Ueber die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Krystalle.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung der K. Ges. d. Wiss. am 7. December 1889.

I. Theil.

Das Ziel der mit der vorliegenden Arbeit eröffneten Reihe von Untersuchungen ist die Zurückführung der Erscheinungen der inneren Reibung auf fundamentale Constanten. Diese erste Mittheilung enthält ausschliesslich theoretische Grundlagen, die folgenden sollen die Bestimmungen der Reibungsconstanten für eine Reihe isotroper und anisotroper fester Körper bringen.

Unter innerer Reibung verstehe ich dabei nur diejenige zwischen den Theilen desselben Körpers wirkende Kraft, welche ebenso wie die Flüssigkeitsreibung in Folge von Geschwindigkeitsdifferenzen innerhalb des Körpers auftritt und also mit verschwindender Geschwindigkeit selbst zu wirken aufhört. Es handelt sich daher im Folgenden nur um die Untersuchung von Bewegungserscheinungen innerhalb der sogenannten Elasticitätsgrenze, das heißt von denjenigen, welche so geringe Deformationen hervorrufen, daß ihnen gegenüber der Körper sich als vollständig elastisch verhält, und also nach Aufhören der Bewegungen und äußeren Einwirkungen in den ursprünglichen (natürlichen) Zustand zurückkehrt. Die Erscheinungen der sogenannten elastischen Nachwirkung, welche, wie ich glaube, stets von dauernden Deformationen begleitet werden, sind daher von der Behandlung ausgeschlossen.

Die Untersuchung bezieht sich nur auf homogene isotrope oder anisotrope Körper; die Anwendung der gefundenen Resultate auf gezogene Stäbe, Drähte, Röhren, innerhalb deren wahrscheinlich sehr complicirte Structurverhältnisse stattfinden, ist daher im Allgemeinen nicht zulässig.

Das durch Vorstehendes umgrenzte Gebiet ist, soweit ich sehe, noch kaum angebaut. Ist zwar auch die Verschiedenheit von elastischer Nachwirkung und innerer Reibung in neueren Untersuchungen nachdrücklich betont und ist auch bei Stäben von sehr geringer Nachwirkung das logarithmische Decrement von Torsionsschwingungen und somit eine von der innern Reibung direct abhängige Constante experimentell bestimmt, so handelt es sich dabei doch immer um die Feststellung des Einflusses von Nebenumständen wie Schwingungsamplitude, Länge und Querschnitt des Stabes, Moment des an ihm befestigten trägen Systemes, Temperatur u. dergl., nicht aber um die Zurückführung der Beobachtung auf der Substanz des Stabes individuelle Constanten[1]). Ferner sind die benutzten Bewegungsgleichungen zumeist nur wie Interpolationsformeln aufgestellt und nicht aus einer allgemeinen Theorie geschöpft. Eben die hierin liegenden Lücken suchen die folgenden Arbeiten auszufüllen.

Die Ausdehnung der Untersuchungen auf Krystalle bietet besonders deshalb ein Interesse, weil die innere Reibung eine Eigenschaft der Materie ist, welche gewissermaßen noch niederere Symmetrieen besitzt, nämlich von noch mehr Constanten abhängt, als selbst die Elasticität, und welche demgemäß das äußerste Glied der Reihe physikalischer Eigenschaften der Krystalle nach der einen Seite hin bildet, die auf der anderen durch diejenigen begrenzt wird, welche, wie thermische Ausdehnung, Wärme- und Electricitätsleitung und dergl. in ihrem Verhalten durch Ellipsoide zu repräsentiren sind.

Die Gesetze der innern Reibung der Krystalle gehen in vieler Hinsicht denen ihrer Elasticität parallel, und das gleiche gilt von der Theorie

---

1) S. hierzu z. B. W. Thomson, Proc. Roy. Soc. **14**, 1865, p. 289. H. Streintz, Wien. Ber. **69**, 1874, p. 337. **80**, 1879, p. 397. P. Schmidt. Wied. Ann. **2**, 1877, p. 48. J. Clemenčić, Wien. Ber. **81**, 1880, p. 791. H. Tomlinson, Proc. Roy. Soc. **38**, 1885. p. 42. **40**, 1886, p. 343. Phil. Trans. **177**, 1886. p. 801.

derjenigen Erscheinungen, deren Beobachtungen zur Bestimmung ihrer Constanten zu verwenden sind. Für letztere werde ich vielfach auf meine »Theoretischen Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle II. Theil[1])« Bezug nehmen müssen.

§ 1. Entwickelung der Ausdrücke für die Reibungscomponenten, welche den verschiedenen Krystallsystemen entsprechen.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines nicht starren Körpers lauten bekanntlich:

$$\begin{aligned}
\varepsilon u'' &= \varepsilon X - \frac{\partial(X_x)}{\partial x} - \frac{\partial(X_y)}{\partial y} - \frac{\partial(X_z)}{\partial z},\\
\varepsilon v'' &= \varepsilon Y - \frac{\partial(Y_x)}{\partial x} - \frac{\partial(Y_y)}{\partial y} - \frac{\partial(Y_z)}{\partial z},\\
\varepsilon w'' &= \varepsilon Z - \frac{\partial(Z_x)}{\partial x} - \frac{\partial(Z_y)}{\partial y} - \frac{\partial(Z_z)}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Hierin bezeichnet ε die Dichtigkeit, u'', v'', w'' sind die Beschleunigungen der Verrückungscomponenten u, v, w, ferner sind X, Y, Z die Componenten der äusseren auf innere Punkte wirkenden Kräfte, (X_x), (X_y), (X_z), ... die Componenten der inneren von Reibung, Elasticität oder dergl. herrührenden Druckkräfte. Erstere Kräfte sind auf die Einheit der Masse, letztere auf die Einheit der Fläche bezogen.

Durch Multiplication mit $u'dk$, $v'dk$, $w'dk$ und Integration über den ganzen Körper k erhält man nach bekannten Methoden:

$$\begin{aligned}
&\int \varepsilon dk\,(u'u'' + v'v'' + w'w'')\\
&\quad = \int \varepsilon dk\,(Xu' + Yv' + Zw') + \int do(\overline{X}\overline{u}' + \overline{Y}\overline{v}' + \overline{Z}\overline{w}')\\
&\qquad + \int dk\Big((X_x)x_x' + (Y_y)y_y' + (Z_z)z_z' + (Y_z)y_z' + (Z_x)z_x' + (X_y)x_y'\Big)
\end{aligned} \tag{2}$$

worin x_x', y_y', ... die Deformationsgeschwindigkeiten und $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ die Componenten der auf die Oberfläche o ausgeübten äußeren Druckkräfte bezeichnen, letztere bezogen auf die Flächeneinheit.

1) W. Voigt. Gött. Abh. 34. 1887, p. 53.

Wirken in dem Körper Widerstandskräfte, so verlangt der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, daß durch dieselben jederzeit die lebendige Kraft geordneter d. h. elastischer Bewegung abnimmt, diejenige ungeordneter d. h. thermischer Bewegung zunimmt, und dies ergiebt, daß die Arbeit der Reibungskräfte jederzeit negativ sein, d. h. sich als eine negative Summe von Quadraten darstellen muß.

Fügt man die Annahme hinzu, daß die Betrachtung auf so kleine Geschwindigkeiten beschränkt sein soll, daß man die Reibungskräfte als lineäre Functionen der Deformationsgeschwindigkeiten betrachten kann — man vernachlässigt dabei allem Anschein nach erst Glieder dritter Ordnung — so erhält man für die Antheile an den Gesammt-Drucken (X_x), (Y_y), (Z_z), . . ., welche der innern Reibung entsprechen und welche mit A_x, B_y, C_z, . . . bezeichnet werden mögen, den Ansatz:

$$
\begin{aligned}
-A_x &= a_{11}x'_x + a_{12}y'_y + a_{13}z'_z + a_{14}y'_z + a_{15}z'_x + a_{16}x'_y,\\
-B_y &= a_{21}x'_x + a_{22}y'_y + a_{23}z'_z + a_{24}y'_z + a_{25}z'_x + a_{26}x'_y,\\
-C_z &= a_{31}x'_x + a_{32}y'_y + a_{33}z'_z + a_{34}y'_z + a_{35}z'_x + a_{36}x'_y,\\
-B_z = -C_y &= a_{41}x'_x + a_{42}y'_y + a_{43}z'_z + a_{44}y'_z + a_{45}z'_x + a_{46}x'_y,\\
-C_x = -A_z &= a_{51}x'_x + a_{52}y'_y + a_{53}z'_z + a_{54}y'_z + a_{55}z'_x + a_{56}x'_y,\\
-A_y = -B_x &= a_{61}x'_x + a_{62}y'_y + a_{63}z'_z + a_{64}y'_z + a_{65}z'_x + a_{66}x'_y.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Zwischen den 36 im Allgemeinen von einander unabhängigen Coefficienten bestehen dabei nur jene von Jacobi [1]) gegebenen Bedingungen, welche daraus folgen, daß

$$\Phi = -(A_x x'_x + B_y y'_y + C_z z'_z + B_z y'_z + C_x z'_x + A_y x'_y)$$

wesentlich positiv ist, und auf welche neuerdings bei einer ähnlichen Frage in der Elasticitätslehre unlängst Herr Wesendonck wieder hingewiesen hat [2]).

Diese bestehen darin, daß die Partialdeterminanten

$$\frac{\partial P}{\partial a_{11}},\quad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{11}\,\partial a_{22}},\quad \frac{\partial^3 P}{\partial a_{11}\,\partial a_{22}\,\partial a_{33}}\ldots$$

1) Jacobi, Crelle's Journ. 53 p. 281, 1857.

2) Wesendonck, Wied. Ann. 35, p. 124, 1888.

und daher, weil die Reihenfolge der Anordnung willkürlich ist, alle Partialdeterminanten der Form

$$\frac{\partial^n P}{\partial a_{hh}\, \partial a_{kk}\, \partial a_{ii} \cdots}$$

von der Gesammtdeterminante

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{61} & \cdots & a_{66} \end{vmatrix}$$

das gleiche Vorzeichen besitzen müssen, also, da jedes der Diagonalglieder eine solche Determinante darstellt und nach seiner Bedeutung nothwendig positiv ist, sämmtlich auch positiv sein müssen.

Diese Bedingungen liefern aber zwischen den Reibungsconstanten keine Gleichungen, sondern nur Ungleichungen.

Was die Specialisirung der allgemeinen Gleichungen (3) für die verschiedenen Krystallsysteme betrifft, so geschieht diese mit Hülfe der Annahme, daß krystallographisch gleichwerthige Richtungen auch physikalisch gleichwerthig sind. Man möchte zunächst geneigt sein, sie auf die Arbeit der Reibungskräfte anzuwenden, die als eine quadratische Form der Argumente x_x', y_y', z_z', y_z', z_x', x_y' nahe parallel geht dem elastischen Potential, das in demselben Verhältniß zu den x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y steht. Indessen erweist sich dies Verfahren ungeeignet, weil in der Arbeit Φ die Constanten des Systems (3) je in einem Paar der Form $a_{hk} + a_{kh}$ verbunden auftreten, die Einführung der Symmetrieen, welche den verschiedenen Krystallsystemen entsprechen, also nichts über die einzelnen Constanten, sondern nur etwas über diese Paare ergiebt.

Man hat daher die Betrachtungen an die einzelnen Reibungscomponenten A_x, B_y, C_z, B_z, C_x, A_y anzuknüpfen[1]). Für ihre Durchführung

1) Die Resultate kommen für die holoëdrischen Formen aller sechs Systeme und die rhomboëdrisch-hemiëdrischen mit denjenigen überein, die Herr F. Neumann (Vorles. über Elast. Leipzig 1885, p. 164 bis 176) für die Elasticitätsconstanten in eben diesen Gruppen erhalten hat, indem er die Symmetrieelemente die-

schicken wir einige Bemerkungen über die Einführung eines neuen Coordinatensystems voraus.

Seien zwei rechtwinklige Coordinatensysteme X, Y, Z und Ξ, H, Z, von denen das letztere weiterhin das durch seine Beziehungen zu den Axen des Krystalls ausgezeichnete Hauptaxensystem sein mag, in ihrer gegenseitigen Lage bestimmt durch die Formeln:

$$
\begin{aligned}
x &= \xi\alpha_1 + \eta\beta_1 + \zeta\gamma_1, \qquad & \xi &= x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3,\\
y &= \xi\alpha_2 + \eta\beta_2 + \zeta\gamma_2, & \eta &= x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3,\\
z &= \xi\alpha_3 + \eta\beta_3 + \zeta\gamma_3, & \zeta &= x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3,
\end{aligned} \tag{4}
$$

seien ferner die Deformationsgeschwindigkeiten und die Druckkräfte der inneren Reibung abgekürzt bezeichnet wie folgt:

$$
\begin{aligned}
&x'_x = p_1, \quad y'_y = p_2, \quad z'_z = p_3, \quad y'_z = p_4, \quad z'_x = p_5, \quad x'_y = p_6,\\
&\xi'_\xi = \pi_1, \quad \eta'_\eta = \pi_2, \quad \zeta'_\zeta = \pi_3, \quad \eta'_\zeta = \pi_4, \quad \zeta'_\xi = \pi_5, \quad \xi'_\eta = \pi_6,\\
&A_x = P_1, \quad B_y = P_2, \quad C_z = P_3, \quad B_z = P_4, \quad C_x = P_5, \quad A_y = P_6,\\
&\mathrm{A}_\xi = \Pi_1, \quad \mathrm{B}_\eta = \Pi_2, \quad \Gamma_\zeta = \Pi_3, \quad \mathrm{B}_\zeta = \Pi_4, \quad \Gamma_\xi = \Pi_5, \quad \mathrm{A}_\eta = \Pi_6,
\end{aligned} \tag{5}
$$

und bedeute $\sum\limits_h$ die Summe über $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Dann gelten die Formeln:

$$
\begin{aligned}
p_h &= \sum_k \pi_k d_{hk}, \qquad & \pi_k &= \sum_h p_h d'_{hk},\\
P_h &= \sum_k \Pi_k d'_{hk}, & \Pi_k &= \sum_h P_h d_{hk},
\end{aligned} \tag{6}
$$

worin die d_{hk} und d'_{hk} folgende Systeme von Coefficienten repräsentiren:

(7)

d_{hk}	$k=1$	2	3	4	5	6
$h = 1$	α_1^2	β_1^2	γ_1^2	$\beta_1\gamma_1$	$\gamma_1\alpha_1$	$\alpha_1\beta_1$
2	α_2^2	β_2^2	γ_2^2	$\beta_2\gamma_2$	$\gamma_2\alpha_2$	$\alpha_2\beta_2$
3	α_3^2	β_3^2	γ_3^2	$\beta_3\gamma_3$	$\gamma_3\alpha_3$	$\alpha_3\beta_3$
4	$2\alpha_2\alpha_3$	$2\beta_2\beta_3$	$2\gamma_2\gamma_3$	$(\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3)$	$(\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3)$	$(\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)$
5	$2\alpha_3\alpha_1$	$2\beta_3\beta_1$	$2\gamma_3\gamma_1$	$(\beta_3\gamma_1 + \gamma_3\beta_1)$	$(\gamma_3\alpha_1 + \alpha_3\gamma_1)$	$(\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1)$
6	$2\alpha_1\alpha_2$	$2\beta_1\beta_2$	$2\gamma_1\gamma_2$	$(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2)$	$(\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2)$	$(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)$

---

ser Gruppen berücksichtigte, aber die Existenz eines elastischen Potentiales nicht voraussetzte. Wir werden oben das Problem indeß für alle Krystallformen durchführen.

d'_{hk}	$k=1$	2	3	4	5	6
$h=1$	α_1^2	β_1^2	γ_1^2	$2\beta_1\gamma_1$	$2\gamma_1\alpha_1$	$2\alpha_1\beta_1$
2	α_2^2	β_2^2	γ_2^2	$2\beta_2\gamma_2$	$2\gamma_2\alpha_2$	$2\alpha_2\beta_2$
3	α_3^2	β_3^2	γ_3^2	$2\beta_3\gamma_3$	$2\gamma_3\alpha_3$	$2\alpha_3\beta_3$
4	$\alpha_2\alpha_3$	$\beta_2\beta_3$	$\gamma_2\gamma_3$	$(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3)$	$(\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3)$	$(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3)$
5	$\alpha_3\alpha_1$	$\beta_3\beta_1$	$\gamma_3\gamma_1$	$(\beta_3\gamma_1+\gamma_3\beta_1)$	$(\gamma_3\alpha_1+\alpha_3\gamma_1)$	$(\alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1)$
6	$\alpha_1\alpha_2$	$\beta_1\beta_2$	$\gamma_1\gamma_2$	$(\beta_1\gamma_2+\gamma_1\beta_2)$	$(\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\gamma_2)$	$(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)$.

(8)

Zwischen den d_{hk} und d'_{hk} bestehen dabei, wie leicht zu erkennen, folgende wichtige Relationen:

$$\sum_h d_{hk}\,d'_{hk_1}\begin{cases} = 1 \text{ für } k = k_1, \\ = 0 \text{ für } k \lessgtr k_1; \end{cases}$$

ebenso (9)

$$\sum_k d_{hk}\,d'_{h_1k}\begin{cases} = 1 \text{ für } h = h_1, \\ = 0 \text{ für } h \lessgtr h_1. \end{cases}$$

Mit Hülfe der Beziehungen (6) können wir nun die P_h leicht auf ein anderes Coordinatensystem transformiren. Wir haben nämlich, falls wir gemäß (3)

$$P_h = \sum_i a_{hi}\,p_i, \quad \Pi_k = \sum_n \alpha_{kn}\,\pi_n \tag{10}$$

setzen, worin nun die a_{hi} und α_{kn} die Reibungsconstanten in Bezug auf die Systeme X, Y, Z und Ξ, H, Z bezeichnen

$$\begin{aligned} P_h &= \sum_k d'_{hk}\,\Pi_k, \\ &= \sum_k d'_{hk} \sum_n \alpha_{kn}\,\pi_n, \\ &= \sum_k d'_{hk} \sum_n \alpha_{kn} \sum_i d'_{in}\,p_i, \\ &= \sum_i p_i \sum_k \sum_n d'_{hk}\,d'_{in}\,\alpha_{kn}, \end{aligned} \tag{11}$$

woraus folgt:

$$a_{hi} = \sum_k \sum_n d'_{hk}\,d'_{in}\,\alpha_{kn} \tag{12}$$

als der Werth der auf das System X, Y, Z bezogenen (abgeleiteten) Constanten a_{hi} ausgedrückt durch die für das System Ξ, H, Z geltenden α_{kn}, welche wir nach dem oben Gesagten als die Hauptreibungsconstanten bezeichnen werden.

Diese letztere Formel kömmt in Betracht, wenn es sich darum handelt, die Beziehungen zwischen den Constanten α_{kn} für einen Krystall zu ermitteln, welcher Symmetrieen besitzt. Kommt nämlich die Krystallform durch Drehungen um irgend welche Axen mit sich selbst zur Deckung, so müssen die in Bezug auf die beiden gleichwerthigen Axensysteme einander entsprechenden Constanten a_{hi} und $\mathfrak{a}_{hi}$ den gleichen Werth haben, was aussagt, daß zwei Systeme von Geschwindigkeiten, welche auf zwei krystallographisch gleichwerthige Axensysteme bezogen sich identisch darstellen, zwei Systeme von Reibungskräften erregen, die sich ebenso verhalten.

Da nun aber die allgemeinen Formeln für Reibungskräfte zeigen, daß in Hinsicht auf sie ebenso wie in Hinsicht auf die elastischen Kräfte entgegengesetzte Richtungen unter allen Umständen gleichwerthig sind, in physikalischer Hinsicht also ein Centrum der Symmetrie existirt, so können wir für die angegebene Betrachtung vortheilhaft statt der wirklichen Krystallform überall diejenige benutzen, die aus ihr entsteht, wenn man zu ihren Symmetrieelementen ein Centrum der Symmetrie hinzufügt. Diese Form wollen wir weiter kurz die »ergänzte Form« nennen.

In den folgenden Anwendungen wird von der Formel (12) immer in der Weise Gebrauch gemacht werden, daß die beiden verglichenen Coordinatensysteme eine Axe gemeinsam haben, also durch Drehung um diese in einander übergehen.

Fällt Z mit Z zusammen, so ist

$$\gamma_3 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0.$$

Setzt man noch $\cos\varphi = c$, $\sin\varphi = s$, unter φ den Drehungswinkel verstanden, und daher

(13) $$\alpha_1 = +c, \quad \alpha_2 = -s, \quad \beta_1 = +s, \quad \beta_2 = +c,$$

so wird das System der d'_{hk} einfacher:

(14)

d'_{hk}	$k = 1$	2	3	4	5	6
$h = 1$	c^2	s^2	0	0	0	$2cs$
2	s^2	c^2	0	0	0	$-2cs$
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	c	$-s$	0
5	0	0	0	s	c	0
6	$-cs$	cs	0	0	0	c^2-s^2

Unter Anwendung dieser Werthe findet sich aus (12) leicht ein allgemeines System von 36 Gleichungen, welches gilt, so wie durch irgend eine Drehung um die Z-Axe die ergänzte Krystallform mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann. Wir wollen dasselbe aber in seiner Allgemeinheit nicht aufstellen.

I. Triclines System.

$$\left.\begin{array}{l}\text{1) Holoëdrische}\\ \text{2) Hemiëdrische}\end{array}\right\}\text{ Gruppe.}$$

Hier bleibt die allgemeine Form (3) der Componenten bestehen; zur Vergleichung mit dem Folgenden stellen wir aber auch hier die schematische Uebersicht der Coefficienten hin.

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46}\\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56}\\
a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66}.
\end{array} \qquad \text{I.}$$

Die Anzahl der Constanten ist 36.

II. Monoclines System.

$$\left.\begin{array}{l}\text{3) Holoëdrische}\\ \text{4) Hemimorphe}\\ \text{5) Hemiëdrische}\end{array}\right\}\text{ Gruppe.}$$

Für alle drei besitzt die ergänzte Form eine zweizählige Symmetrieaxe. Eine solche verlangt, daß durch eine um sie ausgeführte Drehung um 180^0 der Krystall in eine Lage gelangt, in welcher jede Richtung durch eine physikalisch gleichwerthige ersetzt ist.

Ist die Z-Axe die Symmetrieaxe, so ist in dem Schema (14) $c = -1$, $s = 0$ zu setzen und man erkennt durch eine einfache Ueberlegung ohne alle Rechnung, daß von den 36 durch (12) gegebenen Gleichungen 20 auf Identitäten führen, 16 aber die Form $a_{hk} = -a_{hk}$ liefern, welche nach dem Gesagten, da $a_{hk} = a_{hk}$ werden soll, zur Folge hat, daß die betreffenden a_{hk} verschwinden.

Dieses sind die Constanten

$$\alpha_{4h},\quad \alpha_{h4},\quad \alpha_{5h},\quad \alpha_{h5},\quad \text{für } h = 1,\ 2,\ 3,\ 6. \tag{15}$$

Wegen der weiteren Anwendungen ziehen wir indeß vor, für das monokline System die Ξ-Axe als Symmetrieaxe zu wählen und erhalten demgemäß das Resultat, daß bezogen auf dies Coordinatensystem die Constanten

$$\alpha_{5h},\quad \alpha_{h5},\quad \alpha_{6h},\quad \alpha_{h6}\quad \text{für } h = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{16}$$

sämmtlich verschwinden. Das System für Gruppe 3) bis 5) ist also:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{matrix} \qquad \text{II.}$$

Die Anzahl der Constanten ist 20.

III. Rhombisches System.

$$\left.\begin{array}{l} \text{6) Holoëdrische} \\ \text{7) Hemimorphe} \\ \text{8) Hemiëdrische} \end{array}\right\} \text{Gruppe.}$$

Für alle diese besitzt die ergänzte Form drei zu einander normale zweizählige Symmetrieaxen; die obige Betrachtung läßt sich hier also wie für die Ξ- und Z- auch für die H- als Symmetrieaxe anstellen und liefert so das Resultat, daß außer den in (15) und (16) vermerkten Constanten auch die

$$\alpha_{6h},\quad \alpha_{h6},\quad \alpha_{4h},\quad \alpha_{h4}\quad \text{für } h = 1,\ 2,\ 3,\ 5 \tag{17}$$

verschwinden müssen. Unter diesen 48 Bedingungen sind nur 24 von einander unabhängige.

Für die Gruppe 6) 7) 8) gilt also das Schema:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{66} \end{matrix} \qquad \text{III.}$$

Die Anzahl der Constanten ist 12.

IV. Quadratisches System.

$$\left.\begin{array}{l} \text{9) Holoëdrische} \\ \text{10) Trapezoëdrisch-hemiëdrische} \\ \text{11) Sphenoidisch-hemiëdrische} \\ \text{12) Hemimorph-hemiëdrische} \end{array}\right\} \text{Gruppe.}$$

Diese Krystalle besitzen sämmtlich in ihren ergänzten Formen eine vierzählige und vier dazu normale paarweis gleiche und zu einander normale zweizählige Symmetrieaxen. Dies ergiebt, daß, falls die Z- zur ausgezeichneten Axe gewählt wird, zu den Beziehungen, welche zu dem Schema (III) geführt haben, noch diejenigen treten, welche ausdrücken, daß die Ξ- und H-Axe gleichwerthig sind. Es sind dies die Formeln

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21}, \quad \alpha_{13} = \alpha_{23}, \quad \alpha_{31} = \alpha_{32}, \quad \alpha_{44} = \alpha_{55}. \tag{18}$$

So gelangt man zu dem Schema:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{31} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{66}. \end{array} \qquad \text{IV}^{a}.$$

Die Zahl der Constanten ist 7.

$$\left.\begin{array}{l} \text{13) Pyramidal-hemiëdrische} \\ \text{14) Hemimorph-tetartoëdrische} \\ \text{15) Sphenoidisch-tetartoëdrische} \end{array}\right\} \text{Gruppe.}$$

Die diesen angehörigen Formen besitzen in ihren ergänzten Gestalten eine vierzählige Symmetrieaxe, welche wiederum zur Z-Axe gewählt sei. Dies kann so aufgefaßt werden, daß der Krystall außer durch Drehung um 180^0 auch durch eine um $\pm 90^0$ in eine Lage gelangt, in welcher jede Richtung mit einer physikalisch gleichwerthigen vertauscht ist. In Folge dessen kommen zu den in (15) ausgedrückten Beziehungen noch diejenigen, übrigens nur zum Theile neuen, die aus (12) folgen unter Benutzung des folgenden Systemes der d'_{hk}:

(19)

d'_{hk}	$k=1$	2	3	4	5	6
$h=1$	0	1	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	∓ 1	0
5	0	0	0	± 1	0	0
6	0	0	0	0	0	-1

Dies sind ersichtlich die Folgenden:

$$
(20)\qquad \begin{gathered} \alpha_{11}=\alpha_{22},\quad \alpha_{44}=\alpha_{55},\quad \alpha_{23}=\alpha_{13},\quad \alpha_{32}=\alpha_{31},\quad \alpha_{12}=\alpha_{21},\quad \alpha_{16}=-\alpha_{26},\\ \alpha_{61}=-\alpha_{62}.\quad \alpha_{36}=\alpha_{46}=0. \end{gathered}
$$

Hieraus ergiebt sich folgendes Schema:

$$
\mathrm{IV^b}.\qquad \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 & \alpha_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{13} & 0 & 0 & -\alpha_{16} \\ \alpha_{31} & \alpha_{31} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ \alpha_{61} & -\alpha_{61} & 0 & 0 & 0 & \alpha_{66}. \end{matrix}
$$

Die Anzahl der Constanten ist 9.

V. Reguläres System.

16) Holoëdrische
17) Tetraëdrisch-hemiëdrische
18) Plagiëdrisch-hemiëdrische
19) Pentagonal-hemiëdrische
20) Tetartoëdrische

} Gruppe.

Alle diese besitzen in ihren ergänzten Gestalten drei zu einander normale gleiche vierzählige Axen; um dies einzuführen hat man in ($\mathrm{IV^a}$) nur alle drei Axen gleichwerthig zu machen. Man gelangt hierdurch zu folgendem Schema:

$$
\mathrm{V}.\qquad \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{12} & \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{44}. \end{matrix}
$$

Die Anzahl der Constanten ist 3.

VI. Hexagonales System.

Für die Behandlung dieses formenreichsten Systemes, in welchem die ausgezeichnete Z-Axe bald dreizählige, bald sechszählige Symmetrieaxe ist, schicken wir eine Hülfsbetrachtung voraus.

