Zur Theorie der Mittelwerte.

Von Dr. Wilhelm Lorey in Görlitz.

Seit jeher, wo man in irgend einer Wissenschaft durch quantitative Beobachtung den Wert einer Grösse zu bestimmen suchte, hat man das „Mittel" schlechthin der beobachteten Grössen gebildet und versteht namentlich in den biologischen Zweigen der Naturwissenschaft darunter den Ausdruck

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n},$$

wo x_i ($i = 1, 2, n$) die beobachteten Werte bedeuten.

Unabhängig von Anwendungen auf die Messungen treten aber schon sehr früh bei den Mathematikern andere Mittelwerte auf, allerdings dann auf zwei Grössen beschränkt, nämlich das geometrische und das harmonische Mittel. Das geometrische Mittel g ergibt sich durch planmässiges Aufsteigen zu den höheren Rechnungsstufen aus dem arithmetischen Mittel

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

indem an Stelle der Addition die Multiplikation und an Stelle der Division das Radizieren tritt; es ist

$$g = \sqrt{x_1 \, . \, x_2}.$$

Das harmonische Mittel h ist durch die Gleichung definiert:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) \text{ oder auch } \frac{1}{x_1} - \frac{1}{h} = \frac{1}{h} - \frac{1}{x_2}$$

Diese letzte Form der Definitionsgleichung lässt deutlicher hervortreten, warum man auch von einer stetigen harmonischen Proportion redet. Ganz entsprechend lassen sich die stetigen arithmetischen und geometrischen Proportionen definieren durch

$$x_1 - a = a - x_2 \text{ und } x_1 : g = g : x_2.$$

Die Kenntnis dieser drei Mittel geht auf die Pythagoräer zurück.[1]) Der Pythagoräer Archytas z. B. definiert das arithmetische

[1]) Vergl. Cantor, Geschichte der Mathematik I² S. 155.

und geometrische Mittel in der noch heute üblichen Weise; seine schwerfällige Definition des harmonischen Mittels heisst in unsere moderne mathematische Sprache übersetzt:

$$x_1 = h + \frac{x_1}{n}; \quad h = x_2 + \frac{x_2}{n}.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen die willkürliche Zahl n, so folgt in der Tat:

$$h = \frac{2\, x_1\, x_2}{x_1 + x_2}.$$

Der Name „arithmetisches Mittel" erklärt sich durch die Tatsache, dass zu seiner Bildung die einfachen arithmetischen Operationen gebraucht werden. Die Flächen und Körpermasse, also geometrische Begriffe, führten zu dem geometrischen Mittel. [1])

Die Bezeichnung „harmonisches Mittel" kommt nach dem Pythagoräer Philolaus vom Würfel her, den man geometrische Harmonie genannt habe, weil alle seine Abmessungen im Einklang mit einander stehen. Nun hat der Würfel 6 Flächen, 8 Ecken und 12 Kanten; es ist aber

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right).$$ [2])

Bei den anderen regelmässigen Körpern, bei denen auch „die Abmessungen im Einklang mit einander stehen", gelten derartige Beziehungen nicht, mit Ausnahme des zum Würfel reziproken Achtflachs.

Nach einer anderen Erklärung ist der Name „harmonisches Mittel" musikalisch begründet. Es ergeben sich nämlich harmonische Töne, wenn von einer gespannten Seite die Teile x_1, h, x_2 ertönen

$$\text{z. B. } x_1 = 1, \quad h = \frac{4}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

d. h. Prim, Terz, Quinte.

Zwischen diesen drei Mitteln besteht nun eine Ungleichung, die im Altertum auch bekannt war. Es ist nämlich

$$h < g < a.$$

Der Beweis, dass das geometrische Mittel kleiner ist als das arithmetische, folgt einfach aus der bekannten Konstruktion der beiden Mittel. Ebenso folgt dann aus der Konstruktion des harmonischen Mittels als dritte Proportionale auf Grund der

---

[1]) Vergl. Cantor, S. 153.

[2]) Cantor S. 154.

Gleichung $g^2 = a \cdot h$, dass das geometrische Mittel grösser als das harmonische ist. Ich möchte hier auf eine einfache Konstruktion des harmonischen Mittels aufmerksam machen, die vielleicht nicht bekannt ist. Konstruiert man mit x_1 und x_2 als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck, so ist das Lot vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des rechten Winkels mit der Hypotenuse auf eine der Katheten gefällt das halbe harmonische Mittel zwischen x_1 und x_2.

