varphi + 90^\circ$, so erhält man resp.

$$c'_\varphi = -p'_z C \cos 3\varphi, \quad c'_{\varphi+90} = -p'_z C \sin 3\varphi$$

und diese Werthe sind für $\varphi = 15^\circ$ gleich. Indessen ergab die Beobachtung bei drei verschiedenen Drucken p_1, p_2, p_3 für die beiden Flächenpaare resp. folgende electriche Spannungen:

	p_1	p_2	p_3	
φ	4,09	6,59	7,92	Volt,
$\varphi + 90^\circ$	2,91	4,65	5,54	" .

Dieselben geben die Verhältnisse

$$1,406 \quad 1,417 \quad 1,430,$$

im Mittel 1,418, und diese Zahl gestattet die Bestimmung der wahren Orientirung, wie dies auch Herr Czermak bemerkt, aber nach einer nicht zu rechtfertigenden Formel ausgeführt hat. Nach unserer Theorie muss

$$1,418 = ctg 3\varphi$$

sein, d. h.

$$3\varphi = 35^\circ 11', \quad \varphi = 11^\circ 43'.$$

1) P. Czermak, Wien. Ber. 96, p. 1217, 1887.

Benutzt man diesen Werth, sowie das Resultat, dass für die erste nach $\varphi = 0$ orientirte Platte bei den gleichen Drucken resp. die Werthe

	p_1	p_2	p_3
0°	4,88	7,96	9,48 Volt

beobachtet waren. und berücksichtigt, dass diese Zahlen, richtige Orientierung vorausgesetzt, resp. gleich $p_1 C$, $p_2 C$ und $p_3 C$ sein müssen, so erhält man die folgenden berechneten Werthe für die zweite Platte in den beiden Positionen:

φ	4,00	6,50	7,75 Volt,
$\varphi + 90^\circ$	2,81	4,58	5,46 „

Die Uebereinstimmung mit den direct beobachteten Werthen ist gewiss sehr befriedigend, um so mehr, wenn man bedenkt, dass Fehlerquellen jederzeit dahin wirken werden, die höhere Potentiale mehr zu verkleinern, als die niedrigen. —

Besonders übersichtlich werden die allgemeinen Formeln für diejenigen Gruppen, bei welchen die Momente die einfache Form

$$a = \varepsilon_{14} y_z, \quad b = \varepsilon_{25} z_x, \quad c = \varepsilon_{36} x_y$$

annehmen, nämlich für Gruppe 8), der sich 11), 14), 18), 29) und 32) als speciellere unterordnen. Berücksichtigt man die Werthe der s_{jk} nach Seite 29 u. f., so erhält man leicht

$$a = -p'_z \varepsilon_{14} s_{44} \gamma_2 \gamma_3, \quad b = -p'_x \varepsilon_{25} s_{55} \gamma_3 \gamma_1, \quad c = -p'_y \varepsilon_{36} s_{66} \gamma_1 \gamma_2,$$

und hieraus folgt

$$\begin{aligned} a' &= -p'_z (\varepsilon_{14} s_{44} \alpha_1 \gamma_2 \gamma_3 + \varepsilon_{25} s_{55} \alpha_2 \gamma_3 \gamma_1 + \varepsilon_{36} s_{66} \alpha_3 \gamma_1 \gamma_2), \\ b' &= -p'_x (\varepsilon_{14} s_{44} \beta_1 \gamma_2 \gamma_3 + \varepsilon_{25} s_{55} \beta_2 \gamma_3 \gamma_1 + \varepsilon_{36} s_{66} \beta_3 \gamma_1 \gamma_2), \\ c' &= -p'_y (\varepsilon_{14} s_{44} + \varepsilon_{25} s_{55} + \varepsilon_{36} s_{66}) \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \end{aligned}$$

Diese Formeln legen eine andere Definition der electrischen Hauptrichtungen nahe, als oben Seite 19 angewandt worden ist. Man könnte nämlich diejenigen Richtungen mit dem gedachten Namen bezeichnen, parallel denen geschnitten ein Cylinder durch longitudinalen Druck kein transversales Moment erhält.

Diese Definition würde in unserem Falle zu den beiden Bedingungen führen

$$\begin{aligned} \varepsilon_{14} s_{44} \alpha_1 \gamma_2 \gamma_3 + \varepsilon_{25} s_{55} \alpha_2 \gamma_3 \gamma_1 + \varepsilon_{36} s_{66} \alpha_3 \gamma_1 \gamma_2 &= 0, \\ \varepsilon_{14} s_{44} \beta_1 \gamma_2 \gamma_3 + \varepsilon_{25} s_{55} \beta_2 \gamma_3 \gamma_1 + \varepsilon_{36} s_{66} \beta_3 \gamma_1 \gamma_2 &= 0, \end{aligned}$$

welche im Allgemeinen nicht durch dieselben Werthe γ_n erfüllt werden, wie die Gleichungen (16), welche der früheren Definition entsprechen; für das reguläre System führen natürlich beide zu demselben Resultat, da hier die Octaëdernormalen geometrisch ausgezeichnete Richtungen sind.

Wenn indessen auch die neue Definition anschaulicher ist, als die frühere, so scheint mir jene doch principiell um deswillen vorzuziehen, weil sie nur die Werthe der piezoelectrischen Constanten benutzt, während diese noch die Werthe der Elasticitätsmoduln heranzieht. —

Wir wenden uns nunmehr zur Behandlung der electricen Erregung eines krystallinischen Cylinders durch gleichförmige Biegung.

Liegt wieder die Z' -Richtung in der Cylinderaxe und findet die Biegung statt in Folge eines Momentes Δ um eine zu Z' senkrechte Axe, welches um die beiden Hauptträgheitsaxen des Querschnittes Q_z , die zur X' - und Y' -Axe gewählt sind, die Componenten Λ' und M' ergibt, so ist nach (29)

$$\begin{aligned} x'_z &= \frac{s_{13}}{Q_z} \left(\frac{\Lambda' y'}{x_z^2} - \frac{M' x'}{x_y^2} \right), \quad y'_z = \frac{s_{23}}{Q_z} \left(\frac{\Lambda' y'}{x_z^2} - \frac{M' x'}{x_y^2} \right), \quad z'_z = \frac{s_{33}}{Q_z} \left(\frac{\Lambda' y'}{x_z^2} - \frac{M' x'}{x_y^2} \right), \\ y'_z &= \frac{s_{43}}{Q_z} \left(\frac{\Lambda' y'}{x_z^2} - \frac{M' x'}{x_y^2} \right), \quad z'_z = \frac{s_{53}}{Q_z} \left(\frac{\Lambda' y'}{x_z^2} - \frac{M' x'}{x_y^2} \right), \quad x'_y = \frac{s_{63}}{Q_z} \left(\frac{\Lambda' y'}{x_z^2} - \frac{M' x'}{x_y^2} \right). \end{aligned}$$

Diese Formeln sind den in (31 γ) aufgestellten sehr ähnlich, es sind also auch die Werthe der Tabelle V sofort für unsern Fall zu benutzen, wenn man nur

$$- p'_z \text{ mit } \frac{1}{Q_z} \left(\frac{\Lambda' y'}{x_z^2} - \frac{M' x'}{x_y^2} \right)$$

und $- p'_x, - p'_y$ mit den analogen Gliedern vertauscht.

Characteristisch ist in den so erhaltenen Resultaten, das die Momente a_z, b_z, c_z z. B. nicht constant, sondern lineäre Funktionen der Coordinaten sind, und alle diesselts und jenseits derselben durch den

Schwerpunkt des Querschnittes gehenden und nur von der Gestalt des Querschnittes und der Lage der Drehungsaxe abhängigen Geraden G , deren Gleichung lautet

$$\frac{A'y'}{x_x^2} = \frac{M'x'}{x_y^2},$$

entgegengesetzt gleiche Werthe besitzen.

Hieraus folgt, dass bei gleichförmiger Biegung die aequivalente electricische Dichte ϵ im Innern constant und bei centrisch symmetrischen Querschnitten die aequivalente Oberflächendichte $\bar{\epsilon}$ an diametral gegenüberliegenden Punkten nach Vorzeichen und Grösse identisch ist. Allgemein ist $\bar{\epsilon}$ von entgegengesetztem Vorzeichen als ϵ an allen denjenigen Stellen des Umfangs, wo die äussere Normale von der Geraden G hinwegweist, von gleichem, wo sie nach G hinweist. Wir erhalten also hier den interessanten Fall, dass durch Deformation ein Cylinder im ganzen Innern mit der einen, auf der ganzen Mantelfläche mit der entgegengesetzten Electricität geladen werden kann.

Für die Praxis sind diese Resultate vielleicht deshalb nicht unwichtig, weil man bei Krystallstäben eine Biegung verhältnissmässig noch leichter hervorbringen kann, als einseitige Dehnung oder Compression.

Als ein Beispiel sei behandelt ein Krystall der Gruppe (24) (Turmalin.)

Biegt man ein rechteckiges Prisma, dessen Länge der X -Axe parallel ist, durch ein Moment um die Y -Axe, so kömmt

$$36') \quad a_x = 0, \quad b_x = + \frac{Mz}{x_y^2 Q_x} (\epsilon_{22}(s_{11} - s_{12}) - \epsilon_{15} s_{14}), \quad c_x = - \frac{Mz}{x_y^2 Q_x} (\epsilon_{31}(s_{11} + s_{12}) + \epsilon_{33} s_{13}).$$

Biegt man um die Z -Axe, so kömmt

$$36'') \quad a_x = 0, \quad b_x = - \frac{Ny}{x_z^2 Q_x} (\epsilon_{22}(s_{11} - s_{12}) - \epsilon_{15} s_{14}), \quad c_x = + \frac{Ny}{x_z^2 Q_x} (\epsilon_{31}(s_{11} + s_{12}) + \epsilon_{33} s_{13}).$$

Im letzteren Falle würde also, vorausgesetzt, dass die erste Klammer positiv ist, auf der Seite $+Y$ ein negatives, auf der Seite $-Y$ ein positives Moment b_x entstehen, sodass das gebogene Prisma auf den beiden gekrümmten Flächen eine negative Dichte $\bar{\epsilon}$ erhalten würde; Analoges gilt im ersteren Falle.

§ 7. Electriche Erregung eines elliptischen Cylinders durch Drillung um seine Axe.

Für die Entwicklung der Werthe der Momente, die in einem gedrillten elliptischen Cylinder auftreten, benutzen wir dasselbe $X'Y'Z'$ -System, das uns im vorigen Abschnitt diente. Die Z' -Axe sei die Cylinderaxe, die X' - und Y' - falle in die Axen der Querschnittsellipse, deren Gleichung ist:

$$\left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2 = 1. \quad 37^0)$$

Den Querschnitt bezeichnen wir wieder mit Q_z , das wirkende Moment mit N' . Dann haben, wie ich früher gezeigt habe¹⁾, die Deformationen folgende Werthe:

$$\begin{aligned} x'_z &= \frac{2N'}{Q_z} \left(\frac{x' s'_{14}}{\alpha^2} - \frac{y' s'_{15}}{\beta^2} \right), & y'_y &= \frac{2N'}{Q_z} \left(\frac{x' s'_{24}}{\alpha^2} - \frac{y' s'_{25}}{\beta^2} \right), & z'_z &= \frac{2N'}{Q_z} \left(\frac{x' s'_{34}}{\alpha^2} - \frac{y' s'_{35}}{\beta^2} \right), \\ y'_z &= \frac{2N'}{Q_z} \left(\frac{x' s'_{44}}{\alpha^2} - \frac{y' s'_{45}}{\beta^2} \right), & z'_x &= \frac{2N'}{Q_z} \left(\frac{x' s'_{54}}{\alpha^2} - \frac{y' s'_{55}}{\beta^2} \right), & x'_y &= \frac{2N'}{Q_z} \left(\frac{x' s'_{64}}{\alpha^2} - \frac{y' s'_{65}}{\beta^2} \right). \end{aligned} \quad 37)$$

Fällt die Cylinderaxe in die X' - oder Y' -Richtung und liegen die Ellipsenaxen β, γ resp. γ, α in den Y' -, Z' - oder Z' -, X' -Axen, so gelten Formeln, die aus den obigen durch cyclische Vertauschung folgen; z. B. für den Fall der Drillung um die X' -Axe:

$$x'_x = \frac{2N'}{Q_x} \left(\frac{y' s'_{15}}{\beta^2} - \frac{z' s'_{16}}{\gamma^2} \right), \dots \quad 37')$$

für die Drillung um die Y' -Axe:

$$x'_x = \frac{2N'}{Q_y} \left(\frac{z' s'_{16}}{\gamma^2} - \frac{x' s'_{14}}{\alpha^2} \right), \dots \quad 37'')$$

Mit Hülfe dieser Werthe lassen sich nach (5) zunächst die auf die Hauptaxen X, Y, Z bezogenen Deformationen x_x, \dots und aus diesen nach Tabelle I die electriche Momente a, b, c berechnen.

1) W. Voigt, theor. Studien p. 71 u. f.

Wiederum sind die Ausdrücke für die Momente besonders einfach, wenn die Drillung um eine der Hauptaxen X , Y , Z stattfindet, und es möge das System der hier geltenden Werthe im Folgenden zusammengestellt werden. Der Index an den a , b , c bezeichne die Lage der Drillungsaxe. Der Abkürzung wegen ist indess bei den complicirtesten Gruppen nur je eine Lage der Drillungsaxe benutzt, die nach Symmetrie besonders ausgezeichnet ist.

Tabelle VI.

I. Gruppe 2).

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{2\Lambda}{Q_x} \left[\frac{y}{\beta^2} \sum_h \varepsilon_{1h} s_{h5} - \frac{z}{\gamma^2} \sum_h \varepsilon_{1h} s_{h6} \right], & b_x &= \frac{2\Lambda}{Q_x} \left[\frac{y}{\beta^2} \sum_h \varepsilon_{2h} s_{h5} - \frac{z}{\gamma^2} \sum_h \varepsilon_{2h} s_{h6} \right], \\ c_x &= \frac{2\Lambda}{Q_x} \left[\frac{y}{\beta^2} \sum_h \varepsilon_{3h} s_{h5} - \frac{z}{\gamma^2} \sum_h \varepsilon_{3h} s_{h6} \right], \end{aligned}$$

ebenso die übrigen.

II. Gruppe 4).

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{2N}{Q_x} \left[\frac{x}{\alpha^2} (\varepsilon_{14} s_{44} + \varepsilon_{15} s_{54}) - \frac{y}{\beta^2} (\varepsilon_{14} s_{45} + \varepsilon_{15} s_{55}) \right], \\ b_x &= \frac{2N}{Q_x} \left[\frac{x}{\alpha^2} (\varepsilon_{24} s_{44} + \varepsilon_{25} s_{54}) - \frac{y}{\beta^2} (\varepsilon_{24} s_{45} + \varepsilon_{25} s_{55}) \right], & c_x &= 0. \end{aligned}$$

Gruppe 5).

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{2\Lambda z}{Q_x \gamma^2} (\varepsilon_{11} s_{16} + \varepsilon_{12} s_{26} + \varepsilon_{13} s_{36} + \varepsilon_{16} s_{66}), \\ b_x &= -\frac{2\Lambda z}{Q_x \gamma^2} (\varepsilon_{21} s_{16} + \varepsilon_{22} s_{26} + \varepsilon_{23} s_{36} + \varepsilon_{26} s_{66}), \\ c_x &= +\frac{2\Lambda y}{Q_x \beta^2} (\varepsilon_{34} s_{46} + \varepsilon_{35} s_{56}). \end{aligned}$$

III. Gruppe 7) und 8).

$$\begin{aligned} a_x &= +\frac{2\Lambda y}{Q_x \beta^2} \varepsilon_{15} s_{55}, & b_x &= 0, & c_x &= -\frac{2\Lambda z}{Q_x \gamma^2} \varepsilon_{36} s_{66}; \\ a_y &= 0, & b_y &= -\frac{2Mx}{Q_y \alpha^2} \varepsilon_{24} s_{44}, & c_y &= +\frac{2Mz}{Q_y \gamma^2} \varepsilon_{36} s_{66}; \\ a_z &= -\frac{2Ny}{Q_z \beta^2} \varepsilon_{15} s_{55}, & b_z &= +\frac{2Nx}{Q_z \alpha^2} \varepsilon_{24} s_{44}, & c_z &= 0. \end{aligned}$$

IV. Gruppe 10).

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{2\Lambda y}{Q_x \beta^2} \varepsilon_{15} s_{44}, & b_x &= 0, & c_x &= 0; \\ a_y &= 0, & b_y &= -\frac{2Mx}{Q_y \alpha^2} \varepsilon_{15} s_{44}, & c_y &= 0; \\ a_z &= -\frac{2Ny}{Q_z \beta^2} \varepsilon_{15} s_{44}, & b_z &= +\frac{2Nx}{Q_z \alpha^2} \varepsilon_{15} s_{44}, & c_z &= 0. \end{aligned}$$

Gruppe 11).

$$\begin{aligned} a_x &= 0, & b_x &= -\frac{2\Lambda y}{Q_x \beta^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & c_x &= 0; \\ a_y &= -\frac{2Mx}{Q_y \alpha^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & b_y &= 0, & c_y &= 0; \\ a_z &= +\frac{2Nx}{Q_z \alpha^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & b_z &= +\frac{2Ny}{Q_z \beta^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & c_z &= 0. \end{aligned}$$

Gruppe 13).

$$\begin{aligned} a_x &= +\frac{2\Lambda y}{Q_x \beta^2} \varepsilon_{15} s_{44}, & b_x &= -\frac{2\Lambda y}{Q_x \beta^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & c_x &= 0; \\ a_y &= -\frac{2Mx}{Q_y \alpha^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & b_y &= -\frac{2Mx}{Q_y \alpha^2} \varepsilon_{15} s_{44}, & c_y &= 0; \\ a_z &= +\frac{2Ns_{44}}{Q_z} \left(\frac{x\varepsilon_{14}}{\alpha^2} - \frac{y\varepsilon_{15}}{\beta^2} \right), & b_z &= +\frac{2Ns_{44}}{Q_z} \left(\frac{x\varepsilon_{15}}{\alpha^2} + \frac{y\varepsilon_{14}}{\beta^2} \right), & c_z &= 0. \end{aligned}$$

Gruppe 14).

$$\begin{aligned} a_x &= 0, & b_x &= \frac{2\Lambda y}{Q_x \beta^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & c_x &= -\frac{2\Lambda z}{Q_x \gamma^2} \varepsilon_{36} s_{66}; \\ a_y &= -\frac{2Mx}{Q_y \alpha^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & b_y &= 0, & c_y &= +\frac{2Mz}{Q_y \gamma^2} \varepsilon_{36} s_{66}; \\ a_z &= +\frac{2Nx}{Q_z \alpha^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & b_z &= -\frac{2Ny}{Q_z \beta^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & c_z &= 0. \end{aligned}$$

Gruppe 15).

$$\begin{aligned} a_x &= +\frac{2\Lambda y}{Q_x \beta^2} \varepsilon_{15} s_{44}, & b_x &= +\frac{2\Lambda y}{Q_x \beta^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & c_x &= -\frac{2\Lambda z}{Q_x \gamma^2} (2\varepsilon_{31} s_{16} + \varepsilon_{36} s_{66}); \\ a_y &= -\frac{2Mx}{Q_y \alpha^2} \varepsilon_{14} s_{44}, & b_y &= +\frac{2Mx}{Q_y \alpha^2} \varepsilon_{15} s_{44}, & c_y &= +\frac{2Mz}{Q_y \gamma^2} (2\varepsilon_{31} s_{16} + \varepsilon_{36} s_{66}); \\ a_z &= +\frac{2Ns_{44}}{Q_z} \left(\frac{x\varepsilon_{14}}{\alpha^2} - \frac{y\varepsilon_{15}}{\beta^2} \right), & b_z &= -\frac{2Ns_{44}}{Q_z} \left(\frac{x\varepsilon_{15}}{\alpha^2} + \frac{y\varepsilon_{14}}{\beta^2} \right), & c_z &= 0. \end{aligned}$$

V. Gruppe 17) wie 10).

Gruppe 18) wie 11).

