Untersuchungen
über
ein Problem der Hydrodynamik.

Von

G. Lejeune Dirichlet.

Aus dessen Nachlass hergestellt von R. Dedekind.

Vorwort.

Ueber die Vollendung und Herausgabe dieser Abhandlung, welche nach dem letzten Willen des Verfassers mir übertragen worden ist, sind einige Bemerkungen vorauszuschicken. Das hier behandelte hydrodynamische Problem, dessen Lösung aus dem Winter 1856—57 stammt, wurde in kurzen Zügen zuerst am Schlusse der Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen im Juli 1857 vorgetragen, und gleichzeitig wurde das Hauptresultat der ganzen Untersuchung in den Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften durch eine kurze Anzeige veröffentlicht. Die vollständige Darstellung verzögerte sich aber, theils durch den Wunsch des Verfassers, den Gegenstand in seinen Einzelheiten noch mehr zu durchforschen, theils durch die Beschäftigung mit andern Arbeiten, bis die plötzliche Krankheit und der zu frühe Tod die Vollendung unmöglich machten. Unter den hinterlassenen Papieren, die sich auf diesen Gegenstand beziehen, und die am 21. Juli 1859 in meine Hände gelangten, fand sich zunächst ein so sorgfältig ausgeführtes Manuscript, dass es ohne die geringste Aenderung dem Druck übergeben werden konnte; nur ist es sehr zu beklagen, dass auch in diesem Bruchstück die Einleitung, welche der Erörterung einiger allgemeiner Eigenschaften der hydrodynamischen Grundgleichungen gewidmet war, unvollendet geblieben ist. Ausser diesem Manuscript, welches in der folgenden Anordnung bis gegen den Schluss des §. 3 reicht, fand sich eine grosse Menge einzelner Papiere, mit flüchtig hingeworfenen Formeln ohne Text, deren Bedeutung aber leicht zu erkennen war. Zum grössten Theil waren es Wiederholungen des schon Dargestellten, und nur selten ergab sich aus ihnen ein Anhaltspunct für die weitere Ausführung. Indessen fiel es mit Hülfe dieser Papiere nicht schwer, die sieben Integralzeichnungen erster Ordnung aufzufinden, welche in der vorläufigen Anzeige der Abhandlung erwähnt sind; sie finden sich in §. 5 der folgenden Darstellung. Ausserdem wiesen zahlreiche Stellen auf den in §. 8 behandelten Fall hin, wenn auch nirgends sich eine Discussion vorfand; ich habe ihn (in §. 6) mit dem andern in §. 7 untersuchten zu verbinden gesucht, der seiner Einfachheit halber auch in der schon erwähnten vorläufigen Anzeige mitgetheilt ist. Ferner gaben, wie aus den sämmtlich von mir hinzugefügten Anmerkungen zu sehen ist, manche Stellen des erwähnten Manuscriptes Veranlassung zur Ausführung mehr mühsamer als schwieriger Rechnungen, die, weil sie für künftige Arbeiten wohl nützlich sein können, ihren Resultaten nach in die Abhandlung aufgenommen sind und so den §. 4 bilden. Nachdem ich sie einmal abgeleitet hatte, dienten sie mir bei einigen weitern Untersuchungen, deren Ergebnisse, so weit sie bis jetzt gelungen sind, ich in dem Schlussparagraphen mittheilen zu dürfen glaubte. Ich verhehle mir nicht, dass trotz aller auf die Arbeit gewendeten Sorgfalt und Liebe, Manches vollständiger und besser hätte ausgeführt werden können; allein ich wollte die Herausgabe nicht noch länger verzögern, um so weniger, da ich vertrauen darf, dass man dieses letzte Werk des grossen Denkers, dem es nicht vergönnt war selbst die Meisterhand an die Darstellung zu legen, auch in der unvollkommenen Form würdigen wird.

Zürich, 10. November 1859.

R. Dedekind.

Bei der Begründung der allgemeinen Gleichungen, durch welche die Bewegung flüssiger Körper bestimmt wird, kann man von zwei verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen. Nach der einen Auffassung des Gegenstandes stellt man sich die Aufgabe, für eine beliebige Stelle (x, y, z) und eine beliebige Zeit t den Zustand der bewegten Masse, d. h. die Dichtigkeit, den Druck und die drei Componenten der Geschwindigkeit auszumitteln und diese fünf Grössen als Funktionen der vier Veränderlichen x, y, z, t zu bestimmen. Dem eben erwähnten Gesichtspunkt entsprechen die Grundgleichungen der Hydrodynamik, welche man in allen Lehrbüchern findet und welche Euler zuerst aufgestellt hat[1]. Diese Eulerschen Gleichungen liegen auch einer grossen Abhandlung zu Grunde, welche Lagrange mehr als zwanzig Jahre später in derselben akademischen Sammlung[2] veröffentlicht hat und aus welcher er später mit einigen Zusätzen den Abschnitt seiner Mécanique analytique gebildet hat, welcher der Hydrodynamik gewidmet ist. Der wichtigste dieser Zusätze beginnt den erwähnten Abschnitt und betrifft eine von der Eulerschen wesentlich verschiedene Behandlung des Gegenstandes; Lagrange geht nämlich darauf aus, die Bewegung jedes Elementes der Flüssigkeit zu verfolgen, d. h. die Coordinaten x, y, z, den Druck und die Dichtigkeit dieses Elementes durch seine anfänglichen Coordinaten a, b, c und die seit dem Anfang der Bewegung verflossene Zeit t zu bestimmen. Merkwürdiger Weise macht jedoch

---

1) Principes généraux du mouvement des fluides (Histoire de l'Acad. de Berlin Année 1755).

2) Mémoire sur la Théorie du mouvement des fluides (Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin; Année 1781).

Lagrange von den diesem Gesichtspunkt entsprechenden Gleichungen gar keinen Gebrauch; nachdem er nämlich bemerkt hat, dass sie etwas complicirt seyen, formt er seine Gleichungen in die Eulerschen um, und fügt dann hinzu, dass die letzteren wegen ihrer grösseren Einfachheit zur Lösung besonderer Aufgaben vorzugsweise geeignet seyen. Ich muss jedoch gestehen, dass mir der Vorzug, welchen Lagrange den Eulerschen Gleichungen vor den seinigen einräumt, durchaus nicht begründet scheint, indem jene eine Eigenthümlichkeit darbieten, von welcher die letzteren frei sind und durch welche die einfachere Form mehr als aufgewogen wird.

Die Eigenthümlichkeit, von welcher ich rede und die Lagrange völlig übersehen zu haben scheint, besteht darin, dass die Coordinaten x, y, z nicht unabhängige Variabele im eigentlichen Sinne des Wortes sind, da die Ausdehnung, in welcher sie gelten, die des Raumes ist, welchen die bewegte Masse jeden Augenblick einnimmt, und folglich durch die ganze vorangegangene Bewegung bestimmt wird. Es ist aus diesem Umstande leicht ersichtlich, in welche Schwierigkeiten die Anwendung der Eulerschen Gleichungen auf besondere Probleme verwickeln muss, da wir jetzt wissen, was freilich zur Zeit des Erscheinens der Mécanique analytique noch nicht erkannt war, ein wie wesentliches Element für die Bestimmung von Funktionen mehrerer Veränderlichen, welche durch partielle Differentialgleichungen und andere der besonderen Frage angehörige Bedingungen definirt werden, der Umfang bildet, welcher diesen Veränderlichen zukommt. Der Vorzug der Eulerschen Form scheint auf den Fall beschränkt, wo die flüssige Masse im Laufe der Bewegung dieselbe äussere Gestalt behält, auf welchen Fall übrigens auch der leicht zurückgeführt wird, wo sich ein fester Körper in einer unendlichen Flüssigkeit bewegt.

Dass die erwähnte Eigenthümlichkeit der von Euler gegebenen Gleichungen Lagrange entgangen ist, hat einige Unrichtigkeiten zur Folge gehabt, von welchen ich die wesentlichste hier erwähnen zu müssen glaube, da sie in alle Lehrbücher übergegangen ist und wissenschaftliche Irrthümer um so schwerer verschwinden, je grösser die Autorität ist, unter deren Schutz sie stehen. Schon Euler hatte in der oben citirten Abhandlung bemerkt, dass seine Grundgleichungen sich sehr vereinfachen und auf eine zurückkommen, wenn für die ganze Dauer der Bewegung sowohl die drei Componenten der Geschwindigkeit als die der beschleunigenden Kraft die nach den drei Coordinaten genommenen partiellen Differentialquotienten derselben Funktion dieser Coordinaten sind, und diese Bemerkung ist von Lagrange durch den richtigen Zusatz vervollständigt worden, dass die eben ausgesprochene Voraussetzung immer für die Componenten der Geschwindigkeit von selbst Statt findet, wenn sie nur für den Anfang der Bewegung gilt und überdies die Componenten der Kraft zu jeder Zeit dieselbe Bedingung erfüllen [1]).

---

1) Hier bricht leider das Manuscript vollständig ab, und es war nirgends eine Andeutung über die weitere Ausführung zu finden; doch ist wohl kaum zu zweifeln, dass die beabsichtigte Berichtigung in Folgendem bestehen sollte. Wenn man diejenige Funktion, deren partielle Derivirte die Componenten der wirkenden Kraft liefern, durch partielle Differentiationen aus den drei ersten der von Lagrange gegebenen Grundgleichungen eliminirt, so erhält man drei Resultate, welche eine unmittelbare Integration in Bezug auf die Zeit gestatten; bezeichnet man mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die drei Integrationsconstanten, welche also nur noch von a, b, c abhangen können, so ergeben sich mit Hülfe der vierten Lagrangeschen Gleichung, welche die Incompressibilität der Flüssigkeit ausdrückt, leicht die drei folgenden Gleichungen

$$\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}=\mathfrak{A}\frac{dx}{da}+\mathfrak{B}\frac{dx}{db}+\mathfrak{C}\frac{dx}{dc},\quad \frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}=\mathfrak{A}\frac{dy}{da}+\mathfrak{B}\frac{dy}{db}+\mathfrak{C}\frac{dy}{dc},\quad \frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=\mathfrak{A}\frac{dz}{da}+\mathfrak{B}\frac{dz}{db}+\mathfrak{C}\frac{dz}{dc}$$

in welchen u, v, w die nach den Axen der x, y, z genommenen Componenten der Geschwindigkeit bedeuten. Aus diesen Gleichungen folgt, dass, wenn für ein bestimmtes Element (a, b, c) der flüssigen Masse die Werthe der drei zur Linken stehenden Differenzen anfänglich verschwinden, dasselbe während der ganzen Dauer der Bewegung für das nämliche Massenelement (a, b, c) gelten wird. Ist daher ursprünglich in einem von flüssiger Masse erfüllten Raume — denn nur in einem solchen kommt den Zeichen u, v, w eine wirkliche Bedeutung zu — der Ausdruck $udx + vdy + wdz$ ein vollständiges Differential, so wird dasselbe auch zu jeder spätern Zeit für denjenigen Raum gelten, welcher augenblicklich die nämlichen Elemente der flüssigen Masse enthält. Es haftet daher diese Eigenthümlichkeit der Bewegung nicht sowohl, wie Lagrange zu beweisen glaubte, an dem absoluten Raume, als vielmehr an der Masse. — Die weitere Untersuchung der Bedeutung der drei Integralgleichungen gehört nicht hierher.

§. 1.