Auf jene Ungleichung $h < g < a$ gründet sich nun ein Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel, das nur wenig bekannt zu sein scheint, trotzdem es theoretisch und praktisch sehr interessant ist.

Soll die Quadratwurzel aus einer Zahl R bestimmt werden, so zerlegen wir R in ein Produkt zweier Faktoren, indem wir setzen

$$R = h_0 \cdot a_0.$$

Bilden wir aus den beiden Faktoren die Mittel

$$a_1 = \frac{h_0 + a_0}{2} \quad \text{und} \quad h_1 = \frac{2\, a_0 \cdot h_0}{a_0 + h_0},$$

so folgt:

$$h_1 < \sqrt{R} < a_1$$

Da nun $h_1 \cdot a_1 = R$ ist, so wenden wir auf diese beiden Faktoren das gleiche Verfahren an und erhalten

$$a_2 = \frac{h_1 + a_1}{2}, \quad h_2 = \frac{2\, a_1 \cdot h_1}{a_1 + h_1},$$

wo wieder

$$h_2 < \sqrt{R} < a_2$$

So fortfahrend, erhält man also einen Algorithmus zur Berechnung der Quadratwurzel, der allgemein dargestellt werden kann durch

$$h_n < \sqrt{R} < a_n$$

wo (1)

$$a_n = \frac{h_{n-1} + a_{n-1}}{2}$$

und (2)

$$h_n = 2 \cdot \frac{a_{n-1} \cdot h_{n-1}}{a_{n-1} + h_{n-1}} \quad \text{ist.}$$

Da ferner

$$h_{n-1} < a_{n-1}$$

so folgt aus (1)

$$a_n < a_{n-1};$$

während Gleichung (2) aus der Form

$$h_n = h_{n-1} \cdot \frac{2}{1 + \frac{h_{n-1}}{a_{n-1}}}$$

sofort erkennen lässt, dass $h_n > h_{n-1}$ ist.

Die arithmetischen Mittel bilden also eine obere abnehmende, die harmonischen Mittel dagegen eine untere wachsende Grenze für $\sqrt{R}$. Es ist weiter auch nicht schwer zu zeigen, dass

$$\lim_{n=\infty} h_n = \lim_{n=\infty} a_n = \sqrt{R} \text{ ist.}$$

Die praktische Convergenz des Verfahrens hängt natürlich von der Wahl der Anfangsfaktoren ab. So erhalten wir z. B aus

$$17 = 4 \cdot \frac{17}{4}$$

sofort

$$\frac{136}{33} < \sqrt{17} < \frac{33}{8}$$

$$\text{d. h } 4{,}124 < \sqrt{17} < 4{,}125.$$

dagegen folgt aus

$$17 = 1 \cdot 17$$

$$\frac{17}{9} < \sqrt{18} < 9$$

Theoretisch ist das Verfahren interessant, weil es die zu bestimmende Grösse in Grenzen einschliesst. Dass es gerade deswegen auch methodisch wichtig für die Schule ist, habe ich an einer anderen Stelle schon betont.[1]) Ob wirklich im Altertum, wie Meyer[2]) vermutet, nach jenem Verfahren die Quadratwurzel bestimmt wurde, vermag ich nicht zu sagen. Die Frage, wie die Alten, insbesondere Archimedes, die so engen Grenzen für die Quadratwurzel bestimmt haben, ist auch nach der 2. Auflage von Cantors Geschichte der Arithmetik noch nicht geklärt. S. Günther[3]) erwähnt in seiner grossen Arbeit jenes Verfahren nicht. Auch bei Cantor ist über diesen Prozess des arithmetisch-harmonischen Mittels nichts zu finden.

---

[1]) Vergl. meinen Aufsatz: Die Mathemathik und das klassische Altertum. Zeitschrift für Gymnasialwesen 1903. S. 818.

[2]) Friedrich Meyer, Elemente der Arithmetik und Algebra. Halle 1895. S. 75.

[3]) Antike Näherungsmethoden im Lichte der modernen Mathematik. Abhandlungen der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 6. Folge. Band 9. 1878.

Ebenso versagt hier auch die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. Ich habe das Verfahren überhaupt bis jetzt nur in dem trefflichen Lehrbuch der Arithmetik von F. Meyer kurz angedeutet gefunden, wo es das Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel nach „Alexéeff" genannt wird, ohne dass ein genaueres Zitat angegeben wird. Dass im Prinzip wenigstens im Altertum solche unendliche Mittelwertalgorithmen vorkommen, habe ich an einer anderen Stelle gezeigt.[1]) Die bekannte Lösung des delischen Problems der Verdopplung des Würfels durch Einführung zweier mittleren Proportionalen deckt sich mit der Bestimmung von $\sqrt[3]{2}$ durch den unendlichen Prozess des geometrischen Mittels, dessen Algorithmus in der Form $x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}$ dargestellt werden kann.