Gruppe 20) wie 13).

Gruppe 21).

$$a_x = 0, \quad b_x = + \frac{4\Lambda z}{Q_x \gamma^2} \varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12}), \quad c_x = 0;$$

$$a_y = 0, \quad b_y = - \frac{4Mz}{Q_y \gamma^2} \varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12}), \quad c_y = 0;$$

$$a_z = b_z = c_z = 0.$$

Gruppe 22).

$$a_x = - \frac{4\Lambda z}{Q_x \gamma^2} \varepsilon_{22} (s_{11} - s_{12}), \quad b_x = - \frac{4\Lambda z}{Q_x \gamma^2} \varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12}), \quad c_x = 0.$$

$$a_z = b_z = c_z = 0.$$

Gruppe 24).

$$a_x = + \frac{2\Lambda}{Q_x} \left(\frac{y}{\beta^2} (\varepsilon_{15} s_{44} - 2\varepsilon_{22} s_{14}) - \frac{2z}{\gamma^2} (\varepsilon_{15} s_{14} - \varepsilon_{22} (s_{11} - s_{12})) \right), \quad b_x = c_x = 0;$$

$$a_y = + \frac{4Mz}{Q_y \gamma^2} (\varepsilon_{15} s_{14} - \varepsilon_{22} (s_{11} - s_{12})), \quad b_y = - \frac{2Mx}{Q_y \alpha^2} (\varepsilon_{15} s_{44} - 2\varepsilon_{22} s_{14}), \quad c_y = 0;$$

$$a_z = - \frac{2Ny}{Q_x \beta^2} (\varepsilon_{15} s_{44} - 2\varepsilon_{22} s_{14}), \quad b_z = + \frac{2Nx}{Q_x \alpha^2} (\varepsilon_{15} s_{44} - 2\varepsilon_{22} s_{14}), \quad c_z = 0.$$

Gruppe 25).

$$a_x = 0, \quad b_x = - \frac{2\Lambda}{Q_x} \left(\frac{y}{\beta^2} (2\varepsilon_{11} s_{14} + \varepsilon_{14} s_{44}) - \frac{2z}{\gamma^2} (\varepsilon_{14} s_{44} + \varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12})) \right), \quad c_x = 0;$$

$$a_y = - \frac{2Mx}{Q_y \alpha^2} (2\varepsilon_{11} s_{14} + \varepsilon_{14} s_{44}), \quad b_y = - \frac{4Mz}{Q_y \gamma^2} (\varepsilon_{14} s_{14} + \varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12})), \quad c_y = 0;$$

$$a_z = + \frac{2Nx}{Q_x \alpha^2} (2\varepsilon_{11} s_{14} + \varepsilon_{14} s_{44}), \quad b_z = + \frac{2Ny}{Q_x \beta^2} (2\varepsilon_{11} s_{14} + \varepsilon_{14} s_{44}), \quad c_z = 0.$$

Gruppe 27).

$$a_x = + \frac{2N}{Q_x} \left(\frac{x}{\alpha^2} (2\varepsilon_{11} s_{14} + \varepsilon_{14} s_{44} - 2\varepsilon_{22} s_{25}) + \frac{y}{\beta^2} (2\varepsilon_{11} s_{25} - \varepsilon_{15} s_{44} + 2\varepsilon_{22} s_{14}) \right),$$

$$b_x = - \frac{2N}{Q_x} \left(\frac{x}{\alpha^2} (2\varepsilon_{11} s_{25} - \varepsilon_{15} s_{44} + 2\varepsilon_{22} s_{14}) - \frac{y}{\beta^2} (2\varepsilon_{11} s_{14} + \varepsilon_{14} s_{44} - 2\varepsilon_{22} s_{25}) \right),$$

$$c_x = 0.$$

VI. Gruppe 29) und 32).

$$a_z = + \frac{2Nx}{Q_z \alpha^2} \varepsilon_{14} s_{44}, \quad b_z = - \frac{2Ny}{Q_z \beta^2} \varepsilon_{14} s_{44}, \quad c_z = 0.$$

Allen vorstehenden Formeln ist gemeinsam, dass sie die electrischen Momente als lineäre Functionen nur der Coordinaten senkrecht zur Längsaxe, die wir kurz die Quercordinaten nennen wollen, ergeben. Hieraus folgt, dass, wie bei der gleichförmigen Biegung allgemein, so bei der Drillung eines elliptischen Cylinders die erregte innere Dichte ε constant ist und die Oberflächendichte $\bar{\varepsilon}$ auf der Mantelfläche unter Umständen durchweg das entgegengesetzte Vorzeichen haben kann wie ε .

Für die Art der electrischen Erregung treten uns sechs einfachste Typen entgegen. Um sie kurz zu characterisiren ist es nützlich sie auf das frühere $X' Y' Z'$ -Axensystem, die Z' - als Cylinderaxe, zu beziehen; zugleich mag daran erinnert werden, dass für die der Ellipse (37⁰) ähnlichen und gleichgelegenen von der Gleichung

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} = k \quad (38)$$

die bekannten und ohne Erläuterung verständlichen Beziehungen gelten:

$$\frac{x'}{\alpha^2} : \frac{y'}{\beta^2} = \cos(n, x') : \cos(n, y') = -\cos(s, y') : \cos(s, x'); \quad (38')$$

ebenso für die Hyperbeln

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} - \frac{y'^2}{\beta^2} = k' \quad (39)$$

auch:

$$\frac{x'}{\alpha^2} : -\frac{y'}{\beta^2} = \cos(n', x') : \cos(n', y') = -\cos(s', y') : \cos(s', x'). \quad (39')$$

1. Typus. $a'_z : b'_z = \frac{x'}{\alpha^2} : \frac{y'}{\beta^2} = \cos(n, x') : \cos(n, y'); \quad c'_z = 0.$

Die electrischen Axen stehen allenthalben normal zu den zum Umfang des Querschnitts ähnlichen Ellipsen; die Stärke des Gesamtmomentes ist in jedem Punkt proportional mit der Fläche, welche die hindurchgelegte ähnliche Ellipse begrenzt, und indirect proportional mit

der Länge des Lotes vom Centrum auf die durch die Stelle construirte Tangente. Gleiches gilt von der Oberflächendichte ϵ , die hier dem Gesamtmoment in der Oberfläche gleich ist.

Diese Art der Electrisirung findet sich bei einem Cylinder parallel der Hauptaxe in den Gruppen 11), 18) und 25) (Quarz).

$$2. \text{ Typus. } a'_z : b'_z = -\frac{y'}{\beta^2} : \frac{x'}{\alpha^2} = \cos(s, x') : \cos(s, y'), \quad c'_z = 0.$$

Die electricen Axen liegen hier allenthalben tangential zu den bezüglichen ähnlichen Ellipsen; die Stärke des Momentes folgt demselben Gesetz, wie beim vorigen Typus; die Oberflächendichte $\bar{\epsilon}$ ist gleich Null.

Diese Vertheilung findet sich bei Cylindern parallel der Z-Axe in den Gruppen 10), 17) und 24) (Turmalin).

Auch combinirt kommen diese beiden Typen vor bei der Hauptaxe parallelen Cylindern der Gruppen 13), 20) und 27).

$$3. \text{ Typus. } a'_z : b'_z = \frac{x'}{\alpha^2} : -\frac{y'}{\beta^2} = \cos(n', x') : \cos(n', y'), \quad c'_z = 0.$$

Die electricen Axen stehen normal zu den Hyperbeln (39); die Grösse des Moments bestimmt sich wie bei den vorigen Typen. Die Oberflächendichtigkeit ist an beiden Enden der X'-Axe gleich, aber entgegengesetzt der an den Enden der Y'-Axe.

Diese Electrisirung findet sich bei den Cylindern parallel der Hauptaxe in den Gruppen 14), 29) und 32).

$$4. \text{ Typus. } a'_z : b'_z = \frac{y'}{\beta^2} : \frac{x'}{\alpha^2} = \cos(s', x) : \cos(s', y), \quad c'_z = 0.$$

Die electricen Axen liegen parallel den Hyperbeln (39), die Gesamtmomente bestimmen sich wie oben. Die Oberflächendichte verschwindet in den Enden der Ellipsenaxen und hat in den vier Quadranten abwechselnd entgegengesetzte Werthe.

Eine solche Vertheilung findet sich allein bei Gruppe 15) für die Z-Axe und zwar combinirt mit der vorigen.

$$5. \text{ Typus. } a'_z = m_1 x' + m_2 y', \quad b'_z = c'_z = 0.$$

Die electrischen Axen sind der X' -Axe parallel, die Momente verschwinden in der Ebene $m_1x' + m_2y' = 0$, die wir kurz E nennen. Die Oberflächendichte geht an den Stellen, welche die Ebene E schneidet, und an den Enden der β -Axe unter Zeichenwechsel durch Null hindurch, hat also im Allgemeinen in vier paarweise ungleichen Theilen des Umfanges entgegengesetztes Vorzeichen.

Diese Art der Erregung tritt u. a. auf in Gruppe 11) und 18) für die X - und die Y -Axe, in Gruppe 21) und 25) für die X -Axe. In anderen Fällen erscheint sie mit sich selbst combinirt, indem auch b'_z einer lineären Function von x' und y' mit anderen Coëfficienten gleich wird; so in Gruppe 14) bei der X - oder Y -Axe.

6. Typus. $a'_z = b'_z = 0, c'_z = n_1x' + n_2y'$.

Dies giebt eine rein longitudinale Electrisirung; die räumliche Dichte ϵ verschwindet, die Oberflächendichte $\bar{\epsilon}$ ist auf der Mantelfläche gleich Null, auf den Grundflächen in correspondirenden Punkten zu beiden Seiten der Geraden $n_1x' + n_2y' = 0$ von entgegengesetzt gleicher Grösse.

Dieser Fall findet sich in voller Einfachheit in Gruppe 10) und 17) bei der X - und Y -Axe, in Gruppe 21) bei der Y -Axe, in Gruppe 24) bei der X -Axe.

Der Typus 6 tritt öfter in Combination mit dem Typus 5 auf, so z. B. besonders einfach in Gruppe 22) bei der X - und in Gruppe 24) und 25) bei der Y -Axe.

Für den Fall eines Kreiscylinders vereinfachen sich noch einige der aufgestellten Typen in leicht ersichtlicher Weise.

§ 8. Das electrische Potential eines unendlich langen Kreiscylinders, in welchem die Momente beliebige, insbesondere lineäre Functionen der Quercoordinaten sind, für äussere Punkte.

Während in den Fällen des ein- und allseitigen constanten Druckes die Momente im Innern des deformirten Krystalles Constante waren, hat uns die Betrachtung der gleichförmigen Biegung beliebiger und der Drillung elliptischer Cylinder für dieselben lineäre Functionen der

Quercoordinaten geliefert. Dies hat die Folge, dass in den letztgenannten Fällen die Beurtheilung der Wirkungen, an denen man die Electricisirung erkennt und welche sich der messenden Beobachtung bieten, viel schwieriger ist, als bei den ersteren. Denn bei diesen wirkte auf äussere Punkte nur die aequivalente Oberflächenbelegung $\bar{\epsilon}$ und demgemäss konnte, wie bei dem Kundt'schen Bestäubungsverfahren über die Qualität, so bei den Messungen der Herren J. und P. Curin und Czermak über die Quantität der Wirkung ohne alle Rechnung ein Schluss gezogen werden.

Ist hingegen auch die räumliche aequivalente Dichte ϵ von Null verschieden, so ist die Beurtheilung selbst nur der Qualität der Wirkung der electricischen Vertheilung ohne durchgeführte Rechnung kaum möglich.

Zur Bestimmung jeder Art electricischer Einwirkung auf äussere Punkte dient das Potential (2). Nicht nur liefert uns dasselbe durch Differentiation nach den Coordinaten des angezogenen Punktes die Kraftcomponenten, welche derselbe erfährt, und damit also die Gesetze, nach denen bei der Bestäubungsmethode der erregte Krystall sich mit Schwefelblume oder Mennige bedeckt, sondern es bestimmt auch die electricische Vertheilung in dem Krystall genäherten Leitern und ergibt damit die Theorie gewisser zur Prüfung der Theorie und zur Constantenbestimmung wichtiger Messungsmethoden. Beispielsweise wird eine dem Krystall genäherte isolirte, zuvor unelectricische Kugel durch Influenz auf ein Potential W gebracht, welches gleich dem Werthe ist, den V im Kugelcentrum annimmt, und dieser Werth lässt sich beobachten, wenn man die Kugel durch einen feinen Draht mit einem hinreichend entfernten Electrometer verbindet. Ebenso bestimmt sich durch V leicht die ganze Ladung, welche die Kugel erhält, wenn man sie isolirt und unelectricisch dem Krystall nähert und sodann, während sie sich unter seiner Wirkung befindet, zur Erde ableitet; denn es entsteht unter diesen Umständen auf ihr eine Oberflächendichte von der Stärke

$$\eta = -\frac{1}{4\pi} \left(2 \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{R} \bar{V} \right),$$

worin ρ den Radiusvector vom Kugelcentrum aus und R den Radius der Kugel bezeichnet.

Die Berechnung des Potentials V für einen Cylinder stösst, falls man beliebige Querschnitte zulässt, im Allgemeinen auf grosse Schwierigkeiten und führt auf schwer discutable Formeln, lässt sich aber in zwei speciellen Fällen leicht und anschaulich erledigen; der eine von ihnen soll in diesem, der andere im folgenden Abschnitt behandelt werden.

Wir betrachten einen aus einem beliebigen Krystall geschnittenen Kreiscylinder von solcher Länge, dass dieselbe gegenüber dem Abstand des angezogenen Punktes als unendlich betrachtet werden kann. Da wir die Resultate vornehmlich auf die der Oberfläche sehr nahen Punkte anwenden wollen, so setzt diese Annahme in Wirklichkeit nur voraus, dass die Länge des Cylinders ein mässiges Vielfaches der Grösse seines Durchmessers beträgt.

Dieser Cylinder sei parallel seiner Axe, d. h. der Z' -Axe, gleichförmig electricirt, so dass also die electricischen Momente nur Functionen der Quercoordinaten x' und y' sind.

In diesem Falle reducirt sich das Potential (2) auf

$$V = \int dk \left(a' \frac{\partial^1}{\partial x'} + b' \frac{\partial^1}{\partial y'} \right)$$

und, wenn man noch bedenkt, dass wegen

$$r^2 = (x'_1 - x')^2 + (y'_1 - y')^2 + (z'_1 - z')^2$$

$$\partial r / \partial x' = -\partial r / \partial x'_1, \quad \partial r / \partial y' = -\partial r / \partial y'_1$$

ist, auf

$$V = - \left(\frac{\partial J_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial J_2}{\partial y'_1} \right), \tag{40}$$

worin

$$J_1 = \int \frac{a' dk}{r} = C_1 - 2 \int a' l(e) dQ,$$

$$J_2 = \int \frac{b' dk}{r} = C_2 - 2 \int b' l(e) dQ. \tag{40'}$$

C_1 und C_2 bezeichnen Integrationsconstanten, welche ohne Einfluss sind und daher gleich Null gesetzt werden können, dQ ist das Element

des Querschnittes des Cylinders und e ist gegeben durch

$$e^2 = (x'_1 - x')^2 + (y'_1 - y')^2,$$

bezeichnet also den Abstand des angezogenen Punktes x'_1, y'_1, z'_1 von dem Elementarfaden, welcher die Momente a' und b' besitzt; l bedeutet den natürlichen Logarithmus.

Den Ort von dQ wollen wir nunmehr durch die Coordinaten ρ und φ , denjenigen des angezogenen Punktes durch ρ_1 und φ_1 bestimmen, wobei φ und φ_1 den Winkel von ρ und ρ_1 gegen die X' -Axe bedeute; da für äussere Punkte $\rho_1 > \rho$ ist, so lässt sich setzen:

$$l(e) = l(\rho_1) - \sum_1^{\infty} \frac{1}{h} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^h \cos h(\varphi - \varphi_1);$$

ausserdem kann man die Momente a' und b' in Fourier'sche Reihen entwickeln und schreiben:

$$41) \quad \begin{aligned} a' &= A_0 + \sum_1^{\infty} (A_n \cos n\varphi + A'_n \sin n\varphi), \\ b' &= B_0 + \sum_1^{\infty} (B_n \cos n\varphi + B'_n \sin n\varphi), \end{aligned}$$

worin die A und B Functionen von ρ sind.

