Untersuchungen
über
Gegenstände der höhern Geodäsie.

Von

Carl Friedrich Gauss.

Zweite Abhandlung.

Der Königl. Societät überreicht 1846, Sept. 1.

Die Aufgabe, aus der Grösse der Seite eines Dreiecks auf der Erdoberfläche, dem Azimuthe an dem einen Endpunkte, und der geographischen Breite dieses Endpunkts abzuleiten das Azimuth an dem andern Endpunkte, dessen Breite und den Längenunterschied beider Punkte, gehört zu den Hauptgeschäften der höhern Geodäsie. Für den Fall der Kugelfläche ist der Zusammenhang zwischen jenen sechs Grössen am Schlusse der ersten Abhandlung in der einfachsten und zur schärfsten Rechnung geeigneten Form aufgestellt, welche auch leicht zu einer bequemen Auflösung der Aufgabe selbst benutzt werden kann. Es wird dadurch das Verlangen nach dem Besitz einer analogen unmittelbar für die Ellipsoidfläche gültigen Auflösungsart erweckt, und der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung ist, eine solche zu entwickeln. Vorher soll jedoch erst die Auflösung für den Fall der Kugelfläche in ein noch helleres Licht gestellt werden. Des bequemern Zurückweisens wegen lasse ich die Zahlenbezeichnung der Artikel sich an die erste Abhandlung anschliessen.

18.

Um den Grad der Genauigkeit, welcher durch die Formeln des 17. Art. erreicht wird, besser beurtheilen zu können, werden noch die Glieder der nächstfolgenden Ordnung entwickelt werden müssen; es ist jedoch wohl der Mühe werth, das Verfahren anzugeben, nach welchem diese Entwicklung beliebig weit getrieben werden kann.

Ich erlaube mir an den dort gebrauchten Bezeichnungen einige Abänderungen, theils des bequemern Drucks wegen, theils um den verschiedenen Bezeichnungen in den einzelnen Theilen der gegenwärtigen Abhandlung etwas mehr Symmetrie geben zu können. Zunächst bedeute hier

r die Entfernung der beiden Punkte von einander, den Halbmesser der Kugel als Einheit angenommen.

$B+\frac{1}{2}b$ und $B-\frac{1}{2}b$ die Breite am ersten und zweiten Endpunkte von r.

$T+\frac{1}{2}t$ und $T-\frac{1}{2}t\pm 180^0$ das Azimuth des zweiten und ersten Endpunkts resp. vom ersten und zweiten aus.

l den Längenunterschied.

Es wird angenommen, dass das Azimuth von Süden nach Westen zu gezählt und l als positiv betrachtet wird, wenn der zweite Punkt westlicher liegt als der erste.

Es soll ferner gesetzt werden

$$\xi = r\cos T$$
$$\tau = r\sin T\,.\,\mathrm{tang}\, B$$
$$\lambda = \frac{r\sin T}{\cos B},$$

welche Grössen dasselbe ausdrücken, was im 17. Art. mit b^0, a^0, λ^0 bezeichnet war, nemlich die bis auf die dritte Ordnung (ausschliesslich) genauen Werthe von b, t, l, und zwischen denen die Gleichung

$$rr+\tau\tau = \xi\xi+\lambda\lambda$$

Statt findet. Die Ordnungen werden hier immer so verstanden, dass r wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird.

Zur Abkürzung wird noch geschrieben

$$\frac{2\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}r}{r} = m$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}r}{r} = n.$$

Zu der beabsichtigten Entwicklung gelangen wir am leichtesten durch Benutzung der Umwandlung der Formel

$$x = \sin y$$

in die Reihe

$$\log y = \log x + \frac{1}{6}xx + \frac{11}{180}x^4 + \frac{191}{5670}x^6 + \frac{2497}{113400}x^8 + \text{u. s. w.}$$

welche man leicht aus der bekannten

$$y = x\,(1 + \frac{1}{6}xx + \frac{3}{40}x^4 + \frac{5}{112}x^6 + \frac{35}{1152}x^8 + \text{u. s. w.})$$

ableitet. Wendet man dieselbe zuvörderst an auf die Gleichung

$$\operatorname{tang} B \,.\, \sin T \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} r = \sin \tfrac{1}{2} t,$$

oder

$$\tfrac{1}{2} m \tau = \sin \tfrac{1}{2} t,$$

indem man $x = \frac{1}{2} m \tau$, $y = \frac{1}{2} t$ setzt, so wird (I)

$$\log t = \log \tau + \log m + \frac{1}{24} mm\tau\tau + \frac{11}{2880} m^4 \tau^4 + \frac{191}{362880} m^6 \tau^6 + \frac{2497}{29030400} m^8 \tau^8 + \text{u.s.w.}$$

Eben so, aus der Anwendung auf die Gleichung

$$\frac{\sin T \sin \frac{1}{2} r}{\cos B} = \sin \tfrac{1}{2} l$$

oder

$$\tfrac{1}{2} n \lambda = \sin \tfrac{1}{2} l$$

ergibt sich (II)

$$\log l = \log \lambda + \log n + \frac{1}{24} nn\lambda\lambda + \frac{11}{2880} n^4 \lambda^4 + \frac{191}{362880} n^6 \lambda^6 + \frac{2497}{29030400} n^8 \lambda^8 + \text{u. s. w.}$$

Die dritte Anwendung wird gemacht auf die Gleichung

$$\frac{\cos B \operatorname{tang} \frac{1}{2} l}{\operatorname{tang} T} = \sin \tfrac{1}{2} b,$$

nachdem derselben vermöge der Substitutionen

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l = \frac{n\lambda}{2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} nn\lambda\lambda)}}$$

$$\frac{\cos B}{\operatorname{tang} T} = \frac{\beta}{\lambda}$$

folgende Gestalt gegeben ist

$$\frac{n\beta}{2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} nn\lambda\lambda)}} = \sin \tfrac{1}{2} b.$$

Es ergibt sich dann (III)

$$\begin{aligned}
\log b = \log \beta + \log n &+ \frac{1}{8} nn\lambda\lambda + \frac{1}{64} n^4\lambda^4 + \frac{1}{384} n^6 \lambda^6 + \frac{1}{2048} n^8 \lambda^8 + \text{u. s. w.} \\
&+ \frac{1}{24} \beta\beta (nn + \frac{1}{4} n^4 \lambda\lambda + \frac{1}{16} n^6 \lambda^4 + \frac{1}{64} n^8 \lambda^6 + \text{u. s. w.}) \\
&+ \frac{11}{2880} \beta^4 (n^4 + \frac{1}{2} n^6 \lambda\lambda + \frac{3}{16} n^8 \lambda^4 + \text{u. s. w.}) \\
&+ \frac{191}{362880} \beta^6 (n^6 + \frac{3}{4} n^8 \lambda\lambda + \text{u. s. w.})
\end{aligned}$$

$$+\frac{2497}{29030400}\,\mathfrak{G}^8\,(n^8 + \text{u.s.w.})$$
$$+ \text{ u. s. w.}$$

oder, indem man die Glieder gleicher Ordnung zusammenfasst,

$$\log b = \log \mathfrak{G} + \log n$$
$$+\frac{1}{24}\,nn\,(\mathfrak{G}\mathfrak{G} + 3\lambda\lambda)$$
$$+\frac{1}{2880}\,n^4\,(11\,\mathfrak{G}^4 + 30\,\mathfrak{G}\mathfrak{G}\lambda\lambda + 45\,\lambda^4)$$
$$+\frac{1}{362880}\,n^6\,(191\,\mathfrak{G}^6 + 693\,\mathfrak{G}^4\lambda\lambda + 945\,\mathfrak{G}\mathfrak{G}\lambda^4 + 945\,\lambda^6)$$
$$+\frac{1}{29030400}\,n^8\,(2497\,\mathfrak{G}^8 + 11460\,\mathfrak{G}^6\lambda\lambda + 20790\,\mathfrak{G}^4\lambda^4 + 18900\,\mathfrak{G}\mathfrak{G}\lambda^6 + 14175\,\lambda^8)$$
$$+ \text{ u. s. w.}$$

Um die Gleichungen I, II, III in eine ganz entwickelte Gestalt zu bringen, wird man in denselben noch substituiren

$$\log m = \frac{1}{12}\,rr + \frac{7}{1440}\,r^4 + \frac{31}{90720}\,r^6 + \frac{127}{4838400}\,r^8 + \text{u. s. w.}$$
$$mm = 1 + \frac{1}{6}\,rr + \frac{17}{720}\,r^4 + \frac{31}{10080}\,r^6 + \text{u. s. w.}$$
$$m^4 = 1 + \frac{1}{3}\,rr + \frac{3}{40}\,r^4 + \text{u. s. w.}$$
$$m^6 = 1 + \frac{1}{2}\,rr + \text{u. s. w.}$$

u. s. w.

$$\log n = -\frac{1}{24}\,rr - \frac{1}{2880}\,r^4 - \frac{1}{181440}\,r^6 - \frac{1}{9676800}\,r^8 - \text{u. s. w.}$$
$$nn = 1 - \frac{1}{12}\,rr + \frac{1}{360}\,r^4 - \frac{1}{20160}\,r^6 + \text{u. s. w.}$$
$$n^4 = 1 - \frac{1}{6}\,rr + \frac{1}{80}\,r^4 - \text{u. s. w.}$$
$$n^6 = 1 - \frac{1}{4}\,rr + \text{u. s. w.}$$

u. s. w.

Wir erhalten demnach für die Logarithmen von t, l, b, oder vielmehr für die Unterschiede dieser Logarithmen von den genäherten Werthen $\log \tau$, $\log \lambda$, $\log \mathfrak{G}$, zusammengesetzte Reihen, welche fortschreiten

für $\log t$ nach den geraden Potenzen von τ und r, und deren Producten,
für $\log l$ eben so nach λ und r,
für $\log b$ nach β, λ und r,

und die beigebrachten Zahlen enthalten diese Entwicklung bis zu den Grössen der achten Ordnung (einschl.), daher t, l, b selbst dadurch bis zu den Grössen der neunten Ordnung einschliesslich, oder der eilften Ordnung ausschliesslich bestimmt werden.

Die Entwicklung von $\log b$ kann auch auf eine andere Art, nemlich nach den Potenzen von β, τ und r geschehen. Setzt man

$$z = \operatorname{tang} y,$$

so wird

$$y = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \frac{1}{9}z^9 - \text{u. s. w.}$$

und hieraus

$$\log y = \log z - \frac{1}{3}zz + \frac{13}{90}z^4 - \frac{251}{2835}z^6 + \frac{3551}{56700}z^8 - \text{u. s. w.}$$

Wendet man diese Reihe an auf die Gleichung

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}t}{\operatorname{tg}B\,.\operatorname{tg}T},$$

nachdem man derselben vermöge der Substitutionen

$$\operatorname{tg}B\,.\operatorname{tg}T = \frac{\tau}{\beta}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}t = \frac{m\tau}{2\sqrt{(1-\frac{1}{4}mm\tau\tau)}}$$

folgende Gestalt gegeben hat

$$\frac{\beta m}{2\sqrt{(1-\frac{1}{4}mm\tau\tau)}} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\log b = \log\beta + \log m &+ \frac{1}{8}mm\tau\tau + \frac{1}{64}m^4\tau^4 + \frac{1}{384}m^6\tau^6 + \frac{1}{2048}m^8\tau^8 + \text{u. s. w.}\\
&- \frac{1}{12}\beta\beta\left(mm + \frac{1}{4}m^4\tau\tau + \frac{1}{16}m^6\tau^4 + \frac{1}{64}m^8\tau^6 + \text{u. s. w.}\right)\\
&+ \frac{13}{1440}\beta^4\left(m^4 + \frac{1}{2}m^6\tau\tau + \frac{3}{16}m^8\tau^4 + \text{u. s. w.}\right)\\
&- \frac{251}{181440}\beta^6\left(m^6 + \frac{3}{4}m^8\tau\tau + \text{u. s. w.}\right)\\
&+ \frac{3551}{14515200}\beta^8\left(m^8 + \text{u. s. w.}\right)\\
&+ \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

oder, indem man die Glieder gleicher Ordnung zusammenfasst,

$$\begin{aligned}\log b = \log \mathfrak{S} + \log m \\ &- \frac{1}{24}mm(2\mathfrak{S}\mathfrak{S} - 3\tau\tau) \\ &+ \frac{1}{2880}m^4(26\mathfrak{S}^4 - 60\mathfrak{S}\mathfrak{S}\tau\tau + 45\tau^4) \\ &- \frac{1}{362880}m^6(502\mathfrak{S}^6 - 1638\mathfrak{S}^4\tau\tau + 1890\mathfrak{S}\mathfrak{S}\tau^4 - 945\tau^6) \\ &+ \frac{1}{29030400}m^8(7102\mathfrak{S}^8 - 30120\mathfrak{S}^6\tau\tau + 49140\mathfrak{S}^4\tau^4 - 37800\mathfrak{S}\mathfrak{S}\tau^6 \\ &\qquad + 14175\tau^8) \\ &- \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Durch Substitution der oben gegebenen Werthe von $\log m$, mm, m^4 u. s. w. erhält man hieraus die gesuchte Reihe, welche sich übrigens auch aus der erstern nach $\mathfrak{S}$, λ, r fortschreitenden unmittelbar ableiten lässt, indem man $rr - \mathfrak{S}\mathfrak{S} - \tau\tau$ für $\lambda\lambda$ substituirt.