Auf Seite 10 ist das System (14) der Coefficienten d'_{hk} aufgestellt, welches einer Drehung des Coordinatensystems um die Z-Axe entspricht; darin ist $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$ und φ der Drehungswinkel.

Die 36 Gleichungen zwischen den Constanten a_{hk}, welche sich aus (12) und (14) ergeben, wenn die Z-Axe eine dreizählige Symmetrieaxe $c = -\frac{1}{2}$, $s = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, lassen sich auf folgende einfache Beziehungen reduciren:

$$\begin{gathered}
a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = a_{21}, \quad a_{66} = \frac{a_{11} - a_{12}}{2}, \quad a_{16} = a_{26} = a_{61} = a_{62} = 0, \\
a_{13} = a_{23}, \quad a_{31} = a_{32}, \quad a_{36} = a_{63} = 0, \\
a_{44} = a_{55}, \quad a_{45} = -a_{54}, \qquad (21) \\
a_{34} = a_{35} = a_{43} = a_{53} = 0, \\
a_{14} = -a_{24} = a_{65}, \quad a_{15} = -a_{25} = -a_{64}, \quad a_{41} = -a_{42} = a_{56}, \quad a_{51} = -a_{52} = -a_{46}.
\end{gathered}$$

Diese Gleichungen sind so geordnet, daß immer diejenigen in einer Zeile stehen, welche aus einer dieselben Constanten enthaltenden Gruppe von Formeln (12) folgen. Die in den ersten vier Reihen befindlichen gelten, wenn die Z-Axe überhaupt eine andere als zwei- oder vierzählige Symmetrieaxe ist, die in der letzten stehenden nur für den Fall der d r e i z ä h l i g e n Symmetrieaxe. Ist die Symmetrieaxe s e c h s z ä h l i g, so ist dies dasselbe, als wäre sie zugleich z w e i- u n d d r e i z ä h l i g, und man erhält die dafür geltenden Beziehungen, indem man mit den Formeln (21) combinirt das Seite 11 erhaltene Resultat (15), daß, wenn die Z-Axe zweizählige Symmetrieaxe ist,

$$a_{4h} = a_{h4} = a_{5h} = a_{h5} = 0$$

gilt für $h = 1, 2, 3, 6$.

Mit Hülfe dieser Gleichungen ist es nun leicht, die Systeme der Constanten a_{hk} für alle Gruppen des hexagonalen Systems zu entwickeln.

21) Holoëdrische
22) Hemimorph-hemiëdrische
23) Trapezoëdrisch-hemiëdrische
24) Pyramidal-hemiëdrische
25) Erste hemimorph-tetartoëdrische
26) Sphenoidisch-hemiëdrische
27) Sphenoidisch-tetartoëdrische

} Gruppe

besitzen in ihren ergänzten Formen eine sechszählige Symmetrieaxe. Es entpricht ihnen also das System:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{31} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{11}-\alpha_{12}}{2} \end{matrix} \qquad \mathrm{VI^a}.$$

Die Anzahl der Constanten ist 6.

28) Rhomboëdrisch-hemiëdrische
29) Zweite hemimorph-tetartoëdrische
30) Trapezoëdrisch-tetartoëdrische

} Gruppe

sind in ihren ergänzten Formen characterisirt durch eine dreizählige und drei dazu normale zweizählige Symmetrieaxen, von denen die Existenz zweier aus der Existenz einer folgt. Legen wir diese eine in die Ξ-Axe, so ist mit den Formeln (21) zu combiniren das System (16), welches dem Falle entpricht, daß die Ξ-Axe zweizählige Symmetrieaxe ist. Man erhält dadurch das Schema:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{13} & -\alpha_{14} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{31} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & -\alpha_{41} & 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & \alpha_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{14} & \frac{\alpha_{11}-\alpha_{12}}{2}. \end{matrix} \qquad \mathrm{VI^b}.$$

Die Anzahl der Constanten ist 8.

31) Rhomboëdrisch - tetartoëdrische } Gruppe
32) Ogdoëdrische

besitzen in ihren ergänzten Formen eine dreizählige Symmetrieaxe; es gelten daher keine anderen Beziehungen als (21) und folgt das Schema:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & -\alpha_{25} & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{13} & -\alpha_{14} & \alpha_{25} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{31} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & -\alpha_{41} & 0 & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{52} \\ -\alpha_{52} & \alpha_{52} & 0 & -\alpha_{45} & \alpha_{44} & \alpha_{41} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{25} & \alpha_{14} & \frac{\alpha_{11}-\alpha_{12}}{2} \end{matrix}$$

Die Anzahl der Constanten ist 11.

Von dem für das reguläre System gültigen Schema V gelangt man sogleich zu demjenigen, welches den isotropen Medien entspricht, indem man einführt, daß in letzteren alle Richtungen gleichwerthig sind. Es folgt daraus $\alpha_{44} = (\alpha_{11}-\alpha_{12})/2$ und gilt demnach das Schema

$$\begin{matrix} \alpha & \alpha' & \alpha' & 0 & 0 & 0 \\ \alpha' & \alpha & \alpha' & 0 & 0 & 0 \\ \alpha' & \alpha' & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-\alpha'}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-\alpha'}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-\alpha'}{2} \end{matrix} \qquad \text{VII.}$$

worin α und α' neue Bezeichnungen sind.

§ 2. Die Dämpfung gleichförmiger langsamer Schwingungen cylindrischer Stäbe.

Zum Zwecke der experimentellen Bestimmung der Constanten der inneren Reibung muß aus theoretischen, wie aus practischen Gründen das Streben darauf gerichtet sein, möglichst langsame Schwingungen in dem beobachteten elastischen Körper stattfinden zu lassen. Solche dauern länger an als schnelle und sind aus diesem Grunde und auch an sich leichter zu beobachten. Zudem ist ihre Theorie mit verhältnißmäßig elementaren Mitteln zu entwickeln, während die Behandlung der schnellen Schwingungen bedeutendere Schwierigkeiten macht. Es liegt dies darin, daß in ersterem Falle ein Annäherungverfahren zulässig ist, welches im letzteren Falle im Allgemeinen versagt, darin bestehend, daß man in den Formeln für die Reibungskräfte diejenigen Werthe der Deformationsgeschwindigkeiten einführt, welche unter gewissen Umständen ohne Wirkung der inneren Reibung stattfinden würden.

Die Beobachtungen werden ausschließlich an cylindrischen Körpern (Stäben, Dräthen u. dergl.) vorgenommen werden. Demgemäß wollen wir das Problem uns folgendermaßen stellen.

Ein prismatischer oder cylindrischer elastischer Körper sei an einem Ende befestigt und an dem anderen derartig mit einem trägen System $\mathfrak{S}$ verbunden, daß er nicht schwingen kann, ohne dieses gleichfalls zu bewegen. Die Trägheit von $\mathfrak{S}$ sei unendlich groß gegen diejenige des elastischen Körpers, und die Einrichtung sei so getroffen, daß das System nur Schwingungen machen kann von einer Periode, die unendlich groß ist gegen die Zeit, welche die Fortpflanzung von longitudinalen, transversalen und Drillungswellen über den ganzen Cylinder erfordert. Dann ist die Deformation in jedem Augenblick sehr nahe dieselbe, welche der Cylinder annehmen würde, falls er an beiden Enden in der stattfindenden Lage dauernd festgehalten wäre, und die Deformationsgeschwindigkeit an jeder Stelle ist nahe gleich der Differenz dieser Deformationen in zwei um dt von einander entfernten derartigen Zuständen, dividirt durch dt.

Man kann hiernach die inneren Kräfte des Stabes in jedem Moment berechnen und daher auch diejenigen, welche das träge System seitens des elastischen Cylinders erleidet. Nach der Annahme genügen diese aber vollständig zur Bestimmung der Bewegung des ganzen Systems.

Besonders einfach wird die Theorie dieses Vorganges, wenn die Einrichtung so getroffen ist, daß der elastische Cylinder während der Bewegung nur Deformationen erleidet, die Spannungen zur Folge haben, welche parallel der Cylinderaxe, die wir weiterhin zur Z-Axe wählen, constant sind, also nur x und y enthalten. Es kommen hier diejenigen Resultate zur Anwendung, die ich früher für »das Gleichgewicht eines Cylinders aus homogener krystallinischer Substanz, auf dessen Mantelfläche keine Kräfte wirken, wenn die in seinem Inneren stattfindenden Spannungen längs der Cylinderaxe constant sind«, entwickelt habe[1]).

Cylinder, deren Deformationen diese Eigenschaft besitzen, will ich weiter kurz »gleichförmig gespannt« nennen, wobei die gleichförmige Spannung im engeren Sinne, nämlich diejenige durch constante normale Zugkräfte auf die Endquerschnitte, als specieller Fall erscheint.

Es wird dazu beitragen, das Ziel unserer theoretischen Entwickelungen klarzustellen, wenn wir schon hier von einigen einfachen experimentellen Veranstaltungen reden, welche derartige Bewegungen gestatten, wie sie im Folgenden betrachtet werden sollen. Einige bilden die Grundidee der von mir benutzten Beobachtungsmethoden, über welche ich später ausführlicher berichten werde.

1. Befestigt man den elastischen Cylinder vertical und bringt an seinem freien Ende eine träge Masse $\mathfrak{m}$ an, die man passend der Wirkung der Schwere entzieht, indem man sie um eine feste horizontale Axe durch ihren Schwerpunkt drehbar sein läßt, während die Wirkung des elastischen Cylinders an einem horizontal um die Länge a von der Axe entfernten Punkt angreift, so werden longitudinale Schwingungen des Stabes Oscillationen des trägen Systems zur Folge haben nach der Formel

$$\mathfrak{M}\varphi'' = -\Gamma a, \tag{22}$$

worin φ den Drehungswinkel, $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des trägen Systems $\mathfrak{S}$ und Γ die Kraft bezeichnet, welche parallel der Axe des Cylinders auf die Endfläche wirkt oder von ihm in Folge seiner Elasticität und inneren Reibung auf $\mathfrak{m}$ ausgeübt wird.

2. Bildet man das träge System aus einer um eine horizontale Axe durch ihren Schwerpunkt drehbaren Masse, z. B. einer schweren Rolle, und verbindet den elastischen Cylinder, welcher an einem Ende festgehalten wird, an dem anderen Ende geeignet mit der Rolle, sodass

1) W. Voigt l. c. p. 53.

seine Längsrichtung normal zur Drehungs-Axe und sein letztes Längselement mit einem Radius fest verbunden ist, so werden Biegungsschwingungen des Stabes Oscillationen der Rolle zur Folge haben nach dem Gesetz

$$\mathfrak{M}_y \psi_y'' = -\mathrm{M} \text{ oder } \mathfrak{M}_x \psi_x'' = -\Lambda \tag{23}$$

jenachdem die Drehungsaxe mit der Y- oder X-Axe im Cylinder parallel ist; ψ_x, ψ_y sind hierin die resp. Drehungswinkel, $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$ die resp. Trägheitsmomente, Λ und M die seitens des elastischen Cylinders auf die Rolle ausgeübten Drehungsmomente.

3. Endlich kann man das träge System in Form einer Rolle oder Scheibe mit dem letzten Querschnitt des Cylinders so verbinden, daß diesem Oscillationen um seine Längsaxe d. h. die Z-Axe möglich sind. Dann gilt für diese Bewegung

$$\mathfrak{M}_z \psi_z'' = -\mathrm{N}, \tag{24}$$

wo die Buchstaben dieselbe Bedeutung haben wie oben.

Diese Einrichtungen lassen je nur eine der Wirkungen Γ, Λ, M, N zur Geltung kommen; es ist aber zu bemerken, daß für den Fall krystallinischer Cylinder nur unter gewissen Voraussetzungen diese Sonderung von selbst stattfindet, sodaß z. B. die gleichförmige Biegung nur ein Moment um eine Queraxe, die Drillung nur ein solches um die Längsaxe hervorruft. Wir werden hierauf weiterhin besonders Rücksicht nehmen müssen.

Für die practische Anwendung würden aber, selbst wenn die technische Schwierigkeit, ein System um mehrere Axen drehbar einzurichten, zu überwinden wäre, solche Fälle doch nicht in Betracht kommen, weil, um die Nebenänderungen ungehindert zu Stande kommen zu lassen, die Trägheitsmomente des Massensystems um die verschiedenen Axen in für die verschiedenen Cylinder wechselndem aber ganz bestimmtem numerischem Verhältniß stehen müßten.

Wir werden daher weiterhin nur die Fälle in Betracht zu ziehen haben, wo die Nebenänderungen von selbst verschwinden.

Die über die Verhältnisse des elastischen Cylinders und des mit ihm verbundenen trägen Systems $\mathfrak{S}$ vorstehend gemachten Annahmen haben die Folge, daß in den Hauptgleichungen (1) die Glieder auf der linken Seite zu vernachlässigen sind, dieses System also die Gestalt annimmt, welche den Gleichgewichtsproblemen entspricht. Die Randbedingungen haben überdies für den Fall der Ruhe wie der Bewegung die gleiche Form, wir können das vorliegende Problem also zunächst wie ein Gleichgewichtsproblem behandeln.

Die allgemeinen Bewegungs-Gleichungen nichtstarrer Körper liefern für einen im Gleichgewicht befindlichen gleichförmig gespannten Cylinder, der auf der freien Grundfläche die Einwirkungen von Druckkräften erfährt, welche eine Resultirende Γ parallel der Z-Axe und Momente Λ, M, N um die X, Y, Z-Axen ergeben, folgende Beziehungen[1]).

Für alle Punkte eines jeden Querschnittes gilt:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial(X_x)}{\partial x} + \frac{\partial(X_y)}{\partial y},\\
0 &= \frac{\partial(Y_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Y_y)}{\partial y},\\
0 &= \frac{\partial(Z_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Z_y)}{\partial y},
\end{aligned}
\tag{24}
$$

für die Randpunkte hingegen

$$
\begin{gathered}
(X_x)\cos(n,x)+(X_y)\cos(n,y)=0,\quad (Y_x)\cos(n,x)+(Y_y)\cos(n,y)=0,\\
(Z_x)\cos(n,x)+(Z_y)\cos(n,y) = 0.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

Außerdem gilt theils in Folge der Gleichungen (25), theils in Folge der auf die freie Grundfläche bezüglichen Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
-\int(X_z)dq &= 0, & -\int(Y_y)dq &= 0, & -\int(Z_z)dq &= \Gamma,\\
-\int(Y_z)dq &= 0, & -\int(Z_x)dq &= 0, & -\int(X_y)dq &= 0,\\
-\int x(X_x)dq &= 0, & -\int x(Y_y)dq &= 0, & -\int x(Z_z)dq &= \mathrm{M},\\
-\int x(Y_z)dq &= \frac{\mathrm{N}}{2}, & -\int x(Z_x)dq &= 0, & -\int x(X_y)dq &= 0,\\
-\int y(X_x)dq &= 0, & -\int y(Y_y)dq &= 0, & -\int y(Z_z)dq &= \Lambda,\\
-\int y(Y_z)dq &= 0, & -\int y(Z_x)dq &= -\frac{\mathrm{N}}{2}, & -\int y(X_y)dq &= 0.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

1) W. Voigt, l. c. p. 54 und 55.