Man erhält hierdurch, falls man

$$\int_0^R A_h \rho^{h+1} d\rho = A_h, \quad \int_0^R B_h \rho^{h+1} d\rho = B_h, \dots$$

setzt:

$$42) \quad \begin{aligned} J_1 &= -2\pi \left[2l(\rho_1) A_0 - \sum_1^{\infty} \frac{1}{h\rho_1^h} (A_h \cos h\varphi_1 + A'_h \sin h\varphi_1) \right], \\ J_2 &= -2\pi \left[2l(\rho_1) B_0 - \sum_1^{\infty} \frac{1}{h\rho_1^h} (B_h \cos h\varphi_1 + B'_h \sin h\varphi_1) \right]. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_1} = \frac{\partial J_1}{\partial \rho_1} \cos \varphi_1 - \frac{\partial J_1}{\rho_1 \partial \varphi_1} \sin \varphi_1, \quad \frac{\partial J_2}{\partial y_1} = \frac{\partial J_2}{\partial \rho_1} \sin \varphi_1 + \frac{\partial J_2}{\rho_1 \partial \varphi_1} \cos \varphi_1$$

und hiernach wird sehr einfach:

$$43) \quad V = 2\pi \left[\frac{2}{\rho_1} (A_0 \cos \varphi_1 + B_0 \sin \varphi_1) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\rho_1^{h+1}} ((A_h - B'_h) \cos(h+1)\varphi_1 + (A'_h + B_h) \sin(h+1)\varphi_1) \right].$$

Bildet man aus (41) den Werth der Oberflächendichte $\bar{\epsilon}$ nach der Formel

$$\bar{\varepsilon} = \bar{a}' \cos \varphi + \bar{b}' \sin \varphi,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} = & (\bar{A}_0 \cos \varphi + \bar{B}_0 \sin \varphi) + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} ((\bar{A}_h - \bar{B}'_h) \cos (h+1) \varphi + (\bar{A}'_h + \bar{B}_h) \sin (h+1) \varphi) \\ & + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} ((\bar{A}_h + \bar{B}'_h) \cos (h-1) \varphi + (\bar{A}'_h - \bar{B}_h) \sin (h-1) \varphi). \end{aligned} \quad 43')$$

Dies lässt deutlich hervortreten, dass im Allgemeinen der Werth des Potentials auf äussere Punkte durchaus anders mit der Richtung variirt, als die aequivalente Oberflächendichte $\bar{\varepsilon}$.

In dem besonders wichtigen Falle, dass die Momente a' und b' lineäre Functionen der Quercoordinaten sind, haben nur die A_1, A'_1, B_1, B'_1 von Null verschiedene Werthe und sind überdies mit ρ proportional.

Wir setzen daher

$$A_1 = A\rho, \quad A'_1 = A'\rho, \quad B_1 = B\rho, \quad B'_1 = B'\rho,$$

wo nun die A und B Constanten sind.

Hierdurch werden alle A_h und B_h gleich Null, nur ausgenommen

$$A_1 = \frac{AR^2}{4}, \quad A'_1 = \frac{A'R^2}{4}, \quad B_1 = \frac{BR^2}{4}, \quad B'_1 = \frac{B'R^2}{4}.$$

Also folgt

$$V = \frac{\pi R^2}{2\rho_1^2} ((A-B') \cos 2\varphi_1 + (A'+B) \sin 2\varphi_1), \quad 44)$$

während gleichzeitig die Oberflächendichte

$$\bar{\varepsilon} = \frac{R}{2} ((A+B') + (A-B') \cos 2\varphi + (A'+B) \sin 2\varphi) \quad 44')$$

und die räumliche Dichte $\varepsilon = -(A+B')$ wird.

Setzt man endlich

$$A-B' = P \cos 2\varphi_0, \quad A'+B = P \sin 2\varphi_0 \quad 45)$$

so findet sich:

$$V = \frac{\pi R^2 P}{2\rho_1^2} \cos 2(\varphi_1 - \varphi_0), \quad 45')$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{R}{2} ((A+B') + P \cos 2(\varphi - \varphi_0)), \quad \varepsilon = -(A+B').$$

Diese Formeln enthalten eine Reihe sehr wichtiger Resultate, die im Nachstehenden zusammengestellt sind.

Das Potential eines unendlich langen Kreiscylinders, dessen elektrische Momente lineäre Functionen der Quereordinaten sind, nimmt auf jedem mit dem Umfang concentrischen Kreise abwechselnd zwei grösste und zwei kleinste Werthe in gleichen Winkelabständen an. Die Orte dieser extremen Werthe theilen den Kreisumfang hinsichtlich der darauf stattfindenden Potentiale in vier spiegelbildlich gleiche Quadranten.

Die Maxima liegen an den Stellen

$$\varphi_1 = \varphi_0 \text{ und } \varphi_1 = \varphi_0 + \pi,$$

die Minima an den Stellen

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \text{ und } \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{3\pi}{2},$$

und zwar ist

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{A' + B}{A - B'},$$

falls $a' = Ax' + A'y'$, $b' = Bx' + B'y'$ die Werthe der Momente normal zur Cylinderaxe sind.

Diese Stellen fallen in dieselben Radien, auf welchen auch die aequivalente Oberflächendichte $\bar{\epsilon}$ ihren grössten und kleinsten Werth besitzt.

Parallel zum Radiusvector wirkt die Componente

$$K = \frac{\pi P^4 P}{\rho_1^3} \cos 2(\varphi_1 - \varphi_0),$$

normal zum Radius in der Richtung $+$ φ dagegen

$$S = \frac{\pi P^4 P}{\rho_1^3} \sin 2(\varphi_1 - \varphi_0);$$

es ist also

$$S/K = \operatorname{tg} 2(\varphi_1 - \varphi_0)$$

und die Kraftlinien schneiden denselben Radiusvector stets unter demselben Winkel $2(\varphi_1 - \varphi_0)$.

Der allgemeine Ausdruck des Potentials lässt sich nach (45') schreiben

$$V = \frac{\pi P^3}{2\rho_1^2} (2\bar{\varepsilon}_1 + R\varepsilon), \quad (46)$$

falls $\bar{\varepsilon}_1$ die auf dem Radius ρ_1 an der Cylinderfläche liegende Oberflächendichte, ε die im Innern des Cylinders constante Raumdichte bezeichnet.

Hiernach nimmt auch der Werth der parallel dem Radius wirkenden Componente die Form an

$$K = \frac{\pi P^3}{\rho_1^3} (2\bar{\varepsilon}_1 + R\varepsilon), \quad (47)$$

und speciell an der Cylinderfläche selbst sehr einfach

$$\bar{K} = \pi(2\bar{\varepsilon}_1 + R\varepsilon). \quad (47')$$

Da ganz allgemein positiv electriche Theilchen nach den Stellen kleinster, negativ electriche nach den Stellen grösster Potentialwerthe getrieben werden, so würden, falls die Oberfläche des Cylinders ohne jede Reibung wäre, positiv electriche Theilchen nur an den Stellen $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \varphi_0 + 3\frac{\pi}{2}$, negative nur in $\varphi = \varphi_0$ und $\varphi = \varphi_0 + \pi$ in Ruhe sein können; da aber in Praxis jederzeit eine Reibung vorhanden ist, so werden sie auch in der Umgebung dieser Orte verharren können. Bei Anwendung des Kundt'schen Bestäubungsverfahrens wird also Schwefelblume und Mennige abwechselnd in den vier Quadranten des Umfanges auftreten.

Gar keine Wirkung übt der Cylinder auf äussere Punkte, wenn zugleich

$$A = B' \text{ und } A' = -B$$

ist; die erstere Beziehung entspricht nach Seite 53 und 54 dem Falle der radialen, die letztere dem Falle der circularen Electricirung. Hier ist also auch nothwendig die Beziehung $\bar{\varepsilon} = -R\varepsilon/2$ erfüllt. —

Da in dem Falle der gleichförmigen Biegung und Drillung eines Kreiscylinders nach den letzten beiden Abschnitten die electriche Momente lineäre homogene Functionen der Quercoordinaten sind, so gelten alle im

Vorstehenden entwickelten Resultate auch hierfür. Speciell können wir den folgenden in seiner Allgemeinheit merkwürdigen Satz aussprechen:

Ein gleichviel wie immer gegen die Krystallaxen orientirter Kreiscylinder, dessen Länge gross ist gegen seinen Durchmesser, wird durch gleichförmige Biegung oder Drillung, wenn überhaupt, jederzeit so erregt, dass sich sein Umfang in vier gleiche Zonen abwechselnd entgegengesetzter electricischer Wirkung auf äussere Punkte theilt.

Dieser Satz wird auf absonderliche Weise durch eine — auf den ersten Blick unverständliche — Beobachtung des Herrn Röntgen¹⁾ bestätigt.

Herr Röntgen hat an zwei Quarzcylindern, deren Axen nahe mit der krystallographischen Hauptaxe zusammenfielen, die electricische Erregung durch Torsion untersucht und eine Theilung ihres Umfangs in vier gleiche Zonen entgegengesetzter electricischer Wirkung festgestellt. Dieses Resultat erscheint krystallographisch unmöglich, denn alle bisherigen Beobachtungen ergeben für die Hauptaxe des Quarz die Eigenschaft einer dreizähligen Symmetrieaxe; es erscheint auch im Widerspruch mit der Theorie stehend, welche wie leicht zu sehen, für einen solchen Cylinder eine nach aussen wirkende Erregung durch Drillung überhaupt nicht zulässt.

Aber die Beobachtung wird zu einer überraschenden Bestätigung der Theorie, wenn man bedenkt, dass, wie Herr Röntgen selbst erwähnt, die Orientirung der Cylinder keine genaue war und auch nicht sein konnte. Denn bei jeder Abweichung der Cylinderaxe aus der Krystallaxe musste nach der Theorie eben diese Vierteltheilung des Umfangs des Cylinders hinsichtlich der electricischen Wirkung eintreten, welche die Beobachtung constatirt hat.

Auch dass trotz dieser electricischen Wirkung der Mantelfläche die beiden Enden der Cylinderaxe sich gleich verhalten haben, steht in vollständiger Uebereinstimmung mit der Theorie.

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. **39**, p. 16, 1890.

Die von Herrn Röntgen an seine Beobachtungen geknüpften Folgerungen bezüglich einer Ungleichwerthigkeit der drei Nebenaxen des Quarzes sind hierdurch zugleich als unnöthig erwiesen. —

Was die Lage der beiden zu einander normalen Meridianschnitte betrifft, welche die vier Quadranten abwechselnd entgegengesetzter Wirkung begrenzen, oder mit andern Worten, was den Werth des Winkels φ_0 in den einzelnen Fällen betrifft, so ist diese Frage nach den obigen Tabellen V und VI unter Benutzung der Bemerkungen auf Seite 47 leicht zu erledigen, giebt aber keineswegs so einfache Resultate, wie man zunächst vermuthen möchte.

Zum Beispiel ist für einen der X -Axe parallelen Turmalinstab bei Biegung um die Y - oder Z -Axe nach $(36')$ und $(36'')$ resp.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, b_1 = +AMz, c_1 = -BMz \text{ und} \\ a_2 &= 0, b_2 = -ANy, c_2 = +BNy, \end{aligned}$$

wo A und B gewisse Abkürzungen sind. Hieraus folgt resp., wenn φ_0 gegen die Z -Axe gerechnet wird:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = +A/B \text{ und } = -B/A;$$

obgleich also die Biegung um die Hauptaxe oder eine dazu senkrechte Richtung geschieht, ist doch φ_0 weder 0 noch $\pi/4$. Dies hängt mit der complicirten electricen Symmetrie des Turmalines zusammen.

Ganz ähnliches gilt für die Drillung desselben Cylinders, soll aber nicht weiter ausgeführt werden.

§ 9. Das electriche Potential eines unendlich dünnen Cylinders von beliebigem Querschnitt, in welchem die Spannungen längs der Axe constant sind.

Der in der Ueberschrift genannte Fall erledigt sich deshalb besonders einfach, weil, wenn nach Annahme alle die elastischen Drucke X'_z, \dots von der längs der Cylinderaxe gemessenen Z' -Coordinate unabhängig sind, das folgende System von Formeln gültig ist ¹⁾:

1) W. Voigt, theor. Studien, p. 55.

$$\begin{aligned}
 48) \quad \int X'_z dQ &= \int X'_y dQ = \int Y'_y dQ = \int X'_z dQ = \int Y'_z dQ = 0, \quad \int Z'_z dQ = -\Gamma', \\
 \int x' X'_z dQ &= \int x' X'_y dQ = \int x' Y'_y dQ = \int x' X'_z dQ = 0, \quad \int x' Z'_z dQ = -M', \quad \int x' Y'_z dQ = -\frac{N'}{2}, \\
 \int y' X'_z dQ &= \int y' X'_y dQ = \int y' Y'_y dQ = \int y' Y'_z dQ = 0, \quad \int y' Z'_z dQ = -\Lambda', \quad \int y' X'_z dQ = +\frac{N'}{2}.
 \end{aligned}$$

Hierin haben die Γ' , Λ' , M' , N' dieselbe Bedeutung, wie in den früheren Abschnitten.

Für das Potential benutzen wir den Ausdruck (2), bezogen auf das System $X'Y'Z'$, geben also dem Volumenelement dk die Coordinaten x', y', z' , dem angezogenen Einheitspunkt die Coordinaten x'_1, y'_1, z'_1 ; auch ist

$$r^2 = e^2 + (z'_1 - z')^2, \quad e^2 = (x'_1 - x')^2 + (y'_1 - y')^2.$$

Für die Momente a', b', c' benutzen wir die Formeln (20), welche sie als lineäre Functionen der Spannungen darstellen, haben also

$$48') \quad V'_z = - \int dk \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} (\delta'_{11} X'_z + \dots) + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} (\delta'_{21} X'_z + \dots) + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} (\delta'_{31} X'_z + \dots) \right).$$

Hier lässt sich die Integration nach z' ausführen und giebt, wenn wir die Grenzen für $z' = 0$ und $z' = l$ genommen denken:

$$48'') \quad V'_z = + \int dQ \left[\frac{(x'_1 - x')(z'_1 - z')}{re^2} (\delta'_{11} X'_z + \dots) + \frac{(y'_1 - y')(z'_1 - z')}{re^2} (\delta'_{21} X'_z + \dots) - \frac{1}{r} (\delta'_{31} X'_z + \dots) \right]_{z'=0}^{z'=l}.$$

Diese noch völlig strenge Formel stellt das Potential zweier auf den Endquerschnitten $z' = 0$ und $z' = l$ ausgebreiteten Ladungen dar.

Ist nun x'^2 und y'^2 neben

$$x_1'^2 + y_1'^2 = e_1^2, \quad x_1'^2 + y_1'^2 + (z'_1 - z')^2 = r_1^2$$

zu vernachlässigen, so kann man r und e nach Potenzen von x' und y' entwickeln und sich auf die ersten beiden Glieder beschränken. Setzt man noch

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{e_1^2} = k,$$

so erhält man unter Rücksicht auf (48):

$$\begin{aligned}
 V_z = & \left[\frac{z' - z'_1}{r_1 c_1^2} \left\{ \delta'_{13} (\Lambda' k x'_1 y'_1 - M' (1 - k x_1'^2) + \Gamma' x'_1) + \delta'_{23} (-\Lambda' (1 - k y_1'^2) + M' k x'_1 y'_1 + \Gamma' y'_1) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{N'}{2} ((\delta'_{24} - \delta'_{15}) k x'_1 y'_1 - \delta'_{14} (1 - k x_1'^2) + \delta'_{25} (1 - k y_1'^2)) \right\} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r_1} \left\{ \delta'_{33} \left(\frac{x'_1 M' + y'_1 \Lambda'}{r_1^2} + \Gamma' \right) + \frac{N'}{2 r_1^2} (\delta'_{34} x'_1 - \delta'_{35} y'_1) \right\} \right]_{z'=0}^{z'=l}.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Diese höchst allgemeine Formel zeigt, dass von allen den achtzehn Constanten δ_{hk} in dem vorausgesetzten Falle nur neun in dem Potential auftreten. Sie vereinfacht sich erheblich, wenn man die Axe des Stabes in eine ausgezeichnete Richtung des Krystalles fallen lässt.

Ist die Z' -Richtung eine drei-, vier- oder sechszählige Symmetrieaxe, so ist

$$\begin{aligned}
 \delta'_{13} = \delta'_{23} = \delta'_{34} = \delta'_{35} = 0, \\
 \delta'_{14} = -\delta'_{25}, \quad \delta'_{15} = +\delta'_{24}, \quad \delta'_{31} = \delta'_{32}.
 \end{aligned}$$

Hierdurch reducirt sich, wenn wir nun die obern Indices fortlassen, V_z auf

$$V_z = \left[\frac{z_1 - z}{r_1 c_1^2} \delta_{14} N \left(1 - \frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2} \right) + \frac{\delta_{33}}{r_1} \left(\frac{x_1 M + y_1 \Lambda}{r_1^2} + \Gamma \right) \right]_{z=0}^{z=l}; \tag{49')}$$

der erste Theil, welcher von der Torsion um die Längsaxe herrührt, ist rings um dieselbe constant, der zweite, von Biegung und Dehnung herrührende, nicht.

Geht durch die Z -Axe eine Symmetrieebene, so ist auch $\delta_{14} = 0$, und es bleibt nur

$$V_z = \left[\frac{\delta_{33}}{r_1} \left(\frac{x_1 M + y_1 \Lambda}{r_1^2} + \Gamma \right) \right]_{z=0}^{z=l}; \tag{49'')}$$

hier giebt die Torsion gar kein Potential auf äussere Punkte. Dies findet beim Turmalin statt, wenn man die Stabaxe in die krystallographische Hauptaxe legt.

Steht hingegen auf der Z -Axe eine zweizählige Symmetrieaxe senkrecht, so ist $\delta_{33} = 0$ und es bleibt nur

$$V_z = \left[\frac{z_1 - z}{r_1 c_1^2} \delta_{14} N \left(1 - \frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2} \right) \right]_{z=0}^{z=l}; \tag{49''')}$$

hier bewirkt Biegung und einseitiger Druck kein Potential, sondern nur Torsion; dies gilt für Quarz, wenn der Stab mit seiner Axe in die Hauptaxe fällt.

Es hat Interesse, auch die Potentiale für Krystalleylinder aufzustellen, welche der X - oder Y -Axe parallel liegen.