19.

Für unsern Zweck reicht es hin, die Formeln nur bis zur vierten Ordnung (einschl.) genau aufzustellen, nemlich

$$\log t = \log \tau + \frac{1}{24}(2rr + \tau\tau) + \frac{1}{2880}(14r^4 + 20rr\tau\tau + 11\tau^4)$$

$$\log l = \log \lambda - \frac{1}{24}(rr - \lambda\lambda) - \frac{1}{2880}(r^4 + 10rr\lambda\lambda - 11\lambda^4)$$

$$\begin{aligned}\log b = \log \mathfrak{S} - \frac{1}{24}(rr - \mathfrak{S}\mathfrak{S} - 3\lambda\lambda) - \frac{1}{2880}(r^4 + 10rr\mathfrak{S}\mathfrak{S} + 30rr\lambda\lambda - 11\mathfrak{S}^4 \\ - 30\mathfrak{S}\mathfrak{S}\lambda\lambda - 45\lambda^4).\end{aligned}$$

Anstatt der letzten Formel kann man auch eine der folgenden gebrauchen:

$$\begin{aligned}\log b = \log \mathfrak{S} + \frac{1}{24}(2rr - 2\mathfrak{S}\mathfrak{S} + 3\tau\tau) + \frac{1}{2880}(14r^4 - 40rr\mathfrak{S}\mathfrak{S} + 60rr\tau\tau + 26\mathfrak{S}^4 \\ - 60\mathfrak{S}\mathfrak{S}\tau\tau + 45\tau^4)\end{aligned}$$

$$\log b = \log \mathfrak{S} + \frac{1}{24}(2\lambda\lambda + \tau\tau) - \frac{1}{2880}(12\mathfrak{S}\mathfrak{S}\lambda\lambda - 12\mathfrak{S}\mathfrak{S}\tau\tau - 14\lambda^4 - 32\lambda\lambda\tau\tau + \tau^4)$$

$$\log b = \log \mathfrak{S} + \frac{1}{24}(2\lambda\lambda + \tau\tau) - \frac{1}{2880}(12rr\lambda\lambda - 12rr\tau\tau - 26\lambda^4 - 8\lambda\lambda\tau\tau - 11\tau^4).$$

In allen diesen Formeln sind r, $\mathfrak{C}$, λ, τ, b, l, t als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt und die Logarithmen als hyperbolische zu verstehen. Sollen dagegen jene sieben Grössen in Bogensecunden ausgedrückt und die Logarithmen die briggischen sein, so erleiden die Formeln weiter keine Veränderung, als dass der gemeinschaftliche Zahlencoëfficient der Glieder zweiter Ordnung $\frac{1}{24}$ in $\frac{1}{2}\mu$, und der gemeinschaftliche Zahlencoëfficient der Glieder vierter Ordnung $\frac{1}{2880}$ in ν verwandelt werden muss, wo μ, ν die Producte der Grössen $\frac{1}{12}\varrho\varrho$ und $\frac{1}{2880}\varrho^4$ in den Modulus der briggischen Logarithmen bezeichnen, ϱ in der im Art. 16 angegebenen Bedeutung genommen (und damit auch μ). Man hat für diese constanten Factoren

$$\log\mu = 7.9297527989\ (-\ 20)$$
$$\log\nu = 4.9206912908\ (-\ 30).$$

Bis zu den Gliedern zweiter Ordnung stimmen diese Resultate mit den im 17. Art. gegebenen überein. Der Zweck der vorstehenden weitern Entwicklung war nur, klar hervortreten zu lassen, dass selbst zur schärfsten Rechnung die Glieder zweiter Ordnung völlig zureichen: in der That kommt in dem ganzen Hannoverschen Dreieckssysteme kein Fall vor, wo die Glieder vierter Ordnung den Betrag von zwei Einheiten der zehnten Decimale erreichten, und nur ein Paar Fälle, wo sie Eine Einheit der zehnten Decimale überschreiten.

20.

Wenn unsere Formeln, welche nicht von der Breite und dem Azimuth an dem einen Orte, sondern von dem Mittelwerthe dieser Grössen an den beiden Örtern ausgehen, zur Auflösung der zu Anfang dieser Abhandlung aufgeführten Aufgabe benutzt werden sollen, so wird diess auf eine indirecte Art, oder richtiger durch stufenweise beliebig weit getriebene Annäherung geschehen müssen. Der Gang der Arbeit besteht darin, dass man von irgend einem genäherten Werthe von T ausgeht (wofür man in Ermangelung aller anderweitigen Kenntniss oder Schätzung zuerst das gegebene Azimuth an dem ersten Orte annehmen kann) und daraus einen viel schärfern ableitet; mit diesem dann dieselbe Rechnung wiederhohlt, und damit so lange fortfährt, bis man zu stehenden Resultaten gelangt. Man hat dabei zu beachten, dass bei den ersten Rechnungen nur 4 oder 5 Zifern der Logarithmen berücksichtigt zu werden brauchen, und dabei β und τ anstatt der corrigirten b und t angewandt werden dürfen, daher man auch, bei diesen ersten Rechnungen, sich um λ und l noch nicht zu bekümmern braucht. Die Formeln sind so, wenn für den ersten Ort die Breite mit B^0, das Azimuth mit T^0 bezeichnet wird, der Reihe nach folgende:

$$\beta = r \cos T$$
$$B = B^0 - \tfrac{1}{2}\beta$$
$$\tau = r \sin T \operatorname{tang} B$$
$$T = T^0 - \tfrac{1}{2}\tau.$$

Nachdem man dahin gelangt ist, dass bei dem Gebrauch von fünfzifrigen Logarithmen der Werth von T sich nicht mehr ändert, berechnet man λ nach der Formel

$$\lambda = r \sin T \sec B$$

und führt dann eine neue Rechnung mit sieben Decimalen, wobei man die logarithmischen Correctionen vermittelst der Formeln

$$\log b = \log \beta + \mu\lambda\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau$$
$$\log t = \log \tau + \mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau$$

zuzieht und $B = B^0 - \frac{1}{2}b$, $T = T^0 - \frac{1}{2}t$ setzt. Eine nochmalige Wiederholung wird in der Regel dieselben, oder kaum merklich geänderte Resultate wiedergeben, und dann erst wird auch noch die Berechnung von l nach der Formel

$$\log l = \log \lambda - \tfrac{1}{2}\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\lambda\lambda$$

beigefügt. Um die Schnelligkeit der Annäherung (die hauptsächlich von der Kleinheit von r abhängt), an einem Beispiele zu zeigen, setze ich die Hauptmomente der Rechnung für den Übergang von dem Dreieckspunkte Brocken zu dem Punkte Inselsberg hieher. Es ist diess die grösste Dreiecksseite in dem Hannoverschen Dreieckssystem, viel grösser, als sonst bei trigonometrischen Operationen vorzukommen pflegen.

Bei der nach den Grundlagen der ersten Abhandlung bearbeiteten conformen Darstellung auf der Kugelfläche ist die Breite des Brockens $B^0 = 51^0\,46'\,3''\,6345$; das Azimuth der Seite Brocken-Inselsberg $T^0 = 5^0\,42'\,21''\,7704$; der Logarithm dieser Seite in Toisen $= 4{,}7353929$ oder in Theilen des Halbmessers $= 8{,}22018543$, oder in Bogensecunden, wie bei unsern Formeln vorausgesetzt ist, $\log r = 3{,}5346106$. Setzt man zuerst $T = 5^0\,42'$, so wird

$$\mathfrak{E} = 3408''$$
$$B = 51^0\,17'\,40''$$
$$\tau = 424''$$

und folglich ein genäherterer Werth

$$T = 5^0\,38'\,50''.$$

Die hiemit wiederholte Rechnung ergibt

$$\mathfrak{E} = 3407''\,9$$
$$B = 51^0\,17'\,39''\,7$$
$$\tau = 420''\,55$$
$$T = 5^0\,38'\,51''\,5.$$

Mit diesem Werthe von T wird nun die schärfere Rechnung angefangen und dabei zugleich die logarithmische Correction mit zugezogen. Es findet sich, in Einheiten der siebenten Decimale,

$$\mu rr = 99{,}76$$
$$\mu\lambda\lambda = 2{,}47$$
$$\mu\tau\tau = 1{,}50$$

folglich

$$\mu\lambda\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau = +3$$
$$\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau = +101$$
$$-\tfrac{1}{2}\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\lambda\lambda = -49$$

und

$$\log \mathfrak{E} = 3.5324974$$
$$\log b = 3.5324977$$
$$b = 3407''\,9852$$
$$B = 51^0\,17'\,39''\,6419$$
$$\log \tau = 2.6238492$$
$$\log t = 2.6238593$$
$$t = 420''\,5904$$
$$T = 5^0\,38'\,51''\,4752.$$

Eine nochmalige Wiederhohlung der Rechnung mit diesem Werthe von T bringt bei b gar keine Änderung hervor, und t verwandelt sich in $420''\,5898$. Man erhält daher

Breite des Punkts Inselsberg

$$B^0 - \mathfrak{E} = 50^0\,49'\,15''\,6493$$

Azimuth der Dreiecksseite Inselsberg-Brocken

$$T^0 - \tau + 180^0 = 185^0\,35'\,21''\,1806.$$

Endlich findet sich

$$\log \lambda = 2{,}7315487$$

$$\log l = 2{,}7315438$$

$$l = 538''\,9442 = 0^0\,8'\,58''\,9442.$$

Die Bequemlichkeit dieses Verfahrens wird allerdings erst dann in ihrer vollen Grösse fühlbar, wenn man sich die Hülfen des kleinen Mechanismus bei Handhabung derartiger Methoden zu eigen gemacht hat, wozu eine Anweisung hier nicht an ihrem Platze sein würde. Ich begnüge mich hier nur anzudeuten, dass, was in obigem Beispiele wie eine viermalige Rechnung erscheint, nicht in der Form von vier getrennten Rechnungen, sondern wie eine einzige geschrieben werden soll, indem man bei jeder neuen Überarbeitung nur die letzten Zifern ergänzt oder verbessert. Jedenfalls braucht man immer nur die letzte Rechnung aufzubewahren, und gerade darin besteht ein grosser Vortheil, zumal bei Messungen von bedeutendem Umfange, dass man dann den ganzen wesentlichen Kern der Berechnung für alle Dreiecksseiten im möglich kleinsten Raume und in der übersichtlichsten zu beliebiger Prüfung der Richtigkeit geeignetsten Form besitzt.