Hierin sind die Momente Λ und M übereinstimmend positiv gerechnet, wenn sie von der $+$ Y-, resp. $+$ X-Axe nach der $+$ Z-Axe hin drehend wirken.

Die (X_x), . . . sind jetzt, wie früher, die von Elasticität und innerer Reibung herrührenden gesammten Druckcomponenten; z. B. ist

$$
\begin{aligned}
-(X_x) &= -(X_x + A_x) \\
&= c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y \\
&\quad + a_{11}x'_x + a_{12}y'_y + a_{13}z'_z + a_{14}y'_z + a_{15}z'_x + a_{16}x'_y,
\end{aligned} \tag{27}
$$

worin der zweite Theil, als von der Geschwindigkeit abhängig, nach dem Vorstehenden sehr klein neben dem ersten ist.

Sind, wie angenommen, die Spannungen (X_x) . . . von der Z-Coordinate unabhängig, so wird ein Gleiches von den Deformationen gelten. Hieraus folgt, wie ich früher gezeigt habe, der allgemeine Ansatz für die Verrückungscomponenten u, v, w:

$$
\begin{aligned}
u &= U - z\left(\frac{g_1 z}{2} + hy\right), \\
v &= V - z\left(\frac{g_2 z}{2} - hx\right), \\
w &= W + z(g_1 x + g_2 y + g_3),
\end{aligned} \tag{28}
$$

worin U, V, W Functionen von x und y sind, g_1, g_2, g_3 und h aber Constanten, welche resp. die Biegung in der XZ- und YZ-Ebene, die Dehnung parallel der Z-Axe und die Drillung um ebendieselbe messen. Das Coordinatensystem ist dabei so mit dem Cylinder verbunden gedacht, daß der Schwerpunkt des ersten Querschnitts im Coordinatenanfang festgehalten wird, daß das erste Element der Cylinderaxe in der Z-Axe bleibt und daß das dem Coordinatenanfang benachbarte Raumelement keine Drehung um die Z-Axe erleidet.

Demgemäß haben die U, V, W noch die Bedingungen zu erfüllen, daß für $x = y = 0$

$$
U^0 = V^0 = W^0 = 0, \left(\frac{\partial U^0}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V^0}{\partial x}\right) \tag{29}
$$

ist.

Setzt man in den Gleichungen (27) die Werthe

$$-x_x = s_{11}(X_x) + s_{12}(Y_y) + s_{13}(Z_z) + s_{14}(Y_z) + s_{15}(Z_x) + s_{16}(X_y),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

welche aus ihnen als eine erste Nährung folgen, falls man die in die a_{hk} multiplicirten kleineren Glieder zunächst ganz unterdrückt, in eben jene kleinen Glieder ein, und kürzt ab

$$a_{h1}s_{k1} + a_{h2}s_{k2} + a_{h3}s_{k3} + a_{h4}s_{k4} + a_{h5}s_{k5} + a_{h6}s_{k6} = r_{hk}, \tag{30}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} r_{11}(X'_x) + r_{12}(Y'_y) + r_{13}(Z'_z) + r_{14}(Y'_z) + r_{15}(Z'_x) + r_{16}(X'_y) - (X_x) \\ = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Löst man diese Formeln nach x_x auf und kürzt nochmals ab

$$r_{1h}s_{1k} + r_{2h}s_{2k} + r_{3h}s_{3k} + r_{4h}s_{4k} + r_{5h}s_{5k} + r_{6h}s_{6k} = n_{hk}, \tag{32}$$

so findet sich als eine zweite Annäherung:

$$\begin{aligned} x_x = & -(s_{11}(X_x) + s_{21}(Y_y) + s_{31}(Z_z) + s_{41}(Y_z) + s_{51}(Z_x) + s_{61}(X_y)) \\ & + (n_{11}(X'_x) + n_{21}(Y'_y) + n_{31}(Z'_z) + n_{41}(Y'_z) + n_{51}(Z'_x) + n_{61}(X'_y)), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Die s_{hk} sind hierin jene leicht angebbaren Determinantenverhältnisse der Elasticitätsconstanten c_{hk}, welche bei den rein elastischen Problemen krystallinischer Stäbe eine so wichtige Rolle spielen und mehr oder weniger direct durch Beobachtungen bestimmbar sind.

Das Resultat (33) erscheint in Folge des Weges, durch den wir dasselbe erreicht haben, als eine Annäherung von geringerer Genauigkeit als die Formeln (27). Indeß ist damit noch nicht erwiesen, daß seine Genauigkeit wirklich eine geringere ist. Nichts hindert nämlich, die elastischen und Reibungskräfte statt durch die Formeln (27) durch diese letzteren (33) zu definiren und erstere als eine Folge von ihnen zu betrachten. Die Beobachtung allein kann entscheiden, bis zu welchem Grade der Genauigkeit die wirklichen Vorgänge durch die einen oder anderen dargestellt werden.

Von dem System (33), welches als eine einfache Verallgemeinerung des für einen Stab ohne innere Reibung gültigen[1]) erscheint und genau die Behandlung von jenem gestattet, kommt für uns in erster Linie die dritte Gleichung in Betracht, welche in Rücksicht auf den in (28) gegebenen Werth von w lautet:

$$(34)\qquad \begin{aligned} g_1 x + g_2 y + g_3 = & -(s_{13}(X_x) + s_{23}(Y_y) + s_{33}(Z_z) + s_{43}(Y_z) + s_{53}(Z_x) + s_{63}(X_y)) \\ & + (n_{13}(X'_x) + n_{23}(Y'_y) + n_{33}(Z'_z) + n_{43}(Y'_z) + s_{53}(Z'_x) + n_{63}(X'_y)). \end{aligned}$$

Hieraus folgert man leicht durch Anwendung der dritten, neunten und fünfzehnten der Gleichungen (26):

$$(35)\qquad \begin{aligned} g_1 Q \varkappa_y^2 &= s_{33}\mathrm{M} + s_{43}\frac{\mathrm{N}}{2} - n_{33}\mathrm{M}' - n_{43}\frac{\mathrm{N}'}{2}, \\ g_2 Q \varkappa_x^2 &= s_{33}\Lambda - s_{53}\frac{\mathrm{N}}{2} - n_{33}\Lambda' + n_{53}\frac{\mathrm{N}'}{2}, \\ g_3 Q &= s_{33}\Gamma - n_{33}\Gamma'. \end{aligned}$$

Sie bestimmen die Parameter der gleichförmigen Biegung und Dehnung ganz allgemein für alle Querschnittsformen durch die auf die freie Grundfläche der Cylinder ausgeübten Momente, Componenten und ihre Geschwindigkeiten.

Der Parameter h der gleichförmigen Drillung läßt sich hingegen nur in dem von den Momenten Λ und M um die Queraxen abhängigen Theil h_1 ebenso allgemein ausdrücken.

Dazu dienen die vierte und fünfte der Gleichungen (33), die unter Rücksicht auf die Werthe (28) und bei Einführung von[2])

$$(36)\qquad W = a_3\frac{x^2}{2} + b_3 xy + c_3\frac{y^2}{2} + d_3 x + e_3 y$$

lauten:

$$(37)\qquad \begin{aligned} +\left[g_2\frac{l}{2} + b_3 x + c_3 y + e_3 + h_1 x\right] = & -(s_{14}(X_x) + s_{24}(Y_y) + s_{34}(Z_z) + s_{44}(Y_z) + s_{54}(Z_x) + s_{64}(X_y)) \\ & + (n_{14}(X'_x) + n_{24}(Y'_y) + n_{34}(Z'_z) + n_{44}(Y'_z) + n_{54}(Z'_x) + n_{64}(X'_y)), \\ +\left[g_1\frac{l}{2} + a_3 x + b_3 y + d_3 - h_1 y\right] = & -(s_{15}(X_x) + s_{25}(Y_y) + s_{35}(Z_z) + s_{45}(Y_z) + s_{55}(Z_x) + s_{65}(X_y)) \\ & + (n_{15}(X'_x) + n_{25}(Y'_y) + n_{65}(Z'_z) + n_{45}(Y'_z) + n_{55}(Z'_x) + n_{65}(X'_y)). \end{aligned}$$

1) W. Voigt l. c. p. 59 u. f.

2) Vergl. W. Voigt l. c. p. 65.

Hieraus folgt, wenn man die erste Gleichung mit x, die zweite mit y multiplicirt und über den Querschnitt integrirt:

$$(b_3+h_1)Q\varkappa_y^2 = +s_{34}\mathrm{M}-n_{34}\mathrm{M}',$$
$$(b_3-h_1)Q\varkappa_x^2 = +s_{35}\Lambda-n_{35}\Lambda',$$

und dies giebt

$$2h_1Q = \frac{s_{34}\mathrm{M}-n_{34}\mathrm{M}'}{\varkappa_y^2}-\frac{s_{35}\Lambda-n_{35}\Lambda'}{\varkappa_x^2}. \tag{38}$$

Für den vom Moment N um die Längsaxe abhängigen Theil h_2 ist ein Ausdruck in endlicher Form nur für einen Cylinder von elliptischem Querschnitt angebbar[1]. Hier kann man denselben Werth W aus (36) benutzen und erhält in Rücksicht auf die neunte und siebenzehnte der Formeln (26):

$$(b_3+h_2)Q\varkappa_y^2 = +\frac{s_{44}\mathrm{N}-n_{44}\mathrm{N}'}{2},$$
$$(b_3-h_2)Q\varkappa_x^2 = -\frac{s_{55}\mathrm{N}-n_{55}\mathrm{N}'}{2},$$

also

$$2h_2Q = \frac{s_{44}\mathrm{N}-n_{44}\mathrm{N}'}{2\varkappa_y^2}+\frac{s_{55}\mathrm{N}-n_{55}\mathrm{N}'}{2\varkappa_x^2}. \tag{39'}$$

Wir können aber für den allgemeineren Fall wenigstens den Ansatz machen:

$$2h_2Q = \frac{s_{44}\mathrm{N}-n_{44}\mathrm{N}'}{2\varkappa_2^2}+\frac{s_{55}\mathrm{N}-n_{55}\mathrm{N}'}{2\varkappa_1^2}, \tag{39}$$

wo nun $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ für den einzelnen Querschnitt zu bestimmende Größen sind, die freilich auch von den Reibungs- und Elasticitätsconstanten, welche immer in der Verbindung $s_{hk}-n_{hk}\mathrm{N}'/\mathrm{N}$ auftreten, abhängen werden.

So gelangen wir zu dem Werth

$$hQ = \frac{s_{44}\mathrm{N}-n_{44}\mathrm{N}'}{4\varkappa_2^2}+\frac{s_{55}\mathrm{N}-n_{55}\mathrm{N}'}{4\varkappa_1^2}+\frac{s_{34}\mathrm{M}-n_{34}\mathrm{M}'}{2\varkappa_y^2}-\frac{s_{35}\Lambda-n_{35}\Lambda'}{2\varkappa_x^2}. \tag{40}$$

Die Endformeln (35) und (40) zeigen, daß die gleichförmige Biegung in der XZ- oder YZ-Ebene im Allgemeinen auch ein Moment um die

1) l. c. p. 72.

Längsaxe Z. die gleichförmige Drillung um die Z-Axe auch Momente um die Queraxen X und Y zur Folge haben oder voraussetzen.

Ausgenommen sind die Fälle, daß s_{34} und s_{35} verschwinden, was beides stets eintritt, wenn die Cylinderaxe in eine geradzählige krystallographische Symmetrieaxe fällt. Ist nur s_{34} resp. s_{35} gleich Null, wie z. B. wenn die XZ- oder YZ-Ebene eine krystallographische Symmetrieebene ist, so erregt die Biegung in der XZ- resp. der YZ-Ebene kein Moment um die Z-Axe, aber die Drillung um die Z-Axe ein Moment um die Y- resp. X-Axe.

Wird eine der Biegungen oder die Drillung durch die Befestigung des Cylinders verhindert, so ist die auf sie bezügliche Constante in den Formeln (35) resp. (40) gleich Null zu setzen. Wird umgekehrt nur eines der Momente oder nur die parallel der Cylinderaxe wirkende Kraft ausgeübt, so hat man in diesen Gleichungen die übrigen zu Null zu machen.

In Rücksicht auf das im Eingang Gesagte sind von practischer Wichtigkeit nur die Fälle, in welchen die drei Arten der Deformation — Dehnung, Biegung und Drillung — sich von selbst sondern, und wir wollen diese daher weiterhin allein in Betracht ziehen.

Die Formeln (35) und (40) werden hier zu:

$$
\begin{aligned}
g_1 Q \varkappa_y^2 &= s_{33}\mathrm{M} - n_{33}\mathrm{M}',\\
g_2 Q \varkappa_z^2 &= s_{33}\Lambda - n_{33}\Lambda',\\
g_3 Q &= s_{33}\Gamma - n_{33}\Gamma',\\
hQ &= \left(\frac{s_{44}}{\varkappa_2^2} + \frac{s_{55}}{\varkappa_1^2}\right)\frac{\mathrm{N}}{4} - \left(\frac{n_{44}}{\varkappa_2^2} + \frac{n_{55}}{\varkappa_1^2}\right)\frac{\mathrm{N}'}{4}.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Dieselben lassen sich in der früher benutzten Annäherung nach Λ, M, N, Γ auflösen und geben dann:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M} &= \frac{Q\varkappa_y^2}{s_{33}}\left(g_1 + \frac{n_{33}}{s_{33}} g_1'\right),\\
\Lambda &= \frac{Q\varkappa_z^2}{s_{33}}\left(g_2 + \frac{n_{33}}{s_{33}} g_2'\right),\\
\Gamma &= \frac{Q}{s_{33}}\left(g_3 + \frac{n_{33}}{s_{33}} g_3'\right),\\
\mathrm{N} &= \frac{4Q}{\dfrac{s_{44}}{\varkappa_2^2} + \dfrac{s_{55}}{\varkappa_1^2}}\left(h + \frac{\dfrac{n_{44}}{\varkappa_2^2} + \dfrac{n_{55}}{\varkappa_1^2}}{\dfrac{s_{44}}{\varkappa_2^2} + \dfrac{s_{55}}{\varkappa_1^2}} h'\right).
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Die dritte dieser Formeln gilt allgemein, auch wenn die Nebenänderungen nicht verschwinden.