Sollte die X -Axe zur Stabaxe gewählt werden, so hat man die Formel (49) in allen Theilen, also auch in der Grösse k , durch cyclische Vertauschung umzuformen; die Indices 1, 2, 3 und 4, 5, 6 bilden dabei zwei getrennte Reihen. Man erhält so:

$$\begin{aligned}
 50) \quad V_x = & \left[\frac{x-x_1}{r_1 e_1^2} \left\{ \delta_{21} (M k y_1 z_1 - N (1 - k y_1^2) + A y_1) + \delta_{31} (-M (1 - k z_1^2) + N k y_1 z_1 + A z_1) \right. \right. \\
 & + \frac{\Lambda}{2} \left((\delta_{35} - \delta_{26}) k y_1 z_1 - \delta_{25} (1 - k y_1^2) + \delta_{36} (1 - k z_1^2) \right) \left. \left. \right\} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r_1} \left\{ \delta_{11} \left(\frac{y_1 N + z_1 M}{r_1^2} + A \right) + \frac{\Lambda}{2 r_1^2} (\delta_{15} y_1 - \delta_{16} z_1) \right\} \right]_{x=0}^{x=l}.
 \end{aligned}$$

Ebenso gilt auch:

$$\begin{aligned}
 51) \quad V_y = & \left[\frac{y-y_1}{r_1 e_1^2} \left\{ \delta_{32} (N k z_1 x_1 - \Lambda (1 - k z_1^2) + B z_1) + \delta_{12} (N (1 - k x_1^2) + \Lambda k z_1 x_1 + B x_1) \right. \right. \\
 & + \frac{M}{2} \left((\delta_{16} - \delta_{34}) k z_1 x_1 - \delta_{32} (1 - k z_1^2) + \delta_{14} (1 - k x_1^2) \right) \left. \left. \right\} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r_1} \left\{ \delta_{22} \left(\frac{z_1 \Lambda + x_1 N}{r_1^2} + B \right) + \frac{M}{2 r_1^2} (\delta_{26} z_1 - \delta_{24} x_1) \right\} \right]_{y=0}^{y=l}.
 \end{aligned}$$

Wendet man dies, um ein Beispiel zu geben, auf den Quarz an, so erhält man:

$$50') \quad V_x = \left[\frac{x-x_1}{r_1 e_1^2} \left\{ \frac{\Lambda}{2} (2\delta_{11} k y_1 z_1 + \delta_{14} (1 - k y_1^2)) + \frac{1}{r_1} \delta_{11} \left(\frac{y_1 N + z_1 M}{r_1^2} + A \right) \right\} \right]_{x=0}^{x=l},$$

$$51') \quad V_y = \left[\frac{y-y_1}{r_1 e_1^2} \left\{ -\delta_{11} (N (1 - k x_1^2) + \Lambda k z_1 x_1 - B x_1) + \frac{M}{2} \delta_{14} (1 - k x_1^2) \right\} - \frac{M}{r_1^3} \delta_{11} z_1 \right]_{y=0}^{y=l}.$$

Beide Formeln sind sehr einfach, denn man muss bedenken, dass in Praxis ausnahmslos nicht alle vier Arten mechanischer Einwirkung gleichzeitig, sondern nur jede einzelne für sich zur Anwendung kommt.

Weitere Anwendungen mögen unterbleiben, bis Beobachtungen über die Fernwirkung deformirter Krystalleylinder vorliegen.

§ 10. Electricische Erregung durch eine gleichförmige oder mit einer gleichförmigen äequivalente Erwärmung.

Wirken keine äusseren Kräfte, aber ist die Temperatur innerhalb des betrachteten Krystalles eine beliebige Function der Coordinaten, so sind nach (24) und (27) die Bedingungen des Gleichgewichts für innere Punkte:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial(X_x + q_1\vartheta)}{\partial x} + \frac{\partial(X_y + q_6\vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial(X_z + q_5\vartheta)}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial(Y_x + q_6\vartheta)}{\partial x} + \frac{\partial(Y_y + q_2\vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial(Y_z + q_4\vartheta)}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial(Z_x + q_5\vartheta)}{\partial x} + \frac{\partial(Z_y + q_4\vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial(Z_z + q_3\vartheta)}{\partial z}, \end{aligned} \tag{52}$$

und für Punkte der Oberfläche:

$$\begin{aligned} 0 &= (X_x + q_1\vartheta) \cos(n, x) + (X_y + q_6\vartheta) \cos(n, y) + (X_z + q_5\vartheta) \cos(n, z), \\ 0 &= (Y_x + q_6\vartheta) \cos(n, x) + (Y_y + q_2\vartheta) \cos(n, y) + (Y_z + q_4\vartheta) \cos(n, z), \\ 0 &= (Z_x + q_5\vartheta) \cos(n, x) + (Z_y + q_4\vartheta) \cos(n, y) + (Z_z + q_3\vartheta) \cos(n, z). \end{aligned} \tag{52'}$$

Es möchte zunächst scheinen, als ob man ähnlich, wie bei dem Falle des nicht erwärmten Körpers ohne Einwirkung äusserer Kräfte, diesen Gleichungen unter allen Umständen dadurch genügen könnte, dass man überall annimmt:

$$-X_x = q_1\vartheta, \quad -Y_y = q_2\vartheta, \quad -Z_z = q_3\vartheta, \quad \dots \tag{53}$$

Indessen setzt dies ganz bestimmte Eigenschaften der Function voraus, welche die Temperatur mit den Coordinaten verbindet.

Beachtet man nämlich die Werthe (23) der elastischen Druck-Componenten, so findet man durch Auflösen der vorstehenden Gleichungen nach $x_x \dots$

$$x_x = \vartheta(q_1 s_{11} + q_2 s_{12} + q_3 s_{13} + q_4 s_{14} + q_5 s_{15} + q_6 s_{16})$$

und dies giebt nach (25):

$$x_x = a_1\vartheta, \quad y_y = a_2\vartheta, \quad z_z = a_3\vartheta, \quad \dots \tag{53'}$$

Nun sind aber die Deformationen nicht völlig von einander unabhängig, sobald sie für einen endlichen Körper als Functionen der Coordinaten gegeben werden, sondern es bestehen zwischen ihnen nach ihrer Definition durch die Verrückungen die folgenden bekannten Beziehungen ¹⁾:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 y_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 z_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 y_z}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial^2 z_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 z_x}{\partial z \partial x}, & \frac{\partial^2 x_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 x_y}{\partial x \partial y}, \\
 54) \quad 2 \frac{\partial^2 x_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 y_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 z_x}{\partial y \partial x}, & 2 \frac{\partial^2 y_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 z_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 x_y}{\partial z \partial y}, \\
 2 \frac{\partial^2 z_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 x_y}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 x_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 y_z}{\partial x \partial z}.
 \end{aligned}$$

Diese verwandeln sich bei Annahme der Werthe (53') in sechs Bedingungen für ϑ , welche nur in ganz speciellen Fällen gleichzeitig erfüllt sind; in diesen Fällen dehnt sich dann jedes Volumenelement des Körpers ebenso aus, als wenn es allein vorhanden wäre, und wird also durch die Nachbarelemente in keiner Weise behindert. Eine Erwärmung, bei welcher dies stattfindet, ist mit einer gleichförmigen hinsichtlich der Electricitätserregung *aequivalent*.

Die Bedingungen (54) sind identisch erfüllt, wenn die Temperatur ϑ constant oder eine lineäre Function der Coordinaten ist. Der erste Fall tritt ein, wenn ein beliebig gestalteter Körper hinreichend lange in einer Umgebung von der betreffenden Temperatur bleibt, der letztere z. B. dann, wenn eine sehr grosse Platte lange Zeit mit ihren beiden Grundflächen an zwei Reservoirs von verschiedener Temperatur grenzt; obgleich die Platte sich hierbei krümmt, wird doch die Deformation der einzelnen Elemente durch die Nachbarelemente nicht behindert.

In diesen Fällen enthalten also die Gleichungen (53') die Lösung des elastischen Problemes, und die auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogenen electricischen Momente besitzen die Werthe

$$54) \quad a' = \vartheta \sum_h \varepsilon'_{1h} a'_h, \quad b' = \vartheta \sum_h \varepsilon'_{2h} a'_h, \quad c' = \vartheta \sum_h \varepsilon'_{3h} a'_h.$$

1) G. Kirchhoff, *Mechanik*. Leipzig 1876, p. 399.

Diese Ausdrücke specialisiren sich bei Einführung des Hauptaxen-systemes nach dem Inhalte der Tabellen II und III für die verschiedenen Gruppen folgendermassen.

Tabelle VII.

- I. Gruppe 2). $a = \vartheta \sum_h \varepsilon_{1h} a_h, \quad b = \vartheta \sum_h \varepsilon_{2h} a_h, \quad c = \vartheta \sum_h \varepsilon_{3h} a_h.$
- II. Gruppe 4). $a = b = 0, \quad c = \vartheta (\varepsilon_{31} a_1 + \varepsilon_{32} a_2 + \varepsilon_{33} a_3 + \varepsilon_{36} a_6).$
 „ 5). $a = \vartheta (\varepsilon_{11} a_1 + \varepsilon_{12} a_2 + \varepsilon_{13} a_3 + \varepsilon_{16} a_6),$
 $b = \vartheta (\varepsilon_{21} a_1 + \varepsilon_{22} a_2 + \varepsilon_{23} a_3 + \varepsilon_{26} a_6), \quad c = 0.$
- III. Gruppe 7). $a = b = 0, \quad c = \vartheta (\varepsilon_{31} a_1 + \varepsilon_{32} a_2 + \varepsilon_{33} a_3).$
 „ 8). $a = b = c = 0.$
- IV. Gruppe 10) und 13). $a = b = 0, \quad c = \vartheta (2\varepsilon_{31} a_1 + \varepsilon_{33} a_3).$
 „ 11), 14), 15). $a = b = c = 0.$
- V. Gruppe 17), 20), 24), 27). $a = b = 0, \quad c = \vartheta (2\varepsilon_{31} a_2 + \varepsilon_{33} a_3).$
 „ 18), 21), 22), 25). $a = b = c = 0.$
- VI. Gruppe 29) und 32). $a = b = c = 0.$

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass bei gleichförmiger Erwärmung und bei jeder mit einer solchen aequivalenten mit Ausnahme der Gruppe 2) und 5) nur diejenigen Krystalle electricisch erregt werden, welche eine ausgezeichnete polare Symmetrieaxe besitzen. Wie dies unabhängig von jeder Theorie mit Nothwendigkeit aus den Symmetrieverhältnissen folgt, ist schon früher erörtert worden. Hier mag nur noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass mit diesem Resultat die an Quarz, Zinkblende, Helvin, Natriumchlorat u. a. beobachteten pyroelectrischen Erscheinungen nicht im Widerspruch stehen, da es sich bei jenen Beobachtungen nirgends speciell um die Wirkung gleichförmiger, in einigen Fällen hingegen nachweislich um diejenige stark ungleichförmiger Erwärmungen gehandelt hat. Allerdings ist der fundamentale Unterschied dieser beiden Vorgänge einigen Beobachtern nicht klar gewesen.

Die Vergleichung der Tabelle VII mit der für die Erregung durch einen allseitig gleichen Druck gültigen Tabelle IV ergibt die grösste

Uebereinstimmung, sowohl hinsichtlich der Nichterregbarkeit gewisser Gruppen, als auch der Art der möglichen Erregung der andern.

Die Hauptaxe der erregten pyro- und piëzoelectrischen Vertheilung ist natürlich bei den Gruppen, welche nur eine polare Symmetrieaxe besitzen, die gleiche, also blos bei Gruppe 2) und 5) verschieden. Bei den übrigen lässt sich daher jederzeit die Wirkung einer Erwärmung durch diejenige eines allseitig gleichen Druckes compensiren; das Verhältniss des erforderlichen Druckes p zu der in ihrer Wirkung zu neutralisirenden Temperaturänderung ϑ ist natürlich für den einzelnen Krystall constant, aber von Substanz zu Substanz wechselnd, da die Constanten s_h der Tabelle IV und a_h der Tabelle VII von einander unabhängig sind. Ja, da die s_h , soweit die Erfahrung reicht, stets positiv, die a_h aber zum Theil negativ sind, so kann das Verhältniss sogar für verschiedene Substanzen verschiedenes Vorzeichen besitzen; d. h. es kann für manche Krystalle die Wirkung einer Erwärmung nicht durch eine Vergrösserung, sondern durch eine Verminderung des äussern Druckes zu compensiren sein.

Für Turmalin (Gruppe 24) ist oben (Seite 42), falls man die $+Z$ -Richtung nach der Seite des analogen Poles legt, aus Beobachtungen der Herren J. und P. Curie ein positiver Werth der Constanten ϵ_{31} und ϵ_{33} gefolgert worden. Da für dieses Mineral auch a_1 und a_3 positiv ist, so zeigt der in Tabelle VII gegebene Werth von c für diese Gruppe, dass das durch gleichförmige Erwärmung erregte Moment bei Turmalin positiv sein, der »analoge« Pol also positive Electricität zeigen muss, wie das die Beobachtung bekanntlich bestätigt.

Da eine grosse Zahl von Gruppen nach ihrer Symmetrie eine electriche Erregung durch allseitig gleichen Druck und gleichförmige Erwärmung nicht zulassen, und da alle an ihnen wahrgenommenen Ladungen somit an andern mechanischen und thermischen Einwirkungen ihren Ursprung verdanken müssen, so könnte man zu der Vermuthung kommen, dass auch bei den Gruppen, welche nach Symmetrie Erregungen der ersteren Art zulassen, dieselben in Wirklichkeit in Folge specieller Werthe der piëzoelectrischen Constanten ϵ_{hk} nicht zu Stande

kommen, die beobachteten pyroelectricischen Wirkungen z. B. also immer die Folge einer ungleichförmigen Erwärmung sind.

Indessen lässt sich die Unzulässigkeit dieser Annahme in einem speciellen Falle leicht nachweisen, wodurch die Vermuthung überhaupt abgethan ist. Denn bei den quadratischen und hexagonalen hierher gehörigen Krystallen sind die resp. erregten Momente parallel der Hauptaxe

$$-p(2\varepsilon_{31}s_1 + \varepsilon_{33}s_3), \quad \vartheta(2\varepsilon_{31}a_1 + \varepsilon_{33}a_3),$$

und da die s_h und a_h von einander unabhängig sind, so können diese beiden Werthe zugleich nur verschwinden, wenn $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{33} = 0$ ist, eine Beziehung, welche mit anderen Resultaten im Widerspruch steht, da sie auch sicher beobachtete Wirkungen eines einseitigen Druckes oder einer ungleichförmigen Erwärmung nicht zulassen würde.

Hiernach ist der erwähnte Unterschied zwischen den Gruppen mit einer polaren Axe und denen mit keiner oder mehreren solchen ein durchaus nothwendiger und nicht zu beseitigender. Mit ihm hängt der Seite 3 hervorgehobene Umstand zusammen, dass die ersteren Gruppen unter allen Temperaturen ϑ und Drucken p , welche nicht durch eine gewisse (lineäre) Beziehung verknüpft sind, von Null verschiedene Gesamtmomente A, B, C und demgemäss, wenn der bezügliche Zustand andauert, eine compensirende inducirte Oberflächenbelegung besitzen müssen, die letzteren hingegen nicht. —

Mehrere Experimentatoren haben die Beziehung gefunden, dass Krystallprismen, welche durch Erwärmung longitudinal electricisirt werden, durch longitudinale Compression eine Erregung im entgegengesetzten Sinne erfahren. Die Vergleichung der hierfür in Betracht kommenden Tabellen V und VII ergibt diesen Zusammenhang zwar als möglich, aber keineswegs als allgemein nothwendig, da die bezüglichen Momente von verschiedenen Constanten abhängen. Ueberdies ist hervorzuheben, dass eine grosse Zahl von Krystallgruppen die Erregung von Prismen durch longitudinale Compression gestatten, welche bei gleichförmiger Erwärmung keinerlei electricische Erscheinungen zeigen. Die erwähnte Beziehung hat also bei Voraussetzung einer gleichförmigen

Erwärmung keineswegs eine allgemeine Bedeutung; auch für die ungleichförmige Erwärmung gilt, wie sich zeigen wird, ganz Aehnliches.

Ein Beispiel, welches die häufig stattfindende Gültigkeit der obigen Regel bestätigt, liefert nach den auf Seite 42 über die Constanten ϵ_{31} und ϵ_{33} des Turmalin gezogenen Schlüsse ein Cylinder dieses Minerals, parallel der Hauptaxe geschnitten. —

Die Beobachtung der Wirkung einer gleichförmigen Erwärmung oder Abkühlung wird dadurch sehr erschwert, dass der Vorgang eine geraume Zeit in Anspruch nimmt und in dieser die inducirte Oberflächenbelegung sich sehr stark ändern kann. Die in Folge dessen eintretenden complicirten Erscheinungen hat Herr Riecke ¹⁾ am Turmalin mit der Messung verfolgt und theoretisch erklärt. Derselbe hat auch nachgewiesen, dass in verdünnter und getrockneter Luft die Leitungsfähigkeit der Oberfläche des Turmalins so gering wird, dass eine in demselben erregte electriche Vertheilung tagelang in fast ungcänderter Stärke nach aussen wirksam bleibt.

Diese wichtige Beobachtung fordert dazu auf, messende Versuche über die Wirkung einer gleichförmigen Erwärmung nur im luftverdünnten Raume vorzunehmen, was erhebliche technische Schwierigkeiten nicht zu bieten scheint. Dergleichen Messungen könnten, falls sie sich auf Krystalle beziehen, deren in Tabelle VII auftretende Constanten ϵ_{ik} durch piëzoelectrische Beobachtungen bestimmt sind, die exacte Prüfung der Grundannahme dieser Theorie liefern, welche dahin geht, dass in letzter Instanz die electriche Erregung in jedem Volumenelement nur von dessen Deformation abhängt, — eine Prüfung, die in voller Strenge bisher noch nicht angestellt ist.

§ 11. Electriche Erregung durch ungleichförmige, insbesondere durch oberflächliche Erwärmung.

Die Integration der Gleichungen (52) und (52') bietet im Allgemeinen selbst bei einfachen gegebenen Werthen von ϑ — wie solche streng genommen nicht willkürlich zu erfinden, sondern aus den Gleichungen

1) E. Riecke, Wied. Ann. 28, 43, 1886; 31, 889, 1887; 40, 264, 1890.

chungen für die Wärmeleitung zu entnehmen sind — unüberwindliche Schwierigkeiten und daher muss auf eine strenge Theorie der bei ungleichförmiger Erwärmung eintretenden electricen Erregungen zumeist von vornherein verzichtet werden.

Indessen lässt sich ein specieller Fall mit grosser Leichtigkeit behandeln, welcher in Wirklichkeit wenigstens in den ersten Momenten der Erwärmung oder der Abkühlung eines Krystalles von ursprünglich constanter Temperatur angenähert stattfinden muss, besonders auf ebenen Flächen in einigem Abstand von den begrenzenden Kanten.

Es ist der Fall, dass nur eine gegen die gesammte Ausdehnung des Körpers verschwindend dünne Schicht eine von der im Innern stattfindenden verschiedene Temperatur besitzt, und dass letztere nur mit der Richtung der Normalen variirt. In diesem Falle muss eine ursprünglich ebene Begrenzungsfläche bis sehr nahe an die Kanten hin auch eben bleiben, denn der Widerstand des ganzen, noch auf der ursprünglichen Temperatur und daher in seiner natürlichen Form beharrenden Körpers überwindet das Bestreben, sich zu krümmen, welches die Oberflächenschicht in Folge der mit der Normale wechselnden Temperatur besitzt.

Sei die $X'Y'$ -Ebene die Grenze des Körpers, dann werden unter den gemachten Voraussetzungen und nach ihren bekannten Bedeutungen die Deformationen

$$x'_z = y'_y = x'_y = 0, \quad z'_z = f_3(z'), \quad y'_z = f_4(z'), \quad z'_x = f_5(z') \quad 55)$$

sein müssen, wobei die f_h Functionen von z' allein bezeichnen.