Die Grundgleichungen der Hydrodynamik in der Form, welche Lagrange denselben gegeben hat, sind die folgenden, wenn wir uns auf den Fall der Homogeneität beschränken und die Dichtigkeit der Einheit gleich setzen:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{dx}{da} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{dy}{da} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{dz}{da} + \frac{dp}{da} = 0$$

$$1)\quad \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{dx}{db} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{dy}{db} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{dz}{db} + \frac{dp}{db} = 0$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{dx}{dc} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{dy}{dc} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{dz}{dc} + \frac{dp}{dc} = 0$$

$$\Sigma \pm \frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db}\,\frac{dz}{dc} = 1.$$

In diesen Gleichungen sind a, b, c die anfänglichen Coordinaten eines beliebigen Elementes, so dass also der unveränderliche Umfang dieses Systemes von drei Variabeln durch die ursprüngliche Gestalt der Flüssigkeit bestimmt wird, x, y, z bezeichnen für die Zeit t die Coordinaten desselben Elementes, p den Druck, welchen dasselbe erleidet, und X, Y, Z endlich sind die Componenten der auf das Element wirkenden beschleunigenden Kraft. Was die letzte Gleichung betrifft, welche die Incompressibilität der Flüssigkeit ausdrückt, so hat das Summenzeichen in derselben nach der üblichen Bezeichnung die Bedeutung einer Determinante. Wir werden einen Fall behandeln, in welchem die beschleunigende Kraft von der Anziehung der gesammten Masse herrührt und die Elementaranziehung dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist. Bezeichnet daher V zur Zeit t das Potential der Flüssigkeit für den innern Punkt (x, y, z), so dass also V eine Funktion von x, y, z und t ist, und bezeichnet ferner ε die Constante, welche die Anziehung zwischen zwei Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung ausdrückt, so ist

$$X = \varepsilon\,\frac{dV}{dx},\quad Y = \varepsilon\,\frac{dV}{dy},\quad Z = \varepsilon\,\frac{dV}{dz}.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke nehmen die drei ersten Gleichungen folgende Gestalt an

$$
2)\quad
\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{da}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{da}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{da}-\varepsilon\frac{dV}{da}+\frac{dp}{da}=0\\
&\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{db}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{db}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{db}-\varepsilon\frac{dV}{db}+\frac{dp}{db}=0\\
&\frac{dx^2}{dt^2}\frac{dx}{dc}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dc}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dc}-\varepsilon\frac{dV}{dc}+\frac{dp}{dc}=0.
\end{aligned}
$$

Unsere Untersuchung ist auf die Voraussetzung beschränkt, dass die zu bestimmenden Funktionen x, y, z der vier unabhängigen Variabeln a, b, c, t die drei ersten derselben nur linear enthalten, und wir bemerken sogleich, dass wir überall in der Folge unter einem linearen Ausdruck einen solchen verstehen werden, der kein von den Variabeln unabhängiges Glied enthält. Wir haben also:

$$
3)\quad
\begin{aligned}
x &= la + mb + nc\\
y &= l'a + m'b + n'c\\
z &= l''a + m''b + n''c
\end{aligned}
$$

wo die Coefficienten l, m etc. nur von der Zeit t abhängig sind und in Folge der Incompressibilität folgende Gleichung befriedigen müssen

$$\theta = \Sigma \pm lm'n'' = 1.$$

Für $t=0$ fallen x, y, z mit a, b, c zusammen, so dass also $l=m'=n''=1$, während die sechs übrigen dieser Grössen verschwinden. Differenzirt man obige Gleichungen nach t, so erhält man für die Componenten u, v, w der Geschwindigkeit

$$
3^*)\quad
\begin{aligned}
u &= \frac{dx}{dt} = \frac{dl}{dt}a + \frac{dm}{dt}b + \frac{dn}{dt}c\\
v &= \frac{dy}{dt} = \frac{dl'}{dt}a + \frac{dm'}{dt}b + \frac{dn'}{dt}c\\
w &= \frac{dz}{dt} = \frac{dl''}{dt}a + \frac{dm''}{dt}b + \frac{dn''}{dt}c.
\end{aligned}
$$

Die anfänglichen Werthe der Grössen

$$
4)\quad
\begin{matrix}
\frac{dl}{dt}, & \frac{dm}{dt}, & \frac{dn}{dt}\\
\frac{dl'}{dt}, & \frac{dm'}{dt}, & \frac{dn'}{dt}\\
\frac{dl''}{dt}, & \frac{dm''}{dt}, & \frac{dn''}{dt}
\end{matrix}
$$

sind nicht ganz willkührlich, sondern es findet zwischen denselben die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dn''}{dt}\right)_0 = 0$$

Statt, welche man erhält, wenn man $\frac{d\theta}{dt}$ bildet und dann $t = 0$ setzt.

Wir wollen nun zeigen, dass unsere Ausdrücke, in denen 9 unbekannte Funktionen der Zeit t vorkommen, die Bewegung einer flüssigen Masse ausdrücken, deren Elemente sich nach dem Gesetze der Natur anziehen, wenn die Masse ursprünglich die Gestalt eines Ellipsoides hat, die anfängliche Bewegung den Gleichungen (3^a), welche 8 willkührliche Constanten enthalten, gemäss ist und endlich an der Oberfläche ein constanter oder nur von der Zeit abhängiger Druck Statt findet. Lässt man den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Mittelpunkt, die Axen der x, y, z oder a, b, c mit den Hauptaxen des Ellipsoides zusammenfallen, so hat die Gleichung der anfänglichen Oberfläche die Form

$$5)\qquad \frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} + \frac{c^2}{C^2} = 1.$$

Ehe wir weiter gehen, ist zu bemerken, dass unsere Ausdrücke (3) und (4) die bei der Begründung der Gleichungen (1) vorausgesetzte Continuitätsbedingung erfüllen, welche wesentlich darin besteht, dass die Punkte, welche anfänglich eine geschlossene Fläche bilden, auch zu jeder spätern Zeit eine solche bilden, und dass jeder ursprünglich innerhalb oder ausserhalb dieser Fläche liegender Punkt eine ähnliche Lage in Bezug auf die neue Fläche einnimmt. Es ist dies eine Folge daraus, dass zu jedem System bestimmter und endlicher Werthe a, b, c ein eben solches System von Werthen x, y, z und wegen $\theta = 1$ auch umgekehrt gehört.

Löst man die Gleichungen (3) nach a, b, c auf, so erhält man

$$6)\qquad \begin{aligned} a &= \lambda x + \lambda' y + \lambda'' z \\ b &= \mu x + \mu' y + \mu'' z \\ c &= \nu x + \nu' y + \nu'' z \end{aligned}$$

wo λ, λ' etc. wegen $\theta = 1$ Ausdrücke ohne Nenner und die sogenannten aus den 9 Grössen l, m etc. gebildeten partiellen Determinanten sind, so dass also z. B. $\lambda = m'n'' - m''n'$. Setzt man die Werthe a, b, c in obige Gleichung ein, so erhält man zur Bestimmung der Oberfläche zur Zeit t

$$7)\quad \frac{1}{A^2}(\lambda x + \lambda' y + \lambda'' z)^2 + \frac{1}{B^2}(\mu x + \mu' y + \mu'' z)^2 + \frac{1}{C^2}(\nu x + \nu' y + \nu'' z)^2 = 1$$

so dass also bei einer durch die Gleichungen (3) bestimmten Bewegung die anfänglich ellipsoidisch vorausgesetzte Oberfläche auch zu jeder spätern Zeit die Gestalt eines mit dem ursprünglichen concentrischen Ellipsoides hat. Man kann noch hinzufügen, dass Punkte, welche anfänglich ein mit der Oberfläche concentrisches, ähnliches und ähnlich liegendes Ellipsoid bilden, zu jeder andern Zeit in ähnlicher Beziehung zu der jedesmaligen Oberfläche stehen werden. Es soll nun gezeigt werden, dass die Ausdrücke (3) den Gleichungen (2) genügen, wenn die darin enthaltenen Funktionen der Zeit, l, m etc. gehörig gewählt werden. Hierzu ist zunächst erforderlich, dass das Potential V der von dem Ellipsoid (7) begrenzten Masse für einen innern Punkt (x, y, z) bestimmt und dann durch a, b, c ausgedrückt werde. Nach einem bekannten Satze ist das Potential eines auf seine Hauptaxen bezogenen Ellipsoides für einen innern Punkt ein viergliedriger Ausdruck, der ausser einem constanten Theile drei den Quadraten der Coordinaten proportionale Glieder enthält. Um das Potential für unser Ellipsoid (7), welches nicht auf seine Hauptaxen bezogen ist, zu erhalten, müsste man also durch Auflösung einer cubischen Gleichung zu diesen übergehen und dann das für das neue Coordinatensystem geltende Potential durch x, y, z ausdrücken. Bei der eben angedeuteten etwas umständlichen Rechnung stellt sich heraus, dass das Resultat nur symmetrische Verbindungen der Wurzeln der cubischen Gleichung enthält und also ohne Lösung dieser Gleichung aufgestellt werden kann. Man gelangt zu demselben Ergebniss auf weit kürzerem Wege, wenn man sich zur Auffindung des Potentials der Methode des discontinuirlichen Faktors bedient, welche unmittelbar auf ein Ellipsoid angewandt werden kann, welches auf beliebige Axen bezogen ist[1]). Da jedoch der sehr complicirte Ausdruck,

1) Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale (Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin; 1839). — Unter den hinterlassenen Papieren fand sich die folgende vereinzelte Bemerkung: „Als einmal zwi-

welchen man durch die eine oder die andere der angegebenen Verfahrungsarten erhält, zu unserm Zwecke entbehrlich ist, so wollen wir uns bei der Ableitung desselben nicht aufhalten [1]). Es genügt für uns zu bemerken, dass das durch x, y, z ausgedrückte Potential offenbar ausser einem constanten den Werth desselben im Mittelpunkt darstellenden Bestandtheil eine vollständige homogene Funktion des zweiten Grades von x, y, z enthält. Dieselbe Form wird das Potential in Bezug auf a, b, c darbieten, wenn man für x, y, z die Ausdrücke (3) einsetzt. Es ist also

$$V = H - La^2 - Mb^2 - Nc^2 - 2L'bc - 2M'ca - 2N'ab$$

wo $L, M, \ldots N'$ sehr zusammengesetzte, elliptische Integrale enthaltende Funktionen von $l, m, \ldots n''$ bezeichnen. Da hiernach $\frac{dV}{da}, \frac{dV}{db}, \frac{dV}{dc}$ die Variabeln a, b, c nur linear enthalten, und dasselbe von den drei ersten Gliedern in jeder der Gleichungen (2) gilt, so werden diese Gleichungen unabhängig von a, b, c nur bestehen können, wenn der Druck ausser einem von a, b, c unabhängigen Bestandtheil nur Glieder zweiter Ordnung enthält. Da wir nun andrerseits voraussetzen, dass dieser Druck an der ganzen Oberfläche zu derselben Zeit denselben blos von dieser abhängigen Werth P hat, so muss p offenbar die Form

---

schen Jacobi und mir die Rede von der Attraction der Ellipsoide war, mit welchem Problem der grosse Mathematiker sich früher sehr angelegentlich beschäftigt hatte, erwähnte er eines Umstandes, der ihn sehr überrascht hatte, des Umstandes nämlich, dass die Bestimmung der auf einen äussern Punkt ausgeübten Anziehung auch dann nur die Lösung einer einzigen cubischen Gleichung erfordere, wenn das Ellipsoid nicht auf seine Hauptaxen bezogen sei, und legte mir die Frage vor, wie sich die Methode des discontinuirlichen Faktors in dieser Beziehung verhalte. Ich konnte sogleich antworten, dass sich bei Anwendung der eben erwähnten Methode dieselbe Erscheinung zeige, und Jacobi's Bemerkung zugleich durch die Angabe vervollständigen, dass sich für einen innern Punkt gar keine cubische Gleichung einstelle." — Vergl. Anmerkung (1) zu §. 4.