21.

Ich gehe jetzt zu der Hauptaufgabe selbst über, welche für die Ellipsoidfläche eine ähnliche Methode fordert, wie für die Kugelfläche im Vorhergehenden gegeben ist. Die Auflösung dieser allerdings etwas verwickelten Aufgabe soll hier auf zwei ganz von einander verschiedenen Wegen abgeleitet werden. Da die eine Ableitung, mit welcher der Anfang gemacht werden wird, sich auf diejenige conforme Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche gründet, deren Theorie in der ersten Abhandlung entwickelt ist, so kann die Auffindung dieser Auflösung wie die *erste mittelbare* Benutzung dieser Theorie für die Zwecke der höhern Geodäsie betrachtet werden. (Vergl. Art. 11).

Es mögen demnach jetzt durch $B + \frac{1}{2}b$ und $B - \frac{1}{2}b$ die Breiten zweier Punkte auf der Ellipsoidfläche bezeichnet werden; ihr Längenunterschied durch l; das zwischen ihnen enthaltene Stück einer geodätischen Linie (und zwar hier nach beliebiger Einheit gemessen) durch r; die Azimuthe der Linie am ersten und zweiten Endpunkte durch $T + \frac{1}{2}t$ und $T - \frac{1}{2}t \pm 180^0$. Es handelt sich also darum, b, l und t aus r, B und T zu finden durch Formeln, welche den oben für die Kugelfläche gegebenen analog sind, und in dieselben übergehen, wenn man die Excentricität $= 0$, oder die beiden Halbachsen der erzeugenden Ellipse unter sich gleich und $= 1$ setzt.

Die Breite des der conformen Übertragung auf die Kugelfläche zum Grunde liegenden Normalparallelkreises bezeichne ich (wie oben Art. 3) mit P für die Ellipsoidfläche, und mit Q für die Kugelfläche; zugleich nehme ich an, dieser Normalparallelkreis sei so gewählt, dass Q dem arithmetischen Mittel der Breiten der beiden betreffenden Punkte auf der Kugelfläche gleich wird: diese Breiten selbst seien $Q + \frac{1}{2}q$ und $Q - \frac{1}{2}q$. Es sollen ferner a, A, α, e, φ, θ dieselben Bedeutungen behalten, wie in der ersten Abhandlung, Art. 2. 3. 4 ff.; es bedeuten nemlich

a die halbe grosse Achse des Ellipsoids, oder den Halbmesser des Äquators,
A den Halbmesser der Kugel,
$1 : \alpha$ das constante Verhältniss der Längenunterschiede auf dem Ellipsoid zu den entsprechenden auf der Kugel,
$e = \sin\varphi$ die Excentricität der erzeugenden Ellipse,
$\sin\theta = e \sin P$.

Den zwischen den beiden Punkten auf der Kugelfläche enthaltenen Grösstekreisbogen bezeichne ich mit s; die Azimuthe dieses Bogens am ersten und zweiten Endpunkte mit $U + \frac{1}{2}u$ und $U - \frac{1}{2}u \pm 180^0$. Erwägt man nun noch, dass der Längenunterschied zwischen beiden Punkten $= \alpha l$ ist, so findet man zunächst die vier strengen Formeln

$$\sin\tfrac{1}{2}s \,.\, \cos U = \cos\tfrac{1}{2}\alpha l \,.\, \sin\tfrac{1}{2}q$$
$$\sin\tfrac{1}{2}s \,.\, \sin U = \sin\tfrac{1}{2}\alpha l \,.\, \cos Q$$
$$\cos\tfrac{1}{2}s \,.\, \cos\tfrac{1}{2}u = \cos\tfrac{1}{2}\alpha l \,.\, \cos\tfrac{1}{2}q$$
$$\cos\tfrac{1}{2}s \,.\, \sin\tfrac{1}{2}u = \sin\tfrac{1}{2}\alpha l \,.\, \sin Q$$

und hieraus die näherungsweise richtigen

$$q = s \,.\, \cos U\,(1 + \tfrac{1}{24}qq - \tfrac{1}{24}ss + \tfrac{1}{8}\alpha\alpha ll) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$\alpha l = s \,.\, \frac{\sin U}{\cos Q}\,(1 - \tfrac{1}{24}ss + \tfrac{1}{24}\alpha\alpha ll) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$u = s \,.\, \sin U \,.\, \operatorname{tang} Q\,(1 + \tfrac{1}{12}ss + \tfrac{1}{24}uu) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Es ist unnöthig zu erinnern, dass in diesen drei Gleichungen l, q, s, u in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden werden. Man sieht leicht, dass sie bis auf die fünfte Ordnung (ausschl.) richtig sind, indem s wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird, und dass man, ohne den Grad der Schärfe zu vermindern, in den eingeklammerten Gliedern rechter Hand statt $q, \alpha l$ und u auch $s.\cos U$, $s.\frac{\sin U}{\cos Q}$, $s.\sin U.\operatorname{tang} Q$ substituiren darf.

22.

Es müssen nun zuvörderst die Grössen B, b, T, t, r, welche auf der Ellipsoidfläche ihre Bedeutung haben, mit ihren Correlaten auf der Kugelfläche Q, q, U, u, As verglichen werden. Alle dafür hier aufzustellenden Gleichungen werden bis wenigstens auf die dritte Ordnung (einschl.) genau sein, und, dass dieser Bedingung genügt werde, wird sich aus der Entwicklung selbst leicht erkennen lassen.

Wendet man die im 8. Art. gegebene Reihe auf unsere beiden Punkte an, so müssen die dort allgemein mit p und q bezeichneten Grössen nach unserer jetzigen Bezeichnung ausgedrückt werden

für den ersten Punkt durch $B + \frac{1}{2}b - P$ und $\frac{1}{2}q$,

für den zweiten Punkt durch $B - \frac{1}{2}b - P$ und $-\frac{1}{2}q$,

und wir haben demnach die beiden Gleichungen

$$B + \tfrac{1}{2}b = P + \frac{\cos\theta}{2\cos\varphi}.q - \frac{3ee}{8\cos\varphi^2}.\cos P.\sin P.qq$$
$$+ \frac{ee}{16\cos\varphi^3\cos\theta}(-\cos P^2 + \sin P^2 + ee(5\cos P^2.\sin P^2 - \sin P^4))q^3$$

$$B - \tfrac{1}{2}b = P - \frac{\cos\theta}{2\cos\varphi}.q - \frac{3ee}{8\cos\varphi^2}.\cos P.\sin P.qq$$
$$- \frac{ee}{16\cos\varphi^3\cos\theta}(-\cos P^2 + \sin P^2 + ee(5\cos P^2.\sin P^2 - \sin P^4))q^3.$$

Durch Addition und Subtraction ergibt sich also

$$B = P - \frac{3ee}{8\cos\varphi^2}.\cos P.\sin P.qq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$b = \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}.q + \frac{ee}{8\cos\varphi^3\cos\theta}(-\cos P^2 + \sin P^2 + ee(5\cos P^2.\sin P^2 - \sin P^4))q^3 \quad (5).$$

Man sieht übrigens leicht, dass die Gleichung (4) um Grössen vierter, die Gleichung (5) hingegen nur um Grössen fünfter Ordnung ungenau ist.

Um T und t mit U und u zu vergleichen, werden die am Schluss des 15. Art. entwickelten Formeln benutzt werden müssen, denen eine Voraussetzung zum Grunde lag, welcher in der gegenwärtigen Untersuchung genügt ist. Man hat dabei nur zu erwägen, dass die dortigen ψ^0, und ψ' nichts anderes sind, als hier $T + \frac{1}{2}t - (U + \frac{1}{2}u)$ und $T - \frac{1}{2}t - (U - \frac{1}{2}u)$; ferner das dortige h dasselbe was hier s; endlich dass das dortige χ von der hier mit U bezeichneten Grösse im Allgemeinen nur um eine Grösse zweiter Ordnung verschieden sein kann, jedenfalls aber der Unterschied wenigstens von der ersten Ordnung ist. Es ergibt sich so, auf die dritte Ordnung einschl. genau

$$T + \tfrac{1}{2}t = U + \tfrac{1}{2}u - \frac{ee\cos P \,.\, \sin P \,.\, \sin U \,.\, \cos U^2}{12\cos\varphi\cos\theta} \,.\, s^5$$

$$T - \tfrac{1}{2}t = U - \tfrac{1}{2}u + \frac{ee\cos P \,.\, \sin P \,.\, \sin U \,.\, \cos U^2}{12\cos\varphi\cos\theta} \,.\, s^5$$

und folglich, eben so genau,

$$T = U \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$t = u - \frac{ee\cos P \,.\, \sin P \,.\, \sin U \,.\, \cos U^2}{6\cos\varphi\cos\theta} \,.\, s^5 \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Die Vergleichung der Länge der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid mit dem Grösstekreisbogen auf der Kugel ist zwar in Art. 15 für den in Rede stehenden Fall nicht besonders entwickelt: es ist jedoch sehr leicht, diess zu ergänzen. Es ist nemlich in den dortigen Bezeichnungen die Länge des geodätischen Bogens

$$= A\int \frac{\cos y}{m\cos\psi} \,.\, dx$$

welche Integration von $x = -\frac{1}{2}(h - \delta)$ bis $x = +\frac{1}{2}(h + \delta)$ auszudehnen ist. Da y und ψ nur Grössen von der dritten Ordnung sind, so sieht man leicht, dass die Weglassung des Factors $\frac{\cos y}{\cos\psi}$ in dem Werthe des Integrals nur einen Fehler der siebenten Ordnung hervorbringen kann. Jene Länge ist also, bis auf die fünfte Ordnung einschl. genau,

$$= A\int\frac{dx}{m} = A\int dx\,(1 - \mu x^3 - \mu' x^4)$$
$$= A\,(x - \tfrac{1}{4}\mu x^4 - \tfrac{1}{5}\mu' x^5) + \text{Const.}$$
$$= A\,(h - \tfrac{1}{8}(h^3\delta + h\delta^3)\,\mu - \tfrac{1}{80}(h^5 + 10h^3\delta\delta + 5h\delta^4)\,\mu'.$$

Die Coëfficienten μ, μ' lassen sich angeben, wenn man in der Reihe

$$m = 1 - \frac{2ee\cos P\,.\,\sin P}{3\cos\varphi\,\cos\theta}\,.\,q^3 - \frac{ee\,\cos P^2}{6\cos\varphi^2\cos\theta^2}\,(1 - 7ee\sin P^2)\,q^4\,.\,.\,.\,.$$

(welche von selbst aus der Art. 9 gegebenen folgt) für q die Substitution macht

$$q = -\cos\chi\,.\,x - \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,Q\,.\,\sin\chi^2 xx\,.\,.\,.$$

(deren leichte Ableitung hier weggelassen werden kann), und das Resultat mit der Reihe

$$m = 1 + \mu x^3 + \mu' x^4\,.\,.\,.$$

zusammenhält. Für unsern gegenwärtigen Zweck ist jedoch mehr nicht nöthig, als nachzuweisen, dass die gesuchte Länge des geodätischen Bogens von Ah nicht mehr als um eine Grösse fünfter Ordnung abweicht. Da nun ersichtlich $h^5 + 10h^3\delta\delta + 5h\delta^4$ eine solche Grösse ist, so braucht der entwickelte Werth von μ' nicht hiehergesetzt zu werden. Für μ aber ergibt sich der Werth

$$\mu = \frac{2\,ee\,\cos P\,.\,\sin P}{3\,\cos\varphi\,\cos\theta}\,.\,\cos\chi^3$$

und da $\delta\cos\chi$ nach Art. 15 eine Grösse zweiter Ordnung ist, so wird offenbar auch $(h^3\delta + h\delta^3)\,\mu$ eine Grösse fünfter Ordnung.