Das geometrisch-harmonische Mittel, dessen Algorithmus also definiert ist durch die Gleichungen:

$$h_n = 2 \cdot \frac{h_{n-1} \cdot g_{n-1}}{h_{n-1} + g_{n-1}}; \quad g_n = \sqrt{h_{n-1} \cdot g_{n-1}},$$

tritt im 17. Jahrhundert bei Gregory auf zur Berechnung des Kreisinhaltes und findet sich in älteren guten Lehrbüchern angegeben.

Interessant ist es, dass es auch in dem von F. Klein kürzlich veröffentlichen wissenschaftlichen Tagebuch von Gauss erwähnt wird.[2]) Am 3. Juni 1800 hat Gauss in Braunschweig die Eintragung gemacht: Inter duos numeros datos semper dantur infinite multi termini medii tum arithmetico-geometrici, tum harmonico-geometrici, quorum nexum mutuum ex asse perspiciendi felicitas nobis est facta.

Gauss hatte damals schon tiefgehende Forschungen über das arithmetisch-geometrische Mittel mit dem Algorithmus

$$a_n = \frac{a_{n-1} + g_{n-1}}{2} \text{ und } g_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot g_{n-1}}$$

angestellt, die ihn zu den elliptischen Funktionen führten. Seine Untersuchungen wurden von Borchard[3]) auf mehr als zwei Grössen ausgedehnt.

---

[1]) Lorey: Über das geometrische Mittel, insbesondere über eine dadurch bewirkte Annäherung kubischer Irrationalitäten. Diss. Halle 1901. S. 14 ff. und wissensch. Beilage zum Jahresbericht des Realgymnasium Remscheid 1901.

[2]) Math. Annalen 57. S. 25.

[3]) Monatsbericht der Berliner Akademie 1876. Abhandlungen der Berl. Akademie 1878.

Ich habe mir nun die Aufgabe gestellt, den Prozess des arithmetisch-harmonischen Mittels auf mehr als zwei positive reelle Grössen auszudehnen und daraus insbesondere ein entsprechendes Verfahren zur Berechnung der Kubikwurzel zu entwickeln.[1]) Das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel lassen sich naturgemäss durch folgende Definitionsgleichungen erweitern:

$$a = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots x_n);$$

$$g = \sqrt[n]{x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \ldots x_n}$$

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n}\right).$$

Um nun einen Algorithmus zur Berechnung der Wurzel zu entwickeln, müssen wir noch $n-2$ andere Mittelwerte einführen. Unter einem Mittelwerte der n Grössen $x_1\ x_2 \ldots x_n$ sei eine eindeutige symmetrische Funktion

$$M(x_1\ x_2 \ldots x_n)$$

verstanden, die der Bedingung genügt:

$$M(x_1,\ x_2 \ldots x_n) = x \text{ für } x_1 = x_2 = x_n = x$$

Selbstversändlich ist die beim geometrischen Mittel auftretende $n$te Wurzel als eindeutig erklärt.

Diese allgemeine Definition der Mittelwerte stimmt mit der Definition überein, wie sie bei de Morgan[2]) und Ferrero[3]) gebraucht wird. Es folgt insbesondere daraus, dass die Funktion M die erste Dimension haben muss, was gerade auch für den vorliegenden Zweck sehr wesentlich ist.

Zur genaueren Bestimmung der einzuführenden Mittelwerte gehen wir nun von der bei zwei Grössen gültigen Beziehung

$$g^2 = a\,h$$

aus, die wir schon erwähnt haben.

Unter Beschränkung zunächst auf 3 Grössen x_1, x_2, x_3 setzen wir

$$g^3 = a\,h\,f$$

---

[1]) Im vergangenen Winter in der mathematisch-astronomischen Sektion der Naturforschenden Gesellschaft zu Görlitz vorgetragen.

[2]) Cambridge Transaktions X. 1864.

[3]) Expositione del methodo dei minimi quadrati. Firenze 1878.