1) Es erschien zweckmässig, die hier und im Folgenden angedeutete, durchaus nicht schwierige Rechnung wirklich auszuführen; die Resultate findet man weiter unten im §. 4.

$$p = P + \sigma\left(1 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} - \frac{c^2}{C^2}\right)$$

haben, wo σ eine nur mit t veränderliche Grösse bezeichnet. Setzt man alle im Vorhergehenden erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen (2) ein, so zerfällt jede derselben in drei neue Gleichungen, indem die mit a, b, c multiplicirten Glieder besonders verschwinden müssen. Man hat also zur Bestimmung der 10 Funktionen der Zeit, $l, m, \ldots n'', \sigma$ die folgenden Gleichungen, welche in gleicher Anzahl sind

$$\text{(a)}\quad \left\{\begin{aligned}
l\frac{d^2l}{dt^2} + l'\frac{d^2l'}{dt^2} + l''\frac{d^2l''}{dt^2} &= -2L\varepsilon + \frac{2\sigma}{A^2}\\
m\frac{d^2m}{dt^2} + m'\frac{d^2m'}{dt^2} + m''\frac{d^2m''}{dt^2} &= -2M\varepsilon + \frac{2\sigma}{B^2}\\
n\frac{d^2n}{dt^2} + n'\frac{d^2n'}{dt^2} + n''\frac{d^2n''}{dt^2} &= -2N\varepsilon + \frac{2\sigma}{C^2}\\
m\frac{d^2n}{dt^2} + m'\frac{d^2n'}{dt^2} + m''\frac{d^2n''}{dt^2} &= -2L'\varepsilon\\
n\frac{d^2m}{dt^2} + n'\frac{d^2m'}{dt^2} + n''\frac{d^2m''}{dt^2} &= -2L'\varepsilon\\
n\frac{d^2l}{dt^2} + n'\frac{d^2l'}{dt^2} + n''\frac{d^2l''}{dt^2} &= -2M'\varepsilon\\
l\frac{d^2n}{dt^2} + l'\frac{d^2n'}{dt^2} + l''\frac{d^2n''}{dt^2} &= -2M'\varepsilon\\
l\frac{d^2m}{dt^2} + l'\frac{d^2m'}{dt^2} + l''\frac{d^2m''}{dt^2} &= -2N'\varepsilon\\
m\frac{d^2l}{dt^2} + m'\frac{d^2l'}{dt^2} + m''\frac{d^2l''}{dt^2} &= -2N'\varepsilon\\
\Sigma \pm lm'n'' &= 1.
\end{aligned}\right.$$

Es ist leicht, die Unbekannte σ zu eliminiren, indem man aus den drei ersten dieser Gleichungen eine Doppelgleichung bildet; der grössern Symmetrie halber wollen wir jedoch die Gleichungen in unveränderter Form beibehalten.

§. 2.

Obgleich das eben aufgestellte System allen Bedingungen der Aufgabe genügt und ebensoviel Gleichungen als Unbekannte enthält, so reicht, streng genommen, dieser doppelte Umstand nicht aus, um die Möglichkeit der oben angedeuteten Bewegung zu zeigen. Es ist vielmehr noch nachzuweisen, dass unsere Gleichungen ausreichen, um aus den anfänglichen Werthen der Grössen $l, m, \dots n''$ und ihrer Derivirten $\frac{dl}{dt}, \dots \frac{dn''}{dt}$, für welche anfänglichen Werthe die obigen Bedingungen gelten, die Werthe der Grössen $l, m, \dots n''$ für eine beliebige Zeit t ableiten zu können. Es kommt dieser Nachweis offenbar darauf hinaus, zu zeigen, dass, wenn für eine beliebige Zeit die Werthe von $l, m, \dots n''$ und ihren ersten Derivirten als endlich und völlig bekannt vorausgesetzt werden, aus unseren Gleichungen die Werthe der zweiten Derivirten $\frac{d^2l}{dt^2}, \frac{d^2m}{dt^2}, \dots \frac{d^2n''}{dt^2}$ für dieselbe Zeit abgeleitet werden können. Es wird genügen, die hier erforderliche Rechnung, welche durchaus keine Schwierigkeit darbietet, mit wenigen Worten anzudeuten. Löst man die drei der Gleichungen (a), welche $\frac{d^2l}{dt^2}, \frac{d^2l'}{dt^2}, \frac{d^2l''}{dt^2}$ enthalten, nach diesen Grössen auf und verfährt ebenso in Bezug auf die sechs übrigen, so erhält man für jede der 9 zweiten Derivirten einen Ausdruck der Form $e\sigma + f$, wo e und f wegen $\theta = 1$ ohne Nenner sind und völlig bestimmte endliche Werthe haben, so dass alles darauf hinauskommt sich zu überzeugen, dass σ einen bestimmten endlichen Werth hat. Dieser Werth aber ergiebt sich aus einer Gleichung der Form $e'\sigma + f' = 0$, welche man erhält, wenn man die eben erwähnten Ausdrücke in die Gleichung $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ setzt, und in welcher von e' und f' dasselbe gilt, was vorhin in Bezug auf e und f bemerkt wurde, und e' als eine Summe von Quadraten, die nicht gleichzeitig verschwinden können, von Null verschieden seyn wird [1]).

Es ist übrigens hinsichtlich der Bewegung, welche durch unsere Gleichungen definirt wird, eine wesentliche Bemerkung zu machen, welche den

1) Das ausgeführte Resultat dieser Rechnung findet man in §. 4.

jeden Augenblick an der Oberfläche ausgeübten Druck betrifft. Dieser Druck muss in gewissen Fällen eine bestimmte Grenze übersteigen, wenn die Bewegung physisch möglich seyn soll, es sey denn, dass man unter einer incompressibeln Flüssigkeit eine solche verstehen wollte, die, wie sie jeder Zusammendrückung, so auch jeder sie zur Trennung sollicitirenden Kraft widersteht. Nimmt man diese letztere Fähigkeit, wie gewöhnlich, nicht in die Definition auf, so ist es für die Darstellbarkeit der Bewegung durch die hydrodynamischen Gleichungen erforderlich, dass der Druck in der bewegten Masse nie negativ werde. Da nun in unserem Falle

$$p = P + \sigma\left(1 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} - \frac{c^2}{C^2}\right)$$

und der eingeklammerte Ausdruck innerhalb der Masse alle Werthe zwischen 0 und 1 annimmt, so besteht für den Fall, wo die Grösse σ, die im Allgemeinen nur durch die Integration unserer Differentialgleichungen bestimmt werden kann, zu irgend einer Zeit einen negativen Werth erhält, die Bedingung, dass P nicht unter dem absoluten Werthe von σ liege. Nur wenn σ nie negativ wird, bleibt P unbeschränkt und kann die durch unsere Gleichungen definirte Bewegung im leeren Raume und ohne äussern Druck Statt finden.

Nur der anfängliche d. h. $t = 0$ entsprechende Werth von σ lässt sich ohne Integration bestimmen. Setzt man $t = 0$ in der Gleichung $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, so erhält man

$$\frac{d^2l}{dt^2} + \frac{d^2m'}{dt^2} + \frac{d^2n''}{dt^2} = \left\{\begin{array}{l} -2\frac{dm'}{dt}\frac{dn''}{dt} - 2\frac{dn''}{dt}\frac{dl}{dt} - 2\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt} \\ +2\frac{dm''}{dt}\frac{dn'}{dt} + 2\frac{dn}{dt}\frac{dl''}{dt} + 2\frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt} \end{array}\right\}$$

Den drei ersten Gliedern der zweiten Seite kann man die Form geben

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn''}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dl}{dt} + \frac{dm'}{dt} + \frac{dn''}{dt}\right)^2$$

wo das letzte Quadrat nach der schon früher bemerkten Bedingungsgleichung verschwindet. Andrerseits ergiebt sich, immer unter der Voraussetzung $t = 0$, durch Addition der drei ersten der Gleichungen (a),

$$\frac{d^2l}{dt^2} + \frac{d^2m'}{dt^2} + \frac{d^2n''}{dt^2} = -2(L+M+N)\varepsilon + 2\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\right)\sigma$$

und da zu Anfang x, y, z mit a, b, c zusammenfallen, so hat V die Form

$$V = H - Lx^2 - My^2 - Nz^2$$

so dass also nach einem bekannten Satze

$$4\pi = -\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{d^2V}{d^2y} - \frac{d^2V}{d^2z} = 2(L+M+N).$$

Hiernach wird unsere obige Gleichung

$$\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\right)\sigma = 2\pi\varepsilon + \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn''}{dt}\right)^2\right) + \frac{dm''}{dt}\frac{dn'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dl''}{dt} + \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}$$

Sind nun z. B. diejenigen der anfänglichen Werthe (4), welche sich ausserhalb der Diagonale befinden und zu dieser eine symmetrische Lage einnehmen, einander gleich, so ist der anfängliche Werth von σ positiv, und wir werden weiter unten sehen, dass in diesem besondern Falle dasselbe für die ganze Dauer der Bewegung Statt findet 1).

§. 3.

Um von der im §. 1. betrachteten Bewegung eine einfache Anschauung zu gewinnen, ist es zweckmässig die durch lineare Ausdrücke ausgedrückte momentane Bewegung in zwei einfachere zu zerlegen. Wir bemerken jedoch, dass diese Zerlegung nur den eben angegebenen Zweck hat und für die vollständige Behandlung des Problems keinen wesentlichen Nutzen gewährt, da die beiden Theilbewegungen sich im Allgemeinen nicht für die ganze Dauer der Bewegung getrennt bestimmen lassen, und bemerken ferner, dass einige der in diesem §. gebrauchten Zeichen eine von der denselben in der übrigen Abhandlung beigelegten abweichende Bedeutung haben. Substituirt man in den obigen Ausdrücken von u, v, w für a, b, c die Werthe (6), so erhalten die Componenten die Form

$$(1)\qquad \begin{aligned} u &= gx + hy + kz \\ v &= g'x + h'y + k'z \\ w &= g''x + h''y + k''z \end{aligned}$$

1) Den Beweis dieser Behauptung findet man in §. 5.

wo g, h etc. einfache Verbindungen von den selbst durch l, m etc. ausgedrückten Grössen λ, μ etc. und den Grössen (4) sind, und man überzeugt sich leicht, dass in Folge der oben bemerkten Bedingungsgleichung immer die Relation

$$g + h' + k'' = 0$$

Statt findet [1]).

Nun lässt sich die augenblickliche Bewegung eines Systemes, bei welcher wie hier die Componenten u, v, w der Geschwindigkeit eines beliebigen den Coordinaten x, y, z entsprechenden Punktes lineare Funktionen dieser Coordinaten sind, immer, auch abgesehen von der in unserm Fall Statt findenden Relation zwischen den drei Coefficienten g, h', k'', in zwei einfachere Bewegungen zerlegen. Die eine dieser Theilbewegungen ist von solcher Beschaffenheit, dass wenn das System auf drei gehörig gewählte neue Axen der ξ, η, ζ bezogen wird, die diesen parallelen Componenten p, q, r der Geschwindigkeit die einfache Gestalt

$$(2) \qquad p = a\xi, \quad q = b\eta, \quad r = c\zeta$$

annehmen, wogegen die andere Theilbewegung in einer blossen Rotation besteht, bei welcher das System sich wie ein fester Körper um eine durch den Anfangspunkt gehende Axe dreht. Um sich von der Möglichkeit einer solchen Zerlegung zu überzeugen, ist zunächst zu untersuchen, wie sich die Componenten u_1, v_1, w_1 der durch die Gleichungen (2) ausgedrückten Bewegung darstellen, wenn man diese Bewegung auf drei ganz beliebige Axen der x, y, z bezieht. Setzt man zu diesem Zwecke unter Anwendung der üblichen Bezeichnung für die von den Axen gebildeten Winkel

$$\begin{array}{lll} \cos x\xi = \alpha, & \cos x\eta = \beta, & \cos x\zeta = \gamma \\ \cos y\xi = \alpha', & \cos y\eta = \beta', & \cos y\zeta = \gamma' \\ \cos z\xi = \alpha'', & \cos z\eta = \beta'', & \cos z\zeta = \gamma'' \end{array}$$

so hat man nach den bekannten Sätzen

$$\begin{array}{ll} u_1 = \alpha p + \beta q + \gamma r & \xi = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \\ v_1 = \alpha' p + \beta' q + \gamma' r & \eta = \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ w_1 = \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r & \zeta = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \end{array}$$

1) Die Werthe der Coefficienten $g, h, \ldots k''$ sind in §. 4. angegeben.