Wir haben demnach, da h dasselbe bedeutet, was jetzt mit s bezeichnet ist, bis auf die fünfte Ordnung ausschliesslich genau

$$s = \frac{r}{A}\,. \quad (8).$$

Endlich, damit alles für die weitere Entwicklung erforderliche hier beisammen sei, setze ich noch folgende schon in der ersten Abhandlung (Art. 4, 6 und 3) gebrauchte strenge richtige Gleichungen hieher:

$$A = \frac{a\cos\varphi}{\cos\theta^2}\,. \quad (9)$$

$$\cos Q = \frac{\cos\theta\,\cos P}{a\,\cos\varphi}\,. \quad (10)$$

$$\sin Q = \frac{\sin P}{a}$$

und die aus der Verbindung dieser beiden hervorgehende

$$\tang Q = \frac{\cos\varphi \tang P}{\cos\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

23.

Zur Erreichung unsers Zwecks brauchen nun bloss diese Gleichungen gehörig combinirt zu werden.

Zuvörderst ergibt sich aus der Verbindung der Gleichungen (1), (2), (3), dass $qq + \alpha\alpha ll - uu - ss$ eine Grösse vierter Ordnung ist, daher man anstatt (2) auch schreiben kann

$$l = \frac{s . \sin U}{\alpha . \cos Q}(1 - \tfrac{1}{24}qq + \tfrac{1}{24}uu),$$

oder wenn man nach (8), (9) und (10)

$$s = \frac{r\cos\theta^2}{a\cos\varphi}, \quad \alpha\cos Q = \frac{\cos\theta\cos P}{\cos\varphi}$$

schreibt,

$$l = \frac{r\cos\theta\sin U}{a\cos P}(1 - \tfrac{1}{24}qq + \tfrac{1}{24}uu).$$

Es wird ferner $\frac{\cos\theta}{\cos P} = \frac{\sqrt{(1 - ee\sin P^2)}}{\cos P}$ vermittelst der Gleichung (4) und durch eine leichte Rechnung entwickelt in

$$\frac{\cos\theta}{\cos P} = \frac{\sqrt{(1 - ee\sin B^2)}}{\cos B}\left(1 + \frac{3\,ee\sin P^2}{8(1 - ee\sin P^2)} . qq\right),$$

was bis auf die vierte Ordnung ausschl. genau ist. Wir haben daher, wenn zugleich T für U geschrieben wird, gemäss der Gleichung (6),

$$l = \frac{r\sqrt{(1 - ee\sin B^2)} . \sin T}{a\cos B}\left(1 - \frac{1 - 10\,ee\sin P^2}{24(1 - ee\sin P^2)} . qq + \tfrac{1}{24}uu\right).$$

Nachdem in dem eingeklammerten Theile noch substituirt ist $\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1 - ee\sin P^2)}} . b$ für q, sodann t für u und endlich B für P, was alles, nach Gleichung (5), (7), (4), wie man leicht sieht, geschehen kann, ohne den Grad der Genauigkeit zu vermindern, und wenn wir ausserdem, zur Abkürzung,

$$\sqrt{(1 - ee\sin B^2)} = k$$

schreiben, so erhalten wir (I)

$$l = \frac{kr\sin T}{a\cos B}\left(1 - \frac{(1 - 10\,ee\sin B^2)\cos\varphi^2}{24\,k^4} . bb + \tfrac{1}{24}tt\right).$$

24.

Auf ähnliche Weise verwandelt sich Gleichung (1) in

$$q = s\cos U\,(1 - \tfrac{1}{12}qq + \tfrac{1}{12}ss + \tfrac{1}{8}uu)$$

und daher Gleichung (5) in

$$b = \frac{r\cos\theta^3\cos U}{a\cos\varphi^2}(1 - (\tfrac{1}{12} + \frac{ee}{8\cos\varphi^2\cos\theta^2}(\cos P^2 - \sin P^2 - ee(5\cos P^2\sin P^2 - \sin P^4)))qq + \tfrac{1}{12}ss + \tfrac{1}{8}uu).$$

Für $\cos\theta^3 = (1 - ee\sin P^2)^{\frac{3}{2}}$ findet man leicht die vermittelst (4) so weit, wie hier nöthig ist, geführte Entwickelung

$$\cos\theta^3 = (1 - ee\sin B^2)^{\frac{3}{2}}\,(1 - \frac{9e^4\cos P^2\sin P^2}{8\cos\varphi^2(1 - ee\sin P^2)}\cdot qq),$$

wodurch die vorhergehende Gleichung sich verwandelt in

$$b = \frac{r(1 - ee\sin B^2)^{\frac{3}{2}}\cos U}{a\cos\varphi^2}\,(1 - (\tfrac{1}{12} + \frac{ee}{8\cos\varphi^2(1 - ee\sin P^2)}(\cos P^2 - \sin P^2 + ee(4\cos P^2\sin P^2 + \sin P^4)))qq + \tfrac{1}{12}ss + \tfrac{1}{8}uu)$$

oder in einer etwas veränderten Form

$$b = \frac{rk^3\cos U}{a\cos\varphi^2}(1 - \frac{1}{24\cos\varphi^2(1 - ee\sin P^2)}(2 + ee - (8ee - 14e^4)\sin P^2 - 9e^4\sin P^4)qq + \tfrac{1}{12}ss + \tfrac{1}{8}uu).$$

Schreibt man nun noch hierin

$\dfrac{\cos\varphi\,.\,b}{\sqrt{(1 - ee\sin P^2)}}$ anstatt q, wegen (5)

$\dfrac{rr(1 - ee\sin P^2)^2}{aa\cos\varphi^2}$ anstatt ss, wegen (8) und (9)

T und t anstatt U und u, wegen (6) und (7)

und zuletzt

B für P wegen (4),

was alles, ohne Nachtheil für die Genauigkeit geschehen kann, so erhält man (II)

$$b = \frac{rk^3}{a\cos\varphi^2}\cdot\cos T\,(1 - \frac{1}{24k^4}(2 + ee - (8ee - 14e^4)\sin B^2 - 9e^4\sin B^4)\,.\,bb + \frac{k^4}{12aa\cos\varphi^2}\cdot rr + \tfrac{1}{8}tt).$$

25.

Aus den Gleichungen (1) und (3) erhellet, dass qqu von $s^3 \cos U^2 \sin U \operatorname{tang} Q$, oder nach (11), von $\frac{s^3 \cos\varphi \cos U^2 \sin U . \operatorname{tang} P}{\cos\theta}$ nur um eine Grösse fünfter Ordnung verschieden ist: es ist daher verstattet, die Gleichung (7) auch so zu schreiben

$$t = u\,(1 - \frac{ee \cos P^2}{6 \cos\varphi^2} \,.\, qq),$$

oder wenn man für u den Werth aus (3) substituirt, und nach (8), (9), (11),

$$s = \frac{r \cos\theta^2}{a \cos\varphi} = \frac{r \cos\theta \operatorname{tang} P}{a \operatorname{tang} Q}$$

setzt

$$t = \frac{r \cos\theta \operatorname{tang} P \,.\, \sin U}{a}\,(1 + \tfrac{1}{24} uu + \tfrac{1}{12} ss - \frac{ee \cos P^2}{6 \cos\varphi^2} \,.\, qq).$$

Für $\cos\theta \,.\, \operatorname{tang} P = \sqrt{(1 - ee \sin P^2)} \,.\, \operatorname{tang} P$ findet man nach (4) den so weit wie hier nöthig ist entwickelten Werth

$$\sqrt{(1 - ee \sin B^2)} \,.\, \operatorname{tang} B\ (1 + \frac{3ee - 6e^4 \sin P^2 + 3e^4 \sin P^4}{8 \cos\varphi^2\,(1 - ee \sin P^2)}\, qq)$$

und folglich

$$t = \frac{rk \operatorname{tang} B \sin U}{a}\,(1 + \frac{5ee + (4ee - 14e^4) \sin P^2 + 5e^4 \sin P^4}{24 \cos\varphi^2\,(1 - ee \sin P^2)} \,.\, qq + \tfrac{1}{12} ss + \tfrac{1}{24} uu).$$

Macht man nun noch hierin dieselben Substitutionen, wie im vorhergehenden Art., so erhält man als Endresultat (III)

$$t = \frac{rk \operatorname{tang} B \,.\, \sin T}{a}\,(1 + \frac{5ee + (4ee - 14e^4) \sin B^2 + 5e^4 \sin B^4}{24\,k^4} \,.\, bb + \frac{k^4}{12 aa \cos\varphi^2} \,.\, rr + \tfrac{1}{24} tt).$$

Die drei Formeln I, II, III enthalten im Wesentlichen die Auflösung unsrer Aufgabe. Dass sie bis zur dritten Ordnung einschliesslich genau sind, steht durch ihre Ableitung unmittelbar fest. Dass aber in der Wirklichkeit ihre Genauigkeit noch eine Ordnung weiter reicht, oder dass der Fehler jeder der Formeln von der fünften Ordnung ist, würde sich leicht durch einige ergänzende Zwischenentwicklungen, oder auch dadurch darthun lassen, dass in den Ausdrücken ihrer Natur nach keine Grössen gerader Ordnung Statt finden können: ich halte mich jedoch dabei nicht auf, da die *zweite* in den folgenden Artikeln (26 — 32) auszuführende Ableitung der Formeln dasselbe Resultat von selbst in sich begreift.

26.

Diese Untersuchung ist wie eine selbstständige von allem vorhergehenden unabhängige zu betrachten, und es sollen daher zur Bequemlichkeit und zur Verhütung von Ungewissheiten alle dabei zu verwendenden Bezeichnungen so wie sie auftreten erst erklärt werden. Meistens werden diejenigen Buchstaben, welche schon in der ersten Ableitung gebraucht sind, ihre dortige Bedeutung behalten, doch werden ein Paar derselben (u und s), da sie dort bloss Hülfsgrössen vorstellen, die in den Resultaten nicht mehr erscheinen, hier ohne Übelstand zu anderm Zweck benutzt werden dürfen.