Dieser Ansatz erfüllt die Gleichungen (54) identisch; er macht ausserdem, wie ϑ , auch die Componenten $X'_x \dots$ zu Functionen von z' allein. Hierdurch nehmen die Hauptgleichungen (52) die Form an

$$\frac{\partial(X'_z + q_3 \vartheta)}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial(Y'_z + q_4 \vartheta)}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial(Z'_z + q_5 \vartheta)}{\partial z'} = 0, \quad 55')$$

während die Oberflächenbedingungen (52') lauten, da die Z' -Axe der Normalen parallel ist,

$$\overline{X'_z + q_3 \vartheta} = 0, \quad \overline{Y'_z + q_4 \vartheta} = 0, \quad \overline{Z'_z + q_5 \vartheta} = 0. \quad 55'')$$

Vorstehenden Bedingungen genügt man, indem man die letzten drei Beziehungen überall als erfüllt annimmt. Man erhält so, indem man berücksichtigt, dass $x'_x = y'_y = z'_z = 0$ ist:

$$\begin{aligned} 56) \quad q'_3 \vartheta &= c'_{33} z'_z + c'_{34} y'_y + c'_{35} z'_z, \\ q'_4 \vartheta &= c'_{43} z'_z + c'_{44} y'_y + c'_{45} z'_z, \\ q'_5 \vartheta &= c'_{53} z'_z + c'_{54} y'_y + c'_{55} z'_z; \end{aligned}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} 56') \quad z'_z &= \vartheta (q'_3 \sigma'_{33} + q'_4 \sigma'_{34} + q'_5 \sigma'_{35}), \\ y'_y &= \vartheta (q'_3 \sigma'_{43} + q'_4 \sigma'_{44} + q'_5 \sigma'_{45}), \\ z'_z &= \vartheta (q'_3 \sigma'_{53} + q'_4 \sigma'_{54} + q'_5 \sigma'_{55}), \end{aligned}$$

falls man setzt

$$\begin{aligned} 56'') \quad \sigma' \sigma'_{33} &= (c'_{44} c'_{55} - c'^2_{45}), \quad \sigma' \sigma'_{44} = (c'_{55} c'_{33} - c'^2_{53}), \quad \sigma' \sigma'_{55} = (c'_{33} c'_{44} - c'^2_{34}), \\ \sigma' \sigma'_{43} &= \sigma' \sigma'_{54} = (c'_{34} c'_{55} - c'_{33} c'_{45}), \quad \sigma' \sigma'_{53} = \sigma' \sigma'_{35} = (c'_{45} c'_{33} - c'_{44} c'_{53}), \quad \sigma' \sigma'_{34} = \sigma' \sigma'_{43} = (c'_{53} c'_{54} - c'_{55} c'_{34}), \\ \sigma' &= c'_{33} c'_{44} c'_{55} - (c'_{33} c'^2_{45} + c'_{44} c'^2_{53} + c'_{55} c'^2_{34}) + 2c'_{45} c'_{53} c'_{34}. \end{aligned}$$

Aus diesen Deformationen berechnen sich die Momente, wie früher gezeigt ist.

Ist die Z' -Axe eine thermische Axe in dem Sinne, dass der thermische Druck normal gegen die $X'Y'$ -Ebene wirkt, so ist $q'_4 = q'_5 = 0$ und

$$57) \quad z'_z = q'_3 \vartheta \sigma'_{33}, \quad y'_y = q'_3 \vartheta \sigma'_{43}, \quad z'_z = q'_3 \vartheta \sigma'_{53}.$$

Ist ausserdem die Z' -Axe eine zwei-, drei-, vier- oder sechszählige elastische Symmetrieaxe, so ist $c'_{34} = c'_{35} = 0$ und es wird

$$57') \quad \sigma' \sigma'_{33} = c'_{44} c'_{55} - c'^2_{45}, \quad \sigma'_{43} = \sigma'_{53} = 0, \quad \sigma' = c'_{33} (c'_{44} c'_{55} - c'^2_{45})$$

also

$$57'') \quad z'_z = \frac{q'_3 \vartheta}{c'_{33}}, \quad y'_y = z'_z = 0, \quad \text{dazu } x'_x = y'_y = z'_z = 0.$$

Hier wird jedes Volumenelement nur nach der Richtung der Normalen Z' dilatirt und behält im Uebrigen seine Gestalt. Die Dilatation z'_z weicht durchaus von derjenigen ab, welche bei gleichförmiger Erwärmung eintritt und in unserm Falle ergibt

$$x'_x = a'_1 \vartheta, \quad y'_y = a'_2 \vartheta, \quad z'_z = a'_3 \vartheta, \quad y'_y = z'_z = x'_x = 0,$$

und auf dieser Abweichung beruht die Thatsache, dass die oberflächliche

Erwärmung unter Umständen noch eine electriche Erregung giebt, unter denen die gleichförmige Erwärmung wirkungslos ist.

Denn wendet man z. B. den gefundenen Werth auf ein senkrecht zur Nebenaxe **X** durch eine Ebene begrenztes Quarzstück an, das durch gleichförmige Erwärmung nicht erregt wird, legt also die **Z'**- in die **X**-Axe und setzt daher nach (57'') $x_x = q_1 \vartheta / c_{11}$, so erhält man

$$a_x = \varepsilon_{11} q_1 \vartheta / c_{11}, \quad b_x = 0, \quad c_x = 0;$$

verglichen mit dem in Tabelle V für Gruppe 25) bei einem Druck p_x parallel der **X**-Axe angegebenen Moment

$$a_x = -p_x (\varepsilon_{11} (s_{11} - s_{12}) + \varepsilon_{14} s_{14}), \quad b_x = c_x = 0$$

zeigt dieser Werth, da für Quarz $s_{11} - s_{12} > 0$ und s_{14} , sowie wahrscheinlich ε_{14} , klein ist, dass die oberflächliche Erwärmung hier die entgegengesetzte Erregung giebt, als der normale Druck.

Die oberflächliche Erwärmung eines durch eine Ebene normal zur **Y**-, also parallel zu einer Nebenaxe begrenzten Quarzes giebt hingegen keine electriche Wirkung. Hierdurch erklärt sich die bekannte Erscheinung, dass ein Quarzkrystall, der gleichförmig erwärmt und dann in eine kältere Umgebung gebracht wird, auf den Säulenflächen anfangs, d. h. so lange die Abkühlung noch eine oberflächliche ist, electriche Erscheinungen nur nahe den Kanten giebt, wo die obigen Betrachtungen, wie im Voraus hervorgehoben, nicht anwendbar sind.

Um zu zeigen, dass wirklich eine grössere Zahl von Beobachtungen unter Umständen angestellt ist, welche der vorstehend gemachten Annahme nahe entsprochen haben müssen, sei noch an die von Herrn Friedel¹⁾ benutzte Methode erinnert. Bei dieser wurde an die Krystallplatten die ebene Fläche einer mit dem Electrometer leitend verbundenen erhitzten Halbkugel angelegt und der erste Ausschlag des Instrumentes beobachtet. Ohne auf die Theorie dieses Experimentes einzugehen, erkennt man durch die blosse Anschauung, dass dabei die Wirkung der Oberflächendichte $\bar{\varepsilon}$ diejenige der inneren Vertheilung ε über-

1) C. Friedel, C. R. 97, 61, 1883.

wogen haben muss, und man kann daher aus dem Resultat derartiger Beobachtungen auf das Vorzeichen schliessen, welches $\bar{\epsilon}$ oder ϵ' bei ungleichförmiger Erwärmung an den benutzten Krystallflächen annimmt. —

Da nach unserer Annahme die Schicht variabler Temperatur sehr dünn sein soll gegen die Ausdehnung des ganzen krystallinischen Körpers, so kann man ihr gegenüber auch die Oberfläche des Körpers, wenn sie schwach gekrümmt ist, als eben ansehen und die obigen Formeln auf jede Stelle derselben anwenden, indem man nur Z' überall in die Richtung der Normalen legt. In dieser Weise kann man die electriche Erregung durch oberflächliche Erwärmung für jeden von einer stetig gekrümmten Oberfläche begrenzten krystallinischen Körper berechnen. Die strengen Formeln werden allerdings sehr complicirt.

Eine für nur qualitative Betrachtungen zumeist ausreichende Annäherung erhält man leicht für solche Krystalle, bei welchen die drei Coëfficienten q_1, q_2, q_3 der thermischen Drucke nicht stark von einander abweichen, wie dies z. B. bei Quarz stattfindet, wo nach meinen Beobachtungen $q_1 = q_2 = 144, q_3 = 125$ ist; gilt zugleich, wie hier ebenfalls, $q_4 = q_5 = q_6 = 0$, dann ist für jedes Coordinatensystem q'_1, q'_2, q'_3 nahe constant und q'_4, q'_5, q'_6 nahe gleich Null.

Ferner ist für alle mit Symmetrieen behafteten Krystallsysteme σ'_{34} und σ'_{53} klein neben σ'_{33} , verschwindet sogar streng in einer grossen Anzahl von Richtungen, wie leicht näher zu erweisen wäre.

Unter diesen Voraussetzungen ist z'_x viel grösser als y'_z und z'_y , d. h. die Verschiebung der Oberflächentheilchen findet überall nahezu in der Richtung der Normalen statt; sein Werth, als mit ϑ proportional, variirt längs der Oberfläche nur mit der wechselnden thermischen Leitungsfähigkeit nach der Normalen, also im Allgemeinen sehr wenig.

Nun ist, falls $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ wieder die Richtungscosinus der Z' -Axe bezeichnen, bei Vernachlässigung von z'_x und z'_y nach (5):

$$\text{ö8) } x_x = \gamma_1^2 z'_z, \quad y_y = \gamma_2^2 z'_z, \quad z_z = \gamma_3^2 z'_z, \quad y_z = 2\gamma_2\gamma_3 z'_z, \quad z_x = 2\gamma_3\gamma_1 z'_z, \quad x_y = 2\gamma_1\gamma_2 z'_z.$$

Durch Einsetzen in die Formeln der Tabelle I kann man sonach leicht die Momente a, b, c in Bezug auf die festen Axen und wegen

$$n = c' = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3$$

das Moment n nach der Normalen finden, welches, wenn man für z'_z den in der Oberfläche stattfindenden nahe constanten Werth setzt, zugleich die Dichte $\bar{\epsilon}$ der Oberflächenschicht angiebt, die, wie wir später sehen werden, in vielen Fällen die Anziehung auf sehr nahe äussere Punkte und damit die Erscheinungen, die bei dem Kundt'schen Bestäubungsverfahren eintreten müssen, bestimmt.

Wir wollen uns aus dem betrachteten Krystall eine Kugel gebildet denken; setzen wir dann

$$\gamma_1 = \cos \psi \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \cos \psi \sin \varphi, \quad \gamma_3 = \sin \psi, \quad 59)$$

so bestimmt ψ als geographische Breite gegen die XY -Ebene, φ als geographische Länge gegen die XZ -Ebene zugleich mit der Richtung der Normalen auch den Ort auf der Kugelfläche, auf welchen sich die Formel bezieht.

Wir geben eine Zusammenstellung der resultirenden Momente n , resp. der Oberflächendichten $\bar{\epsilon}$ nur für die einfacheren Gruppen.

Tabelle VIII.

III. Gruppe 7).

$$n = z'_z \sin \psi \left[(\epsilon_{31} + 2\epsilon_{15}) \cos^2 \varphi + (\epsilon_{32} + 2\epsilon_{24}) \sin^2 \varphi + \epsilon_{36} \sin 2\varphi \right] \cos^2 \psi + \epsilon_{33} \sin^2 \psi;$$

die Kugel theilt sich in zwei durch den Aequator geschiedene Hälften von entgegengesetzter Ladung in entsprechenden Punkten, deren Gesetz im Uebrigen je nach den Werthen der Constanten verschieden sein kann.

Gruppe 8).

$$n = z'_z \sin \psi \cos^2 \psi \sin 2\varphi (\epsilon_{14} + \epsilon_{25} + \epsilon_{36});$$

die Kugelfläche theilt sich in die acht durch die Krystallaxen gegebenen Octanten, welche abwechselnd entgegengesetzte Dichte erhalten.

IV. Gruppe 10) und 13).

$$n = z'_z \sin \psi \left[(\epsilon_{31} + 2\epsilon_{15}) \cos^2 \psi + \epsilon_{33} \sin^2 \psi \right];$$

hat $(\epsilon_{31} + 2\epsilon_{15})$ und ϵ_{33} gleiches Vorzeichen, so findet eine Theilung der Kugel in eine positive und eine negative Hälfte statt, wenn nicht, so in vier Zonen abwechselnden Vorzeichens.

Gruppe 11). $n = 0$;

oberflächliche Erwärmung wirkt überhaupt nicht merklich.

Gruppe 14). $n = z'_z \sin \phi \cos^2 \phi \sin 2\varphi (2\varepsilon_{14} + \varepsilon_{36})$;

im Wesentlichen wie Gruppe 8).

Gruppe 15).

$$n = z'_z [(2\varepsilon_{14} + \varepsilon_{36}) \sin 2\varphi + (2\varepsilon_{15} + \varepsilon_{31}) \cos 2\varphi] \cos^2 \phi \sin \phi;$$

die Theilung ähnelt der bei Gruppe 8), doch sind die Octanten nicht diejenigen des Hauptaxensystems.

V. Gruppe 17) und 20) wie 10).

Gruppe 18). $n = 0$.

Gruppe 21). $n = z'_z \varepsilon_{11} \cos 3\varphi \cos^3 \phi$;

die Kugel wird durch sechs aequidistante Meridiane, von denen der eine in der YZ -Ebene liegt, in sechs Felder mit abwechselnd entgegengesetzter Ladung getheilt.

Gruppe 22). $n = z'_z (\varepsilon_{14} \cos 3\varphi - \varepsilon_{22} \sin 3\varphi) \cos^3 \phi$;

Theilung wie im vorigen Falle, doch fällt keine der Grenzen in eine Coordinatenebene.

Gruppe 24).

$$n = z'_z [-\varepsilon_{22} \sin 3\varphi \cos^3 \phi + (2\varepsilon_{15} + \varepsilon_{31}) \sin \phi \cos^2 \phi + \varepsilon_{33} \sin^3 \phi];$$

Diese Vertheilung stellt sich als eine Superposition der Vertheilungen der Gruppe 10) und 21) dar, wenn man bei letzterer nur die YZ - mit der ZX -Ebene vertauscht.

Demzufolge ist nahe den Polen n in Breitenkreisen constant, nahe dem Aequator aber in Längskreisen, und es ergiebt sich daselbst eine Theilung des Umfanges in sechs Felder entgegengesetzten Vorzeichens durch aequidistante Meridiane von der XZ -Ebene aus.

Dieses Resultat gewinnt eine besondere Bedeutung, wenn man es mit der von Herrn J. und P. Curie¹⁾ gemachten Mittheilung vergleicht, dass Herr Friedel »durch eine besondere Art der Erwärmung das Vorhandensein von drei schwächeren electrischen Nebenaxen« am Turmalin, der ja der Gruppe 24) angehört, gezeigt habe.

1) J. und P. Curie, Journ. de Phys. (2), 1, 247, 1882.

Gruppe 25). $n = z'_z \varepsilon_{11} \cos 3\varphi \cos^3 \phi$;

Theilung in sechs Felder, wie bei Gruppe 21).

Gruppe 27).

$n = z'_z [\cos^3 \phi (\varepsilon_{11} \cos 3\varphi - \varepsilon_{22} \sin 3\varphi) + (2\varepsilon_{15} + \varepsilon_{31}) \sin \phi \cos^2 \phi + \varepsilon_{33} \sin^3 \phi]$;

diese Vertheilung hat ganz denselben Character wie bei Gruppe 24), nur steht die durch die ersten Glieder gelieferte Sechstheilung des Aequators nicht in directer Beziehung zu den Coordinatenaxen X und Y .

VI. Gruppe 29) und 32). $n = z'_z \varepsilon_{14} 3 \sin \phi \cos^2 \phi \sin 2\varphi$;

Theilung in die acht Octanten des Hauptaxensystemes wie bei Gruppe 8).

Die vorstehend zusammengestellten Werthe der electricischen Momente, welche, wie wiederholt werden mag, auf einer Vernachlässigung beruhen, deren Zulässigkeit in den einzelnen Fällen zu prüfen ist, dürfte dennoch, soweit es sich nur um die Qualität der entwickelten Electricität handelt, in sehr vielen Fällen das Wesentliche der Erregungen, die eine oberflächlich erwärmte oder abgekühlte Kugel annehmen kann, richtig wiedergeben.

Eine Vergleichung mit der Beobachtung gestatten diese Formeln zunächst noch nicht, da die Beobachtung der Einwirkung des erregten Krystalles auf äussere Punkte in allen Fällen, wo die electricischen Momente mit dem Ort variiren, und ganz besonders hier, wo die Aenderung innerhalb einer sehr dünnen Schicht geschieht, einen Schluss auf die Art der Oberflächendichte $\bar{\varepsilon}$ und auf das Moment um die Normale \bar{n} im Allgemeinen nicht gestattet. Die Mittel zur Ausführung einer solchen Vergleichung und hierdurch zu einer neuen Prüfung der Theorie wird uns erst der nächste Abschnitt liefern. —

Bemerkenswerth ist unter den Resultaten der vorstehenden Tabelle, dass einige Krystallsysteme, welche nach ihrer Symmetrie electricische Erregung gestatten, doch auf eine oberflächliche Erwärmung nicht reagieren, nämlich die Gruppen (11) und (18); beide haben keine polaren Symmetrieaxen. —

Die im Obigen benutzte Annäherung verliert ihre Zulässigkeit, wenn die thermischen Drucke q_1, q_2, q_3 stark verschieden sind, besonders,

wenn sie verschiedenes Vorzeichen besitzen; denn dann wird für bestimmte Richtungen nicht nur z'_z nicht gross gegen y'_z und z'_z sein, sondern sogar verschwinden. In diesen Fällen muss man entweder zu den sehr complicirten strengen Formeln, die aus (56') folgen, seine Zuflucht nehmen, oder eine Näherung anderer Art benutzen.

Eine solche ist z. B. möglich, wenn zwar die thermischen Drucke stark mit der Richtung variiren, aber das elastische Verhalten dem der isotropen Körper ähnelt.