Die Resultate (42) wollen wir nun benutzen, um die Gesetze der Bewegung der mit dem Cylinder verbunden gedachten starren Systeme abzuleiten.

Bei reiner Längsdilatation eines Cylinders von der Länge l gilt, wenn die ganze Verlängerung den Werth λ hat, nach (28) $g_3 = \lambda/l$ und nach (42):

$$\Gamma = \frac{Q}{l s_{33}}\left(\lambda + \frac{n_{33}\lambda'}{s_{33}}\right).$$

Ist der Stab, wie Seite 19 unter 1) beschrieben, an dem System $\mathfrak{S}$ angebracht, so veranlaßt seine Verlängerung um λ eine Drehung des letzteren um einen Winkel $\varphi = \lambda/a$, und die Bewegungsgleichung (22) nimmt dadurch die Form an:

$$\mathfrak{M}\varphi'' = -\frac{Qa^2}{l s_{33}}\left(\varphi + \frac{n_{33}\varphi'}{s_{33}}\right). \tag{43}$$

Die dämpfende Wirkung der inneren Reibung wird bei gleichförmigen longitudinalen Schwingungen eines Stabes gemessen durch die Constante n_{33}.

Bei reiner Biegung desselben Cylinders in der XZ-Ebene, welche in Folge eines Momentes um die Y-Axe frei auftritt, falls $s_{34} = 0$, ist $g_1 l$ der kleine Winkel ψ_y, um welchen in Folge der Biegung das letzte Element der Cylinderaxe um die Y-Axe gedreht wird; wir können also auch setzen:

$$\mathrm{M} = \frac{Q\varkappa_y^2}{l s_{33}}\left(\psi_y + \frac{n_{33}\psi_y'}{s_{33}}\right)$$

und erhalten, wenn der Cylinder so, wie Seite 19 unter 2) beschrieben worden, mit dem trägen System $\mathfrak{S}$ verbunden ist, durch die Einfügung in die erste Bewegungsgleichung (23) das Resultat:

$$\mathfrak{M}_y\psi_y'' = -\frac{Q\varkappa_y^2}{l s_{33}}\left(\psi_y + \frac{n_{33}\psi_y'}{s_{33}}\right). \tag{44}$$

Dieser Formel ordnet sich, falls $s_{35} = 0$ ist, also die reine Biegung in der YZ-Ebene durch Einwirkung eines Momentes um die X-Axe zu Stande kommt, die zweite Gleichung zu:

$$\mathfrak{M}_x \psi_x'' = -\frac{Q\varkappa_x^2}{l s_{33}}\left(\psi_x + \frac{n_{33}\psi_x'}{s_{33}}\right). \tag{44'}$$

Die dämpfende Wirkung der innern Reibung wird bei gleichförmigen transversalen Schwingungen gleichfalls gemessen durch die Constante n_{33}.

Die reine Drillung um die Z-Axe kömmt bei Einwirkung eines Momentes N um dieselbe Axe nur zu Stande, wenn s_{34} und s_{35} gleich Null ist.

Für einen Stab von der Länge l ist die Constante $h = \psi_z/l$, falls ψ_z den Drehungswinkel des letzten Querschnittes um die Z-Axe bezeichnet, und wir erhalten dadurch

$$\mathrm{N} = \frac{4Q\varkappa_1^2\varkappa_2^2}{l(\varkappa_1^2 s_{44} + \varkappa_2^2 s_{55})}\left(\psi_z + \frac{\varkappa_1^2 n_{44} + \varkappa_2^2 n_{55}}{\varkappa_1^2 s_{44} + \varkappa_2^2 s_{55}}\psi_z'\right).$$

Verbinden wir endlich den Cylinder mit dem um seine Längsaxe drehbaren trägen System $\mathfrak{S}$, so gilt nach (24) die Bewegungsgleichung:

$$\mathfrak{M}_z \psi_z'' = -\frac{4Q\varkappa_1^2\varkappa_2^2}{l(\varkappa_1^2 s_{44} + \varkappa_2^2 s_{55})}\left(\psi_z + \frac{\varkappa_1^2 n_{44} + \varkappa_2^2 n_{55}}{\varkappa_1^2 s_{44} + \varkappa_2^2 s_{55}}\psi_z'\right). \tag{45}$$

Die dämpfende Wirkung der innern Reibung wird bei gleichförmigen Drillungsschwingungen eines Stabes in erster Linie gemessen durch die Constanten n_{44} und n_{55}.

Allerdings können in den Functionen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Reibungsconstanten noch in anderen Verbindungen und mit N′/N multiplicirt auftreten, denn dieselben sind nur im Falle eines elliptischen Querschnittes ausschließlich Functionen von dessen Dimensionen; aber man kann die Beobachtungen so einrichten, daß diese Glieder keinen Einfluß besitzen.

Die vorstehenden Bewegungsgleichungen fallen sämmtlich unter die Form

$$\varphi'' + 2\alpha\varphi' + \beta\varphi = 0, \tag{46}$$

welche sich, falls $\beta > \alpha^2$ ist, integrirt durch

$$\varphi = e^{-\alpha t}\left(A\cos\frac{2\pi t}{T} + B\sin\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{46'}$$

worin

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\beta - \alpha^2} \tag{46''}$$

ist und T die Dauer einer Doppelschwingung bedeutet. Der Coefficient 2α der Geschwindigkeit in der Bewegungsgleichung ist in unserem Falle nach den mit (46) übereinstimmenden Formeln (43), (44) und (45) stets durch ein Aggregat der n_{hk} und s_{hk} von β verschieden, wir setzen daher

$$2\alpha = \beta n.$$

Man umgeht die Berechnung von β, wenn man die Schwingungsdauer des trägen Systems einführt, also nach (46″) benutzt, daß

$$\beta = \frac{4\pi^2}{T^2} + \alpha^2,$$

und daher

$$2\alpha = n\left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \alpha^2\right)$$

ist.

Das logarithmische Decrement λ der Doppel-Schwingung ist αT, d. h.

$$\lambda = \frac{n}{2}\left(\frac{4\pi^2}{T} + \alpha^2 T\right). \tag{47}$$

Bei dem vorliegenden Problem ist das zweite Glied der Klammer innerhalb der benutzten Annäherung gegen das erste zu vernachlässigen und man erhält das gesuchte Aggregat n in der Form

$$n = \frac{\lambda T}{2\pi^2}. \tag{47'}$$

Die vorstehend abgeleiteten Bewegungsgleichungen haben die Form der gewöhnlich in der Theorie der gedämpften Schwingungen zum Grunde gelegten und eine Genauigkeit, welche in erster Linie durch die Annäherung bestimmt ist, bis zu welcher der Uebergang von den Formeln (41) zu (42) richtig ist.

Man erhält eine etwas größere Genauigkeit und damit zugleich eine abweichende Form der Bewegungsgleichungen, wenn man diesen Uebergang vermeidet. Dies geschieht leicht in folgender Weise.

Für die reine Längsdehnung kann man wegen $g_3 l = a\varphi$ die dritte Gleichung (41) in der Form schreiben

$$l(s_{33}\Gamma - n_{33}\Gamma') = Qa\varphi,$$

und hieraus folgt unter Benutzung der Bewegungsgleichung (22):

$$\mathfrak{M}l(s_{33}\varphi'' - n_{33}\varphi''') = -Qa^2\varphi. \tag{48}$$

Für die reinen Biegungen in der XZ- resp. YZ-Ebene kann man wegen $g_1 l = \psi_y$, $g_2 l = \psi_x$ die ersten Gleichungen (41) schreiben

$$l(s_{33}\Lambda - n_{33}\Lambda') = Q\varkappa_x^2\psi_x, \quad l(s_{33}\mathrm{M} - n_{33}\mathrm{M}') = Q\varkappa_y^2\psi_y,$$

woraus nach (23) folgt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_x l(s_{33}\psi_x'' - n_{33}\psi_x''') &= -Q\varkappa_x^2\psi_x,\\ \mathfrak{M}_y l(s_{33}\psi_y'' - n_{33}\psi_y''') &= -Q\varkappa_y^2\psi_y.\end{aligned} \tag{49}$$

Endlich die letzte Gleichung (41) für die reine Drillung läßt sich wegen $hl = \psi_z$ schreiben

$$l\left(\left(\frac{s_{44}}{\varkappa_2^2} + \frac{s_{55}}{\varkappa_1^2}\right)\mathrm{N} - \left(\frac{n_{44}}{\varkappa_2^2} + \frac{n_{55}}{\varkappa_1^2}\right)\mathrm{N}'\right) = 4Q\psi_z,$$

und nach der Formel (24) ist dann:

$$\mathfrak{M}_z l\left(\left(\frac{s_{44}}{\varkappa_2^2} + \frac{s_{55}}{\varkappa_1^2}\right)\psi_z'' - \left(\frac{n_{44}}{\varkappa_2^2} + \frac{n_{55}}{\varkappa_1^2}\right)\psi_z'''\right) = -4Q\psi_z. \tag{50}$$

Die Gleichungen (48), (49) und (50) fallen unter die Form

$$\varphi'' - \frac{2\alpha}{\beta}\varphi''' + \beta\varphi = 0, \tag{51}$$

wobei α und β dieselbe Bedeutung haben, wie in (46). Setzt man, um sie zu integriren

$$\varphi = e^{-qt}(A\cos pt + B\sin pt), \tag{51'}$$

so erhält man für p und q die Bedingungen:

$$\begin{aligned}q^2 - p^2 - \frac{2\alpha q}{\beta}(3p^2 - q^2) + \beta &= 0,\\ q - \frac{\alpha}{\beta}(p^2 - 3q^2) &= 0.\end{aligned} \tag{51''}$$

Eliminirt man aus der ersten p mit Hülfe der zweiten, so folgt:

$$q + 8q^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 16q^3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \alpha, \tag{51'''}$$

eine Gleichung, die man unter Voraussetzung eines kleinen α/β durch Annäherung lösen kann. Man erhält so

$$q = \alpha\left(1 - 8\frac{\alpha^2}{\beta} + 112\frac{\alpha^4}{\beta^2} \pm \ldots\right), \tag{52}$$

woraus dann folgt

$$p^2 = \beta\left(1 - 5\frac{\alpha^2}{\beta} + 64\frac{\alpha^4}{\beta^2} \mp \ldots\right).$$

Die Schwingungsdauer T bestimmt sich aus

$$p = \frac{2\pi}{T},$$

das logarithmische Decrement ist

$$\lambda = qT = \frac{2\pi q}{p}.$$

Beschränkt man sich auf die niedrigsten Correctionsglieder und setzt wie Seite 28 wieder $2a = \beta n$, so findet sich

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}}\left(1 + \frac{5\alpha^2}{2\beta}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}}\left(1 + \frac{5\lambda^2}{8\pi^2}\right), \\ \lambda &= \frac{2\pi^2\alpha}{T\beta}\left(1 - \frac{3\alpha^2}{\beta}\right) = \frac{2\pi^2 n}{T}\left(1 - \frac{3\lambda^2}{4\pi^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

woraus folgt

$$n = \frac{\lambda T}{2\pi^2}\left(1 + \frac{3\lambda^2}{4\pi^2}\right). \tag{54}$$

Das zweite Glied ist als eine zu (47′) hinzutretende Correction zu betrachten.

§ 3. Ueber die Dämpfung beliebiger unendlich kleiner Schwingungen unendlich dünner cylindrischer Stäbe.

Die Vorbedingung für die Anwendbarkeit der Resultate, welche ich früher für das Gleichgewicht elastischer Krystallstäbe gefunden habe, auf das Bewegungsproblem war nach Seite 21 das Unendlichkleinwerden der Glieder $\varepsilon u''$, $\varepsilon v''$, $\varepsilon w''$ in den Bewegungsgleichungen (1). Diese Voraussetzung war im vorigen Abschnitt erfüllt in Folge der Annahme sehr langsamer Schwingungen. Man gelangt zu derselben aber auch, wie Kirchhoff gezeigt hat[1]), falls man die Querdimensionen des behandelten Cylinders unendlich klein gegen seine Länge annimmt. Für ein Querschnittselement gelten dann auch für den Bewegungszustand die Gleichungen (24) und daraus folgend (26) und (28), falls man sie auf ein mit der Grundfläche des Elementes fest verbundenes Coordinatensystem bezieht.

Auch die Folgerungen, welche zur Bestimmung der Constanten h und g_h führten, lassen sich nach der Bemerkung zu (33) aufrecht erhalten; die Berechnung der Werthe Γ, Λ, M, N aus (35) und (40) setzte aber voraus, daß in diesen Größen der von der inneren Reibung herrührende Theil klein ist gegen den von der Elasticität abhängenden. Hierzu ist, wenn wir die Geschwindigkeiten bei beliebigen Schwingungen nicht beschränken wollen, erforderlich, daß die Reibungsconstanten selbst sehr kleine Werthe besitzen.

Setzt man dies voraus, so kann man für die Kräfte und Momente, welche das betrachtete Querschnittselement vom folgenden erfährt, einfach die Werthe benutzen, welche aus (35) und (40) folgen, wenn man sie angenährt nach Γ, Λ, M, N auflöst.

Weicht während der Bewegung die Axe des Stabes unendlich wenig von der Geraden ab und ist auch die Drillung τ um die Längsaxe unendlich klein, so kann man die Stabelemente auf ein absolut festes Coordinatensystem X, Y, Z beziehen, welches für den nicht deformirten Zustand mit dem in den Elementen festen zusammenfällt, und hat dann

$$(55)\qquad g_1 = -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\ g_2 = -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ g_3 = \frac{\partial w}{\partial z},\ h = \frac{\partial \tau}{\partial z},$$

wo sich nun u, v, w auf die Verschiebung, τ auf die Drillung an der durch den Coordinatenwerth z gegebenen Stelle der Cylinder- resp. Z-Axe bezieht. Die Einführung dieser Werthe in die Ausdrücke für Γ, Λ, M, N bestimmt diese Größen als Functionen von u, v, w, τ.