Durch die zwei Punkte der Ellipsoidfläche, auf welche die Aufgabe sich bezieht, werde eine geodätische Linie, zunächst von unbestimmter Ausdehnung, geführt, und auf derselben ein beliebiger Anfangspunkt gewählt. Das Stück jener Linie von dem Anfangspunkte bis zu einem unbestimmten Punkte werde durch u bezeichnet; der Winkel, welchen, an letzterm Punkte, die geodätische Linie mit dem Meridian macht, jene in dem Sinne wachsender u, diesen von Norden nach Süden genommen, durch X; Breite und Länge des unbestimmten Punktes durch Y und Z. Ich nehme an, dass die Längen von Westen nach Osten, die Azimuthe X in dem Sinn von Süden nach Westen zu wachsen. Werden nun noch, wie immer bisher, halbe grosse Achse und Excentricität der erzeugenden Ellipse durch a und e bezeichnet, so hat man, aus bekannten Gründen

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}u} = -\frac{\cos X\,(1 - ee\sin Y^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - ee)\,a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = -\frac{\sin X\,(1 - ee\sin Y^2)^{\frac{1}{2}}}{a\cos Y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Es ist ferner, nach einem bekannten Lehrsatze, die Grösse

$$\frac{\sin X\cos Y}{\sqrt{(1 - ee\sin Y^2)}}$$

für alle Punkte derselben geodätischen Linie constant, und hieraus, wenn man logarithmisch differentiirt,

$$\operatorname{cotang} X\mathrm{d}X = \left(\operatorname{tang} Y - \frac{ee\cos Y\sin Y}{1 - ee\sin Y^2}\right)\mathrm{d}Y = \frac{(1 - ee)\operatorname{tang} Y}{1 - ee\sin Y^2}\,.\,\mathrm{d}Y,$$

folglich, aus der Verbindung mit (1),

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u} = -\frac{\sin X \tang Y\,(1 - ee \sin Y^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Wir wollen jedoch unsere Aufgabe allgemeiner fassen, und

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u} = x, \quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}u} = y, \quad \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = z$$

setzen, indem wir zunächst nur voraussetzen, dass x, y, z irgendwelche gegebene Functionen der beiden Veränderlichen X und Y sind. Es entstehe ferner durch neue Differentiation

$$\mathrm{d}x = x'\mathrm{d}X + x''\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}X + y''\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}z = z'\mathrm{d}X + z''\mathrm{d}Y$$

und dann durch nochmalige Differentiation

$$\mathrm{d}x' = x'''\mathrm{d}X + x^{\mathrm{iv}}\mathrm{d}Y, \quad \mathrm{d}x'' = x^{\mathrm{iv}}\mathrm{d}X + x^{\mathrm{v}}\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}y' = y'''\mathrm{d}X + y^{\mathrm{iv}}\mathrm{d}Y, \quad \mathrm{d}y'' = y^{\mathrm{iv}}\mathrm{d}X + y^{\mathrm{v}}\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}z' = z'''\mathrm{d}X + z^{\mathrm{iv}}\mathrm{d}Y, \quad \mathrm{d}z'' = z^{\mathrm{iv}}\mathrm{d}X + z^{\mathrm{v}}\mathrm{d}Y.$$

Es wird demnach, insofern Z, implicite, nur eine Function von u ist,

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = z$$

$$\frac{\mathrm{dd}Z}{\mathrm{d}u^2} = xz' + yz''$$

$$\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}u^3} = xx'z' + xy'z'' + x''yz' + yy''z'' + xxz''' + 2xyz^{\mathrm{iv}} + yyz^{\mathrm{v}}.$$

Die successiven Differentialquotienten von X und Y lassen sich auf dieselbe Art entwickeln, oder unmittelbar aus denen von Z ableiten, wenn man nur darin für z ohne und mit Accenten beziehungsweise x und y ebenso accentuirt substituirt.

27.

Es seien nun die *bestimmten* Werthe, welche die vier Grössen u, X, Y, Z in den beiden Punkten annehmen, auf welche unsre Aufgabe sich bezieht, der Reihe nach,

für den ersten Punkt $R - \frac{1}{2}r, \quad T + \frac{1}{2}t, \quad B + \frac{1}{2}b, \quad L + \frac{1}{2}l$

für den zweiten Punkt $R + \frac{1}{2}r, \quad T - \frac{1}{2}t, \quad B - \frac{1}{2}b, \quad L - \frac{1}{2}l$

und eben so, für denjenigen Punkt der geodätischen Linie, welcher zwischen jenen in der Mitte liegt, beziehungsweise R, T, B, L, wo demnach die Cursivtypen T, B, L von den Antiqua T, B, L wohl unterschieden werden müssen.

Es mögen ferner die in der Gestalt von Functionen von X und Y erscheinenden achtzehn unbestimmten Grössen

$$x,\ x',\ x'',\ x''',\ x^{\mathrm{IV}},\ x^{\mathrm{V}}$$
$$y,\ y',\ y'',\ y''',\ y^{\mathrm{IV}},\ y^{\mathrm{V}}$$
$$z,\ z',\ z'',\ z''',\ z^{\mathrm{IV}},\ z^{\mathrm{V}}$$

durch die Substitution $X = T$, $Y = B$ die bestimmten Werthe

$$f,\ f',\ f'',\ f''',\ f^{\mathrm{IV}},\ f^{\mathrm{V}}$$
$$g,\ g',\ g'',\ g''',\ g^{\mathrm{IV}},\ g^{\mathrm{V}}$$
$$h,\ h',\ h'',\ h''',\ h^{\mathrm{IV}},\ h^{\mathrm{V}}$$

annehmen; hingegen durch die Substitution $X = \mathrm{T}$, $Y = \mathrm{B}$ folgende

$$\mathrm{f},\ \mathrm{f}',\ \mathrm{f}'',\ \mathrm{f}''',\ \mathrm{f}^{\mathrm{IV}},\ \mathrm{f}^{\mathrm{V}}$$
$$\mathrm{g},\ \mathrm{g}',\ \mathrm{g}'',\ \mathrm{g}''',\ \mathrm{g}^{\mathrm{IV}},\ \mathrm{g}^{\mathrm{V}}$$
$$\mathrm{h},\ \mathrm{h}',\ \mathrm{h}'',\ \mathrm{h}''',\ \mathrm{h}^{\mathrm{IV}},\ \mathrm{h}^{\mathrm{V}}$$

Durch den Taylorschen Lehrsatz wird der Werth von Z für $u = R - \frac{1}{2}r$ in die Reihe

$$\mathrm{L} - \tfrac{1}{2}r.\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} + \tfrac{1}{8}rr.\frac{\mathrm{dd}Z}{\mathrm{d}u^2} - \tfrac{1}{48}r^3.\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}u^3} + \text{u. s. w.}$$

entwickelt, und der für $u = R + \frac{1}{2}r$ in

$$\mathrm{L} + \tfrac{1}{2}r.\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} + \tfrac{1}{8}rr.\frac{\mathrm{dd}Z}{\mathrm{d}u^2} + \tfrac{1}{48}r^3.\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}u^3} + \text{u. s. w.}$$

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werthe gesetzt werden müssen, welche dem Werthe $u = R$ entsprechen, also

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = \mathrm{h}$$

$$\frac{\mathrm{dd}Z}{\mathrm{d}u^2} = \mathrm{fh}' + \mathrm{gh}''$$

$$\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}u^3} = \mathrm{ff'h'} + \mathrm{fg'h''} + \mathrm{f''gh'} + \mathrm{gg''h''} + \mathrm{ffh'''} + 2\,\mathrm{fgh^{IV}} + \mathrm{ggh^{V}}.$$

Da nun jene beiden Werthe von Z beziehungsweise $= L + \frac{1}{2}l$ und $L - \frac{1}{2}l$ sind, so erhält man

$$L = \mathrm{L} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{fh}' + \mathrm{gh}'')rr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$l = -\,\mathrm{h}r - \tfrac{1}{24}(\mathrm{ff'h'} + \mathrm{fg'h''} + \mathrm{f''gh'} + \mathrm{gg''h''} + \mathrm{ffh'''} + 2\,\mathrm{fgh^{IV}} + \mathrm{ggh^{V}})r^3 \quad (5)$$

wo die erstere Gleichung bis auf Grössen der vierten, die andere bis auf Grössen der fünften Ordnung ausschl. genau ist *).

Wenn man erwägt, dass in der obigen Entwicklung in Beziehung auf Z nichts weiter vorausgesetzt ist, als dass es eine von u abhängige veränderliche Grösse ist, deren Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = z$ durch irgend eine Function von X und Y ausgedrückt werde, so kann man die gefundenen Resultate auch unmittelbar auf jede andere in gleichem Falle sich befindende veränderliche Grösse, namentlich auf X oder Y selbst, übertragen, wenn man nur anstatt L, L, l, und der verschieden accentuirten h beziehungsweise T, T, t und die verschiedenen f, oder B, B, b, und die verschiedenen g einschiebt. Zunächst giebt uns demnach die Gleichung (4), von welcher hier sonst kein directer Gebrauch gemacht wird, folgende beiden, gleichfalls bis zur vierten Ordnung ausschl. genauen:

$$T = \mathrm{T} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{ff}' + \mathrm{f}''\mathrm{g})\,rr$$
$$B = \mathrm{B} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{fg}' + \mathrm{gg}'')\,rr.$$

Man schliesst hieraus zuvörderst, dass h und h, als die Werthe von z, je nachdem man T und B, oder T und B für X und Y substituirt, von einander um eine Grösse zweiter Ordnung verschieden sind, und zwar wird dieser Unterschied, bis auf die vierte Ordnung ausschl. genau, bestimmt durch die Formel

$$h = \mathrm{h} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{ff}' + \mathrm{f}''\mathrm{g})\,rr\,.\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}X}\right) + \tfrac{1}{8}(\mathrm{fg}' + \mathrm{gg}'')\,rr\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Y}\right),$$

wo für die partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}X}\right)$ und $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Y}\right)$, oder z', z'' ihre bestimmten Werthe bei $X = \mathrm{T}$, $Y = \mathrm{B}$ anzunehmen sind, nemlich h′ und h″. Es ist also, bis auf die vierte Ordnung genau,

$$\mathrm{h} = h - \tfrac{1}{8}(\mathrm{ff}'\mathrm{h}' + \mathrm{fg}'\mathrm{h}'' + \mathrm{f}''\mathrm{gh}' + \mathrm{gg}''\mathrm{h}'')\,rr$$

und vermöge der Substitution dieses Werths in der Gleichung (5) wird auf die fünfte Ordnung ausschl. genau

$$l = -hr + \tfrac{1}{24}(2\mathrm{ff}'\mathrm{h}' + 2\mathrm{fg}'\mathrm{h}'' + 2\mathrm{f}''\mathrm{gh}' + 2\mathrm{gg}''\mathrm{h}'' - \mathrm{ffh}''' - 2\mathrm{fgh}^{\mathrm{IV}} - \mathrm{ggh}^{\mathrm{V}})\,r^3.$$

---

*) Die Bemessung der Ordnungen geschieht so, dass $\frac{r}{a}$ wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird. Man erkennt leicht, dass die Coëfficienten von r, rr, r^3 u. s. w. die Divisoren a, aa, a^3 u. s. w. impliciren.

Aus gleichen Gründen wie h von h, werden auch f, f', f'' u.s.w. g, g', g'' u.s.w. h', h'' u.s.w. von f, f', f'' u.s.w. g, g', g'' u.s.w. h', h'' u.s.w. beziehungsweise um Grössen zweiter Ordnung verschieden sein, und man kann daher in dem eben gegebenen Ausdruck für l anstatt jener Grössen die letztern ohne Verminderung des Grades der Genauigkeit substituiren. Es ist also gleichfalls bis auf die fünfte Ordnung ausschl. genau

$$l = -hr + \tfrac{1}{24}(2ff'h' + 2f''gh' + 2fg'h'' + 2gg''h'' - ffh''' - 2fgh^{\text{IV}} - ggh^{\text{V}})r^3 \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Der obigen Bemerkung zufolge darf man nun auch in dieser Gleichung l mit t oder mit b vertauschen, wenn man nur

anstatt $h, h', h'', h''', h^{\text{IV}}, h^{\text{V}}$

im erstern Falle $f, f', f'', f''', f^{\text{IV}}\ f^{\text{V}}$

und im andern $g, g', g'', g''', g^{\text{IV}}, g^{\text{V}}$

setzt, so dass man hat

$$t = -fr + \tfrac{1}{24}(2ff'f' + 2f'f''g + 2ff''g' + 2f''gg'' - fff''' - 2ff^{\text{IV}}g - f^{\text{V}}gg)r^3 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$b = -gr + \tfrac{1}{24}(2ff'g' + 2f''gg' + 2fg'g'' + 2gg''g'' - ffg''' - 2fgg^{\text{IV}} - ggg^{\text{V}})r^3 \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

28.