Werden die obigen Werthe von p, q, r in den drei ersten Gleichungen und dann für ξ, η, ζ ihre durch die drei letzten gegebenen Werthe substituirt, so erhält man

$$(3)\qquad \begin{aligned} u_1 &= l\,x + n'y + m'z \\ v_1 &= n'x + my + l'z \\ w_1 &= m'x + l'y + n\,z \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\begin{aligned} l &= a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 & l' &= a\alpha'\alpha'' + b\beta'\beta'' + c\gamma'\gamma'' \\ m &= a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2 & m' &= a\alpha''\alpha + b\beta''\beta + c\gamma''\gamma \\ n &= a\alpha''^2 + b\beta''^2 + c\gamma''^2 & n' &= a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' \end{aligned}$$

Man sieht also, dass, wenn die durch (2) bestimmte Bewegung auf ein beliebiges Axensystem bezogen wird, in den Ausdrücken für die Componenten nur 6 verschiedene Coefficienten vorkommen und je zwei derselben, welche in Bezug auf die Diagonale symmetrische Stellen einnehmen, gleich sind. Es ist nun auch umgekehrt leicht, sich zu überzeugen, dass jede durch lineare Ausdrücke von der eben erwähnten Beschaffenheit definirte Bewegung so auf drei neue Axen der ξ, η, ζ bezogen werden kann, dass die Componenten die obige einfache Form (2) annehmen. Diese Behauptung rechtfertigt sich sogleich durch den bekannten Satz, nach welchem der Ausdruck

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + 2l'yz + 2m'zx + 2n'xy$$

durch Einführung anderer Axen auf die Form

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2$$

gebracht werden kann, da offenbar die zur Erfüllung dieser Forderung zu lösenden Gleichungen mit denjenigen zusammenfallen, auf welche unsere Frage zurückkommt. Wir können daher dies bekannte Resultat auf unsere Untersuchung anwenden. Nach diesem Resultate sind a, b, c völlig bestimmt und die drei immer reellen Wurzeln *einer* cubischen Gleichung; von diesen Wurzeln ist eine nach Belieben für a, eine zweite für b, und die dritte endlich für c zu nehmen, da eine Vertauschung derselben keinen andern Erfolg hat als eine entsprechende Aenderung in der Benennung der Axen nach sich zu ziehen. Sind die Werthe a, b, c ungleich, so ist auch das System der Axem der ξ, η, ζ seiner Lage nach völlig bestimmt. Etwas anders verhält es sich wenn zwei der Wurzeln oder alle drei einander gleich sind. Im ersteren Falle, wenn z. B. a und b gleich, aber von c verschieden sind, ist nur die Axe der ζ ihrer Lage nach bestimmt, wogegen für die beiden andern irgend zwei auf einander und auf jener senkrechte Gerade genommen werden können. In diesem Falle wird die schon so leicht zu übersehende durch die Gleichungen (2) definirte Bewegung noch anschaulicher, wenn man die beiden ersten Componenten zu einer Geschwindigkeit vereinigt, die der Richtung nach mit dem auf die dritte Axe herabgelassenen Perpendikel h zusammenfällt und den Werth ah hat. Sind endlich die drei Wurzeln a, b, c alle einander gleich, so bleibt das System der drei rechtwinkligen Axen seiner Lage nach ganz willkührlich, die Geschwindigkeit fällt überall ihrer Richtung nach mit der Entfernung ϱ vom Nullpunkte zusammen und hat den Werth $a\varrho$.

Was nun zweitens eine Bewegung betrifft, in welcher das System ohne Aenderung in der relativen Lage seiner Theile um eine durch den Anfangspunkt gehende Axe rotirt, so sind für eine solche Bewegung die Componenten u_2, v_2, w_2 der Geschwindigkeit von der Form

$$4) \quad u_2 = q'z - r'y, \quad v_2 = r'x - p'z, \quad w_2 = p'y - q'x$$

und umgekehrt ist jede durch diese Ausdrücke bestimmte Bewegung eine Rotation der bezeichneten Art.

Hiernach wird also die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung über die Zerlegbarkeit einer durch die Gleichungen (1) dargestellten Bewegung dargethan seyn, wenn die neun in den Gleichungen (3) und (4) enthaltenen Coefficienten so gewählt werden können, dass

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2$$

wird; dass dies aber stets und zwar nur auf eine einzige Weise möglich ist, erhellt unmittelbar aus der Form dieser Forderungen, und es bleibt nur noch zu bemerken, dass in Folge der Relation

$$g + h' + k'' = 0$$

der Charakter der ersten der beiden Theilbewegungen in unserem Falle die Beschränkung erleidet, welche durch die Gleichung

$$a + b + c = 0$$

ausgedrückt wird und ihren Grund in der Incompressibilität der Flüssigkeit findet.

§. 4.

Bevor wir weitergehen, wird es zweckmässig seyn, die Resultate einiger oben nur angedeuteten Rechnungen hier anzugeben. Dazu gehört vor Allem der Ausdruck des Potentials V eines nicht auf seine Hauptaxen bezogenen durch die Ungleichheit

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 + 2Tyz + 2T'zx + 2T''xy < 1$$

begrenzten Ellipsoids für irgend einen inneren Punkt (x, y, z). Bezeichnet man die auf der linken Seite dieser Ungleichheit befindliche ternäre quadratische Form mit F, die ihr adjungirte

$$(S'S''-T^2)x^2+(S''S-T'^2)y^2+(SS'-T''^2)z^2+2(T'T''-TS)yz+2(T''T-T'S')zx+2(TT'-T''S'')xy$$

mit F', ferner die positive Quadratwurzel aus der Determinante

$$Gs^3 + G_1 s^2 + G_2 s + 1$$

der neun Grössen

$$\begin{array}{ccc} Ss+1, & T''s, & T's \\ T''s, & S's+1, & Ts \\ T's, & Ts, & S''s+1 \end{array}$$

mit $\varDelta$, so findet man nach jeder der beiden in §. 1. angegebenen Methoden [1])

$$V = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta} \left\{ 1 - \frac{F - F's + (x^2+y^2+z^2)(G_1 s + G s^2)}{\varDelta^2} \right\}.$$

In unserm Falle hängen die Coefficienten der beiden Formen F und F' auf folgende Weise von den Funktionen $l, m, \ldots n''$ und den entsprechenden $\lambda, \mu, \ldots \nu''$ ab:

$$S = \frac{\lambda^2}{A^2} + \frac{\mu^2}{B^2} + \frac{\nu^2}{C^2}; \quad T = \frac{\lambda'\lambda''}{A^2} + \frac{\mu'\mu''}{B^2} + \frac{\nu'\nu''}{C^2}$$

$$S' = \frac{\lambda'^2}{A^2} + \frac{\mu'^2}{B^2} + \frac{\nu'^2}{C^2}; \quad T' = \frac{\lambda''\lambda}{A^2} + \frac{\mu''\mu}{B^2} + \frac{\nu''\nu}{C^2}$$

$$S'' = \frac{\lambda''^2}{A^2} + \frac{\mu''^2}{B^2} + \frac{\nu''^2}{C^2}; \quad T'' = \frac{\lambda\lambda'}{A^2} + \frac{\mu\mu'}{B^2} + \frac{\nu\nu'}{C^2}$$

und

1) Die in Anmerkung (1) zu §. 1. erwähnte cubische Gleichung in Bezug auf s erhält man, wenn man den eingeklammerten Ausdruck unter dem Integralzeichen $= 0$ setzt.

$$S'S'' - T^2 = \frac{A^2l^2 + B^2m^2 + C^2n^2}{A^2B^2C^2}\,; \quad T'T'' - TS = \frac{A^2l'l'' + B^2m'm'' + C^2n'n''}{A^2B^2C^2}$$

$$S''S - T'^2 = \frac{A^2l'^2 + B^2m'^2 + C^2n'^2}{A^2B^2C^2}\,; \quad T''T - T'S' = \frac{A^2l''l + B^2m''m + C^2n''n}{A^2B^2C^2}$$

$$S'S - T''^2 = \frac{A^2l''^2 + B^2m''^2 + C^2n''^2}{A^2B^2C^2}\,; \quad TT' - T''S'' = \frac{A^2ll' + B^2mm' + C^2nn'}{A^2B^2C^2}$$

und endlich ist

$$G = \frac{1}{A^2B^2C^2}$$

der Werth der Determinante der neun Grössen

$$\begin{matrix} S, & T'', & T' \\ T'', & S', & T \\ T', & T, & S'' \end{matrix}$$

Um nun die Werthe der in den neun Differentialgleichungen (a) vorkommenden Grössen $L, M, .. N'$ zu bestimmen, hat man in dem eben für V aufgestellten Ausdruck die Coordinaten x, y, z zu ersetzen durch ihre Ausdrücke als Funktionen von a, b, c; das Resultat dieser Rechnung ist dadurch bemerkenswerth, dass das Potential V die Funktionen der Zeit $l, m, .. n''$ nur in den sechs Verbindungen[1])

$$\begin{aligned} P &= l^2 + l'^2 + l''^2\,; & P' &= mn + m'n' + m''n'' \\ Q &= m^2 + m'^2 + m''^2\,; & Q' &= nl + n'l' + n''l'' \\ R &= n^2 + n'^2 + n''^2\,; & R' &= lm + l'm' + l''m'' \end{aligned}$$

enthält, zwischen welchen ausserdem noch die Determinantengleichung

$$PQR - PP'^2 - QQ'^2 - RR'^2 + 2P'Q'R' = 1$$

besteht. Die gesuchten Werthe sind nämlich die folgenden:

---

1) Der Umstand, dass hier und im Folgenden der Buchstabe P, welcher schon in §. 1. als Zeichen für den auf der Oberfläche Statt findenden Druck gebraucht wurde, eine ganz andere Bedeutung hat, wird kaum zu einer Verwechslung führen können.

$$L = \frac{\pi}{A^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta^3} + \left(\frac{RP - Q'^2}{B^2} + \frac{PQ - R'^2}{C^2}\right)\frac{\pi}{A^2}\int_0^\infty \frac{sds}{\Delta^3} + \frac{P\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty \frac{s^2ds}{\Delta^3}$$

$$M = \frac{\pi}{B^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta^3} + \left(\frac{PQ - R'^2}{C^2} + \frac{QR - P'^2}{A^2}\right)\frac{\pi}{B^2}\int_0^\infty \frac{sds}{\Delta^3} + \frac{Q\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty \frac{s^2ds}{\Delta^3}$$

$$N = \frac{\pi}{C^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta^3} + \left(\frac{QR - P'^2}{A^2} + \frac{RP - Q'^2}{B^2}\right)\frac{\pi}{C^2}\int_0^\infty \frac{sds}{\Delta^3} + \frac{R\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty \frac{s^2ds}{\Delta^3}$$

$$L' = -\frac{(Q'R' - P'P)\pi}{B^2C^2}\int_0^\infty \frac{sds}{\Delta^3} + \frac{P'\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty \frac{s^2ds}{\Delta^3}$$

$$M' = -\frac{(R'P' - Q'Q)\pi}{C^2A^2}\int_0^\infty \frac{sds}{\Delta^3} + \frac{Q'\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty \frac{s^2ds}{\Delta^3}$$

$$N' = -\frac{(P'Q' - R'R)\pi}{A^2B^2}\int_0^\infty \frac{sds}{\Delta^3} + \frac{R'\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty \frac{s^2ds}{\Delta^3}$$

und hierin ist Δ die positive Quadratwurzel aus der Determinante

$$\frac{s^3}{A^2B^2C^2} + \left(\frac{P}{B^2C^2} + \frac{Q}{C^2A^2} + \frac{R}{A^2B^2}\right)s^2 + \left(\frac{QR - P'^2}{A^2} + \frac{RP - Q'^2}{B^2} + \frac{PQ - R'^2}{C^2}\right)s + 1$$

der neun Grössen

$$\begin{array}{ccc} P + \frac{s}{A^2}, & R', & Q' \\ R', & Q + \frac{s}{B^2}, & P' \\ Q', & P', & R + \frac{s}{C^2} \end{array}$$

Mit Hülfe dieser Formeln lässt sich nun auch die in §. 2. angedeutete Rechnung ausführen, welche den Zweck hat, die Funktion σ durch die Grössen $l, m, \ldots n''$ und deren Derivirte erster Ordnung auszudrücken. Das Resultat dieser etwas mühsamen, aber durchaus nicht schwierigen Operation ist in der Gleichung

$$\left(\frac{QR - P'^2}{A^2} + \frac{RP - Q'^2}{B^2} + \frac{PQ - R'^2}{C^2}\right)\sigma = 2\varepsilon\pi - \tfrac{1}{2}\Sigma\,\frac{dl}{dt}\,\frac{d\lambda}{dt}$$

enthalten, wo das Summenzeichen sich auf alle neun Paare (l, λ), (m, μ), ... (n'', ν'') bezieht. Der Coefficient, mit welchem hier σ behaftet ist, lässt sich in die Form

$$\frac{\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2}{A^2}+\frac{\mu^2+\mu'^2+\mu''^2}{B^2}+\frac{\nu^2+\nu'^2+\nu''^2}{C^2}=S+S'+S''$$

bringen, woraus unmittelbar hervorgeht, dass er niemals verschwinden kann, da die Annahme, dass alle neun Grössen $\lambda, \mu, .. \nu''$ sich auf Null reduciren, mit der Gleichung

$$\Sigma \pm \lambda\mu'\nu'' = 1$$

im Widerspruch steht.