1) G. Kirchhoff, Mechanik, Leipzig 1876, p. 410.

Dieselben sind dann in den allgemeinen Bewegungsgleichungen eines unendlich dünnen Stabes zu benutzen, welche, wenn äußere Kräfte nicht wirken, lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} &= \varepsilon Q\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varkappa_y^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2}\right),\\
\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} &= \varepsilon Q\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \varkappa_z^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2}\right),\\
\frac{\partial N}{\partial z} &= \varepsilon Q\,(\varkappa_z^2 + \varkappa_y^2)\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2},\\
\frac{\partial \Gamma}{\partial z} &= \varepsilon Q \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{56}$$

um die allgemeinen Differentialgleichungen für unendlich kleine Bewegungen zu erhalten.

Die so erhaltenen Gleichungen sind mit Ausnahme der letzten äußerst complicirt. Wir beschränken uns wie oben auf den einfacheren Fall, daß der Stab so gegen die Krystallaxen orientirt ist, daß s_{34} und s_{35}, und damit die Nebenänderungen verschwinden. Dann ergiebt sich das folgende System Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\varkappa_y^2}{s_{33}}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{n_{33}}{s_{33}}\frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varkappa_y^2\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2}\right) &= 0,\\
\frac{\varkappa_z^2}{s_{33}}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{n_{33}}{s_{33}}\frac{\partial^5 v}{\partial z^4 \partial t}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \varkappa_z^2\frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2}\right) &= 0,\\
\frac{4\varkappa_1^2\varkappa_2^2}{s_{44}\varkappa_1^2 + s_{55}\varkappa_2^2}\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} + \frac{n_{44}\varkappa_1^2 + n_{55}\varkappa_2^2}{s_{44}\varkappa_1^2 + s_{55}\varkappa_2^2}\frac{\partial^3 \tau}{\partial z^2 \partial t}\right) - \varepsilon\,(\varkappa_z^2 + \varkappa_y^2)\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} &= 0,\\
\frac{1}{s_{33}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{n_{33}}{s_{33}}\frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial t}\right) - \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{57}$$

Ist der Cylinder, wie z. B. bei dem Problem der schwingenden Saite, durch eine parallel seiner Axe auf die Endflächen wirkende Kraft gespannt, so ist in den ersten beiden Gleichungen auf der linken Seite noch das Glied $-P\partial^2 u/\partial z^2$ resp. $-P\partial^2 v/\partial z^2$ hinzuzufügen. Hierin bezeichnet P die auf die Querschnittseinheit bezogene Spannung.

Für den speciellen Fall eines isotropen Kreiscylinders lassen die Formeln (57) sich leicht direct ableiten, worauf ich Werth lege, da Herr O. E. Meyer[1]) für die longitudinalen Schwingungen eines Cylinders zu

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 151, p. 113, 1874.

einem Gesetz kömmt, welches von dem in der letzten der vorstehenden Formeln enthaltenen abweicht.

Herr F. E. Neumann[1]) giebt für die Bewegung eines unendlich dünnen Kreiscylinders vom Radius R Gleichungen, welche in unserer Bezeichnung lauten:

$$
(58)\qquad
\begin{aligned}
&\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{R^2}{8}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial t^2}+2\frac{\partial^4 w}{\partial z\partial x\partial t^2}\right)\right)+\frac{R^2}{4}\frac{\overline{\partial^3(Z_z)}}{\partial z^2\partial x}=0,\\
&\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{R^2}{8}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 v}{\partial y^2\partial t^2}+2\frac{\partial^4 w}{\partial z\partial y\partial t^2}\right)\right)+\frac{R^2}{4}\frac{\overline{\partial^3(Z_z)}}{\partial z^2\partial y}=0,\\
&\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\overline{\partial(Z_z)}}{\partial z}=0.
\end{aligned}
$$

Dazu kommmen die Bedingungen:

$$
(58')\qquad
\begin{aligned}
&\overline{(X_x)}=\overline{(Y_y)}=\overline{(Y_z)}=\overline{(Z_x)}=\overline{(X_y)}=0,\\
&\frac{\overline{\partial(X_x)}}{\partial x}=\frac{\overline{\partial(X_x)}}{\partial y}=\frac{\overline{\partial(Y_y)}}{\partial x}=\frac{\overline{\partial(Y_y)}}{\partial y}=\frac{\overline{\partial(X_y)}}{\partial x}=\frac{\overline{\partial(X_y)}}{\partial y}=0,\\
&\frac{\overline{\partial(Z_x)}}{\partial x}=\frac{\overline{\partial(Z_y)}}{\partial y}=\frac{\overline{\partial(Z_x)}}{\partial y}+\frac{\overline{\partial(Z_y)}}{\partial x}=0.
\end{aligned}
$$

Hierin bezeichnet z. B. $\overline{(Z_z)}$ den Werth der Druckcomponente (Z_z) an der Stelle $x=y=0$, $z=z$, und seine Differentialquotienten sind an derselben Stelle zu nehmen. Obwohl nun Herr Neumann nur elastische Kräfte, aber keine innere Reibung voraussetzt, so enthält doch seine Entwickelung bis zu diesen Formeln hin nichts, was verböte, von letzterer herrührende Antheile in den Druckcomponenten anzunehmen.

Um die Gleichungen (58) auf eine Gestalt zu bringen, in der sie von Abhängigen nur u, v, w, enthalten, ist es nöthig, sie mit den ihnen folgenden Bedingungen (58′) geeignet zu combiniren.

Für die Umformung der letzten Gleichung (58) sind nur die Bedingungen

$$\overline{(X_x)}=\overline{(Y_y)}=0$$

heranzuziehen, welche ausführlich geschrieben lauten:

1) F. E. Neumann, Vorl. über Elasticität, Leipzig 1885, p. 352 u. folg.

$$\begin{aligned} c\overline{x}_x + c'(\overline{y}_y + \overline{z}_z) + a\overline{x}'_x + a'(\overline{y}'_y + \overline{z}'_z) &= 0 \\ c\overline{y}_y + c'(\overline{x}_x + \overline{z}_z) + a\overline{y}'_y + a'(\overline{x}'_x + \overline{z}'_z) &= 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Dieselben lassen sich durch Annäherung auflösen und geben in erster Näherung

$$\overline{x}_x = \overline{y}_y = -\overline{z}_z \frac{c'}{c+c'}, \tag{59'}$$

also in zweiter

$$\overline{x}_x = \overline{y}_y = -\overline{z}_z \frac{c'}{c+c'} + \overline{z}'_z \frac{ac' - a'c}{(c+c')^2}. \tag{59''}$$

Führt man diese Beziehungen in den Ausdruck

$$-(\overline{Z}_z) = c\overline{z}_z + c'(\overline{x}_x + \overline{y}_y) + a\overline{z}'_z + a'(\overline{x}'_x + \overline{y}'_y)$$

und das Resultat davon in die letzte Gleichung (58) ein, so erhält man:

$$\frac{(c-c')(c+2c')}{c+c'} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(a - \frac{2a'c'}{c+c'} + 2c' \frac{ac' - ca'}{(c+c')^2}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{60}$$

Nun ist aber, wie leicht durch directe Rechnung zu zeigen, für isotrope Körper

$$\frac{c+c'}{(c-c')(c+2c')} = s_{33}, \quad a - \frac{2a'c'}{(c+c')} + 2c' \frac{ac' - ca'}{(c+c')^2} = \frac{n_{33}}{s_{33}^2}; \tag{60'}$$

das jetzt erhaltene Resultat ist also mit dem früheren identisch.

Für die Umformung der ersten Bewegungsgleichung (58) ist zu benutzen, daß nach (58')

$$(\overline{Z}_x) = \overline{\frac{\partial (X_x)}{\partial x}} = \overline{\frac{\partial (X_x)}{\partial y}} = \overline{\frac{\partial (X_y)}{\partial y}} = 0$$

ist. Die erste dieser Bedingungen darf nach z differentiirt werden und liefert für Punkte der Z-Axe:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

die letzte führt auf, (61)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Hierdurch wird die zweite und dritte Bedingung zu

$$(61') \quad \begin{aligned} &+c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+a\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}-a'\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right)=0,\\ &-c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-a\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}+a'\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right)=0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt in erster Näherung

$$(61'') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{c'}{c+c'}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

und in zweiter

$$(61''') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{c'}{c+c'}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{ac'-ca'}{(c+c')^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}.$$

Setzt man diese Resultate in den Ausdruck

$$-\frac{\overline{\partial(Z_z)}}{\partial x}=c\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}+c'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+a\frac{\partial^2 w'}{\partial x\partial z}+a'\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial x\partial y}\right)$$

und ebenso in die übrigen Glieder der umzuformenden Gleichung (58′) ein und beachtet man die Beziehungen (60′), so ergiebt sich leicht:

$$(62) \quad \frac{R^2}{4s_{33}}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+\frac{n_{33}}{s_{33}}\frac{\partial^5 u}{\partial z^4\partial t}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{R^2}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial t^2}\right)=0;$$

dies stimmt aber, da für einen kreisförmigen Querschnitt $\varkappa_x=\varkappa_y=R/2$ ist, mit der ersten Formel (57) vollständig überein.

Die dritte der Bewegungsgleichungen (57) erhält man für einen isotropen Kreiscylinder, wenn man in die allgemeinen Bewegungsgleichungen (1) substituirt

$$u=-\tau y,\ v=+\tau x,\ w\equiv 0,$$

worin τ nur z und t enthält, und bildet:

$$\begin{aligned} (X_x)=(Y_y)&=(Z_z)=(X_y)=0,\\ -(Y_z)&=\frac{c-c'}{2}x\frac{\partial\tau}{\partial z}+\frac{a-a'}{2}x\frac{\partial\tau'}{\partial z},\\ +(Z_x)&=\frac{c-c'}{2}y\frac{\partial\tau}{\partial z}+\frac{a-a'}{2}y\frac{\partial\tau'}{\partial z}. \end{aligned}$$

Dies System erfüllt die Randbedingungen (25) und ergiebt:

$$(63) \quad \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial v''}{\partial x}-\frac{\partial u''}{\partial y}\right)=\varepsilon\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}=\frac{c-c'}{2}\frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}+\frac{a-a'}{2}\frac{\partial^3\tau}{\partial z^2\partial t}.$$

Für einen isotropen Kreiscylinder ist aber $\varkappa_x = \varkappa_y$, $s_{44} = s_{55}$, $n_{44} = n_{55}$; also wird die dritte Gleichung (57) zu

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = \frac{1}{s_{44}} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} + \frac{n_{44}}{s_{44}} \frac{\partial^3 \tau}{\partial z^2 \partial t} \right), \tag{63'}$$

und dies führt, da für ein isotropes Medium $s_{44} = 2/(c-c')$ und $n_{44}/s_{44}^2 = (a-a')/2$ ist, auf den Ausdruck (63). —

Die Bewegungsgleichungen (57), welche den Formeln (43) bis (45) entsprechen und die Form besitzen, die man ohne strenge Theorie bisher zur Erklärung der Erscheinungen der innern Reibung in Stäben angewandt hat, sind aus den Formeln (35) und (40) abgeleitet unter Anwendung einer Annäherung, die für die Praxis zumeist unbedenklich sein dürfte; dennoch hat es ein Interesse, daß man sie durch ein System Gleichungen ersetzen kann, welche ohne eine Vernachlässigung erhalten werden und daher dieselbe Genauigkeit besitzen wie die Grundformeln (33).

Hierzu hat man nur die ersten beiden Gleichungen (56) zweimal, die letzten beiden einmal nach z zu differentiiren, darauf die Formeln (55) zu benutzen und endlich für die g_h und h die Werthe aus (35) und (40) einzusetzen.

Man erhält hierdurch folgendes strengere System von Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 \Lambda}{\partial z^4} + \frac{\varepsilon}{\varkappa_x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \varkappa_x^2 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial t^2}\right)\left(s_{33}\Lambda - s_{53}\frac{\mathrm{N}}{2} - n_{33}\Lambda' + n_{53}\frac{\mathrm{N}'}{2}\right) = 0,\\
&\frac{\partial^4 \mathrm{M}}{\partial z^4} + \frac{\varepsilon}{\varkappa_y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \varkappa_y^2 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial t^2}\right)\left(s_{33}\mathrm{M} + s_{43}\frac{\mathrm{N}}{2} - n_{33}\mathrm{M}' - n_{43}\frac{\mathrm{N}'}{2}\right) = 0,\\
&\frac{\partial^2 \mathrm{N}}{\partial z^2} - \varepsilon(\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{s_{44}\mathrm{N} - n_{44}\mathrm{N}'}{4\varkappa_2^2} + \frac{s_{55}\mathrm{N} - n_{55}\mathrm{N}'}{4\varkappa_1^2} + \frac{s_{34}\mathrm{M} - n_{34}\mathrm{M}'}{2\varkappa_y^2} - \frac{s_{35}\Lambda - n_{35}\Lambda'}{2\varkappa_x^2}\right) = 0,\\
&\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}(s_{33}\Gamma - n_{33}\Gamma') = 0.
\end{aligned} \tag{64}$$

Dasselbe vereinfacht sich erheblich, wenn keine Nebenänderungen stattfinden, also s_{34}, s_{35}, n_{34}, n_{35}, n_{43}, n_{53} gleich Null sind.

Aehnliche Gestalten nehmen die Formeln an, die man erhält, wenn man die Gleichungen (35) und (40) zwei- resp. einmal nach z differentiirt und ihre rechten Seiten unter Benutzung von (56), ihre linken von (55) umformt.