Die drei Formeln (6), (7), (8) enthalten bereits das Wesentliche zur Auflösung unsrer Aufgabe, so dass zu ihrer Vervollständigung nur noch eine mechanische Rechnung, nemlich die Entwicklung der Werthe der verschiedenen Differentialquotienten und deren Substitution übrig bleibt. Jene Entwicklung gibt, indem wir sofort anstatt der unbestimmten Werthe x, x' u.s.w. y u.s.w. die zu $X = T$, $Y = B$ gehörigen bestimmten f, f' u.s.w., g u.s.w. schreiben, und zur Abkürzung noch setzen

$$\cos B = c$$
$$\sin B = s$$
$$\sqrt{(1 - ee\sin B^2)} = k,$$

folgende achtzehn Werthe:

$$f = -\frac{k\sin T}{ac}.s$$

$$f' = -\frac{k\cos T}{ac}\cdot s$$

$$f'' = -\frac{\sin T}{akcc}\cdot(1 - 2\,ee\,ss + ee\,s^4)$$

$$f''' = +\frac{k\sin T}{ac}\cdot s$$

$$f^{\text{iv}} = -\frac{\cos T}{akcc}\cdot(1 - 2\,ee\,ss + ee\,s^4)$$

$$f^{\text{v}} = -\frac{\sin T}{ak^3c^3}\cdot((2-3\,ee)\,s + (ee+2\,e^4)\,s^3 - (2\,ee+e^4)\,s^5 + e^4 s^7)$$

$$g = -\frac{k^3\cos T}{a(1-ee)}$$

$$g' = +\frac{k^3\sin T}{a(1-ee)}$$

$$g'' = +\frac{3\,k\,ee\cos T}{a(1-ee)}\cdot cs$$

$$g''' = +\frac{k^3\cos T}{a(1-ee)}$$

$$g^{\text{iv}} = -\frac{3\,k\,ee\sin T}{a(1-ee)}\cdot cs$$

$$g^{\text{v}} = +\frac{3\,ee\cos T}{a(1-ee)\,k}\cdot(1 - (2+2\,ee)\,ss + 3\,ee\,s^4)$$

$$h = -\frac{k\sin T}{ac}$$

$$h' = -\frac{k\cos T}{ac}$$

$$h'' = -\frac{\sin T}{acck}\cdot(1-ee)\,s$$

$$h''' = +\frac{k\sin T}{ac}$$

$$h^{\text{iv}} = -\frac{\cos T}{acck}\cdot(1-ee)\,s$$

$$h^{\text{v}} = -\frac{(1-ee)\sin T}{ac^3k^3}\cdot(1 + ss - 2\,ee\,s^4).$$

29.

Wir wollen nun die drei Gleichungen (7), (8), (6) in folgende Form setzen

$$t = -fr\,(1 + Frr)$$
$$b = -gr\,(1 + Grr)$$
$$l = -hr\,(1 + Hrr),$$

wo

$$-fr = \frac{k \sin T \,.\, \text{tang}\, B}{a} \,.\, r$$
$$-gr = \frac{k^3 \cos T}{a(1-ee)} \,.\, r$$
$$-hr = \frac{k \sin T}{a \cos B} \,.\, r$$

beziehungsweise die genäherten und bis auf die dritte Ordnung ausschl. genauen Werthe von t, b, l sind, die zur Abkürzung mit τ, β, λ bezeichnet werden sollen. Jede der Grössen F, G, H ist das Aggregat von sieben Theilen, nemlich

$$F = -\tfrac{1}{12} f'f' - \frac{f'f''g}{12f} - \tfrac{1}{12} f''g' - \frac{f''gg''}{12f} + \tfrac{1}{24} ff''' + \tfrac{1}{12} f^{\text{iv}}g + \frac{f^{\text{v}}gg}{24f}$$
$$G = -\frac{ff'g'}{12g} - \tfrac{1}{12} f''g' - \frac{fg'g''}{12g} - \tfrac{1}{12} g''g'' + \frac{ffg'''}{24g} + \tfrac{1}{12} fg^{\text{iv}} + \tfrac{1}{24} gg^{\text{v}}$$
$$H = -\frac{ff'h'}{12h} - \frac{f''gh'}{12h} - \frac{fg'h''}{12h} - \frac{gg''h''}{12h} + \frac{ffh'''}{24h} + \frac{fgh^{\text{iv}}}{12h} + \frac{ggh^{\text{v}}}{24h}.$$

30.

Die Werthe der sieben Bestandtheile von F ergeben sich der Reihe nach

1) $-\dfrac{kk \cos T^2}{12\, aa\, cc} \,.\, ss$

2) $-\dfrac{kk \cos T^2}{12\, aa\,(1-ee)\, cc} \,.\, (1 - 2\, ee\, ss + ee\, s^4)$

3) $+\dfrac{kk \sin T^2}{12\, aa\,(1-ee)\, cc} \,.\, (1 - 2\, ee\, ss + ee\, s^4)$

4) $+\dfrac{ee\, kk \cos T^2}{4\, aa\,(1-ee)^2} \,.\, (1 - 2\, ee\, ss + ee\, s^4)$

5) $-\dfrac{kk \sin T^2}{24\, aa\, cc} \,.\, ss$

$$6)\ + \frac{kk \cos T^2}{12\, aa\, (1 - ee)\, cc} \cdot (1 - 2\, ee\, ss + ee\, s^4)$$

$$7)\ + \frac{kk \cos T^2}{24\, aa\, (1 - ee)^2\, cc} \cdot (2 - 3\, ee + (ee + 2\, e^4)\, ss - (2\, ee + e^4)\, s^4).$$

Hier destruiren die Bestandtheile 2 und 6 einander; 1, 4 und 7 vereinigen sich zu

$$+ \frac{kk \cos T^2}{24\, aa\, (1 - ee)^2} \cdot (2 + 3\, ee + (2\, ee - 12\, e^4)\, ss + 5\, e^4 s^4),$$

die Bestandtheile 3 und 5 hingegen zu

$$+ \frac{kk \sin T^2}{24\, aa\, (1 - ee)\, cc} \cdot (2 - (1 + 3\, ee)\, ss + 2\, ee\, s^4),$$

oder, da $2 - (1 + 3\, ee)\, ss + 2\, ee\, s^4$ identisch ist mit $2\, cc\, kk + (1 - ee)\, ss$, zu

$$+ \frac{k^4 \sin T^2}{12\, aa\, (1 - ee)} + \frac{kk \sin T^2}{24\, aa\, cc} \cdot ss.$$

Indem man nun noch $\dfrac{k^4 \sin T^2}{12\, aa\, (1 - ee)}$ in

$$\frac{k^4}{12\, aa\, (1 - ee)} - \frac{k^4 \sin T^2}{12\, aa\, (1 - ee)}$$

verwandelt, und alles vereinigt, erhält man

$$F = \frac{k^4}{12\, aa\, (1 - ee)} + \frac{kk \sin T^2 \operatorname{tang} B^2}{24\, aa}$$
$$+ \frac{kk \cos T^2}{24\, aa\, (1 - ee)^2} \cdot (5\, ee + (4\, ee - 14\, e^4)\, ss + 5\, e^4 s^4)$$

und hieraus, in Gemässheit von $t = \tau\,(1 + Frr)$,

$$t = \tau\,\Big(1 + \frac{k^4}{12\, aa\, (1 - ee)} \cdot rr + \tfrac{1}{24}\, \tau\tau + \frac{1}{24\, k^4}\, (5\, ee + (4\, ee - 14\, e^4)\, ss$$
$$+ 5\, e^4 s^4)\, \xi\xi\Big) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

31.

Für die sieben Bestandtheile von G ergeben sich folgende Werthe:

$$1)\ + \frac{kk \sin T^2}{12\, aa\, cc} \cdot ss$$

$$2)\ + \frac{kk \sin T^2}{12\, aa\, (1 - ee)\, cc} \cdot (1 - 2\, ee\, ss + ee\, s^4)$$

$$3)\ - \frac{ee\, kk \sin T^2}{4\, aa\, (1 - ee)} \cdot ss$$

$$4)\quad -\frac{3\,e^4\,kk\cos T^2}{4\,aa\,(1-ee)^2}\,.\,cc\,ss$$

$$5)\quad -\frac{kk\sin T^2}{24\,aa\,cc}\,.\,ss$$

$$6)\quad +\frac{ee\,kk\sin T^2}{4\,aa\,(1-ee)}\,.\,ss$$

$$7)\quad -\frac{ee\,kk\cos T^2}{8\,aa\,(1-ee)^2}\,.\,(1-(2+2\,ee)\,ss+3\,ee\,s^4).$$

Hier destruiren die Theile 3 und 6 einander; die übrigen vereinigen sich, indem man einerseits 1, 2 und 5, andererseits 4 und 7 zusammenfasst, in

$$+\frac{kk\sin T^2}{24\,aa\,(1-ee)\,cc}\,.\,(2+(1-5\,ee)\,ss+2\,ee\,s^4)$$

$$-\frac{ee\,kk\cos T^2}{8\,aa\,(1-ee)^2}\,.\,(1-(2-4\,ee)\,ss-3\,ee\,s^4).$$

Das erste Glied verwandelt sich, da $2+(1-5\,ee)\,ss+2\,ee\,s^4$ mit $2\,cc\,kk+3\,(1-ee)\,ss$ identisch ist, in

$$\frac{k^4\sin T^2}{12\,aa\,(1-ee)}+\frac{kk\sin T^2}{8\,aa\,cc}\,.\,ss.$$

Lösen wir hier $\frac{k^4\sin T^2}{12\,aa\,(1-ee)}$ in $\frac{k^4}{12\,aa\,(1-ee)}-\frac{kk\cos T^2}{12\,aa\,(1-ee)}\,.\,(1-ee\,ss)$ auf, so gibt die Vereinigung aller Theile

$$G=\frac{k^4}{12\,aa\,(1-ee)}+\frac{kk\sin T^2\tan B^2}{8\,aa}$$

$$-\frac{kk\cos T^2}{24\,aa\,(1-ee)^2}\,.\,(2+ee-(8\,ee-14\,e^4)\,ss-9\,e^4\,s^4)$$

und hieraus, in Gemässheit von $b=\mathfrak{G}\,(1+Grr)$,

$$b=\mathfrak{G}\,(1+\frac{k^4}{12\,aa\,(1-ee)}\,.\,rr+\tfrac{1}{8}\,\tau\tau$$

$$-\frac{1}{24\,k^4}\,.\,(2+ee-(8\,ee-14\,e^4)\,ss-9\,e^4\,s^4)\,\mathfrak{G}\mathfrak{G})\ \ldots\ (10).$$

32.

Endlich ergeben sich die Werthe der sieben Bestandtheile von H folgendermaassen:

$$1)\quad -\frac{kk\cos T^2}{aa\,cc}\,.\,ss$$

$$2)\quad -\frac{kk\cos T^2}{12\,aa\,(1-ee)\,cc}.(1-2\,ee\,ss+ee\,s^4)$$

$$3)\quad +\frac{kk\sin T^2}{12\,aa\,cc}.ss$$

$$4)\quad +\frac{ee\,kk\cos T^2}{4\,aa\,(1-ee)}.ss$$

$$5)\quad -\frac{kk\sin T^2}{24\,aa\,cc}.ss$$

$$6)\quad +\frac{kk\cos T^2}{12\,aa\,cc}.ss$$

$$7)\quad +\frac{kk\cos T^2}{24\,aa\,(1-ee)\,cc}.(1+ss-2\,ee\,s^4).$$

Die Glieder 1 und 6 destruiren einander; die übrigen ergeben durch ihre Vereinigung

$$H=\frac{kk\sin T^2}{24\,aa\,cc}.ss-\frac{kk\cos T^2}{24\,aa\,(1-ee)}.(1-10\,ee\,ss),$$

woraus, in Gemässheit von $l=\lambda\,(1+Hrr)$ hervorgeht

$$l=\lambda\,(1+\tfrac{1}{24}\tau\tau-\frac{1-ee}{24\,k^4}.(1-10\,ee\,ss)\,\beta\beta)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11).$$

Die Formeln 9, 10, 11, welche die Auflösung unsrer Aufgabe in sich fassen, unterscheiden sich von den Formeln III, II, I (Artt. 25, 24, 23) bloss darin, dass jene innerhalb der Parenthesen da τ und β haben, wo in diesen t und b steht, was, wie man leicht sieht, in den Endresultaten nur Unterschiede fünfter Ordnung hervorbringt: da nun jene, wie aus ihrer Ableitung erhellet, bis zur fünften Ordnung ausschl. genau sind, so ist bewiesen, dass auch die nach der ersten Methode gefundenen Formeln I, II, III (Art. 23—25) dieselbe Genauigkeit besitzen.