Um unser System von Formeln zu vervollständigen, bilden wir auch noch die folgenden Ausdrücke für die Coefficienten $g, h, .. k''$ in den Geschwindigkeitscomponenten u, v, w:

$$g=\frac{du}{dx}=\lambda\frac{dl}{dt}+\mu\frac{dm}{dt}+\nu\frac{dn}{dt} \qquad g'=\frac{dv}{dx}=\lambda\frac{dl'}{dt}+\mu\frac{dm'}{dt}+\nu\frac{dn'}{dt}$$

$$h=\frac{du}{dy}=\lambda'\frac{dl}{dt}+\mu'\frac{dm}{dt}+\nu'\frac{dn}{dt} \qquad h'=\frac{dv}{dy}=\lambda'\frac{dl'}{dt}+\mu'\frac{dm'}{dt}+\nu'\frac{dn'}{dt}$$

$$k=\frac{du}{dz}=\lambda''\frac{dl}{dt}+\mu''\frac{dm}{dt}+\nu''\frac{dn}{dt} \qquad k'=\frac{dv}{dz}=\lambda''\frac{dl'}{dt}+\mu''\frac{dm'}{dt}+\nu''\frac{dn'}{dt}$$

$$g''=\frac{dw}{dx}=\lambda\frac{dl''}{dt}+\mu\frac{dm''}{dt}+\nu\frac{dn''}{dt}$$

$$h''=\frac{dw}{dy}=\lambda'\frac{dl''}{dt}+\mu''\frac{dm''}{dt}+\nu'\frac{dn''}{dt}$$

$$k''=\frac{dw}{dz}=\lambda''\frac{dl''}{dt}+\mu''\frac{dm''}{dt}+\nu''\frac{dn''}{dt}.$$

Die Bedingung der Incompressibilität giebt dann zunächst die Gleichung

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$$

und für das letzte Glied in der zur Bestimmung von σ dienenden Gleichung findet man den Ausdruck

$$-\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{dl}{dt}\frac{d\lambda}{dt}=\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}+\frac{dw}{dx}\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dz}\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dy}\right)^2+\left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right)+\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy}+\frac{dw}{dx}\frac{du}{dz}+\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}$$

der uns dazu dienen wird, die am Ende des §. 2. ausgesprochene Behauptung zu rechtfertigen.

Ausserdem mag noch bemerkt werden, dass die Rotationen p', q', r' um die drei Coordinatenaxen, in welche sich die augenblickliche Rotation zerlegen lässt, die Werthe

$$p' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right), \quad q' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right), \quad r' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)$$

haben.

§. 5.

Wir gehen nun über zu der Aufstellung von sieben Integralen erster Ordnung, welche stets gelten, ohne besondere Voraussetzungen über den anfänglichen Bewegungszustand zu machen. Drei derselben ergeben sich unmittelbar aus den Differentialgleichungen (a), wenn man je zwei derselben, welche rechts dasselbe Glied $-2L'\varepsilon$, $-2M'\varepsilon$, $-2N'\varepsilon$ enthalten, von einander abzieht; auf diese Weise erhält man

$$\begin{aligned}
&m\frac{dn}{dt} - n\frac{dm}{dt} + m'\frac{dn'}{dt} - n'\frac{dm'}{dt} + m''\frac{dn''}{dt} - n''\frac{dm''}{dt} = \mathfrak{A} = \left(\frac{dn'}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dm''}{dt}\right)_0 \\
(\text{I.})\quad &n\frac{dl}{dt} - l\frac{dn}{dt} + n'\frac{dl'}{dt} - l'\frac{dn'}{dt} + n''\frac{dl''}{dt} - l''\frac{dn''}{dt} = \mathfrak{B} = \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dn}{dt}\right)_0 \\
&l\frac{dm}{dt} - m\frac{dl}{dt} + l'\frac{dm'}{dt} - m'\frac{dl'}{dt} + l''\frac{dm''}{dt} - m''\frac{dl''}{dt} = \mathfrak{C} = \left(\frac{dm}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dl'}{dt}\right)_0
\end{aligned}$$

Will man die Componenten u, v, w der Geschwindigkeit an der Stelle (x, y, z) und ihre nach den Coordinaten x, y, z genommenen partiellen Derivirten einführen, so lassen sich diese Integrale mit Hülfe der im vorhergehenden §. gegebenen Ausdrücke leicht in die folgende Form bringen[1])

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} &= \mathfrak{A}l + \mathfrak{B}m + \mathfrak{C}n \\
\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} &= \mathfrak{A}l' + \mathfrak{B}m' + \mathfrak{C}n' \\
\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} &= \mathfrak{A}l'' + \mathfrak{B}m'' + \mathfrak{C}n''
\end{aligned}$$

1) Vergl. die Anmerkung zu der Einleitung.

aus welcher unmittelbar hervorgeht, dass die Axe der augenblicklichen Rotation stets von denselben Elementen der flüssigen Masse gebildet wird und dass, wenn die drei links stehenden Grössen zu irgend einer Zeit gleichzeitig verschwinden; d. h. wenn keine Rotation Statt findet, dasselbe für die ganze Dauer der Bewegung gilt; die Bedingungen, welchen der Anfangszustand der Bewegung in diesem Falle unterliegt, sind in den Gleichungen

$$\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dm''}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dn}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dl'}{dt}\right)_0$$

ausgesprochen, und man erkennt unmittelbar aus dem im vorigen §. mitgetheilten Ausdruck für die Funktion σ, dass dieselbe während der ganzen Bewegung nur positive Werthe annimmt; hiermit ist also die Richtigkeit der am Ende des §. 2. aufgestellten Behauptung nachgewiesen [1]).

Da ferner in unserem Problem die wirkenden Kräfte nur von der wechselseitigen Anziehung der Elemente der flüssigen Masse herrühren, so liefert uns das Princip der Flächen drei Integrale

$$\int\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)d\tau = \text{const.}, \quad \int\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)d\tau = \text{const.}, \quad \int\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)d\tau = \text{const.},$$

in welchen die Integrationen über alle Elemente $d\tau$ der flüssigen Masse auszudehnen sind. Drückt man die Coordinaten x, y, z durch die ursprünglichen Coordinaten a, b, c aus, indem man das anfängliche Ellipsoid in unendlich kleine Elemente $d\tau = da\,db\,dc$ zerlegt, und berücksichtigt, dass

$$\int a^2 d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5} \cdot A^2, \quad \int b^2 d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5} \cdot B^2, \quad \int c^2 d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5} \cdot C^2$$

$$\int bc\,d\tau = 0, \qquad \int ca\,d\tau = 0, \qquad \int ab\,d\tau = 0$$

ist, wo $\mathfrak{M}$ zur Abkürzung für die Gesammtmasse $\frac{4\pi ABC}{3}$ gesetzt ist, so nehmen diese Integrale die folgende Form an:

---

1) Es mag beiläufig bemerkt werden, dass die drei Integralgleichungen (I.) hinreichen, um aus den neun Differentialgleichungen (a) sechs andere abzuleiten, welche die neun Funktionen $l, m, \ldots n''$ nur noch in den sechs Verbindungen $P, Q, \ldots R'$, und ausserdem noch die Grösse σ enthalten.

$$A^2\left(l'\frac{dl''}{dt}-l''\frac{dl'}{dt}\right)+B^2\left(m'\frac{dm''}{dt}-m''\frac{dm'}{dt}\right)+C^2\left(n'\frac{dn''}{dt}-n''\frac{dn'}{dt}\right)=\mathfrak{K}=B^2\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0-C^2\left(\frac{dn'}{dt}\right)^0$$

$$\text{(II.)}\quad A^2\left(l''\frac{dl}{dt}-l\frac{dl''}{dt}\right)+B^2\left(m''\frac{dm}{dt}-m\frac{dm''}{dt}\right)+C^2\left(n''\frac{dn}{dt}-n\frac{dn''}{dt}\right)=\mathfrak{K}'=C^2\left(\frac{dn}{dt}\right)_0-A^2\left(\frac{dl''}{dt}\right)_0$$

$$A^2\left(l\frac{dl'}{dt}-l'\frac{dl}{dt}\right)+B^2\left(m\frac{dm'}{dt}-m'\frac{dm}{dt}\right)+C^2\left(n\frac{dn'}{dt}-n'\frac{dn}{dt}\right)=\mathfrak{K}''=A^2\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0-B^2\left(\frac{dm}{dt}\right)_0$$

Setzt man die in dem vorhergehenden §. mitgetheilten Ausdrücke für die Grössen $L, M, \ldots N'$ als bekannt voraus, so ergeben sich die vorstehenden Integralgleichungen auch aus unseren Differentialgleichungen (a) durch eine etwas mühsame Rechnung, bei welcher vorzüglich zu berücksichtigen ist, dass zwischen den Grössen $L, M, \ldots N'$ und $P, Q, \ldots R'$ folgende Relationen Statt finden

$$A^2(R'M'-Q'N')+B^2(QL'-P'M)+C^2(P'N-RL')=0$$
$$A^2(Q'L-PM')+B^2(P'N'-R'L')+C^2(RM'-Q'N)=0$$
$$A^2(PN'-R'L)+B^2(R'M-QN')+C^2(Q'L'-P'M')=0$$

von denen nur eine verificirt zu werden braucht, weil aus ihr die beiden andern durch einfache Permutation abgeleitet werden können.