In diesem Falle müssten σ'_{45} , σ'_{53} , σ'_{34} sehr klein neben σ'_{33} , σ'_{44} , σ'_{55} und ausserdem

$$\sigma'_{33} = \frac{1}{c_{33}}, \quad \sigma'_{44} = \sigma'_{55} = \frac{1}{c_{44}} \text{ sein.}$$

Es wäre dann also, wenn wir uns auf Krystalle der letzten vier Systeme beschränken, in Rücksicht auf die für die q'_h geltenden Formeln (26')

$$60) \quad z'_z = \frac{\vartheta}{c_{33}} (q_1 \gamma_1^2 + q_2 \gamma_2^2 + q_3 \gamma_3^2),$$

$$y'_z = \frac{\vartheta}{c_{44}} (q_1 \beta_1 \gamma_1 + q_2 \beta_2 \gamma_2 + q_3 \beta_3 \gamma_3), \quad z'_z = \frac{\vartheta}{c_{44}} (q_1 \alpha_1 \gamma_1 + q_2 \alpha_2 \gamma_2 + q_3 \alpha_3 \gamma_3).$$

Hieraus folgt, wenn man für die erste dieser Klammern das Symbol q'_3 der Kürze halber beibehält,

$$x_z = \vartheta \gamma_1^2 \left[q'_3 \left(\frac{1}{c_{33}} - \frac{1}{c_{44}} \right) + \frac{q_1}{c_{44}} \right], \quad y_z = \vartheta \gamma_2^2 \left[q'_3 \left(\frac{1}{c_{33}} - \frac{1}{c_{44}} \right) + \frac{q_2}{c_{44}} \right], \quad z_z = \vartheta \gamma_3^2 \left[q'_3 \left(\frac{1}{c_{33}} - \frac{1}{c_{44}} \right) + \frac{q_3}{c_{44}} \right],$$

$$60') \quad y_z = 2\vartheta \gamma_2 \gamma_3 \left[q'_3 \left(\frac{1}{c_{33}} - \frac{1}{c_{44}} \right) + \frac{q_2 + q_3}{2c_{44}} \right], \quad z_z = 2\vartheta \gamma_3 \gamma_1 \left[q'_3 \left(\frac{1}{c_{33}} - \frac{1}{c_{44}} \right) + \frac{q_3 + q_1}{2c_{44}} \right],$$

$$x_y = 2\vartheta \gamma_1 \gamma_2 \left[q'_3 \left(\frac{1}{c_{33}} - \frac{1}{c_{44}} \right) + \frac{q_1 + q_2}{2c_{44}} \right].$$

Mit Hülfe dieser Werthe kann man leicht die Momente für beliebige specielle Fälle bilden, aber die Formeln werden auch so meist noch recht unübersichtlich. Ein einfacher Fall ist derjenige der Gruppe 25) (Quarz), wo $q_1 = q_2$ ist. Hier erhält man unter Einführung der Winkel φ und ψ

$$61) \quad n = \vartheta \varepsilon_{11} \left[q'_3 \left(\frac{1}{c_{33}} - \frac{1}{c_{44}} \right) + \frac{q_1}{c_{44}} \right] \cos 3\varphi \cos^3 \psi;$$

da $q'_3 = q_1 \cos^2 \psi + q_3 \sin^2 \psi$ ist, so giebt dies auch:

$$n = \vartheta \varepsilon_{11} \left[\frac{q_1}{c_{33}} + (q_3 - q_1) \left(\frac{1}{c_{33}} - \frac{1}{c_{44}} \right) \sin^2 \psi \right] \cos 3\varphi \cos^3 \psi. \quad (61')$$

Die Formel unterscheidet sich von der oben für dieselbe Gruppe gegebenen dadurch, dass nach ihr die sechs Felder, in welche die Kugel durch aequidistante Meridiane getheilt ist, nochmals durch zwei symmetrisch zum Aequator gelegene Breitenkreise je in drei Stücke abwechselnd entgegengesetzten Vorzeichens zerlegt sein können.

Um auch einige Beispiele für die strengen Formeln zu geben, betrachten wir zunächst einen Kreiscylinder, der aus einem Krystall der Gruppe (25) (Quarz) parallel der Hauptaxe gefertigt ist, bei wie angenommen oberflächlicher Erwärmung. Die X' -Axe sei die Normale an einer beliebigen Stelle des Cylinders, die Z' -Axe falle in die Hauptaxe Z .

Dann sind die y'_y, z'_z, y'_z gleich Null und für die übrigen folgt aus dem System (57) durch cyclische Vertauschung

$$x'_z = \vartheta q'_1 \sigma'_{11}, \quad x'_y = \vartheta q'_1 \sigma'_{61}, \quad x'_z = \vartheta q'_1 \sigma'_{51}, \quad (62)$$

worin

$$\begin{aligned} \sigma' \sigma'_{11} &= c'_{55} c'_{66} - c'^2_{56}, & \sigma' \sigma'_{61} &= c'_{56} c'_{51} - c'_{55} c'_{61}, & \sigma' \sigma'_{51} &= c'_{61} c'_{65} - c'_{66} c'_{15}, \\ \sigma' &= c'_{11} c'_{55} c'_{66} - (c'_{11} c'^2_{56} + c'_{55} c'^2_{61} + c'_{66} c'^2_{15}) + 2 c'_{56} c'_{61} c'_{15} \end{aligned} \quad (62'')$$

ist. Da die Z - oder Z' -Axe dreizählige Symmetrieaxe ist, drücken sich diese Grössen verhältnissmässig einfach durch die Hauptelasticitätsconstanten c_{hk} aus; es ist nämlich

$$\begin{aligned} c'_{11} &= c_{11}, & c'_{55} &= c_{44}, & c'_{66} &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{14}), & c'_{61} &= 0, \\ c'_{15} &= -c'_{25} = c_{14} \beta (\beta^2 - 3\alpha^2) - c_{25} \alpha (\alpha^2 - 3\beta^2), \\ c'_{56} &= +c'_{14} = c_{14} \alpha (\alpha^2 - 3\beta^2) + c_{25} \beta (\beta^2 - 3\alpha^2). \end{aligned} \quad (62'')$$

Ferner erhält man nach (5)

$$\begin{aligned} x_z &= \alpha^2 x'_z + \alpha \beta x'_y, & y_y &= \beta^2 x'_z - \alpha \beta x'_y, & z_z &= 0, \\ y_z &= -\beta z'_z, & z_z &= +\alpha z'_z, & x_y &= -2\alpha \beta x'_z + (\alpha^2 - \beta^2) x'_y, \end{aligned} \quad (63)$$

und nach (4') das gesuchte Moment

$$n = a' = \alpha \alpha - b \beta. \quad (63')$$

Nimmt man hinzu, dass für alle Fälle, wo die Z -Axe dreizählige Symmetrieaxe ist,

$$63'') \quad \begin{aligned} a &= \varepsilon_{11}(x_x - y_y) + \varepsilon_{14}y_z + \varepsilon_{15}z_x - \varepsilon_{22}x_y, \\ b &= -\varepsilon_{22}(x_x - y_y) + \varepsilon_{15}y_z + \varepsilon_{14}z_x - \varepsilon_{11}x_y, \end{aligned}$$

so sind damit alle zur Bestimmung von n in diesen Fällen nöthigen Formeln zusammengestellt.

Wir wollen aber speciell einen Krystall der Gruppe 25 (Quarz) betrachten und haben so einfacher

$$a = \varepsilon_{11}(x_x - y_y) + \varepsilon_{14}y_z, \quad b = -\varepsilon_{14}z_x - \varepsilon_{11}x_y.$$

Hier ergibt sich, da noch $q_1 = q_1'$ ist,

$$64) \quad n = \frac{q_1 \mathfrak{D} \varepsilon_{11}}{2\sigma} [c_{44}(c_{11} - c_{12}) - 2c_{14}^2(\alpha^2(\alpha^2 - 3\beta^2)^2 + \beta^2(\beta^2 - 3\alpha^2)^2)] \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2),$$

wobei

$$2\sigma = c_{11}c_{44}(c_{11} - c_{12}) - c_{14}^2(2c_{11}\alpha^2(\alpha^2 - 3\beta^2)^2 + (c_{11} - c_{12})\beta^2(\beta^2 - 3\alpha^2)^2).$$

Führt man den Winkel φ zwischen der X - und X' -Axe ein und setzt also

$$\alpha = \cos \varphi, \quad \beta = \sin \varphi,$$

so wird sehr einfach:

$$64') \quad n = q_1 \frac{\mathfrak{D} \varepsilon_{11}}{2\sigma} [c_{44}(c_{11} - c_{12}) - 2c_{14}^2] \cos 3\varphi,$$

$$2\sigma = c_{11}(c_{44}(c_{11} - c_{12}) - 2c_{14}^2) - c_{14}^2(c_{11} \cos^2 3\varphi - c_{12} \sin^2 3\varphi).$$

Man erkennt, wie sich hier durch die strenge Behandlung dieselbe Eintheilung des Umfangs des Quarzcyinders in sechs Zonen mit entgegengesetzter Ladung ergibt, bemerkt aber auch, dass das Gesetz der Dichtigkeit sich etwas von dem oben mitgetheilten angenäherten unterscheidet.

Relativ einfach werden ferner die strengen und allgemeinen Formeln für das reguläre System, da dort $q_4' = q_5' = 0$ und $q_3' = q$ constant ist. Die Gleichungen (57) geben also

$$65) \quad z'_x = \mathfrak{D}q\sigma'_{33}, \quad y'_z = \mathfrak{D}q\sigma'_{43}, \quad z'_z = \mathfrak{D}q\sigma'_{53}.$$

Um die σ_{hk} zu berechnen, ist zu benutzen, dass für das reguläre System nach den Formeln (26) und dem Schema auf Seite 31 gilt:

$$\begin{aligned}
 c'_{33} &= c_{11} - 2c_0(\gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2), \\
 c'_{44} &= c_{44} + c_0(\beta_1^2\gamma_1^2 + \beta_2^2\gamma_2^2 + \beta_3^2\gamma_3^2), \\
 c'_{55} &= c_{44} + c_0(\gamma_1^2\alpha_1^2 + \gamma_2^2\alpha_2^2 + \gamma_3^2\alpha_3^2), \\
 c'_{34} &= c_0(\gamma_1^3\beta_1 + \gamma_2^3\beta_2 + \gamma_3^3\beta_3), \\
 c'_{35} &= c_0(\gamma_1^3\alpha_1 + \gamma_2^3\alpha_2 + \gamma_3^3\alpha_3), \\
 c'_{45} &= c_0(\gamma_1^2\alpha_1\beta_1 + \gamma_2^2\alpha_2\beta_2 + \gamma_3^2\alpha_3\beta_3),
 \end{aligned}
 \tag{65'}$$

falls $c_{11} - c_{12} - 2c_{44} = c_0$ gesetzt wird. Andererseits ist das Moment nach der Normale auf der Kugel gegeben durch

$$n = c' = 2\varepsilon_{14}[\varepsilon'_z\beta_1\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + y'_z(\beta_1\gamma_2\gamma_3 + \beta_2\gamma_3\gamma_1 + \beta_3\gamma_1\gamma_2) + z'_x(\alpha_1\gamma_2\gamma_3 + \alpha_2\gamma_3\gamma_1 + \alpha_3\gamma_1\gamma_2)].$$

Setzt man hier die Werthe der $z'_x, y'_z, \varepsilon'_z$ nach (65) ein, so erhält man nach etwas umständlichen Reductionen die Schlussformel

$$n = c' = \frac{(3c_{44}^2 - 2c_0c_{44} + c_0^2(\gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2))2c_{14}\gamma_1\gamma_2\gamma_3g\vartheta}{c_{11}c_{44}^2 + c_0c_{44}(2(c_{11} + c_{44}) - 3c_0)(\gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2) + c_0^2(3c_{11} - 9c_{44} - 2c_0)\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2}, \tag{65''}$$

welche zugleich das Gesetz der Oberflächendichtigkeit $\bar{\varepsilon}$ auf der oberflächlich erwärmten oder abgekühlten Kugel angiebt.

Auch die strengere Formel lässt, wie die angenäherte auf Seite 79, die Dichte $\bar{\varepsilon}$ in den Schnittkreisen der Axenebenen mit der Kugel verschwinden, aber das Gesetz, welchem dieselbe in den vier Octanten folgt, ist von dem früheren verschieden und zwar um so mehr, je mehr c_0 , welches für isotrope Medien verschwindet, von Null abweicht.

Führt man mit Hülfe der Relationen (59) die Winkel φ und ψ ein, so wird in der letzten Formel

$$\begin{aligned}
 \gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2 &= \cos^2\psi(\sin^2\psi + \cos^2\psi\sin^2\varphi\cos^2\varphi), \\
 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 &= \sin\psi\cos^2\psi\sin 2\varphi.
 \end{aligned}$$

Da die Beobachtungen, welche die oberflächliche Erwärmung oder Abkühlung benutzen, wegen der Veränderlichkeit des vorausgesetzten Zustandes mit der Zeit kaum eine grosse Genauigkeit erhalten können, so wollen wir die strengen Formeln nicht noch für weitere Gruppen entwickeln. —

Der Fall der oberflächlichen Erwärmung scheint gegenwärtig neben dem Fall der constanten Temperatur und den hiermit äquivalenten der einzige zu sein, der sich streng durchführen lässt. Das schliesst nicht

aus, dass sich in manchen Fällen durch Discussion der aufgestellten Formeln ohne Integration Schlüsse über die Qualität der electricen Erregung ziehen lassen, welche die vollständige Erklärung qualitativer Beobachtungen liefern.

Auch für eine solche Verwendung der Gleichungen sei nur ein Beispiel von hervorragendem Interesse gegeben.

Es werde eine kreisförmige Quarzplatte, senkrecht zur Hauptaxe Z geschnitten, vom Centrum oder vom Rande her rings gleichförmig erwärmt.

Zu einer beliebigen Zeit wird dann, da die Leitungsfähigkeit und Elasticität in der Aequatorebene rings um die Axe constant ist, der Zustand nur eine Function von $x^2 + y^2 = e^2$ und z sein. Speciell seien die drei Verrückungscomponenten

$$u = \frac{x}{e} f(e, z), \quad v = \frac{y}{e} f(e, z), \quad w = F(e, z),$$

also die Deformationen

$$66) \quad \begin{aligned} x_x &= \left(\frac{x}{e}\right)^2 f' + \left(\frac{y}{e}\right)^2 \frac{f}{e}, & y_y &= \left(\frac{y}{e}\right)^2 f' + \left(\frac{x}{e}\right)^2 \frac{f}{e}, & z_z &= \frac{\partial F}{\partial z}, \\ y_z &= \frac{y}{e} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + F'\right), & z_x &= \frac{x}{e} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + F'\right), & x_y &= \frac{2xy}{e^2} \left(f' - \frac{f}{e}\right), \end{aligned}$$

worin durch die oberen Indices die Differentialquotienten nach e bezeichnet werden mögen.

Benutzt man, dass für die Gruppe 25) (Quarz)

$$a = \varepsilon_{11}(x_x - y_y) + \varepsilon_{14}y_z, \quad b = -\varepsilon_{14}z_x - \varepsilon_{11}x_y, \quad c = 0$$

ist, so erhält man bei Einführung zweier Abkürzungen Φ und Ψ :

$$66') \quad \begin{aligned} a &= \varepsilon_{11} \frac{x^2 - y^2}{e^2} \left(f' - \frac{f}{e}\right) + \varepsilon_{14} \frac{y}{e} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + F'\right) = \varepsilon_{11} \frac{x^2 - y^2}{e^2} \Phi + \varepsilon_{14} \frac{y}{e} \Psi, \\ b &= -\varepsilon_{14} \frac{x}{e} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + F'\right) - \varepsilon_{11} \frac{2xy}{e^2} \left(f' - \frac{f}{e}\right) = -\varepsilon_{14} \frac{x}{e} \Psi - \varepsilon_{11} \frac{2xy}{e^2} \Phi. \end{aligned}$$

Die Dichte $\bar{\varepsilon}$ der Oberflächenschicht auf den Grundflächen der Platte ist hier gleich Null, da c verschwindet; tritt also bei der Erwärmung eine Wirkung auf den Grundflächen nahe äussere Punkte ein, so kann sie nur von der räumlichen Dichte ε im Innern der Platte herrühren. Diese Dichte findet sich nach Formel (3') hier

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} \left(\frac{\Phi}{e^2} \right)' \frac{x(x^2 - 3y^2)}{e} = \varepsilon_{11} \left[f'' - \frac{3}{e} \left(f' - \frac{f}{e} \right) \right] \cos 3\varphi, \quad 66'')$$

falls man $x/e = \cos \varphi$, $y/e = \sin \varphi$ setzt und $(\Phi/e^2)'$ berechnet.

Dabei ist f die Verschiebung, f' die lineäre Dilatation parallel e , f'' der Zuwachs der letzteren auf der Längeneinheit; alle drei sind rings um das Centrum der Platte constant.

Geschieht die Erwärmung vom Centrum aus, so ist f' überall positiv und wächst längs e bis zu einem Maximum, um sodann, und zwar nach dem Rande zu allmählich langsamer, wieder abzunehmen. Auf dem Rande nahen Theilen der Platte ist also der Factor von $\varepsilon_{11} \cos 3\varphi$ jedenfalls positiv; die Methode der Bestäubung giebt daher, wie man bei der Einfachheit der Verhältnisse ohne Rechnung sofort aus den gefundenen Werthen von ε schliessen kann, eine Theilung des Randstückes der Platte in sechs Theile abwechselnden Vorzeichens, wobei der Theil, welcher die $+X$ -Axe enthält, positiv, der mit der $-X$ -Axe negativ geladen erscheint, falls man $\varepsilon_{11} > 0$ voraussetzt.

Findet hingegen die Erwärmung von der Peripherie her statt, so wird f' vom Centrum aus dauernd, und zwar nach aussen hin allmählich langsamer, wachsen; nahe dem Rande wird in Folge dessen der Factor von $\varepsilon_{11} \cos 3\varphi$ negativ sein. Demgemäss findet hier die Eintheilung nach demselben Gesetz statt, wie zuvor, aber die Ladungen sind die entgegengesetzten. Sie stimmen dem Sinne nach überein mit den an der Kugel bei oberflächlicher Abkühlung erhaltenen.

Dies theoretische Resultat ist in jeder Einzelheit in Uebereinstimmung mit den von Herrn Röntgen¹⁾ angestellten Beobachtungen.

§ 12. Das electricische Potential ungleichförmig erwärmter Krystalle, insbesondere dünner Cylinder und oberflächlich erwärmter Kugeln.

Die Schwierigkeit, welche bei der Bestimmung der Potentiale mechanisch deformirter Krystalle auftrat, macht sich auch bei dem

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 19, 515, 1883.

analogen Problem für die thermisch deformirten Krystalle geltend, und zwar um so mehr, als hier schon die Bestimmung der electricischen Momente nur in sehr wenigen Fällen möglich ist.