33.

Zur numerischen Berechnung wird man die Formeln 9, 10, 11 lieber in folgende logarithmische Form bringen, bei welcher offenbar der Grad der Genauigkeit ungeändert bleibt; M bezeichnet darin den Modulus des gewählten Logarithmensystems:

$$\log t=\log\tau+\frac{M\,k^4}{12\,aa\,(1-ee)}.rr+\tfrac{1}{24}M\,\tau\tau+\frac{M}{24\,k^4}(5\,ee+(4\,ee-14\,e^4)\,ss+5\,e^4s^4)\,\beta\beta$$

$$\log b = \log \mathfrak{G} + \frac{Mk^4}{12aa(1-ee)}.rr + \tfrac{1}{8}M\tau\tau - \frac{M}{24k^4}(2+ee-(8ee-14e^4)ss-9e^4s^4)\mathfrak{G}\mathfrak{G}$$

$$\log l = \log \lambda + \tfrac{1}{24}M\tau\tau - \frac{(1-ee)M}{24k^4}(1-10ee\,ss)\mathfrak{G}\mathfrak{G}.$$

Da, wie man leicht sieht, in allen bisher entwickelten Formeln die Grössen t, τ, b, $\mathfrak{G}$, l, λ als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt angenommen sind, so wird man, wenn jene in Secunden ausgedrückt und dieselben Bezeichnungen für sie beibehalten werden sollen, den Formeln für τ, $\mathfrak{G}$, λ (Art. 29) noch den Factor $\frac{1}{\varrho}$ beifügen müssen; in den Gleichungen 9, 10, 11 hingegen, so wie in den daraus abgeleiteten logarithmischen, muss den Gliedern, die $\tau\tau$ oder $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ enthalten, noch der Factor $\varrho\varrho$ zugesetzt werden, wo ϱ (eben so wie oben Art. 16 und 19) die Grösse des Bogens von einer Secunde in Theilen des Halbmessers bedeutet. Behält man nun auch noch μ in der oben gebrauchten Bedeutung bei, nemlich

$$\mu = \tfrac{1}{12}M\varrho\varrho$$

und schreibt zur Abkürzung

$$(1) = \frac{k}{a\varrho}$$

$$(2) = \frac{k^3}{a(1-ee)\varrho}$$

$$(3) = \frac{Mk^4}{12aa(1-ee)}$$

$$(4) = \frac{\mu}{2k^4}(5ee+(4ee-14e^4)ss+5e^4s^4)$$

$$(5) = \frac{\mu}{2k^4}(2+ee-(8ee-14e^4)ss-9e^4s^4)$$

$$(6) = \frac{(1-ee)\mu}{2k^4}(1-10ee\,ss)$$

$$(7) = \tfrac{1}{2}\mu,$$

so ist unsre Auflösung in folgenden sechs Formeln enthalten:

$$\tau = (1)\,r\sin T\tang B$$

$$\mathfrak{G} = (2)\,r\cos T$$

$$\lambda = (1)\,r\sin T\sec B$$

$$\log t = \log\tau + (3)\,rr + (4)\,\mathfrak{G}\mathfrak{G} + (7)\,\tau\tau$$

$$\log b = \log\mathfrak{G} + (3)\,rr - (5)\,\mathfrak{G}\mathfrak{G} + 3\,(7)\,\tau\tau$$

$$\log l = \log\lambda - (6)\,\mathfrak{G}\mathfrak{G} + (7)\,\tau\tau.$$

34.

Von den sieben Coëfficienten (1), (2) u. s. w. ist der letzte constant, nemlich

$$\log\,(7) = 7{,}6287228032\ (-20)$$

und

$$\log 3(7) = 8{,}1058440580\ (-20),$$

die übrigen werden, sobald bestimmte Werthe für die Dimensionen des Ellipsoids gewählt sind, Functionen der Breite B, und lassen sich also in eine Tafel bringen, deren Argument B ist. Steht eine solche Tafel zu Gebote, so ist die Rechnung nach dieser Methode für das Ellipsoid eben so bequem, wie die Rechnung für die Kugel.

Ich füge am Schlusse dieser Abhandlung eine solche Tafel für die Zone von 51^0 bis 54^0 bei, in welcher die Werthe von B von Minute zu Minute fortschreiten, und bemerke dazu folgendes.

Von den Ellipsoidelementen ist die Tafel nur in so fern abhängig, als darin eine bestimmte Abplattung oder ein bestimmter Werth von e zum Grunde gelegt ist, derjenige nemlich, welchen die letzte von Bessel ausgeführte Rechnung ergeben hat, und der auch der der ersten Abhandlung beigefügten Tafel zum Grunde liegt (s. Art. 5). Damit der Zahlenwerth von a bloss von der Abplattung abhängig werde, ist als Einheit nicht die Toise oder ein sonstiges willkürliches Maass angenommen, sondern der zehnmillionste Theil des Erdmeridians, wonach also a unmittelbar durch e vermittelst der Gleichung

$$\pi a\left(1 - \frac{1}{4}ee - \frac{1.3}{4.16}e^4 - \frac{1.3.15}{4.16.36}e^6 - \frac{1.3.15.35}{4.16.36.64}e^8 - \frac{1.3.15.35.63}{4.16.36.64.100}e^{10} - \text{u. s. w.}\right) = 20000000,$$

deren Gesetz offenbar ist, gefunden werden kann, oder vermittelst der ihr gleichgeltenden

$$a = \frac{20000000}{\pi}\left(1 + \frac{1}{4}ee + \frac{7}{64}e^4 + \frac{15}{256}e^6 + \frac{579}{16384}e^8 + \frac{1515}{65536}e^{10} + \text{u. s. w.}\right).$$

Man findet so, mit jenem Werthe von e,

$$a = 6376851{,}447$$

$$\log a = 6{,}8046062999.$$

Es versteht sich, dass bei Anwendung unsrer Tafel auch r erst in derselben Einheit ausgedrückt sein muss; um dies zu erreichen, wird man (gemäss dem von Bessel in Toisen angegebenen Werthe von a, Art. 5), wenn r ursprünglich in Toisen ausgedrückt war, zu dem Logarithmen hinzuzusetzen haben

$$0{,}2897827662,$$

oder, wenn r ursprünglich in französischen gesetzlichen Metern gegeben war, wird von dem Logarithmen subtrahirt werden müssen

$$0{,}0000371638.$$

Die Glieder, welche die Factoren (3), (4) u.s.w. enthalten, können als Correctionen betrachtet werden, durch welche die genäherten Logarithmen $\log\tau$, $\log\mathfrak{G}$, $\log\lambda$ in die berichtigten $\log t$, $\log b$, $\log l$ verwandelt werden. Diese Correctionen sind in allen Fällen, für welche unsere Methode angewandt werden soll, nur sehr kleine Decimalbrüche, und da jene Logarithmen in der Regel siebenzifrig gerechnet werden, so ist es bequem, auch jene Correctionen sofort in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückt zu erhalten. Dies geschieht, indem man den Coëfficienten (3), (4) u. s. w. anstatt der im vorhergehenden Art. angegebenen Werthe zehnmillionenmahl grössere beilegt, oder ihre Logarithmen um sieben Einheiten vergrössert. Auf diese Weise sind sie in unserer Tafel angesetzt, und so wird denn auch

$$\log\,(7) = 4{,}62872\ (-10)$$
$$\log 3(7) = 5{,}10584\ (-10)$$

gesetzt werden. Übrigens sind auch so noch (3), (4), (5), (6), eben so wie (1) und (2) ächte Brüche, oder ihre Logarithmen an sich negativ: in der Tafel stehen sie aber nach üblicher Art, indem sämmtlichen Logarithmen 10 Einheiten geborgt sind.

35.

Von der Benutzung unsrer Formeln zur Auflösung der zu Anfang dieser Abhandlung aufgestellten Aufgabe gilt nun alles, was oben (Art. 20) in Beziehung auf dieselbe Aufgabe für die Kugelfläche gesagt ist, fast unverändert und unter geringen Modificationen. Bezeichnet man die wirklich gegebenen Grössen, nemlich die Breite und das Azimuth an dem ersten Orte mit B^0 und T^0, so wird man zuerst, von einem genäherten Werthe von T ausgehend (wofür man in Ermangelung aller andern Kenntniss T^0 annehmen mag), die vier Formeln berechnen

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= (2)\, r \cos T \\ B &= B^0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{G} \\ \tau &= (1)\, r \sin T \operatorname{tang} B \\ T &= T^0 - \tfrac{1}{2}\tau \end{aligned}$$

und zwar wird man den Werth von (2), der aus der Tafel mit dem Argument B entnommen werden sollte, das erstemahl mit dem Argument B^0 entnehmen können, wenn man nicht durch Schätzung einen schon mehr genäherten Werth von B anticipiren zu können glaubt; den Werth von (1) nimmt man aus der Tafel mit dem eben gefundenen Werthe von B.

Dieselbe Rechnung wiederhohlt man mit dem durch die vierte Gleichung gefundenen Werthe von T, indem man (1) und (2) mit dem schon verbesserten B aus der Tafel entlehnt, und so macht man nöthigenfalls eine abermahlige Wiederhohlung, bis das Resultat zum Stehen kommt, d. i. bis man durch die vierte Formel denselben Werth von T wiedererhält, von dem man zuletzt ausgegangen war. Zu allen diesen Rechnungen wird man nur fünfzifrige Logarithmen verwenden.

Bei den weitern Wiederhohlungen wird man die Rechnung mit siebenzifrigen Logarithmen führen, die logarithmischen Correctionen von $\log \tau$ und $\log \mathfrak{G}$ mit zuziehen, und $B = B^0 - \frac{1}{2}b$, $T = T^0 - \frac{1}{2}t$ setzen. Erst wenn auch diese Rechnung stehende Resultate gegeben hat, wird man auch λ und l nach den am Schluss des 33. Art. gegebenen Formeln berechnen. Zur Erläuterung dieser Vorschriften mögen hier die Hauptmomente eines Beispiels stehen, welches eben so wie oben Art. 20 bei der sphärischen Rechnung von der Dreiecksseite Brocken-Inselsberg hergenommen ist.

Bei der ellipsoidischen Rechnung ist die Breite des Brockens $= 51^0 48' 1'' 9294 = B^0$, das Azimuth der Seite Brocken-Inselsberg $= 5^0 42' 21'' 7699 = T^0$. Der Logarithm der Dreiecksseite in Toisen ist bis auf die siebente Decimale derselbe wie in der conformen Darstellung auf der Kugelfläche, nemlich $= 4{,}7353929$, folglich in der unsrer Hülfstafel zum Grunde liegenden Einheit $\log r = 5{,}0251757$.