Das siebente Integral wird uns endlich durch das Princip der lebendigen Kraft geliefert, welches nach der Natur der in unserem Problem wirkenden Kräfte durch die Gleichung

$$\int\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)d\tau=\text{Const.}+\varepsilon\int V d\tau$$

ausgedrückt wird, in welcher die Integrationen über alle Elemente $d\tau$ der bewegten Masse auszudehnen sind; die wirkliche Ausführung derselben, wie sie sogleich angedeutet werden soll, giebt dann das Resultat

$$\text{(III.)}\quad\left\{\begin{aligned}&A^2\left(\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{dl'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dl''}{dt}\right)^2\right)\\&+B^2\left(\left(\frac{dm}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm''}{dt}\right)^2\right)\\&+C^2\left(\left(\frac{dn}{dt}\right)^2+\left(\frac{dn'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2\right)\end{aligned}\right\}=\text{Const.}+4\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}$$

Auf der linken Seite kann man nämlich das frühere Verfahren anwenden, indem man den ursprünglich von der Masse erfüllten Raum in unendlich kleine Elemente $d\tau = da\,db\,dc$ zerlegt, und die Integrationen in Bezug auf die Variabeln a, b, c ausführt; man erhält dann unmittelbar, nach Unterdrückung des constanten Faktor $\sigma\frac{\mathfrak{M}}{5}$, den auf der linken Seite der Gleichung (III.) befindlichen Ausdruck. Auf der rechten Seite würde man durch dasselbe Verfahren zunächst

$$\int V d\tau = \mathfrak{M}\left(H - \frac{A^2L + B^2M + C^2N}{5}\right)$$

finden; aus den in §. 4. gegebenen Ausdrücken für L, M, N ergiebt sich ferner ohne Schwierigkeit

$$A^2L + B^2M + C^2N = H = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta},$$

also

$$\int V d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5}\,.\,4\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta},$$

woraus denn unmittelbar die Richtigkeit der Integralgleichung (III.) erhellt. Allein man kann auch ohne Hülfe der Ausdrücke für L, M, N den Werth des auf sich selbst bezogenen Potentials der flüssigen Masse leicht auf folgende Weise finden. Ist nämlich

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} + \frac{z'^2}{\gamma^2} = 1$$

die Gleichung des auf seine Hauptaxen bezogenen Ellipsoides, welches augenblicklich die flüssige Masse begrenzt, so ist der Werth des Potentiales im innern Punkte (x', y', z')

$$V = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 - \frac{x'^2}{\alpha^2 + s} - \frac{y'^2}{\beta^2 + s} - \frac{z'^2}{\gamma^2 + s}\right),$$

wo Δ die positive Quadratwurzel aus dem Ausdruck

$$\left(1 + \frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)$$

bedeutet. Zerlegt man nun die ganze Masse in unendlich kleine Elemente $d\tau = dx'\,dy'\,dz'$, und bedenkt, dass

$$\int d\tau = \frac{4\pi\alpha\beta\gamma}{3} = \frac{4\pi ABC}{3} = \mathfrak{M}; \int x'^2\, d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5}\alpha^2, \int y'^2\, d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5}\beta^2, \int z'^2\, d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5}\gamma^2$$

ist, so findet man zunächst

$$\int V d\tau = \mathfrak{M}\,\pi \int_0 \frac{ds}{\varDelta}\left(1 - \frac{1}{5}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+s} - \frac{1}{5}\frac{\beta^2}{\beta^2+s} - \frac{1}{5}\frac{\gamma^2}{\gamma^2+s}\right);$$

nun ist aber

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+s} + \frac{\beta^2}{\beta^2+s} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2+s} = 3 - s\left(\frac{1}{\alpha^2+s} + \frac{1}{\beta^2+s} + \frac{1}{\gamma^2+s}\right) = 3 - s\frac{d\log(\varDelta^2)}{ds}$$

$$= 3 - 2\frac{s}{\varDelta}\frac{d\varDelta}{ds}$$

und hierdurch geht die vorige Gleichung in die folgende über

$$\int V d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5}\, 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\left(1 + \frac{s}{\varDelta}\frac{d\varDelta}{ds}\right)$$

und da ferner durch theilweise Integration leicht bewiesen wird, dass

$$\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\varDelta^2}\cdot\frac{d\varDelta}{ds} = -\int_0^\infty s\,\frac{d\left(\frac{1}{\varDelta}\right)}{ds}\,.\,ds = \int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}$$

ist, so erhält man endlich wieder

$$\int V d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5}\,.\,4\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta},$$

und hierin ist nach bekannten Sätzen

$$\varDelta^2 = \begin{vmatrix} 1+\frac{s}{\alpha^2}, & 0, & 0 \\ 0, & 1+\frac{s}{\beta^2}, & 0 \\ 0, & 0, & 1+\frac{\gamma^2}{s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ss+1, & T''s, & T's \\ T''s, & S's+1, & Ts \\ T's, & Ts, & S''s+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P+\frac{s}{A^2}, & R', & Q' \\ R', & Q+\frac{s}{B^2}, & P' \\ Q', & P', & R+\frac{s}{C^2} \end{vmatrix}$$

wenn man sich einer üblichen Bezeichnungsweise der Determinanten bedient.

Natürlich lässt sich die Gleichung (III.) auch ohne das Princip der lebendigen Kraft anzuwenden, aus den Differentialgleichungen (a) ableiten; man bedarf aber dann der im §. 4. gegebenen Ausdrücke für die Grössen $L, M, \ldots N'$, und ausserdem ist die Rechnung sehr beschwerlich.

§. 6.

Bei der grossen Complication der Differentialgleichungen (a) wird man eine vollständige Lösung des Problems wohl nur unter besonders einfachen

Voraussetzungen über den anfänglichen Zustand der flüssigen Masse erreichen können; wir werden uns daher im Folgenden nur noch mit solchen speciellen Fällen beschäftigen. Eine solche einfache Voraussetzung ist diejenige, dass im Anfang der Bewegung sowohl hinsichtlich der Gestalt als auch des Bewegungszustandes vollständige Symmetrie in Bezug auf eine bestimmte Axe Statt findet; es leuchtet nämlich ein, dass dann dasselbe für die ganze Dauer der Bewegung gelten wird. Dazu ist zunächst erforderlich, dass die Masse ursprünglich durch ein Rotationsellipsoid begrenzt wird, dass also die Axe der Symmetrie eine der drei Hauptaxen des ursprünglichen Ellipsoids ist; wir wollen annehmen, es sei dies die Axe C, so dass $B = A$ ist. Denkt man sich ferner an jedem Punkte a, b, c die Anfangsgeschwindigkeit, deren Componenten

$$u = \left(\frac{dl}{dt}\right)_0 a + \left(\frac{dm}{dt}\right)_0 b + \left(\frac{dn}{dt}\right)_0 c$$

$$v = \left(\frac{dl'}{dt}\right)_0 a + \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0 b + \left(\frac{dn'}{dt}\right)_0 c$$

$$w = \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0 a + \left(\frac{dm''}{dt}\right)_0 b + \left(\frac{dn''}{dt}\right)_0 c$$

sind, nach Grösse und Richtung construirt, so darf durch eine beliebige Drehung φ des Coordinatensystems um die Axe der c Nichts geändert werden, d. h. wenn a, b resp. in $a \cos\varphi - b \sin\varphi$, $a \sin\varphi + b \cos\varphi$ übergehen, ohne dass c sich ändert, so muss u in $u \cos\varphi - v \sin\varphi$, v in $u \sin\varphi + v \cos\varphi$ übergehen, und w ungeändert bleiben, wenn der Bewegungszustand wirklich symmetrisch in Bezug auf die Axe der c sein soll. Dies giebt folgende Bedingungen

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dn'}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dm''}{dt}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{dm'}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dl}{dt}\right)_0; \quad \left(\frac{dl'}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{dm}{dt}\right)_0,$$

zu welchen in Folge der Incompressibilität noch

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dn''}{dt}\right)_0 = 0$$

kommt. Der Anfangszustand der Bewegung wird daher durch Gleichungen von der Form

$$u = ga + hb, \quad v = -ha + gb, \quad w = -2gc$$

ausgedrückt. Die beiden Theilbewegungen, in welche jede solche Bewegung zerlegbar ist, werden daher folgende Componenten haben

$$u_1 = ga, \quad v_1 = gb, \quad w_1 = -2gc$$
$$u_2 = hb, \quad v_2 = -ha, \quad w_2 = 0$$

woraus sich ergiebt, wie sich erwarten liess, dass die Theilchen der flüssigen Masse ausser einer Rotation um die Axe der Symmetrie, eine derselben parallele Bewegung $-2gc$ und eine auf ihr senkrechte $g\sqrt{a^2+b^2}$ besitzen, deren Richtung durch die Axe selbst hindurch geht.

Sind diese Bedingungen für den Anfangszustand erfüllt, so wird dieselbe Symmetrie auch für die ganze Dauer der Bewegung gelten; alle Theilchen welche ursprünglich eine symmetrische Lage in Bezug auf die Axe der c einnehmen, d. h. für welche a^2+b^2 und c constant sind, werden zu jeder spätern Zeit in derselben Beziehung stehen, so dass wieder x^2+y^2 und z für diese Theilchen dieselben Werthe besitzen. Diese Eigenschaften der linearen Funktionen x, y, z der ursprünglichen Coordinaten a, b, c haben zur Folge, dass stets

$$n = 0, \quad n' = 0, \quad l'' = 0, \quad m'' = 0$$
$$m' = l, \quad l' = -m$$

sein muss, so dass diese linearen Ausdrücke folgende Form annehmen

$$x = la + mb, \quad y = -ma + lb, \quad z = n''c$$

und offenbar sind die Bedingungen, welche hieraus für die anfänglichen Werthe der Derivirten $\frac{dl}{dt}, \frac{dm}{dt}, \dots \frac{dn''}{dt}$ folgen, identisch mit den soeben aufgestellten.

Die Bedingung der Incompressibilität besteht in der Gleichung

$$(l^2 + m^2)\, n'' = 1;$$

und folglich erhält man durch Umkehrung der vorstehenden Gleichungen

$$a = ln''x - mn''y; \quad b = mn''x + ln''y; \quad c = \frac{1}{n''}z.$$

Die Gleichung des augenblicklichen Ellipsoids ist daher

$$\frac{n''}{A^2}(x^2 + y^2) + \frac{z^2}{C^2 n''^2} = 1$$

und die Componenten der Geschwindigkeit haben die Form

$$u = \frac{dl}{dt}a + \frac{dm}{dt}b = -\frac{1}{2n''}\frac{dn''}{dt}x + n''\left(l\frac{dm}{dt} - m\frac{dl}{dt}\right)y$$

$$v = -\frac{dm}{dt}a + \frac{dl}{dt}b = -n''\left(l\frac{dm}{dt} - m\frac{dl}{dt}\right)x - \frac{1}{2n''}\frac{dn''}{dt}y$$

$$w = \frac{dn''}{dt}c = \frac{1}{n''}\frac{dn''}{dt}z$$

wodurch wieder ausgedrückt wird, dass Gestalt und Bewegungszustand zu jeder Zeit symmetrisch in Bezug auf die Axe der c oder z ist; besonders bemerken wollen wir noch, dass

$$n''\left(l\frac{dm}{dt} - m\frac{dl}{dt}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) = \omega$$

das Mass für die augenblickliche Rotation um die Axe der z ist.

Wir haben jetzt zu untersuchen, in welcher Weise unsere Hypothese über die Natur der Bewegung mit den Fundamentalgleichungen (a) in Uebereinstimmung zu bringen ist. Da in unserer Annahme das Potential V für einen innern Punkt durch die Gleichung

$$V = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 - \frac{n''(x^2+y^2)}{A^2+n''s} - \frac{z^2}{C^2n''^2+s}\right) = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 - \frac{a^2+b^2}{A^2+n''s} - \frac{n''^2c^2}{C^2n''^2+s}\right)$$

ausgedrückt wird, in welcher

$$\Delta = \left(1 + \frac{n''s}{A^2}\right)\sqrt{1 + \frac{s}{C^2n''^2}}$$

ist, so erhält man für die Grössen $L, M, \ldots N'$ folgende Werthe

$$L = M = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{1}{A^2+n''s},\quad N = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{n''^2}{C^2n''^2+s}$$

$$L' = 0,\quad M' = 0,\quad N' = 0.$$

Hieraus folgt, dass vier von den neun Differentialgleichungen (a) durch unsere Hypothese identisch erfüllt sind, während die fünf übrigen sich auf die drei folgenden von einander wesentlich verschiedenen reduciren:

$$l\frac{d^2l}{dt^2} + m\frac{d^2m}{dt^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\varepsilon L;\quad n''\frac{d^2n''}{dt^2} = \frac{2\sigma}{C^2} - 2\varepsilon N;\quad l\frac{d^2m}{dt^2} - m\frac{d^2l}{dt^2} = 0$$

welche in Verbindung mit der schon vorher aufgestellten Bedingung der Incompressibilität zur Bestimmung der vier Funktionen l, m, n'', σ vollständig hinreichen, wie aus den in §. 2. gegebenen Andeutungen erhellt.