Beide Arbeiten waren mir nicht zugänglich. Ich führe sie an nach Czuber, Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung 7. 1899.

und erhalten daher

$$f = \frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1}{x_1 + x_2 + x_3},$$

oder, wenn wir die im Zähler stehende symmetrische Grundfunktion mit σ bezeichnen,

$$f = \frac{\frac{1}{3}\sigma}{a}.$$

Zwischen dem harmonischen, geometrischen und arithmetischen Mittel besteht auch bei drei Grössen eine Ungleichung, wie bei zwei Grössen; es ist nämlich

$$h < g < a.$$

Dass $g < a$ ist, folgt aus dem allgemeinen und wiederholt bewiesenen Satze, dass für beliebig viele positive Grössen das geometrische Mittel stets kleiner ist, als das arithmetische. Um den ersten Teil der Ungleichung als richtig nachzuweisen, nehmen wir an es sei

$$h \geqq g$$

$$\text{d. h.} \frac{g^3}{\frac{1}{3}\sigma} \geqq g$$

und daher

$$g^2 > \frac{1}{3}(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1).$$

Setzen wir nun $x_1 x_2 = z_3$, $x_2 x_3 = z_1$, $x_3 x_1 = z_2$, so wird

$$g^2 = \sqrt[3]{z_1 z_2 z_3},$$

und wir erhielten also

$$\sqrt[3]{z_1 z_2 z_3} > \frac{1}{3}(z_3 + z_1 + z_2)$$

was nach dem oben angeführten allgemeinen Satze unmöglich ist.

Der Mittelwert f schwankt im Vergleich zu g, wie folgendes Beispiel zeigt. Es sei

$$g = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}.$$

Für $x_1 = 1$ $x_2 = 1$ $x_3 = 8$, ist $f = \frac{17}{10} < g$

„ $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = 4$ „ $f = \frac{14}{7} = g$

„ $x_1 = 1$ $x_2 = 3$ $x_3 = \frac{8}{3}$ „ $f = \frac{41}{20} > g$.

Das Verfahren zur Berechnung der Kubikwurzel durch den Prozess des arithmetisch-harmonischen Mittels ist nun ersichtlich und soll an einem Beispiel erläutert werden.

Es sei zu berechnen $\sqrt[3]{3}$. Wir setzen $3 = 1 \,.\, 1 \,.\, 3$ und erhalten

$$a_1 = \frac{5}{3} \quad f_1 = \frac{7}{5} \quad h_1 = \frac{9}{7};$$

somit

$$\frac{9}{7} < \sqrt[3]{3} < \frac{5}{3}$$

Aus den Mitteln a_1 f_1 h_1 erhalten wir die zweite Annäherung·

$$\frac{945}{659} < \sqrt[3]{3} < \frac{459}{315} \qquad \left(f_2 = \frac{659}{459}\right)$$

oder

$$1{,}41 < \sqrt[3]{3} < 1{,}45.$$

Es ist

$$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422.$$

Für

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1 \,.\, 1 \,.\, 2}$$

erhält man als zweite Annäherung

$$1{,}2599 < \sqrt[3]{2} < 1{,}261.$$

Entsprechend für

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{1 \,.\, 1 \,.\, 5}$$

$$1{,}67 < \sqrt[3]{5} < 1{,}75.$$

Der Wert f_1 kommt dem wahren Wert immer am nächsten, ohne dass man von vornherein sagen kann, ob er grösser oder kleiner ist; im letzten Falle ist z. B.:

$$f_2 = 1{,}706 < \sqrt[3]{5}.$$

Für $\sqrt[3]{7}$ wird $f_2 = 1{,}90 < \sqrt[3]{7}$; für $\sqrt[3]{3}$ ist $f_2 = 1{,}43$.

Bei der Erweiterung dieses Verfahrens auf höhere Wurzeln sind die anderen symmetrischen Grundfunktionen entsprechend einzuführen, wie an einer anderen Stelle gezeigt werden soll.

Hier will ich zum Schluss nur noch auf ein Beispiel aufmerksam machen, das zeigt, wie auch bei praktischen Messungen ausser dem arithmetischen Mittel andere Mittel, insbesondere das geometrische von Bedeutung werden können. Eine fehlerhafte Wage liefere als Gewicht eines Körpers, wenn dieser auf der linken Schale liegt, das Gewicht p_1; dagegen, wenn der Körper rechts liegt, das Gewicht p_2. Das wahre Gewicht des Körpers ist dann, wie leicht zu beweisen, $p = \sqrt{p_1 \cdot p_2}$.

Ein Beispiel aus der Photometrie hat Seeliger[1]) gegeben in einer Arbeit, die mir hier nicht zugänglich war.

Juni 1906.

---

1) Bemerkungen über das arithmetische Mittel. Astronomische Nachrichten. CXXXXII. 1893. Angeführt nach Czuber, Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie. S. 157.