Wenn man, Behuf der ersten Annäherung, $T = 5^0 42' 22''$, und aus der Tafel mit Argument $51^0 48'$ den Logarithmen von $(2) = 8{,}51004$ setzt, so findet sich $\mathfrak{G} = 3412''$, $B = 51^0 19' 36''$; und, wenn man hiemit

$\log(1) = 8{,}50893$ setzt, $\tau = 425$ und $T = 5^0\,38'\,49''$. Eine neue Rechnung mit diesem Werthe, wobei man (mit dem vorher gefundenen Werthe von B) $\log(2) = 8{,}51007$ setzt, ergibt

$$\mathfrak{G} = 3413'', \quad B = 51^0\,19'\,35'', \quad \tau = 420''\,5, \quad T = 5^0\,38'\,51''\,5.$$

Mit dem gefundenen Werthe von B entlehnt man aus der Tafel

$$\begin{aligned} \log(1) &= 8{,}5089337 \\ \log(2) &= 8{,}5100716 \\ \log(3) &= 1{,}94876 \\ \log(4) &= 3{,}32553 \\ \log(5) &= 4{,}92770 \\ \log(6) &= 4{,}61132. \end{aligned}$$

Mit $T = 5^0\,38'\,51''\,5$ findet sich zuvörderst $\log \mathfrak{G} = 3{,}5331341$, oder $\mathfrak{G} = 3412''\,983$, und indem man hier noch einmahl $\mathfrak{G}$ anstatt b anwendet, $B = 51^0\,19'\,35''\,4379$. Hiemit ferner $\log \tau = 2{,}6238475$. Hiernächst findet man, in Einheiten der siebenten Decimale

$$\begin{aligned} (3)\,rr &= 99{,}80 \\ (4)\,\mathfrak{G}\mathfrak{G} &= 2{,}46 \\ (5)\,\mathfrak{G}\mathfrak{G} &= 98{,}62 \\ (6)\,\mathfrak{G}\mathfrak{G} &= 47{,}60 \\ 3(7)\,\tau\tau &= 2{,}26 \\ (7)\,\tau\tau &= 0{,}75 \end{aligned}$$

und hiemit die logarithmischen Correctionen

$$\begin{aligned} \text{von} \quad \log \mathfrak{G} \ldots\ldots & + 3 \\ \log \tau \ldots\ldots & + 103 \\ \log \lambda \ldots\ldots & - 47. \end{aligned}$$

Man hätte diese Rechnung auch schon mit den frühern Werthen von $\log \mathfrak{G}$ und $\log \tau$ machen können, ohne ein anderes Resultat zu erhalten; es würde dann sogleich mit $\log b = 3{,}5331344$ der Werth von $b = 3412''\,985$, und $B = 51^0\,19'\,35''\,4369$ sich ergeben haben. Auf $\log \tau$ hat dies keinen ändernden Einfluss; wir haben mithin $\log t = 2{,}6238578$, $t = 420''\,5889$, $T = 5^0\,38'\,51''\,4755$. Wollte man mit diesem Werthe von T die Rechnung noch einmahl durchgehen, so würde B keine Änderung erleiden; für $\log \tau$ würde man finden $2{,}6238470$, also $\log t = 2{,}6238573$, $t = 420''\,5884$, mithin $T = 5^0\,38'\,51''\,4757$. Eine nochmahlige Rechnung mit diesem Werthe würde gar keine Änderung hervorbringen, und offenbar hätte man auch bei dem vorhergehenden Resultate schon stehen bleiben können, da bei der Anwendung siebenzifriger Logarithmen die vierte Decimale der Secunde um eine oder einige Einheiten schwankend bleiben kann. Das Endresultat ist also

Breite von Inselsberg $= B^0 - b = 50^0 51' 8'' 9444$.

Azimuth der Seite Inselsberg-Brocken $= 180^0 + T^0 - t$
$= 185^0 35' 21'' 1815$.

Endlich findet sich für den Längenunterschied

$$\log \lambda = 2{,}7313519$$
$$\log l = 2{,}7313472$$
$$l = 538'' 7002 = 0^0 8' 58'' 7002.$$

Es ist übrigens nicht nöthig, hier die am Schluss des Art. 20 gemachten Bemerkungen zu wiederhohlen, welche auch hier ihre vollkommene Geltung behalten.

T a f e l.

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
51° 0′	8,5089417	8,5100959	1,94879	3,32421	4,92773	4,61145
1	13	47	79	27	73	45
2	09	34	79	34	73	44
3	05	22	79	41	72	43
4	8,5089401	8,5100909	78	48	72	43
5	8,5089397	8,5100897	78	55	72	42
6	93	85	78	61	72	41
7	88	72	78	68	72	41
8	84	60	78	75	72	40
9	80	47	78	82	71	39
10	8,5089376	8,5100835	1,94877	3,32488	4,92771	4,61138
11	72	23	77	3,32495	71	38
12	68	8,5100810	77	3,32502	71	37
13	64	8,5100798	77	09	71	36
14	59	85	77	15	71	36
15	55	73	77	22	70	35
16	51	61	76	29	70	34
17	47	48	76	36	70	34
18	43	36	76	42	70	33
19	39	23	76	49	70	32
20	8,5089335	8,5100711	1,94876	3,32556	4,92770	4,61132
21	31	8,5100699	76	63	69	31
22	26	86	75	69	69	30
23	22	74	75	76	69	29
24	18	61	75	83	69	29
25	14	49	75	90	69	28
26	10	37	75	3,32596	69	27
27	06	24	75	3,32603	68	27
28	8,5089302	12	74	10	68	26
29	8,5089298	8,5100600	74	17	68	25
30	8,5089293	8,5100587	1,94874	3,32623	4,92768	4,61125
31	89	75	74	30	68	24
32	85	62	74	37	68	23
33	81	50	74	44	67	23
34	77	38	73	50	67	22
35	73	25	73	57	67	21
36	69	13	73	64	67	20
37	65	8,5100501	73	70	67	20
38	60	8,5100488	73	77	67	19
39	56	76	73	84	66	18
40	8,5089252	8,5100463	1,94872	3,32691	4,92766	4,61118

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
51° 40′	8,5089252	8,5100463	1,94872	3,32691	4,92766	4,61118
41	48	51	72	3,32697	66	17
42	44	39	72	3,32704	66	16
43	40	26	72	11	66	16
44	36	14	72	17	66	15
45	32	8,5100402	72	24	65	14
46	27	8,5100389	71	31	65	14
47	23	77	71	37	65	13
48	19	65	71	44	65	12
49	15	52	71	51	65	11
50	8,5089211	8,5100340	1,94871	3,32757	4,92765	4,61111
51	07	28	71	64	64	10
52	8,5089203	15	70	71	64	09
53	8,5089199	8,5100303	70	78	64	09
54	95	8,5100291	70	84	64	08
55	90	78	70	91	64	07
56	86	66	70	3,32798	64	07
57	82	54	70	3,32804	63	06
58	78	41	69	11	63	05
59	74	29	69	18	63	05
52 0	8,5089170	8,5100217	1,94869	3,32824	4,92763	4,61104
1	66	8,5100204	69	31	63	03
2	62	8,5100192	69	38	63	02
3	58	80	69	44	62	02
4	53	67	68	51	62	01
5	49	55	68	58	62	00
6	45	43	68	64	62	4,61100
7	41	30	68	71	62	4,61099
8	37	18	68	78	62	98
9	33	8,5100106	68	84	61	98
10	8,5089129	8,5100094	1,94868	3,32891	4,92761	4,61097
11	25	81	67	3,32898	61	96
12	21	69	67	3,32904	61	96
13	17	57	67	11	61	95
14	12	44	67	17	61	94
15	08	32	67	24	60	94
16	04	20	67	31	60	93
17	8,5089100	8,5100007	66	37	60	92
18	8,5089096	8,5099995	66	44	60	91
19	92	83	66	51	60	91
20	8,5089088	8,5099971	1,94866	3,32957	4,92760	4,61090

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
52° 20′	8,5089088	8,5099971	1,94866	3,32957	4,92760	4,61090
21	84	58	66	64	59	89
22	80	46	66	71	59	89
23	76	34	65	77	59	88
24	71	21	65	84	59	87
25	67	8,5099909	65	90	59	87
26	63	8,5099897	65	3,32997	59	86
27	59	85	65	3,33004	58	85
28	55	72	65	10	58	85
29	51	60	64	17	58	84
30	8,5089047	8,5099848	1,94864	3,33024	4,92758	4,61083
31	43	36	64	30	58	83
32	39	23	64	37	58	82
33	35	8,5099811	64	43	57	81
34	31	8,5099799	64	50	57	80
35	27	86	63	57	57	80
36	22	74	63	63	57	79
37	18	62	63	70	57	78
38	14	50	63	76	57	78
39	10	37	63	83	56	77
40	8,5089006	8,5099725	1,94863	3,33090	4,92756	4,61076
41	8,5089002	13	62	3,33096	56	76
42	8,5088998	8,5099701	62	3,33103	56	75
43	94	8,5099688	62	09	56	74
44	90	76	62	16	56	74
45	86	64	62	22	55	73
46	82	52	62	29	55	72
47	78	40	61	36	55	72
48	73	27	61	42	55	71
49	69	15	61	49	55	70
50	8,5088965	8,5099603	1,94861	3,33155	4,92755	4,61070
51	61	8,5099591	61	62	54	69
52	57	78	61	69	54	68
53	53	66	60	75	54	67
54	49	54	60	82	54	67
55	45	42	60	88	54	66
56	41	29	60	3,33195	54	65
57	37	17	60	3,33201	53	65
58	33	8,5099505	60	08	53	64
59	29	8,5099493	59	14	53	63
53 0	8,5088925	8,5099481	1,94859	3,33221	4,92753	4,61063

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
53° 0′	8,5088925	8,5099481	1,94859	3,33221	4,92753	4,61063
1	20	68	59	28	53	62
2	16	56	59	34	53	61
3	12	44	59	41	52	61
4	08	32	59	47	52	60
5	04	20	59	54	52	59
6	8,5088900	8,5099407	58	60	52	59
7	8,5088896	8,5099395	58	67	52	58
8	92	83	58	73	52	57
9	88	71	58	80	51	57
10	8,5088884	8,5099359	1,94858	3,33286	4,92751	4,61056
11	80	46	58	93	51	55
12	76	34	57	3,33299	51	54
13	72	22	57	3,33306	51	54
14	68	8,5099310	57	13	51	53
15	64	8,5099298	57	19	51	52
16	60	86	57	26	50	52
17	55	73	57	32	50	51
18	51	61	56	39	50	50
19	47	49	56	45	50	50
20	8,5088843	8,5099237	1,94856	3,33352	4,92750	4,61049
21	39	25	56	58	50	48
22	35	13	56	65	49	48
23	31	8,5099200	56	71	49	47
24	27	8,5099188	55	78	49	46
25	23	76	55	84	49	46
26	19	64	55	91	49	45
27	15	52	55	3,33397	49	44
28	11	40	55	3,33404	48	44
29	07	27	55	10	48	43
30	8,5088803	8,5099115	1,94854	3,33417	4,92748	4,61042
31	8,5088799	8,5099103	54	23	48	42
32	95	8,5099091	54	30	48	41
33	91	79	54	36	48	40
34	87	67	54	43	47	39
35	83	55	54	49	47	39
36	78	42	53	56	47	38
37	74	30	53	62	47	37
38	70	18	53	69	47	37
39	66	8,5099006	53	75	47	36
40	8,5088762	8,5098994	1,94853	3,33481	4,92746	4,61035

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
53° 40′	8,5088762	8,5098994	1,94853	3,33481	4,92746	4,61035
41	58	82	53	88	46	35
42	54	70	53	3,33494	46	34
43	50	58	52	3,33501	46	33
44	46	45	52	07	46	33
45	42	33	52	14	46	32
46	38	21	52	20	45	31
47	34	8,5098909	52	27	45	31
48	30	8,5098897	52	33	45	30
49	26	85	51	40	45	29
50	8,5088722	8,5098873	1,94851	3,33546	4,92745	4,61029
51	18	61	51	53	45	28
52	14	49	51	59	44	27
53	10	36	51	65	44	27
54	06	24	51	72	44	26
55	8,5088702	12	50	78	44	25
56	8,5088698	8,5098800	50	85	44	25
57	94	8,5098788	50	91	44	24
58	90	76	50	3,33598	43	23
59	86	64	50	3,33604	43	23
54 0	8,5088682	8,5098752	1,94850	3,33611	4,92743	4,61022

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1845-1847

Band/Volume: 3

Autor(en)/Author(s): Gauss Carl Friedrich

Artikel/Article: Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie. 3-43