Nachdem so die Zulässigkeit unserer Hypothese nachgewiesen ist, schreiten wir zur vollständigen Lösung des entsprechenden Problems, indem wir dasselbe auf eine Quadratur zurückführen. Die letzte der drei vorstehenden Differentialgleichungen hat das Integral (vergl. §. 5. I.)

$$l\frac{dm}{dt} - m\frac{dl}{dt} = \left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = \omega_0$$

und hieraus ergiebt sich die Folgerung, dass die Rotationsgeschwindigkeit $\omega = \omega_0 n''$ stets proportional der Länge der Rotationsaxe Cn'' des Ellipsoids ist. Durch zweimalige Differentiation der Gleichung

$$l^2 + m^2 = \frac{1}{n''}$$

erhält man ferner

$$l\frac{dl}{dt} + m\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{2n''^2}\frac{dn''}{dt};\; l\frac{d^2l}{dt^2} + m\frac{d^2m}{dt^2} + \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2n''^2}\frac{d^2n''}{dt^2} + \frac{1}{n''^3}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2;$$

quadrirt man die erste dieser beiden Gleichungen, und addirt dazu das Quadrat der vorstehenden Integralgleichung, so erhält man

$$\frac{1}{n''}\left\{\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2\right\} = \omega_0^2 + \frac{1}{4n''^4}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2;$$

und hierdurch geht die zweite Gleichung in die folgende über

$$l\frac{d^2l}{dt^2} + m\frac{d^2m}{dt^2} = -\omega_0^2 n'' + \frac{3}{4n''^3}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2n''^2}\frac{d^2n''}{dt^2}.$$

Auf diese Weise gelingt es, die beiden Funktionen l und m vollständig zu eliminiren, und wir erhalten zur Bestimmung der Funktionen n'', σ die beiden folgenden Differentialgleichungen

$$-\frac{1}{2n''^2}\frac{d^2n''}{dt^2} + \frac{3}{4n''^3}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2 - \omega_0^2 n'' = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\varepsilon L;\; n''\frac{d^2n''}{dt^2} = \frac{2\sigma}{C^2} - 2\varepsilon N,$$

in welchen die Grössen L, N nur noch von der Variabeln n'' abhängen. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{d^2n''}{dt^2}$, indem man die erste mit n'', die zweite $\frac{1}{2n''^2}$ multiplicirt und dann addirt, so erhält man nach Substitution der Ausdrücke für L und N die Gleichung

$$\sigma \left\{\frac{2n''}{A^2} + \frac{1}{C^2 n''^2}\right\} = 2\varepsilon\pi - \omega_0^2\, n''^2 + \tfrac{3}{4}\, \frac{1}{n''^2} \left(\frac{dn''}{dt}\right)^2$$

welche mit der im §. 4. gegebenen übereinstimmt. Eliminirt man dagegen σ aus den beiden vorhergehenden Gleichungen, indem man die zweite mit $\frac{C^2}{n''}$, die erste mit $\frac{A^2}{n''}$ multiplicirt, und dann subtrahirt, so erhält man die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left(\frac{A^2}{2n''^3} + C^2\right) \frac{d^2 n''}{dt^2} - \tfrac{3}{4}\frac{A^2}{n''^4}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2 + A^2\omega_0^2 = 2\varepsilon\pi \int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta} \cdot \frac{A^2 - C^2 n''^3}{n''(A^2 + n''s)(C^2 n''^2 + s)};$$

multiplicirt man dieselbe mit $2\frac{dn''}{dt}$, so lässt sich eine Integration ausführen, deren Resultat

$$\left(\frac{A^2}{2n''^3} + C^2\right)\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2 + 2A^2\omega_0^2\, n'' = \text{Const.} + 4\varepsilon\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}$$

offenbar nichts Anderes ist, als das durch das Princip der lebendigen Kraft gegebene Integral.

Um nun diese Gleichungen, durch welche das Problem in der That auf Quadraturen zurückgeführt ist, bequem discutiren zu können, ist es zweckmässig, das Verhältniss

$$\alpha = \frac{Cn''}{\sqrt[3]{A^2 C}} = n'' \sqrt[3]{\frac{C^2}{A^2}} = n''\alpha_0$$

der Rotationsaxe Cn'' des Ellipsoids zu dem Radius $D = \sqrt[3]{A^2 C}$ der Kugel, deren Volumen dem des Ellipsoids gleich ist, als neue Variabeln einzuführen. Ferner wollen wir

$$\varrho = \frac{\omega}{\sqrt{2\varepsilon\pi}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\varepsilon\pi}}\, n'' = \frac{\varrho_0}{\alpha_0}\,\alpha$$

setzen. Ersetzt man endlich die Integrationsvariabele s durch $D^2 s$, und führt zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein

$$f(\alpha) = \int_0^\infty \frac{ds}{(1+\alpha s)\sqrt{(1+\frac{s}{\alpha^2})}}, \quad \frac{df(\alpha)}{d\alpha} = f'(\alpha) = (\frac{1}{\alpha^3} - 1)\int_0^\infty \frac{s\,ds}{(1+\alpha s)^2\sqrt{(1+\frac{s}{\alpha^2})^3}},$$

so nehmen die drei zuletzt erhaltenen Gleichungen folgende Formen an:

$$\frac{\sigma}{D^2}(2\alpha + \frac{1}{\alpha^2}) = 2\varepsilon\pi(1 - \varrho^2) + \tfrac{3}{4}(\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt})^2$$

$$(b) \quad 2(2 + \frac{1}{\alpha^3})\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{3}{\alpha^4}(\frac{d\alpha}{dt})^2 + 8\varepsilon\pi\left\{\frac{\varrho_0^2}{\alpha_0^2} - f'(\alpha)\right\} = 0$$

$$(2 + \frac{1}{\alpha^3})(\frac{d\alpha}{dt})^2 + 8\varepsilon\pi\left\{\frac{\varrho_0^2}{\alpha_0^2}\alpha - f(\alpha)\right\} = 8\varepsilon\pi K$$

wo K eine Constante bezeichnet, deren Werth von ϱ_0, α_0, $(\frac{d\alpha}{dt})_0$ abhängt. Für die Discussion selbst ist es nothwendig einige zum Theil schon bekannte Eigenschaften der Function $f(\alpha)$ vorauszuschicken. Durch wirkliche Ausrechnung des bestimmten Integrals erhält man

$$f(\alpha) = \frac{2}{\alpha\sqrt{(\frac{1}{\alpha^3} - 1)}} \text{ arctang } \sqrt{(\frac{1}{\alpha^3} - 1)}$$

oder

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha\sqrt{(1 - \frac{1}{\alpha^3})}} \log \frac{1 + \sqrt{(1 - \frac{1}{\alpha^3})}}{1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{\alpha^3})}}$$

je nachdem $\alpha < 1$ oder $\alpha > 1$ ist; für $\alpha = 1$ nehmen beide Formen denselben Werth $f(1) = 2$ an; wird α unendlich klein oder unendlich gross, so wird $f(\alpha)$ unendlich klein; und aus dem obigen Ausdruck für $f'(\alpha)$ geht hervor, dass $f(\alpha)$ ein und nur ein Maximum $f(1) = 2$ hat. Ist daher p irgend ein zwischen 0 und 2 liegender Werth, so hat die Gleichung $f(\alpha) = p$ zwei Wurzeln, von denen eine unter, die andere über der Einheit liegt. Ferner überzeugt man sich leicht, dass, wenn α von 0 bis 1 wächst, die Function $f'(\alpha)$ beständig von $+\infty$ bis 0 abnimmt und dann für $\alpha > 1$ negativ wird, so dass, wenn q irgend ein positiver Werth ist, die Gleichung $f'(\alpha) = q$ stets eine und nur eine Wurzel hat, und zwar liegt dieselbe unter der Einheit. Endlich ist aus den früheren Untersuchungen über die gleichförmige Rotation einer flüssigen Masse bekannt, dass die Function $\alpha^2 f'(\alpha)$ ein Maximum $= 0{,}2246..$ hat.

§. 7.

Betrachten wir nun zunächst denjenigen speciellen Fall, in welchem ursprünglich, und folglich auch während der ganzen Bewegung keine Rotation Statt findet, also

$$\varrho_0 = 0$$

ist. Nehmen wir ausserdem vorläufig noch an[1], dass ursprünglich gar keine Geschwindigkeit vorhanden, also auch

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = 0$$

ist, so haben wir die Gleichungen

$$\frac{\sigma}{D^2}\left(2\alpha + \frac{1}{\alpha^2}\right) = 2\varepsilon\pi + \tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

$$2\left(2 + \frac{1}{\alpha^3}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{3}{\alpha^4}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 8\varepsilon\pi f'(\alpha)$$

$$\left(2 + \frac{1}{\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 8\varepsilon\pi\,\{f(\alpha) - f(\alpha_0)\}$$

Aus der letzten derselben folgt, dass während der ganzen Bewegung $f(\alpha) \geqq f(\alpha_0)$ sein muss; ist daher ursprünglich $\alpha_0 = 1$, d. h. ist die ursprüngliche Gestalt der ruhenden flüssigen Masse eine Kugel, so folgt, dass stets $\alpha = \alpha_0 = 1$ bleiben muss. Nehmen wir dagegen an, dass $\alpha < 1$, dass also die ursprüngliche Gestalt ein abgeplattetes Sphäroid ist, so ergiebt sich, dass während der ganzen Bewegung $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ sein muss, wo α_1 die zweite Wurzel der Gleichung $f(\alpha) = f(\alpha_0)$ bedeutet, von der wir wissen, dass sie über der Einheit liegt. In der That wird nun α alle Werthe des Intervalls von α_0 bis α_1, und wieder zurück von α_1 bis α_0 periodisch, und jedesmal nach Verlauf derselben Zeit

1) Das Resultat der Untersuchung für diesen Fall ist von Dirichlet in der vorläufigen Anzeige der Abhandlung vollständig ausgesprochen.

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon\pi}} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{\alpha^3}}{f(\alpha) - f(\alpha_0)}}$$

durchlaufen; man überzeugt sich hiervon sogleich, wenn man bedenkt, dass $\frac{d\alpha}{dt}$ nur dann sein Zeichen ändern kann, wenn $\alpha = \alpha_0$ oder $= \alpha_1$ ist, und dass $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ im ersten Falle einen positiven, im zweiten einen negativen Werth hat, und wenn man ferner berücksichtigt, dass der vorstehende Werth von τ endlich ist, da an den Grenzen des bestimmten Integrals die Function $f(\alpha) - f(\alpha_0)$ von derselben Ordnung unendlich klein wird, wie $\alpha - \alpha_0$ oder $\alpha - \alpha_1$. Die Bewegung besteht also aus isochronen Schwingungen, in welchen die Flüssigkeit durch die Kugelgestalt hindurchgehend abwechselnd die Form eines verlängerten und die eines abgeplatteten Ellipsoides annimmt. Natürlich würde die Bewegung genau dieselbe sein, wenn das Sphäroid ursprünglich ein verlängertes wäre; es würde dann nur α_0 mit α_1 zu vertauschen sein.

Der Charakter der Bewegung bleibt auch dann noch derselbe, wenn das Sphäroid seine Bewegung nicht aus der Ruhe beginnt, wenn nur die Anfangsgeschwindigkeit in Bezug auf die Anfangsgestalt unterhalb einer gewissen Grenze liegt, welche durch die Bedingung

$$\left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right) \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 < 8\varepsilon\pi f(\alpha_0)$$

bestimmt wird. Ist dagegen diese Bedingung nicht erfüllt, also

$$\left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right) \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 \geqq 8\varepsilon\pi f(\alpha_0)$$

so kann $\frac{d\alpha}{dt}$ nach Verlauf einer endlichen Zeit niemals verschwinden; denn bezeichnet k eine nicht negative Constante, so wird das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{8\varepsilon\pi}} \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{\alpha^3}}{f(\alpha) + k}}$$

mit unendlich wachsendem α, und das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{8\varepsilon\pi}} \int_{\alpha}^{\alpha_0} d\alpha \sqrt{\frac{2+\frac{1}{\alpha^3}}{f(\alpha)+k}}$$

mit unendlich abnehmendem α über alle Grenzen wachsen. Ist daher $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ positiv, so wird $\frac{d\alpha}{dt}$ stets positiv bleiben und sich unbegrenzt dem Werth

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{2\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 - 4\varepsilon\pi f(\alpha_0)}$$

nähern, während α mit t unbegrenzt wächst; das Ellipsoid wird sich also unbegrenzt verlängern. Ist dagegen $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ negativ, so wird $\frac{d\alpha}{dt}$ stets negativ bleiben und dem absoluten Werth nach mit α unbegrenzt abnehmen, während t über alle Grenzen wächst; das Ellipsoid wird sich daher unbegrenzt abplatten.