Es ist daher von Interesse, dass in einem bestimmten und experimentell wohl zugänglichen Falle sich das Potential berechnen lässt, ohne dass das Gesetz der Temperaturvertheilung und der Momente bekannt ist. Diesen Fall wollen wir zuerst erledigen.

Es sei ein Cylinder gegeben, der entweder eine gegen den Querschnitt grosse Länge besitzt oder an seinen beiden Endflächen mit einer nahezu adiathermanen Hülle bedeckt ist, und es werde sein Potential auf Punkte gesucht, welche so weit von dem Cylinder entfernt sind, dass man das Quadrat seiner Querdimensionen neben dem Quadrat dieser Entfernung vernachlässigen kann. Der Querschnitt sei im Uebrigen beliebig, habe aber eine centrisch symmetrische Form.

Ist dieser Cylinder bei constanter anfänglicher Temperatur in eine wärmere oder kältere Umgebung gebracht, so wird seine Temperatur in allen Querschnitten demselben Gesetz gehorchen und eine centrisch symmetrische Vertheilung besitzen. In Folge dessen werden auch die Gesamtspannungen $X'_x + q'_1 \vartheta$, . . . die Z' -Coordinate nicht enthalten.

Bezeichnet man mit θ die mittlere Temperatur des Querschnittes, so gelten ferner zu jeder Zeit die Formeln:

$$67) \quad \int X'_x dQ = -q'_1 \theta Q_x, \int Y'_y dQ = -q'_2 \theta Q_y, \int Z'_z dQ = -q'_3 \theta Q_z, \dots,$$

während alle Integrale, welche neben einem der elastischen Drucke eine Coordinate x oder y linear enthalten, verschwinden.

Führt man in den allgemeinen Ausdruck (2) des Potentials die Werthe (20) der Momente ein, wie dies in (48'') ausgeführt ist, und entwickelt e und r nach Potenzen von x' und y' bis zu den Gliedern zweiter Ordnung exclusive, so kann man die Integration ausführen und erhält

$$67') \quad \begin{aligned} V'_z &= -\theta Q_z \left[\frac{x'_1 (z'_1 - z')}{r_1 e_1^2} (\delta'_{11} q'_1 + \dots) + \frac{y'_1 (z'_1 - z')}{r_1 e_1^2} (\delta'_{21} q'_1 + \dots) - \frac{1}{r_1} (\delta'_{31} q'_1 + \dots) \right]_{z'=0}^{z'=l}, \\ &= -\theta Q_z \left[\frac{x'_1 (z'_1 - z')}{r_1 e_1^2} (\varepsilon'_{11} a'_1 + \dots) + \frac{y'_1 (z'_1 - z')}{r_1 e_1^2} (\varepsilon'_{21} a'_1 + \dots) - \frac{1}{r_1} (\varepsilon'_{31} a'_1 + \dots) \right]_{z'=0}^{z'=l}; \end{aligned}$$

hierbei sind bereits die zwischen den δ_{hk} und ε_{hk} sowie zwischen den q_i und a_i bestehenden Relationen (28') und (25) eingeführt.

Dies Potential hat die Form des Potentials zweier Belegungen auf den Querschnitten $z' = 0$ und $z' = l$, deren Dichte allerdings vom Ort des angezogenen Punktes abhängt. Es ist hervorzuheben, dass bei der gemachten Annahme die Endquerschnitte nicht wie einzelne electriche Theilchen, sondern eher wie electriche Molcküle wirken. Demzufolge ist auch die Kraft, welche ein electricher Punkt erfährt, keineswegs ringsum die Z' -Axc constant.

Allerdings in allen Fällen, wo die Z' -Axc eine zwei-, drei-, vier-, oder sechszählige Symmetrieaxe ist, verschwinden die beiden ersten Glieder und bleibt nur das letzte, das Potential der Wirkung zweier Pole in $z' = 0$ und $z' = l$ von der Ladung $\theta Q_z (\varepsilon'_{31} a'_1 + \dots)$ darstellend.

Der Werth (67') lässt sich viel einfacher schreiben, wenn man die electriche Momente $a'_\theta, b'_\theta, c'_\theta$ einführt, welche in dem Krystall bei gleichförmiger Erwärmung auf die mittlere Temperatur θ erregt werden. Er lautet dann nach (54'):

$$V'_z = -Q_z \left[\frac{z'_1 - z'}{r_1 e_1^2} (x'_1 a'_\theta + y'_1 b'_\theta) - \frac{1}{r_1} c'_\theta \right]_{z'=0}^{z'=l} \quad (68)$$

Führt man noch das resultirende Moment m'_θ und die Richtung m seiner Axe ein, so erhält man, da $x_1'^2 + y_1'^2 = e_1^2$ ist:

$$V'_z = -m'_\theta Q_z \left[\frac{z'_1 - z'}{r_1 e_1} \cos(m, e_1) - \frac{\cos(m, z')}{r_1} \right]_{z'=0}^{z'=l} \quad (68')$$

Da bei gleichförmiger Erwärmung nur die Krystalle mit einer ausgezeichneten Axe und zwar immer parallel dieser Axc, welche stets zur Z -Axc gewählt war, electriche polarisirt werden, so ist das gefundene Resultat sehr anschaulich. Es ist bemerkenswerth, dass, auch, wenn die electriche Axe gegen die Cylinderaxe geneigt ist, die Wirkung des Cylinders auf äussere Punkte doch immer von den Endquerschnitten auszugehen scheint. —

Was nun die Behandlung derjenigen Fälle betrifft, in welchen die Deformationen durch Erwärmung bekannt sind, so ist für einen gleich-

förmig erwärmten Krystall das Potential auf äussere Punkte allein durch das Oberflächenintegral $\int \bar{\epsilon} d\sigma/r$ gegeben und die Beurtheilung der Art seiner Einwirkung daher zumeist ohne alle Rechnung möglich. Hat der Krystall nur eine polare Symmetrieaxe und die Form eines ihr parallelen, an den Enden beliebig begrenzten, Cylinders, so geht nur von diesen Enden eine Wirkung aus.

Complicirter liegt die Sache für ungleichförmig erwärmte Körper. Der Fall eines oberflächlich erwärmten Kreis-Cylinders von gegen seinen Querschnitt sehr grosser Länge lässt sich in der Art, wie auf Seite 57 dargestellt ist, behandeln. Grösseres Interesse noch bietet wegen der vorliegenden Beobachtungen der Fall einer oberflächlich erwärmten oder abgekühlten Kugel.

Um allgemein das Potential einer ungleichförmig electricisirten Kugel auf einen äussern Punkt zu berechnen, gehen wir aus von der Formel

$$V = \int dk \left(a \frac{\partial^1}{\partial x} + b \frac{\partial^1}{\partial y} + c \frac{\partial^1}{\partial z} \right),$$

worin $r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$ das Quadrat der Entfernung des angezogenen Punktes x_1, y_1, z_1 oder $\rho_1, \psi_1, \varphi_1$ von dem Volumenelement dk an der Stelle x, y, z oder ρ, ψ, φ bezeichnet. Setzt man

$$69) \quad J_1 = \int \frac{a dk}{r}, \quad J_2 = \int \frac{b dk}{r}, \quad J_3 = \int \frac{c dk}{r},$$

so kann man auch schreiben

$$69') \quad V = - \left(\frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial y_1} + \frac{\partial J_3}{\partial z_1} \right).$$

Die Momente a, b, c seien in Reihen nach Kugelfunctionen dargestellt und zwar sei

$$69'') \quad a = \sum_0^{\infty} X^h, \quad b = \sum_0^{\infty} Y^h, \quad c = \sum_0^{\infty} Z^h,$$

worin die X^h, Y^h, Z^h von $\rho, \sin \psi = \mu, \varphi$ abhängen.

Zugleich sei $\frac{1}{r}$ nach Kugelfunctionen entwickelt und zwar gesetzt, da $\rho_1 > \rho$ ist,

$$\frac{1}{r} = \sum_0^{\infty} \frac{\rho^n}{\rho_1^{n+1}} P^n,$$

wo nun die P^n symmetrisch in μ , μ_1 und φ , φ_1 sind.

Dann berechnet sich sogleich

$$J_1 = \sum_0^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \int_0^{\rho} \frac{\rho^{n+2} d\rho}{\rho_1^{n+1}} X_1^n, \quad J_2 = \sum_0^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \int_0^{\rho} \frac{\rho^{n+2} d\rho}{\rho_1^{n+1}} Y_1^n, \quad J_3 = \sum_0^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \int_0^{\rho} \frac{\rho^{n+2} d\rho}{\rho_1^{n+1}} Z_1^n,$$

worin der untere Index an X^n , Y^n , Z^n bezeichnen soll, dass in diesen Functionen ψ und φ mit ψ_1 und φ_1 vertauscht ist.

Wir wollen nun die vereinfachende Annahme einführen, dass die sämmtlichen X^n , Y^n , Z^n den Radius ρ nur in einem gemeinsamen Factor P enthalten, so dass gesetzt werden kann

$$X_1^n = P \Xi_1^n, \quad Y_1^n = P H_1^n, \quad Z_1^n = P Z_1^n; \quad (70)$$

die Ξ , H , Z sind hierin Functionen von ψ_1 und φ_1 allein.

Setzt man noch

$$\int_0^{\rho} P \rho^{n+2} d\rho = P^n, \quad (70')$$

so folgt:

$$J_1 = \sum_0^{\infty} \frac{4\pi \Xi_1^n P^n}{(2n+1) \rho_1^{n+1}}, \quad J_2 = \sum_0^{\infty} \frac{4\pi H_1^n P^n}{(2n+1) \rho_1^{n+1}}, \quad J_3 = \sum_0^{\infty} \frac{4\pi Z_1^n P^n}{(2n+1) \rho_1^{n+1}}. \quad (70'')$$

Diese Resultate gestatten die Anwendung auf den uns besonders wichtigen Fall der oberflächlich erwärmten Kugel, bei welcher die eingeführte Annahme nahe erfüllt ist.

Nach den Werthen (58) sind bei der im vorigen Abschnitt erörterten Annäherung die electrischen Momente a , b , c lineäre Functionen der sechs Argumente

$$x_x = z'_x v^2 \cos^2 \varphi, \quad y_y = z'_y v^2 \sin^2 \varphi, \quad z_z = z'_z \mu^2, \quad y_z = z'_z 2\mu v \sin \varphi, \quad z_x = z'_x 2\mu v \cos \varphi, \\ x_y = z'_y v^2 \sin 2\varphi,$$

worin z'_x eine unbekannte Function von ρ und v kurz für $\sqrt{1-\mu^2}$ gesetzt ist.

Da nun die zweite Kugelfunction ein in den fünf Gliedern

$$2 - 3v^2, \quad \mu v \cos \varphi, \quad \mu v \sin \varphi, \quad v^2 \cos 2\varphi, \quad v^2 \sin 2\varphi,$$

homogen linearer Ausdruck ist, so folgt, dass die Momente a, b, c sich durch Kugelfunctionen nullter und zweiter Ordnung ausdrücken lassen.

In der That, schreibt man den allgemeinen Ansatz (1) in der Form:

$$a = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}}{3} \delta + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}}{2} (x_x - y_y) + \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} - 2\varepsilon_{13}}{6} (x_x + y_y - 2z_z) \\ + \varepsilon_{14} y_x + \varepsilon_{15} z_x + \varepsilon_{16} x_y,$$

worin $\delta = x_x + y_y + z_z$ die cubische Dilatation bezeichnet, so ist bei den obigen Werthen $x_x \dots$ das erste Glied von μ und φ unabhängig, die übrigen bilden eine Kugelfunction zweiter Ordnung.

Wir schreiben die letztere Formel

$$71) \quad a = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}}{3} \delta + \frac{2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{13}}{3} x_x + \frac{2\varepsilon_{12} - \varepsilon_{13} - \varepsilon_{11}}{3} y_y + \frac{2\varepsilon_{13} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}}{3} z_z \\ + \varepsilon_{14} y_x + \varepsilon_{15} z_x + \varepsilon_{16} x_y$$

und kürzen sie ab in

$$71') \quad a = m_0 \delta + m_1 x_x + m_2 y_y + m_3 z_z + m_4 y_x + m_5 z_x + m_6 x_y,$$

ebenso die Werthe für b und c in

$$71'') \quad b = n_0 \delta + n_1 x_x + n_2 y_y + \dots, \quad c = p_0 \delta + p_1 x_x + p_2 y_y + \dots$$

Diese Ausdrücke sind in (70'') einzusetzen, wobei nun

$$\int_0^R z'_x \rho^{n+2} d\rho = P^n$$

wird. Ist die Schicht abweichender Temperatur auf der Kugel sehr dünn gegenüber dem Kugelradius R , so ist, falls man

$$\int_0^R z'_x d\rho = \Theta \text{ setzt, } P^0 = R^2 \Theta, \quad P^2 = R^4 \Theta.$$

Das Resultat schreibt sich am kürzesten in der früheren Bezeichnung (58)

$$72) \quad J_1 = 4\pi \left\{ \frac{P^0}{\rho_1} m_0 + \frac{P^2}{5\rho_1^3} (m_1 \gamma_1'^2 + m_2 \gamma_2'^2 + m_3 \gamma_3'^2 + 2m_4 \gamma_2' \gamma_3' + 2m_5 \gamma_3' \gamma_1' + 2m_6 \gamma_1' \gamma_2') \right\};$$

ähnlich lautet J_2 und J_3 ; $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$ sind dabei die Richtungscosinus des Radiusvectors ρ_1 nach dem angezogenen Punkte. Durch Differentiation erhält man hieraus:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial J_1}{\partial x_1} &= 4\pi \left\{ \frac{P^0}{\rho_1^2} m_0 \gamma'_1 - \frac{2P^2}{5\rho_1^4} (m_1 \gamma'_1 + m_6 \gamma'_2 + m_5 \gamma'_3) + \frac{P^2}{\rho_1^4} \gamma'_1 (m_1 \gamma_1'^2 + m_2 \gamma_2'^2 + \dots) \right\}, \\
 -\frac{\partial J_2}{\partial y_1} &= 4\pi \left\{ \frac{P^0}{\rho_1^2} n_0 \gamma'_2 - \frac{2P^2}{5\rho_1^4} (n_6 \gamma'_1 + n_2 \gamma'_2 + n_4 \gamma'_3) + \frac{P^2}{\rho_1^4} \gamma'_2 (n_1 \gamma_1'^2 + n_2 \gamma_2'^2 + \dots) \right\}, \\
 -\frac{\partial J_3}{\partial z_1} &= 4\pi \left\{ \frac{P^0}{\rho_1^2} p_0 \gamma'_3 - \frac{2P^2}{5\rho_1^4} (p_5 \gamma'_1 + p_4 \gamma'_2 + p_3 \gamma'_3) + \frac{P^2}{\rho_1^4} \gamma'_3 (p_1 \gamma_1'^2 + p_2 \gamma_2'^2 + \dots) \right\}.
 \end{aligned} \quad (73)$$

Die Summe dieser Glieder giebt das gesuchte Potential der oberflächlich erwärmten oder abgekühlten Kugel auf äussere Punkte.

Beachtet man, dass sich nach (58) und (71') schreiben lässt

$$a = z'_1(m_0 + m_1 \gamma_1'^2 + m_2 \gamma_2'^2 + \dots), \quad b = z'_1(n_0 + n_1 \gamma_1'^2 + n_2 \gamma_2'^2 + \dots), \quad c = z'_1(p_0 + p_1 \gamma_1'^2 + p_2 \gamma_2'^2 + \dots), \quad (73')$$

und dass das Moment um die Richtung des Radius ρ

$$n = c' = a \gamma_1 + b \gamma_2 + c \gamma_3$$

ist, so erkennt man, dass das Potential V im Allgemeinen ganz anders mit der Richtung variirt, als die Oberflächendichte $\bar{\epsilon} = \bar{n}$.

Diese Verschiedenheit verschwindet, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
 m_0 &= n_0 = p_0 = 0, \\
 m_1 + n_6 + p_5 &= m_6 + n_2 + p_4 = m_5 + n_4 + p_3 = 0.
 \end{aligned} \quad (74)$$

Die ersten drei ergeben

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{12} + \epsilon_{13} = \epsilon_{21} + \epsilon_{22} + \epsilon_{23} = \epsilon_{31} + \epsilon_{32} + \epsilon_{33} = 0, \quad (74')$$

die letzten drei, unter Rücksicht auf diese ersteren,

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{26} + \epsilon_{35} = \epsilon_{16} + \epsilon_{22} + \epsilon_{34} = \epsilon_{16} + \epsilon_{24} + \epsilon_{33} = 0. \quad (74'')$$

Diese Bedingungen sind sämmtlich erfüllt bei Krystallen der Gruppen 8), 11), 14), 15), 18), 21), 22), 25), 29), 32), also bei acht von den achtzehn überhaupt durch oberflächliche Erwärmung oder Abkühlung erregbaren Gruppen, zu denen, wie wir sahen, die Gruppen 11) und 18) nicht zählen.

Diese Gruppen sind dieselben, welche durch allseitig gleichen Druck und durch gleichförmige Erwärmung nicht erregt werden und welche demzufolge bei diesen Zuständen auch keine inducirte Oberflächenladung besitzen können.

Bei allen diesen ist also längs einer der gegebenen concentrischen Kugel das Potential proportional der demselben Radius entsprechenden Oberflächendichte $\bar{\epsilon}$; es fallen daher auch die Maxima und Minima, welche das Potential auf dieser Kugel annimmt, in diejenigen Richtungen, in welchen die Oberflächendichte $\bar{\epsilon}$ ihre grössten und kleinsten Werthe besitzt. Bei allen diesen Gruppen liefert daher das Kundt'sche Bestäubungsverfahren direct ein richtiges Bild von der Oberflächendichte $\bar{\epsilon}$.

Bei den übrigen Gruppen sind die Beziehungen minder einfach.

Schliessen wir die complicirten Gruppen 2), 4) und 5) aus, so verbleiben noch die sieben Gruppen 7), 10), 13), 17), 20), 24), 27), welche sämmtlich hemimorph sind und demgemäss eine polare Symmetrieaxe besitzen, woraus folgt, dass sie durch allseitig gleichen Druck und gleichförmige Erwärmung erregt werden, also auch bei diesen Zuständen inducirte Oberflächenladungen besitzen. Sie sind demnach schon hierdurch gegenüber den früheren als die complicirteren ausgezeichnet. In dem für sie geltenden Potential V steht neben dem mit $\bar{\epsilon}$ proportionalen Glied noch das folgende:

$$4\pi\gamma_3\left(\frac{P^0}{\rho_1^2}p_0 - \frac{2P^2}{5\rho_1^4}(m_5 + n_4 + p_3)\right).$$

An demselben fällt zunächst auf, dass es nicht, wie das erstere, mit P^2/ρ_1^4 proportional ist, demnach in seiner absoluten Grösse anders mit dem Gesetz der Temperaturvertheilung längs des Kugelradius, wie auch mit der Entfernung ρ_1 des angezogenen Punktes variirt, als jenes.