Man erhält so das den Formeln (48) bis (50) entsprechende System:

$$\varkappa_y^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \varepsilon \left[\left(s_{33} - n_{33} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2} - \varkappa_y^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} \right) + (\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2) \left(s_{43} - n_{43} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^3 \tau}{\partial z \partial t^2} \right] = 0,$$

$$\varkappa_x^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \varepsilon \left[\left(s_{33} - n_{33} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \varkappa_x^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} \right) - (\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2) \left(s_{53} - n_{53} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^3 \tau}{\partial z \partial t^2} \right] = 0,$$

(64')
$$\frac{\partial^3 \tau}{\partial z^3} - \varepsilon \left(\frac{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2}{4} \right) \left(\left(\frac{s_{44}}{\varkappa_2^2} + \frac{s_{55}}{\varkappa_1^2} \right) - \left(\frac{n_{44}}{\varkappa_2^2} + \frac{n_{55}}{\varkappa_1^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^3 \tau}{\partial z \partial t^2}$$

$$- \frac{\varepsilon}{2\varkappa_y^2} \left(s_{34} - n_{34} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varkappa_y^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} \right) + \frac{\varepsilon}{2\varkappa_x^2} \left(s_{35} - n_{35} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \varkappa_x^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \varepsilon \left(s_{33} - n_{33} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

§ 4. Ueber die Functionen der Reibungsconstanten, auf welche die Beobachtung gedämpfter Schwingungen von Stäben führt.

Die Aggregate n_{hk}, welche neben den Functionen s_{hk} der Elasticitätsconstanten in unsern Endformeln (35), (40) und den darauf beruhenden (43) bis (45), (48) bis (50) ausschließlich auftreten, sind homogene lineäre Functionen der Reibungsconstanten a_{hk}, welche sich auf das mit dem Cylinder verbundene Coordinatensystem X, Y, Z beziehen, und vom zweiten Grade in Bezug auf die s_{hk}, von denen Analoges gilt. Die n_{hk}, wie die a_{hk} und s_{hk} sind also Functionen der Lage des Coordinatensystemes gegen die Krystallaxen und es wird sich zunächst darum handeln, diese Größen durch die ihnen für das Hauptaxensystem Ξ, H, Z entsprechenden auszudrücken.

Für die a_{hk} habe ich die bezügliche Formel unter (12) angegeben; sie lautete

(65)
$$a_{hk} = \sum_m \sum_n d'_{hm} d'_{kn} a_{mn},$$

worin die d' die aus dem System (8) abzulesende Bedeutung haben.

Für die s_{hk} habe ich die analoge Formel schon früher abgeleitet; man gelangt viel schneller als auf dem damals gegebenen Wege zu derselben, wenn man das Potential der elastischen Kräfte Φ, in Bezug auf das Hauptaxensystem Ξ, H, Z gegeben durch

$$-2\Phi = \xi_\xi \Xi_\xi + \eta_\eta H_\eta + \zeta_\zeta Z_\zeta + \eta_\zeta H_\zeta + \zeta_\xi Z_\xi + \xi_\eta \Xi_\eta,$$

oder in den Abkürzungen (5) durch

$$-2\Phi = \sum_h \pi_h \Pi_h,$$

als Function der Π_h allein schreibt, nämlich setzt

$$+2\Phi = \sum_h \sum_k \Pi_h \Pi\, \sigma_{hk},$$

und hierin die auf das System X, Y, Z bezüglichen P_i nach (6) einführt. Man erhält so:

$$+2\Phi = \sum_h \sum_k \sigma_{hk} \sum_a P_a d_{ah} \sum_b P_b d_{bk},$$
$$= \sum_a \sum_b P_a P_b \sum_h \sum_k \sigma_{kh}\, d_{ah} d_{bk},$$

also, da auf das System X, Y, Z bezogen

$$+2\Phi = \sum_a \sum_b P_a P_b s_{ab}$$

ist:

$$s_{ab} = \sum_h \sum_k d_{ah} d_{bk} \sigma_{hk}; \tag{65'}$$

dies ist die gesuchte Formel.

Sie ist mit (65) zusammen zu benutzen, um den entsprechenden Ausdruck für n_{hk} abzuleiten.

Es war gesetzt:

$$\sum_i a_{hi} s_{ki} = r_{hk}, \quad \sum_p r_{pa} s_{pb} = n_{ab}; \tag{66}$$

also ist

$$n_{ab} = \sum_p \sum_i a_{pi} s_{ai} s_{pb} = \sum_p \sum_i a_{pi} s_{ia} s_{pb}.$$

Setzen wir hier die Werthe (65) und (65') ein, so findet sich

$$n_{ab} = \sum_p \sum_i \Big(\sum_m \sum_n a_{mn} d'_{pm} d'_{in} \sum_g \sum_h \sigma_{gh} d_{ig} d_{ah} \sum_f \sum_k \sigma_{fk} d_{pf} d_{bk} \Big),$$

oder anders geordnet

$$= \sum_m \sum_n a_{mn} \sum_g \sum_h \sigma_{gh} d_{ah} \sum_f \sum_k \sigma_{fk} d_{bk} \sum_p d'_{pm} d_{pf} \sum_i d'_{in} d_{ig}.$$

Nach (9) geben die letzten beiden Summen je den Werth Null für $m \lessgtr f$, $n \lessgtr g$, aber Eins für $m = f$, $n = g$, wir erhalten somit:

$$n_{ab} = \sum_h \sum_k d_{ah} d_{bk} \sum_m \sum_n \alpha_{mn} \sigma_{mk} \sigma_{nh}.$$

Nun ist aber offenbar

$$(66') \qquad \sum_m \sum_n \alpha_{mn} \sigma_{nh} \sigma_{mk} = \nu_{hk}$$

das n_{hk} entsprechende Aggregat bezogen auf das Hauptaxensystem Ξ, H, Z, also wird durch

$$n_{ab} = \sum_h \sum_k d_{ah} d_{bk} \nu_{hk}$$

die gesuchte Formel für n_{ab} gegeben. Man erkennt, daß sie vollständig mit der für s_{ab} geltenden (65′) übereinstimmt und dies ist begreiflich, da die n_{ab} und s_{ab} in dem System (33) neben einander auftreten.

Die auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogenen n_{hk} drücken sich also ebenso durch die für das Hauptaxensystem gültigen ν_{hk} aus, wie die Determinantenverhältnisse s_{hk} durch die σ_{hk}. Es erscheint daher angemessen, die ν_{hk}, welche in den obigen Bewegungsgleichungen cylindrischer Stäbe allein auftreten, statt der eigentlichen Reibungsconstanten α_{hk} als das Ziel der Beobachtungen zu betrachten, da letztere sich erst durch weitläufige Rechnung, also weniger genau bestimmen und in der Anwendung einzeln keine Bedeutung haben.

Ich möchte für diese einander in gewisser Hinsicht entsprechenden Functionen ν_{hk} resp. σ_{hk} einen eigenen Namen in Vorschlag bringen.

Da die Größen σ_{hk} resp. s_{hk} die elastischen Deformationen von Stäben und damit die für alle Anwendungen wichtigsten messen, so nenne ich sie die Elasticitätsmoduln der Substanz und zwar die σ_{hk}, als auf das Hauptaxensystem bezogen, die Haupt-Elasticitätsmoduln, die s_{hk}, als für ein beliebiges System gültig, die abgeleiteten.

Ebenso sollen weiterhin die ν_{hk} die Hauptreibungsmoduln, die n_{hk} die abgeleiteten Reibungsmoduln genannt werden.

Zwischen beiden ist formell der wichtige Unterschied, daß zwar gilt:

$$\sigma_{hk} = \sigma_{kh}, \; s_{hk} = s_{kh},$$

aber nicht allgemein:

$$\nu_{hk} = \nu_{kh}, \; n_{hk} = n_{kh}.$$

Die Anzahl der von einander unabhängigen Reibungsmoduln für die verschiedenen Krystallsysteme ist leicht zu überblicken. Ich gebe im Folgenden entsprechend den bezüglichen Angaben über die Haupt-Reibungsconstanten a_{hk} die Schemata der Reibungsmoduln ν_{hk} und füge dazu diejenigen der Elasticitätsmoduln σ_{hk}, welche noch nirgends in dieser Allgemeinheit mitgetheilt sind, aber sowohl an sich, als für die Berechnung der Reibungsmoduln Interesse besitzen. Dabei bemerke ich, daß man diese Schemata auf demselben Wege erhalten kann, wie oben diejenigen der Reibungsconstanten a_{hk}, nämlich unter Benutzung der für sie geltenden Transformationsgleichungen (52) und (53) und unter Anwendung der Hypothese, daß für physikalisch gleichwerthige Axensysteme die einander entsprechenden Moduln gleiche Werthe besitzen müssen.

Für das tricline System stelle ich die bezüglichen Schemata, welche alle Glieder enthalten, nur der Vollständigkeit wegen an die Spitze.

$$\begin{array}{cccccc} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} & \nu_{14} & \nu_{15} & \nu_{16} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} & \nu_{24} & \nu_{25} & \nu_{26} \\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} & \nu_{34} & \nu_{35} & \nu_{36} \\ \nu_{41} & \nu_{42} & \nu_{43} & \nu_{44} & \nu_{45} & \nu_{46} \\ \nu_{51} & \nu_{52} & \nu_{53} & \nu_{54} & \nu_{55} & \nu_{56} \\ \nu_{61} & \nu_{62} & \nu_{63} & \nu_{64} & \nu_{65} & \nu_{66} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} & \sigma_{16} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \sigma_{25} & \sigma_{26} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} & \sigma_{34} & \sigma_{35} & \sigma_{36} \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_{44} & \sigma_{45} & \sigma_{46} \\ \sigma_{15} & \sigma_{25} & \sigma_{35} & \sigma_{45} & \sigma_{55} & \sigma_{56} \\ \sigma_{16} & \sigma_{26} & \sigma_{36} & \sigma_{46} & \sigma_{56} & \sigma_{66} \end{array} \qquad \text{I.}$$

21 Elasticitäts- und 36 Reibungsmoduln.

Für das monocline System, dessen Symmetrieaxe zu Ξ-Axe gewählt ist, gilt das Schema

$$\begin{array}{cccccc} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} & \nu_{14} & 0 & 0 \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} & \nu_{24} & 0 & 0 \\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} & \nu_{34} & 0 & 0 \\ \nu_{41} & \nu_{42} & \nu_{43} & \nu_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{55} & \nu_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{65} & \nu_{66} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} & \sigma_{34} & 0 & 0 \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{55} & \sigma_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{56} & \sigma_{66} \end{array} \qquad \text{II.}$$

13 Elasticitäts- und 20 Reibungsmoduln.

Für das rhombische System erhält man

$$
\text{III.}\quad
\begin{array}{cccccc}
\nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} & 0 & 0 & 0 \\
\nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} & 0 & 0 & 0 \\
\nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \nu_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{55} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{66}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\
\sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 & 0 & 0 \\
\sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sigma_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{55} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{66}
\end{array}
$$

Die Anzahl der Elasticitätsmoduln ist 9, die der Reibungsmoduln 12.

Im quadratischen System gilt, wenn die Z-Axe die ausgezeichnete Axe darstellt, für Gruppe 9) bis 12):

$$
\text{IV}^{\text{a}}.\quad
\begin{array}{cccccc}
\nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} & 0 & 0 & 0 \\
\nu_{12} & \nu_{11} & \nu_{13} & 0 & 0 & 0 \\
\nu_{31} & \nu_{31} & \nu_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \nu_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{44} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{66}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\
\sigma_{12} & \sigma_{11} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\
\sigma_{13} & \sigma_{13} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sigma_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{44} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{66}
\end{array}
$$

Die Anzahl der Elasticitäts-Moduln ist 6, der Reibungsmoduln 7.

Für Gruppe 13) bis 15) erhält man:

$$
\text{IV}^{\text{b}}.\quad
\begin{array}{cccccc}
\nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} & 0 & 0 & \nu_{16} \\
\nu_{12} & \nu_{11} & \nu_{13} & 0 & 0 & -\nu_{16} \\
\nu_{31} & \nu_{31} & \nu_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \nu_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{44} & 0 \\
\nu_{61} & -\nu_{61} & 0 & 0 & 0 & \nu_{66}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{16} \\
\sigma_{12} & \sigma_{11} & \sigma_{13} & 0 & 0 & -\sigma_{16} \\
\sigma_{13} & \sigma_{13} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sigma_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{44} & 0 \\
\sigma_{16} & -\sigma_{16} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{66}
\end{array}
$$

7 Elasticitäts- und 9 Reibungsmoduln.

Für das reguläre System gilt

$$
\text{V.}\quad
\begin{array}{cccccc}
\nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{12} & 0 & 0 & 0 \\
\nu_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} & 0 & 0 & 0 \\
\nu_{12} & \nu_{12} & \nu_{11} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \nu_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{44} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{44}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{12} & 0 & 0 & 0 \\
\sigma_{12} & \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 & 0 \\
\sigma_{12} & \sigma_{12} & \sigma_{11} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sigma_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{44} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{44}
\end{array}
$$

3 Elasticitäts- und 3 Reibungsmoduln.

Im hexagonalen System findet sich für Gruppe 21) bis 27):

$$\begin{matrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{12} & \nu_{11} & \nu_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{31} & \nu_{31} & \nu_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(\nu_{11}-\nu_{12}) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & \sigma_{13} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(\sigma_{11}-\sigma_{12}) \end{matrix} \qquad \mathrm{VI^a}.$$

Die Anzahl der Elasticitätsmoduln ist 5, die der Reibungsmoduln 6.
Für die II. Classe gilt:

$$\begin{matrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} & \nu_{14} & 0 & 0 \\ \nu_{12} & \nu_{11} & \nu_{13} & -\nu_{14} & 0 & 0 \\ \nu_{31} & \nu_{31} & \nu_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{41} & -\nu_{41} & 0 & \nu_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{44} & 2\nu_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu_{14} & 2(\nu_{11}-\nu_{12}) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} & \sigma_{13} & -\sigma_{14} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & \sigma_{13} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{14} & -\sigma_{14} & 0 & \sigma_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{44} & 2\sigma_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sigma_{14} & 2(\sigma_{11}-\sigma_{12}) \end{matrix} \qquad \mathrm{VI^b}.$$

Die Anzahl der Elasticitätsmoduln ist 6, die der Reibungsmoduln 8.
Für die III. Classe endlich ist das System:

$$\begin{matrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} & \nu_{14} & -\nu_{25} & 0 \\ \nu_{12} & \nu_{11} & \nu_{13} & -\nu_{14} & \nu_{25} & 0 \\ \nu_{31} & \nu_{31} & \nu_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{41} & -\nu_{41} & 0 & \nu_{44} & \nu_{45} & 2\nu_{52} \\ -\nu_{52} & \nu_{52} & 0 & -\nu_{45} & \nu_{44} & 2\nu_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 2\nu_{25} & 2\nu_{14} & 2(\nu_{11}-\nu_{12}) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & -\sigma_{25} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} & \sigma_{13} & -\sigma_{14} & \sigma_{25} & 0 \\ \sigma_{13} & \sigma_{13} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{14} & -\sigma_{14} & 0 & \sigma_{44} & 0 & 2\sigma_{25} \\ -\sigma_{25} & \sigma_{25} & 0 & 0 & \sigma_{44} & 2\sigma_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 2\sigma_{25} & 2\sigma_{14} & 2(\sigma_{11}-\sigma_{12}) \end{matrix} \qquad \mathrm{VI^c}.$$