In allen diesen Fällen wird aber die Funktion σ niemals negative Werthe annehmen, so dass diese Bewegungen ohne Annahme eines äussern Druckes physisch möglich sind.

§. 8.

Wir wollen jetzt zu dem Fall übergehen, in welchem ϱ_0 von Null verschieden ist, also während der ganzen Bewegung Rotation Statt findet. Zufolge der am Ende des §. 6. angeführten Eigenschaften der Funktion $f(\alpha)$ und ihrer Derivirten $f'(\alpha)$ giebt es stets einen und nur einen Werth δ, welcher der Gleichung:

$$f'(\delta) = \frac{\varrho_0^2}{\alpha_0^2}$$

genügt, und zwar ist $0 < \delta < 1$. Betrachten wir nun die Function

$$\psi(\alpha) = f'(\delta)\,\alpha - f(\alpha),$$

so ergiebt sich leicht, dass $\psi(o) = 0$ und dass $\psi(\alpha)$, wenn α von 0 bis δ wächst, beständig abnimmt, also negativ wird und für $\alpha = \delta$ den kleinsten Werth $\psi(\delta)$ erreicht, der also ebenfalls negativ ist; wächst dann α weiter, so wächst auch $\psi(\alpha)$ und zwar mit α über alle Grenzen. Die Gleichungen der Bewegung nehmen nun die folgenden Formen an

$$\frac{\sigma}{D^2}\left(2\alpha + \frac{1}{\alpha^2}\right) = 2\varepsilon\pi\left(1 - f'(\delta)\,\alpha^2\right) + \tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

$$2\left(2 + \frac{1}{\alpha^3}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{3}{\alpha^4}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 8\varepsilon\pi\psi'(\alpha) = 0$$

$$\left(2 + \frac{1}{\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 8\varepsilon\pi\psi(\alpha) = 8\varepsilon\pi\left[\psi(\alpha_0) + k\right]$$

in denen zur Abkürzung

$$\frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha} = f'(\delta) - f'(\alpha) = \psi'(\alpha); \quad \left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 = 8\varepsilon\pi k$$

gesetzt ist. Hieraus geht zunächst hervor, dass für die ganze Dauer der Bewegung

$$\psi(\alpha) \leqq \psi(\alpha_0) + k$$

und folglich α stets unterhalb einer angebbaren endlichen Grenze liegen muss; das Vorhandensein auch der geringsten anfänglichen Rotationsbewegung verhindert also eine unbegrenzte Verlängerung des Sphäroids.

Da ferner $\psi(\delta)$ der algebraisch kleinste Werth der Funktion $\psi(\alpha)$ ist, so haben wir je nach dem Werth der Constante $\psi(\alpha_0) + k$ nur drei Fälle zu unterscheiden.

$$1)\quad \psi(\alpha_0) + k = \psi(\delta).$$

Dies ist, da k nicht negativ sein kann, nur dann möglich, wenn $k = 0$, und $\alpha_0 = \delta$, also

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = 0 \text{ und } \varrho_0^2 = \alpha_0^2 f'(\alpha_0), \text{ also } \alpha_0 < 1$$

ist; in diesem Falle muss α constant $= \alpha_0$ bleiben, so dass die Bewegung in einer gleichförmigen Rotation eines abgeplatteten Sphäroids von unveränderlicher Gestalt um die kleine Axe besteht, was der zuerst von Maclaurin behandelte Fall ist. Bekanntlich ist erforderlich, dass der Werth von ϱ_0^2 einen bestimmten numerischen Werth 0,2246 . . nicht übersteigt; für jeden unterhalb dieser Grenze liegenden Werth von ϱ_0^2 existiren zwei verschiedene entsprechende Sphäroide, die identisch werden, wenn ϱ_0^2 diesen Grenzwerth selbst erreicht. Ferner leuchtet ein, dass die Grösse σ dann einen unveränderlichen positiven Werth hat, dass also die Bewegung wieder ohne einen äussern Druck physisch möglich ist. Endlich ergiebt sich auch umgekehrt, dass α nur unter den Bedingungen dieses Falles constant sein kann.

$$2)\quad \psi(\delta) < \psi(\alpha_0) + k < 0.$$

Dieser Fall ist, da k nicht negativ sein kann, nur dann möglich, wenn

$$\varrho_0^2 < \alpha_0 f(\alpha_0)$$

und ausserdem der absolute Werth von $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ eine von ϱ_0 und α_0 abhängige Grenze nicht übersteigt. Die Gleichung $\psi(\alpha) = \psi(\alpha_0) + k$ hat dann zwei bestimmte Wurzeln α' und $\alpha'' > \alpha'$, und zwar ist $0 < \alpha' < \delta$. Hieraus folgt, dass α stets zwischen den beiden Grenzen α' und α'' liegen muss, und in der That wird α abwechselnd diese beiden Grenzwerthe, stets nach Verlauf derselben Zeit

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon\pi}} \int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{\alpha^3}}{k + \psi(\alpha_0) - \psi(\alpha)}},$$

erreichen; die Rotationsgeschwindigkeit ist bei dem Minimumwerth α' zu klein, bei dem Maximumwerth α'' zu gross, als dass die flüssige Masse ihre augenblickliche Gestalt beibehalten könnte. Auch ist zu bemerken, dass, wenn die Rotationsgeschwindigkeit im Augenblicke der grössten Verlängerung des Sphäroids einen gewissen Werth übersteigt, diese Bewegung nur unter der Wirkung eines hinreichend starken äussern Druckes physisch möglich ist.

$$3)\quad \psi(\alpha_0) + k \geqq 0.$$

In diesem Falle hat die Gleichung $\psi(\alpha) = \psi(\alpha_0) + k$ eine einzige Wurzel, und es wird daher entweder von vornherein, oder wenigstens nach Ablauf einer endlichen Zeit das Sphäroid anfangen, sich immer mehr und ohne Grenzen abzuplatten. Auch hier gilt die eben gemachte Bemerkung über die physische Möglichkeit der Bewegung.

§. 9.

Die soeben behandelten Fälle bieten die Eigenthümlichkeit dar, dass in ihnen die Werthe der drei in §. 4. mit P', Q', R' bezeichneten Verbindungen während der ganzen Dauer der Bewegung verschwinden. Es erschien nun der Mühe werth zu untersuchen, ob ausser den genannten Fällen noch andere möglich sind, welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Durch eine sorgfältige Analyse ergab sich, dass noch zwei andere solche Bewegungen mit den Fundamentalgleichungen (a) in Uebereinstimmung gebracht werden können. Die erste derselben wird durch die Gleichungen

$$x = la, \quad y = m'b, \quad z = n''c; \quad lm'n'' = 1;$$

$$l\frac{d^2l}{dt^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{l^2}{A^2l^2+s}, \quad m'\frac{d^2m'}{dt^2} = \frac{2\sigma}{B^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{m'^2}{B^2m'^2+s}, \quad n''\frac{d^2n''}{dt^2} = \frac{2\sigma}{C^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{n''^2}{C^2n''^2+s}$$

ausgedrückt, in denen zur Abkürzung

$$\Delta = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{A^2l^2}\right)\left(1 + \frac{s}{B^2m'^2}\right)\left(1 + \frac{s}{C^2n''^2}\right)}$$

gesetzt ist[1]; allein hier reicht das von dem Princip der lebendigen Kraft herrührende Integral nicht aus, um das Problem auf Quadraturen zurückzuführen.

Der zweite Fall, welcher sich bei der Untersuchung auf eine eigenthümliche Weise von den übrigen absondert, giebt das schöne von Jacobi gefundene Resultat, dass ein dreiaxiges Ellipsoid, dessen Axen A, B, C der Bedingung

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)} = \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{1}{1+\frac{s}{C^2}}; \quad \Delta = \sqrt{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)\left(1+\frac{s}{C^2}\right)}$$

genügen, um die kleinste Axe C mit constanter Winkelgeschwindigkeit, deren Quadrat

---

1) Diese Gleichungen finden sich an verschiedenen Stellen, aber ohne weitere Discussion, in den von Dirichlet hinterlassenen Papieren.

$$k^2 = \frac{2\varepsilon\pi}{A^2B^2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\varDelta\,(1+\frac{s}{A^2})\,(1+\frac{s}{B^2})}$$

ist, rotiren kann, so dass

$$x = a \cos kt + b \sin kt, \quad y = -a \sin kt + b \cos kt, \quad z = c$$

die Gleichungen der Bewegung sind.

Aus dieser Untersuchung ergiebt sich also auch das Resultat, dass ein flüssiges homogenes Ellipsoid, dessen Elemente sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, nur dann wie ein fester Körper um seinen Schwerpunkt rotiren kann, wenn die Bewegung um eine feste, mit einer der Hauptaxen des Ellipsoids zusammenfallende Axe geschieht, was der von Maclaurin und Jacobi untersuchte Fall ist[1]; offenbar nämlich würden ausser den Gleichungen $P' = 0$, $Q' = 0$, $R' = 0$ noch die Bedingungen $P = 1$, $Q = 1$, $R = 1$ zu erfüllen sein, wodurch die übrigen ausser den beiden soeben erwähnten Fällen ausgeschlossen werden.

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen $P' = 0$, $Q' = 0$, $R' = 0$ besteht darin, dass diejenigen Elemente der flüssigen Masse, welche anfänglich auf den drei Coordinatenaxen, also auf den Hauptaxen liegen, auch während der ganzen Bewegung drei zu einander senkrechte Gerade erfüllen; da nun andererseits aus der linearen Natur der Ausdrücke für x, y, z erhellt, dass solche Theilchen der flüssigen Masse, welche ursprünglich in drei conjugirten Durchmessern liegen, dieselbe Eigenschaft stets beibehalten, so ist der eigentliche Sinn der erwähnten drei Gleichungen der, dass die drei Hauptaxen des Ellipsoids stets von denselben Elementen der flüssigen Masse gebildet werden. Es lag nun nahe, eine verwandte Hypothese zu machen, die nämlich, dass die Richtungen der drei Hauptaxen stets unverändert bleiben; bedient man sich der in §. 4. eingeführten Bezeichnungen, so wird diese Forderung durch die drei Gleichungen $T = 0$, $T' = 0$, $T'' = 0$ ausgedrückt und sie ist offenbar sowohl in dem ersten der beiden in diesem §. erwähnten Fälle, als auch in demjenigen erfüllt, welcher vorher (in §. 6—8.)

1) Diese Bemerkung ist fast wörtlich einem Briefe Dirichlets an Herrn Kronecker entnommen.

ausführlich behandelt ist; ausserdem ergab aber die Durchführung dieser Hypothese noch einen dritten Fall, welcher ein schönes Seitenstück zu dem soeben angeführten von Jacobi herrührenden Satze bildet und sich auf folgende Weise aussprechen lässt:

Ein jedes dreiaxige Ellipsoid, welches dem Satze von Jacobi genügt, kann auch seine äussere Gestalt und *Lage* unverändert beibehalten, wenn eine innere Bewegung der Elemente Statt findet, die durch die Gleichungen

$$x = a \cos kt + b \frac{A}{B} \sin kt, \quad y = -a \frac{B}{A} \sin kt + b \cos kt, \quad z = c$$

ausgedrückt wird, in denen die Constante k die frühere Bedeutung hat; jedes Theilchen beschreibt eine Ellipse, deren Gleichungen

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2}; \quad z = c$$

sind, und zwar in derselben Weise, wie wenn es isolirt wäre und gegen den Mittelpunkt seiner Bahn durch eine der Entfernung proportionale Kraft angezogen würde, deren Mass für die Einheit der Entfernung $= k^2$ ist.