Abgesehen von diesem Umstande ist sein Verlauf sehr einfach, denn wegen des Factors $\gamma_3 = \sin\psi$ verschwindet es im Aequator und nimmt diessseits und jenseits entgegengesetzte Werthe an; dem gleichen Gesetz folgt das Potential, welches die Kugel bei gleichförmiger Erwärmung und unter allseitig gleichem Druck ausübt. Man erkennt leicht, dass sein Auftreten neben dem mit $\bar{\epsilon}$ proportionalen Glied das Gesetz des Potentials wesentlich verändern kann.

Zwar in den einfachsten Fällen, in denen in Folge der speciellen

Werthe der Constanten $\epsilon_{hk} \bar{n}$ resp. $\bar{\epsilon}$ nur an den Polen ein Maximum oder Minimum annimmt, besitzt auch das Potential diesen Character; auch erhält es bei Gruppe 24) und 27) für den Aequator, da dort $\gamma_3 = \sin\psi$ verschwindet, wie $\bar{\epsilon}$ in sechs gleichen Bogen abwechselnd entgegengesetzte Werthe, aber denjenigen Maximis und Minimis von $\bar{\epsilon}$, welche zwischen den Polen und dem Aequator liegen, entsprechen im Allgemeinen nicht solche des Potentials.

Bei den Gruppen 7), 10), 13), 17), 20), 24), 27) giebt also die Wirkung der oberflächlich erwärmten oder abgekühlten Kugel auf äussere Punkte kein in jeder Hinsicht sicheres Bild der erregten Oberflächendichte. —

Die vorstehenden Resultate in Verbindung mit den Formeln der Tabelle VIII liefern die Mittel, in den Fällen, wo die von der Theorie gemachten Voraussetzungen bei dem Experiment erfüllt sind, die electricischen Wirkungen einer oberflächlich erwärmten oder abgekühlten Kugel auf äussere Punkte zu berechnen und durch die Vergleichung mit der Beobachtung die Theorie zu prüfen.

Es ist ein glücklicher Umstand, dass bei dem Quarz, über welchen allein hierher gehörige Beobachtungen von Herrn Röntgen¹⁾ vorliegen, sowohl die Annahmen, welche zu den Werthen der Tabelle VIII geführt haben, als auch die Bedingungen 74' und 74'' erfüllt sind, welche zur Folge haben, dass das Potential in derselben Weise mit der Richtung variirt, wie die Oberflächendichte $\bar{\epsilon}$ oder das Moment \bar{n} . In Folge dessen gewinnt die Prüfung der Theorie durch die Beobachtungen ein besonderes Gewicht.

Für die Anwendung der Formeln ist zu berücksichtigen, dass z'_z an jeder Stelle der oberflächlichen Schicht mit der dort stattfindenden Temperatur ϑ proportional ist, letztere gerechnet von derjenigen Anfangstemperatur ϑ_0 aus, welche vor der oberflächlichen Einwirkung auf dieselbe die ganze Kugel gleichförmig besessen hatte, und welche zu dem betrachteten Zeitpunkt auch das Innere der Kugel noch besitzt. z'_z ist

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 19, 513—515, 1883.

also negativ im Falle der oberflächlichen Abkühlung, positiv im Falle der oberflächlichen Erwärmung. In diesen beiden Fällen muss also die Wirkung der Quarz-Kugel auf Punkte der Oberfläche an jeder Stelle von entgegengesetztem Vorzeichen sein und man erkennt leicht, dass sie bei der oberflächlichen Abkühlung in demselben Sinne stattfindet, wie an dem betreffenden Ende eines dem Radius parallel geschnittenen und longitudinal comprimierten Cylinders.

Im Uebrigen erscheint, wie schon oben gesagt, die ganze Kugel durch die sechs aequidistanten Meridiane, parallel denen geschnitten Cylinders durch longitudinalen Druck nicht longitudinal erregt werden, (Meridiane fehlender Piëzoelectricität), in sechs Zonen entgegengesetzt gleicher Wirkung getheilt.

Schreitet die Abkühlung oder Erwärmung von der Oberfläche her in's Innere allmählich fort, so muss ein Zustand grösster electricischer Wirkung erreicht werden, darauf eine Abnahme und schliesslich bei vollständigem Ausgleich der Temperatur ein Verschwinden derselben eintreten. Vorausgesetzt ist hierbei, dass die Oberfläche der Kugel die Electricität durchaus nicht leitet. Ist eine geringe Leitung vorhanden, so wird während des Maximums der electricischen Erregung an jeder Stelle der Oberfläche eine electricische Schicht von entgegengesetztem Vorzeichen als die aequivalente Dichte $\bar{\epsilon}$ inducirt werden, und es ist die Möglichkeit gegeben, dass, während die Momente im Innern der Kugel mehr und mehr abnehmen, diese Schicht in der Wirkung auf äussere Punkte über jene überwiegt und so also das Vorzeichen der Electricisirung der Kugel während der fortschreitenden Abkühlung oder Erwärmung sich scheinbar umkehrt.

Alle diese Erscheinungen sind durch Herren Röntgen experimentell constatirt worden und diese Thatsache enthält eine wichtige Bestätigung der Theorie, während diese hinwiederum erst die vollkommene Erklärung der Beobachtungen liefert.

Anhang 1.

Ueber die directe Einwirkung der Deformationen auf die Dichtigkeit der inducirten Oberflächenbelegungen.

Die im Vorstehenden entwickelte Theorie der pyro- und piëzoelectrischen Erscheinungen an Krystallen vernachlässigt ausgesprochenermassen den directen Einfluss, den die Deformation des Krystalles auf die Dichtigkeit der inducirten Oberflächenbelegung ausübt, als eine wahrscheinlich neben den Erregungen des Innern des Krystalles verschwindend kleine Grösse. Indessen wird es nützlich sein, sich davon Rechenschaft abzulegen, in welcher Weise jener vernachlässigte Einfluss sich eventuell geltend machen könnte.

Wir betrachten hierzu einen Krystall mit nur einer polaren Symmetrieaxe, da diese Gattung, wie oben erörtert, fast allein im Allgemeinen bei jedem allseitigen Druck p und jeder Temperatur ϑ ein von Null verschiedenes constantes Gesamtmoment m und in Folge dessen zwar keine räumliche Dichte η , aber eine Oberflächendichte $\bar{\eta}$ besitzt, welche wenn der Zustand andauert, durch eine inducirte Belegung $\eta_a = -\bar{\eta}$ in ihrer Wirkung auf äussere Punkte compensirt wird. Demgemäss wird das Anfangspotential

$$W = \int \frac{\bar{\eta} - \eta_a}{r} do + \int \frac{\eta dk}{r}$$

verschwindend sein.

Durch eine Deformation beliebiger Art wird eine Aenderung der inneren Dichte $\delta\eta = \epsilon$, der Oberflächendichte $\delta\bar{\eta} = \bar{\epsilon}$, der inducirten Dichte $\delta\eta_a = \epsilon_a$ hervorgebracht, denen eine Potentialänderung $\delta W = V$ entspricht. Es ist dann

$$V = \int \frac{\bar{\epsilon} - \epsilon_a}{r} do + \int \frac{\epsilon dk}{r} + \int (\bar{\eta} - \eta_a) \delta \left(\frac{do}{r} \right) + \int \eta \delta \left(\frac{dk}{r} \right).$$

Das dritte und vierte Glied, welches die Aenderung des Potentials

in Folge der Deformation allein, ohne Aenderung der Ladung, darstellt, verschwindet wegen $\bar{\eta} = \eta_a$ und $\eta = 0$. Es bleibt also nur:

$$V = \int \frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_a}{r} do + \int \frac{\varepsilon dk}{r}.$$

Aus dem Ansatz (1) folgt im allgemeinsten Falle, wenn α, β, γ die Richtungscosinus der äusseren Normalen auf do sind:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{x}_x (\varepsilon_{11} \alpha + \varepsilon_{21} \beta + \varepsilon_{31} \gamma) + \bar{y}_y (\varepsilon_{12} \alpha + \varepsilon_{22} \beta + \varepsilon_{32} \gamma) \dots;$$

hingegen ist ε_a in Rücksicht auf den Umstand, dass das Product $\eta_a do$ sich bei der Deformation nicht ändert, zunächst gleich $-\eta_a \chi$, falls χ die Dilatation der Flächeneinheit bezeichnet, und weiter, da $\eta_a = C\gamma$ ist — unter C das ursprüngliche Moment verstanden, dessen Axe die Z -Axe ist, — nach dem bekannten Werthe von χ auch

$$\varepsilon_a = -C\gamma (\bar{x}_x (1 - \alpha^2) + \bar{y}_y (1 - \beta^2) + \bar{z}_z (1 - \gamma^2) - \bar{y}_z \beta \gamma - \bar{z}_x \gamma \alpha - \bar{x}_y \alpha \beta).$$

Diese Werthe zeigen, dass stets, wenn die Deformation eine gleichförmige, also $\varepsilon = 0$ ist, der ganze Einfluss der Aenderung ε_a der inducirten Oberflächendichte darin besteht, dass in dem allgemeinen Ansatz (1) für die Momente die Constanten

$$\varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_{32}, \quad \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{24}, \quad \varepsilon_{15}, \quad \varepsilon_{36}$$

resp. vertauscht erscheinen mit

$$\varepsilon_{31} + C(1 - \alpha^2), \quad \varepsilon_{32} + C(1 - \beta^2), \quad \varepsilon_{33} + C(1 - \gamma^2), \quad \varepsilon_{24} - C\gamma^2, \quad \varepsilon_{15} - C\gamma^2, \quad \varepsilon_{36} - C\alpha\beta.$$

Es würde also schon die Beobachtung der Erregung beliebig orientirter Prismen durch einseitigen Druck genügen, um zu entscheiden, ob die mit C proportionalen Glieder eine merkliche Grösse haben. Dergleichen Beobachtungen sind an Krystallen der vorausgesetzten Art bisher noch nicht angestellt.

Anhang 2.

Ueber den Einfluss der Selbstinduction auf die piëzo- und pyroelectrischen Erscheinungen.

Unter denjenigen Wirkungen, welche im Eingang der vorstehenden Abhandlung als zweiter Ordnung bezeichnet und demgemäss vernachlässigt sind, steht die Selbstinduction der durch mechanische oder ther-

mische Ursachen electricisch erregten Krystalle der Grösse nach unbedingt in erster Linie und kann unter Umständen eine Grösse annehmen, welche die der directen Beobachtungsfehler weit übertrifft. Es ist daher bei allen Anwendungen der Theorie nothwendig, sich über ihre Grösse ein Urtheil zu verschaffen und, wenn dieselbe nicht zu vernachlässigen ist, nach Mitteln der Bestimmung und Elimination zu suchen.

Die Ergänzung des allgemeinen Ansatzes (1) für die electricischen Momente der Volumeneinheit geschieht, wenn wir uns der Maxwell'schen Gleichungen für die Induction in Diëlectricis bedienen, durch Zufügung von je drei den partiellen Differentialquotienten des Potentials W der erregten Vertheilung auf den innern Einheits-Punkt proportionalen Gliedern, so dass z. B. die erste Gleichung die Form annimmt:

$$a = \epsilon_{11}x_x + \epsilon_{12}y_y + \epsilon_{13}z_z + \epsilon_{14}y_z + \epsilon_{15}z_x + \epsilon_{16}x_y - \kappa_{11} \frac{\partial W}{\partial x} - \kappa_{12} \frac{\partial W}{\partial y} - \kappa_{13} \frac{\partial W}{\partial z};$$

— $\partial W/\partial x$, . . . sind hierbei die Kraftcomponenten X, Y, Z , welche aus der Vertheilung folgen würden, falls sich der Einheitspunkt innerhalb eines cylindrischen Hohlraumes befände, dessen Grundfläche unendlich gross gegen seine Höhe und normal zu der Krafrichtung wäre.

Da W resp. X, Y, Z mit der Grösse und Gestalt des betrachteten Krystalles variiren, so liegt der Gedanke nahe, ihre Grössenordnung rein experimentell durch Combination von Beobachtungen an verschiedenen grossen Präparaten desselben Mineralen zu bestimmen.

Hierzu ist aber zu bemerken, dass dieser Gedanke nicht zum Ziele führt, falls man die verschieden grossen Stücke einander geometrisch ähnlich wählt.

Denn stehen für zwei ähnliche Krystalle 1 und 2 correspondirende Längen in dem Verhältniss $l_1 : l_2$, so stehen die durch in Summe gleiche und ähnlich vertheilte Oberflächenkräfte erregten Momente trotz der Selbstinduction in dem Verhältniss $1/l_1^2 : 1/l_2^2$ und die Wirkungen beider Krystalle auf homologe Punkte sind gleich. Hieraus folgt aber, dass auf keine Weise die Grösse der Einwirkung der Selbstinduction auf a, b, c durch die Combination der Beobachtung zweier ähnlicher und ähnlich deformirter Krystalle zu bestimmen ist.

Um diese Behauptung zu begründen hat man nur in Betracht zu ziehen, dass die Deformationen beider Krystalle sich unter den gemachten Voraussetzungen wie $1/l_1^2 : 1/l_2^2$ verhalten, und dass von den Wirkungen, welche zwei ähnliche mit gleicher Gesamtmasse in ähnlicher Vertheilung geladene Körper auf homologe Punkte üben, dasselbe gilt. Gleiche Gesamtladung haben die beiden Krystalle aber dann, wenn die Momente a, b, c in homologen Punkten in dem Verhältniss $1/l_1^2 : 1/l_2^2$ stehen.

Um durch Combination mehrerer Beobachtungen einen Schluss über den Einfluss der Selbstinduction zu ziehen, muss man also Krystallpräparate von verschiedenen Verhältnissen ihrer Dimensionen der Beobachtung unterwerfen, rechteckige Prismen von verschiedenen Kanten-, elliptische Cylinder von verschiedenen Axenverhältnissen biegen und drillen, Parallelepipeda von verschiedenen Kantenverhältnissen einseitig comprimiren u. s. f.

In letzterem Falle kann man zwei extreme Werthe der erregten Momente leicht angeben, wenn die Electricisirung eine longitudinale ist.

Ist nämlich das Prisma in der Druckrichtung unendlich ausgedehnt, so werden die Werthe der Momente a, b, c dieselben werden, wie ohne Selbstinduction, denn ein constanter Werth von c und verschwindendes a und b lässt hier auch X, Y, Z verschwinden.

Ist hingegen das Prisma in der zur Druckrichtung normalen unendlich ausgedehnt, so kann man wiederum a, b, c constant annehmen, denn bei der gemachten Voraussetzung wird dann auch X, Y, Z constant, aber die Werthe von a, b, c sind jetzt andre als vorher.

Es ist nämlich, falls die Z -Axe in die Druckrichtung gelegt wird, $Z = -4\pi c$ und daher

$$\begin{aligned} a + 4\pi\kappa_{13}c &= b + 4\pi\kappa_{23}c = 0, \\ c + 4\pi\kappa_{33}c &= \varepsilon_{31}x_x + \varepsilon_{32}y_y + \varepsilon_{33}z_z + \dots \end{aligned}$$

Zwischen diesen Werthen und den früheren welche aus ihnen folgen, wenn man alle κ_{ik} verschwinden lässt, werden diejenigen liegen, welche mittleren Verhältnissen der Dimensionen entsprechen.

Beobachtungen, die sich in der erörterten Weise zur Beurtheilung der Grössenordnung des Einflusses der Selbstinduction verwenden lassen, sind von den Herren J. und P. Curie angestellt¹⁾. Dieselben betreffen die electriche Erregung von parallel der Axe geschnittenen Turmalincylindern durch longitudinale Compression. Bei gleichem Querschnitt wurde die Länge von 0,5 bis 15 mm, also im Verhältniss 1 : 30 variirt, bei gleicher Länge der Querschnitt von 2 qmm bis 1 qcm, also im Verhältniss 1 : 50. Die Beobachtungsfehler betragen etwa 5% und bis auf diese Grösse zeigte sich die auf den Endquerschnitten durch gleiche Drucke erregte Electricitätsmenge von allen Veränderungen der Dimensionen unabhängig.

Durch diese Resultate ist erwiesen, dass bei Turmalin jedenfalls die Vernachlässigung der Selbstinduction keinen gegenüber den Beobachtungsfehlern in Betracht kommenden Einfluss auf die durch die Theorie gelieferten Werthe ausübt, und da Turmalin keineswegs besonders kleine Diëlectricitätsconstanten besitzt, so darf man erwarten, dass auch bei anderen Krystallen die Vereinfachung der theoretischen Betrachtungen durch Nichtberücksichtigung der Selbstinduction zulässig sein wird.

1) J. und P. Curie, C. R. 92, 186, 1881.

I n h a l t.

§ 1.	Ziele und Grundannahmen der Theorie	1
§ 2.	Die electricischen Momente als Functionen der Deformationen, bestimmt für sämtliche Krystallsysteme	8
§ 3.	Die electricischen Momente als Functionen der inneren Spannungen.	22
§ 4.	Elastische und thermische Constanten für die verschiedenen Krystallsysteme. Einige allgemeine Sätze	27
§ 5.	Electricische Erregung durch allseitigen gleichförmigen Druck	35
§ 6.	Electricische Erregung eines Cylinders von beliebigem Querschnitt durch einseitige Compression und durch gleichförmige Biegung	37
§ 7.	Electricische Erregung eines elliptischen Cylinders durch Drillung um seine Axe	49
§ 8.	Das electricische Potential eines unendlich langen Kreiscylinders, in welchem die Momente beliebige, insbesondere lineäre Functionen der Quercoordinaten sind, für äussere Punkte	55
§ 9.	Das electricische Potential eines unendlich dünnen Cylinders von beliebigem Querschnitt, in welchem die Spannungen längs der Axe constant sind	63
§ 10.	Electricische Erregung durch eine gleichförmige oder mit einer gleichförmigen aequivalente Erwärmung	67
§ 11.	Electricische Erregung durch ungleichförmige, insbesondere durch oberflächliche Erwärmung	72
§ 12.	Das electricische Potential ungleichförmig erwärmter Krystalle, insbesondere dünner Cylinder und oberflächlich erwärmter Kugeln	85
Anhang 1.	Ueber die directe Einwirkung der Deformationen auf die Dichtigkeit der inducirten Oberflächenbelagungen	95
Anhang 2.	Ueber den Einfluss der Selbstinduction auf die piëzo- und pyroelectricischen Erscheinungen	96