7 Elasticitäts- und 11 Reibungsmoduln.

Für isotrope Körper folgt aus (V) falls man ν, σ, ν', σ' an Stelle von ν_{11}, σ_{11}, ν_{12}, σ_{12} treten läßt:

$$\begin{matrix} \nu & \nu' & \nu' & 0 & 0 & 0 \\ \nu' & \nu & \nu' & 0 & 0 & 0 \\ \nu' & \nu' & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(\nu-\nu') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(\nu-\nu') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(\nu-\nu') \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \sigma & \sigma' & \sigma' & 0 & 0 & 0 \\ \sigma' & \sigma & \sigma' & 0 & 0 & 0 \\ \sigma' & \sigma' & \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(\sigma-\sigma') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(\sigma-\sigma') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(\sigma-\sigma') \end{matrix}. \qquad \mathrm{VII}.$$

Von den abgeleiteten Reibungsmoduln kommen für die Beobachtung n_{33}, n_{44}, n_{55} in Betracht. Ihre allgemeinen Werthe sind sehr umständlich. Nach (7) und (67) wird nämlich:

$$
\begin{aligned}
n_{33} = {} & (\nu_{11}\alpha_3^2 + \nu_{12}\beta_3^2 + \nu_{13}\gamma_3^2 + \nu_{14}\beta_3\gamma_3 + \nu_{15}\gamma_3\alpha_3 + \nu_{16}\alpha_3\beta_3)\,\alpha_3^2 \\
& + (\nu_{21}\alpha_3^2 + \nu_{22}\beta_3^2 + \nu_{23}\gamma_3^2 + \gamma_{24}\beta_3\gamma_3 + \nu_{25}\gamma_3\alpha_3 + \nu_{26}\alpha_3\beta_3)\,\beta_3^2 \\
& + (\nu_{31}\alpha_3^2 + \nu_{32}\beta_3^2 + \nu_{33}\gamma_3^2 + \nu_{34}\beta_3\gamma_3 + \nu_{35}\gamma_3\alpha_3 + \nu_{36}\alpha_3\beta_3)\,\gamma_3^2 \\
& + (\nu_{41}\alpha_3^2 + \nu_{42}\beta_3^2 + \nu_{43}\gamma_3^2 + \nu_{44}\beta_3\gamma_3 + \nu_{45}\gamma_3\alpha_3 + \nu_{46}\alpha_3\beta_3)\,\beta_3\gamma_3 \\
& + (\nu_{51}\alpha_3^2 + \nu_{52}\beta_3^2 + \nu_{53}\gamma_3^2 + \nu_{54}\beta_3\gamma_3 + \nu_{55}\gamma_3\alpha_3 + \nu_{56}\alpha_3\beta_3)\,\gamma_3\alpha_3 \\
& + (\nu_{61}\alpha_3^2 + \nu_{62}\beta_3^2 + \nu_{63}\gamma_3^2 + \nu_{64}\beta_3\gamma_3 + \nu_{65}\gamma_3\alpha_3 + \nu_{66}\alpha_3\beta_3)\,\alpha_3\beta_3,
\end{aligned}
\tag{68}
$$

$$
\begin{aligned}
n_{44} = {} & (\nu_{11}2\alpha_2\alpha_3 + \nu_{12}2\beta_2\beta_3 + \nu_{13}2\gamma_2\gamma_3 + \nu_{14}(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3) + \nu_{15}(\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3) + \nu_{16}(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3))2\alpha_2\alpha_3 \\
& + (\nu_{21}2\alpha_2\alpha_3 + \nu_{22}2\beta_2\beta_3 + \nu_{23}2\gamma_2\gamma_3 + \nu_{24}(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3) + \nu_{25}(\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3) + \nu_{26}(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3))2\beta_2\beta_3 \\
& + (\nu_{31}2\alpha_2\alpha_3 + \nu_{32}2\beta_2\beta_3 + \nu_{33}2\gamma_2\gamma_3 + \nu_{34}(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3) + \nu_{35}(\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3) + \nu_{36}(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3))2\gamma_2\gamma_3 \\
& + (\nu_{41}2\alpha_2\alpha_3 + \nu_{42}2\beta_2\beta_3 + \nu_{43}2\gamma_2\gamma_3 + \nu_{44}(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3) + \nu_{45}(\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3) + \nu_{46}(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3))(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3) \\
& + (\nu_{51}2\alpha_2\alpha_3 + \nu_{52}2\beta_2\beta_3 + \nu_{53}2\gamma_2\gamma_3 + \nu_{54}(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3) + \nu_{55}(\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3) + \nu_{56}(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3))(\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3) \\
& + (\nu_{61}2\alpha_2\alpha_3 + \nu_{62}2\beta_2\beta_3 + \nu_{63}2\gamma_2\gamma_3 + \nu_{64}(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3) + \nu_{65}(\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3) + \nu_{66}(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3))(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3).
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Hieraus folgt n_{55} durch Vertauschung von α_2, β_2, γ_2 resp. mit α_1, β_1, γ_1.

Man erkennt, daß in allen drei Ausdrücken die Hauptreibungsmoduln ν_{hk} immer paarweise in der Verbindung $(\nu_{hk} + \nu_{kh})$ auftreten, und daß demgemäß die Beobachtungen nach den angedeuteten Methoden auch nur diese Aggregate zu bestimmen erlauben. Auch keine andere Beobachtungsmethode wird die Glieder dieser Paare zu sondern gestatten, welche an die Abnahme der lebendigen Kraft des elastischen Systemes d. h. an die Arbeit der innern Reibung anknüpft, denn von dieser Arbeit ist bereits auf Seite 7 hervorgehoben, daß sie die Reibungsconstanten a_{hk} und a_{kh} nur in der Verbindung $a_{hk} + a_{kh}$ enthält, in welcher sie in der That in den Aggregaten $\nu_{ab} + \nu_{ba}$, nicht aber in den ν_{ab} oder ν_{ba} einzeln erscheinen.

Andere Beobachtungsmethoden, welche auf die einzelnen Constanten führen, sind nun zwar nicht von vorn herein unmöglich — es wäre z. B. denkbar, daß sich die innern Druckkräfte selbst z. B. durch ihre Wirkung auf das optische Verhalten des elastischen Körpers bestimmen ließen — indessen erscheint ihre Durchführbarkeit sehr fraglich.

Ist dem so, und kommen daher für jetzt bei den beobachtbaren Erscheinungen die Hauptreibungsconstanten nur in dieser Verbindung vor, so wird man deren Theorie ohne irgend eine Beschränkung erhalten, wenn man die willkkürliche Annahme

$$a_{hk} = a_{kh}$$

einführt, wodurch die Reibungsconstanten und -moduln in vollkommene Parallele zu den Elasticitätsconstanten und -moduln gebracht worden.

Dann liefert auch die Beobachtung von Biegungs- und Drillungsschwingungen die sämmtlichen Reibungsmoduln für alle Krystallsysteme, was ohne dies nur für das reguläre System und für isotrope Körper stattfindet.

Aus ihnen lassen sich dann die Zwischengrößen ρ_{hk} und schließlich die Reibungsconstanten a_{hk} unter Zuhülfenahme der Hauptelasticitätsconstanten γ_{hk} leicht bestimmen.

Denn aus der (66 II) entsprechenden Gleichung

$$\nu_{hk} = \sum_p \rho_{ph} \sigma_{pk},$$

welche ν_{hk} durch die ρ_{ab} definirt, folgt wegen

$$\sum \sigma_{ab} \gamma_{ac} \begin{cases} = 1 \text{ für } b = c \\ = 0 \text{ für } b \gtrless c \end{cases}$$

durch Multiplication mit γ_{nk} und Summation über k:

$$\sum_k \nu_{hk} \gamma_{nk} = \rho_{nh} \tag{70}$$

oder nach der Definition der ρ_{ab} gemäß (66 I):

$$\sum_k \nu_{hk} \gamma_{nk} = \sum_i a_{ni} \sigma_{hi}. \tag{70'}$$

Multiplicirt man hier mit γ_{hm} und summirt über h, so folgt als Endformel

$$\sum_h \sum_k \nu_{hk} \gamma_{mh} \gamma_{nk} = a_{nm}, \tag{71}$$

welche das Mittel angiebt, die Reibungsconstanten aus den Reibungsmoduln zu berechnen. —

Wir wollen schließlich einige der vorstehenden Formeln auf den Fall eines regulären Krystalles und eines isotropen Mediums anwenden, in welchem die Beziehungen $a_{hk} = a_{kh}$ resp. $\nu_{ab} = \nu_{ba}$ von selbst erfüllt sind.

Für einen regulären Krystall folgt aus (68) und (69):

$$
(72)\quad
\begin{aligned}
n_{33} &= \nu_{11}(\alpha_3^4+\beta_3^4+\gamma_3^4)+(2\nu_{12}+\nu_{44})(\beta_3^2\gamma_3^2+\gamma_3^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\beta_3^2),\\
&= \nu_{11}+(\nu_{44}-2(\nu_{11}-\nu_{12}))(\beta_3^2\gamma_3^2+\gamma_3^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\beta_3^2),\\
n_{44} &= 4\nu_{11}(\alpha_2^2\alpha_3^2+\beta_2^2\beta_3^2+\gamma_2^2\gamma_3^2)+8\nu_{12}(\beta_2\beta_3\gamma_2\gamma_3+\gamma_2\gamma_3\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\beta_2\beta_3)\\
&\quad+\nu_{44}((\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3)^2+(\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3)^2+(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3)^2),\\
&= \nu_{44}-2(\nu_{44}-2(\nu_{11}-\nu_{12}))(\alpha_2^2\alpha_3^2+\beta_2^2\beta_3^2+\gamma_2^2\gamma_3^2),\\
n_{55} &= \nu_{44}-2(\nu_{44}-2(\nu_{11}-\nu_{12}))(\alpha_1^2\alpha_3^2+\beta_1^2\beta_3^2+\gamma_1^2\gamma_3^2).
\end{aligned}
$$

Ferner ist nach (70) und (70′):

$$
(73)\quad
\begin{aligned}
\rho_{11} &= \alpha_{11}\sigma_{11}+2\alpha_{12}\sigma_{12} = \nu_{11}\gamma_{11}+2\nu_{12}\gamma_{12},\\
\rho_{12} &= \alpha_{11}\sigma_{12}+\alpha_{12}\sigma_{11}+\alpha_{12}\sigma_{12} = \nu_{11}\gamma_{12}+\nu_{12}\gamma_{11}+\nu_{12}\gamma_{12},\\
\rho_{44} &= \alpha_{44}\sigma_{44} = \nu_{44}\gamma_{44}
\end{aligned}
$$

und nach (66′)

$$
(74)\quad
\begin{aligned}
\nu_{11} &= \alpha_{11}(\sigma_{11}^2+2\sigma_{12}^2)+2\alpha_{12}\sigma_{12}(2\sigma_{11}+\sigma_{12}),\\
\nu_{12} &= \alpha_{11}\sigma_{12}(2\sigma_{11}+\sigma_{12})+\alpha_{12}(\sigma_{11}^2+2\sigma_{11}\sigma_{12}+3\sigma_{12}^2),\\
\nu_{44} &= \alpha_{44}\sigma_{44}^2.
\end{aligned}
$$

Von diesen Ausdrücken gelangt man zu den für einen isotropen Körper gültigen durch Einführung der Beziehungen

$$
\nu_{44} = 2(\nu_{11}-\nu_{12}),\ \sigma_{44} = 2(\sigma_{11}-\sigma_{12}),\ \gamma_{44} = \frac{\gamma_{11}-\gamma_{12}}{2},\ \alpha_{44} = \frac{\alpha_{11}-\alpha_{12}}{2};
$$

dabei werde wie früher gesetzt

$$
\nu_{11} = \nu,\ \nu_{12} = \nu';\ \sigma_{11} = \sigma,\ \sigma_{12} = \sigma',\ \gamma_{11} = \gamma,\ \gamma_{12} = \gamma',\ \alpha_{11} = \alpha,\ \alpha_{12} = \alpha'.
$$

Speciell findet sich so:

$$
(75)\quad
\begin{aligned}
\nu_{11} &= \nu = \alpha(\sigma^2+2\sigma'^2)+2\alpha'\sigma'(2\sigma+\sigma'),\\
\nu_{12} &= \nu' = \alpha\sigma'(2\sigma+\sigma')+\alpha'(\sigma^2+2\sigma\sigma'+3\sigma'^2),\\
\nu_{44} &= 2(\nu-\nu') = (\alpha-\alpha')(\sigma-\sigma')^2.
\end{aligned}
$$

Die in den Bewegungsgleichungen für einen Cylinder vorkommenden Aggregate n_{33}/s_{33}^2 und n_{44}/s_{44}^2 sind bei isotropen Medien resp. mit

$$\nu/\sigma^2 \text{ und } \nu_{44}/\sigma_{44}^2 = (\nu-\nu')/2(\sigma-\sigma')^2$$

identisch; dabei ist hier

$$\sigma = \frac{\gamma+\gamma'}{(\gamma-\gamma')(\gamma+2\gamma')}, \quad \sigma' = \frac{-\gamma'}{(\gamma-\gamma')(\gamma+2\gamma')}, \quad \sigma-\sigma' = \frac{1}{\gamma-\gamma'}. \tag{76}$$

Man erhält sonach für isotrope Körper:

$$\begin{aligned} \frac{n_{33}}{s_{33}^2} &= \frac{\nu}{\sigma^2} = \alpha + 2\alpha\frac{\gamma'^2}{(\gamma+\gamma')^2} - 2\alpha'\frac{\gamma'(2\gamma+\gamma')}{(\gamma+\gamma')^2}, \\ \frac{n_{44}}{s_{44}^2} &= \frac{\nu-\nu'}{2(\sigma-\sigma')^2} = \frac{\alpha-\alpha'}{2}. \end{aligned} \tag{77}$$

(76) und (77) sind die auf Seite (35) und (37) benutzten Werthe.