Über die Bäcklundsche Transformation der Flächen konstanter Krümmung.[1]

Von **Dr. Otto Roelcke** in Görlitz.

Einleitung.

Bianchi ist der erste, der eine Transformation angegeben hat, die aus einer Fläche konstanter negativer Krümmung ∞^1 neue Flächen derselben Art abzuleiten gestattet.[2] Die transformierten Flächen stehen zu der ursprünglichen in der Beziehung, dass jedem Punkte der gegebenen Fläche je ein Punkt auf jeder der ∞^1 transformierten zugeordnet ist, und dass die Tangentialebenen entsprechender Punkte senkrecht aufeinander stehen.

Eine neue Auffassung dieser Transformation hat dann Lie entwickelt in einem Aufsatze „Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung", der im Jahre 1880 erschienen ist.[3] Lie betrachtet hier die Flächentransformation als eine Transformation von Flächenelementen. Dabei versteht er unter einem Flächenelemente die Figur, die aus einem Punkte und einer hindurchgehenden Ebene besteht. Nach dieser Auffassung lässt sich die Bianchische Transformation durch die folgenden vier Gleichungen darstellen:

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = a^2$$
$$p\,(x-x_1) + q\,(y-y_1) - (z-z_1) = o$$
$$p_1\,(x-x_1) + q_1\,(y-y_1) - (z-z_1) = o$$
$$pp_1 + qq_1 + 1 = o$$

Hierin bedeuten x, y, z die Koordinaten eines Punktes auf der gegebenen, x_1, y_1, z_1 diejenigen eines Punktes auf der transformierten Fläche; p, q und p_1, q_1 sind die partiellen Ableitungen

---

[1] Vorliegende Arbeit ist von der philosophischen Fakultät der Universität Greifswald als Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde angenommen worden.

[2] Bianchi, Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi (Dissertation); ferner: Giornale di Matematiche, Band XVII, 1879, Ricerche sulle superficie elicoidali; und: Mathematische Annalen, Band XVI, 1880, Über die Flächen mit konstanter negativer Krümmung.

[3] S. Lie, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Band V, Heft 3, S. 282 ff., Kristiania 1880.

von z und z_1 nach x und y, bezw. nach x_1 und y_1, a ist eine Konstante. Die erste Gleichung sagt aus, dass zu jedem Punkte $P(x, y, z)$ der gegebenen Fläche ein anderer P_1 (x_1, y_1, z_1) auf der transformierten gehört, der von ihm die konstante Entfernung a besitzt. Aus der zweiten und dritten ersieht man, dass P_1 auf der zu P gehörigen Tangentialebene der ursprünglichen Fläche und ebenso P auf der zu P_1 gehörigen Tangentialebene der transformierten Fläche liegt. Die vierte endlich ist die Bedingung dafür, dass die entsprechenden Tangentialebenen senkrecht aufeinander stehen.

Die angegebenen Gleichungen der Transformation lassen ferner unmittelbar erkennen, dass den ∞^2 Flächenelementen der gegebenen Fläche ∞^3 neue entsprechen, da ja zur Bestimmung der fünf Grössen x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 nur vier Gleichungen vorhanden sind. Lie zeigt in der genannten Abhandlung, dass die vorgelegte Fläche notwendig die konstante negative Krümmung $-1 : a^2$ besitzen muss, wenn sich diese ∞^3 transformierten Flächenelemente in eine Schar von ∞^1 Flächen anordnen lassen sollen.

Kurz darauf veröffentlichte Lie eine zweite Arbeit,[1]) in der er die Bianchische Konstruktion auf einen Flächenstreifen anwendet. Hierunter versteht Lie das Gebilde, welches aus einer Kurve und einer kontinuierlichen Schar von Tangentialebenen besteht. So stellt z. B. jede Flächenkurve mit der Schar der zugehörigen Tangentialebenen der Fläche einen Flächenstreifen dar. Nach den Transformationsgleichungen ist es klar, dass man aus jedem Streifen mit Hilfe der Bianchischen Konstruktion ∞^1 neue Streifen gewinnen kann. Lie geht im Besonderen von einem solchen Flächenstreifen aus, bei dem die Tangentialebenen Schmiegungsebenen der Kurve sind, und beweist, dass die analoge Beziehung dann und nur dann auch bei den transformierten Flächenstreifen gilt, wenn die ursprünglich gegebene Kurve konstante Torsion besitzt. Ferner zeigt er, dass in diesem Falle die transformierten Kurven dieselbe konstante Torsion haben, und dass das Bogenelement invariant bleibt.

Eine sehr wesentliche Verallgemeinerung hat die Bianchische Transformation später durch Bäcklund[2]) erfahren. Während nämlich Bianchi verlangt, dass die Tangentialebenen entsprechender

---

[1]) S. Lie, Archiv for Math. og Naturv., Band V, Heft 3, S. 328 ff., Kristiania 1880.

[2]) A. V. Bäcklund, Om ytor med konstant negativ krökning, Lund 1883.

Punkte senkrecht aufeinander stehen, stellt Bäcklund blos die Forderung, dass der Winkel zwischen je zwei solchen Ebenen konstant sei. In dieser allgemeineren Transformation ist also die Bianchische als spezieller Fall enthalten. Bäcklund kommt zu dem Resultate, dass auch bei seiner Transformation die vorgelegte Fläche konstante negative Krümmung besitzen muss, wenn eine Anordnung der ∞^3 transformierten Flächenelemente in ∞^1 Flächen möglich sein soll. Ebenso weist er nach, dass die von Lie für die Bianchische Transformation aufgestellten Sätze mit einigen Modifikationen ihre Gültigkeit behalten.

In der vorliegenden Arbeit soll nun zunächst das Verhalten eines beliebigen Flächenstreifens bei der Bäcklundschen Transformation systematisch und möglichst vollständig untersucht werden, was bisher noch nicht geschehen ist.

Lie hat nämlich nur die Bianchische Transformation betrachtet und dabei auch nur solche Elementstreifen berücksichtigt, bei denen die Tangentialebenen die Schmiegungsebenen der zugehörigen Kurven sind. Ferner hat Bäcklund bei der Ausführung seiner allgemeinen Transformation auf einen beliebigen Flächenstreifen nur die Differentialgleichung angegeben, die der später abzuleitenden Gleichung I entspricht, und von den Stücken der transformierten Kurven nur das Bogenelement berechnet.

Nach den allgemeinen Untersuchungen wollen wir uns dann in dem zweiten Kapitel mit zwei besonders einfachen Spezialfällen beschäftigen. Darauf werden wir zur Bäcklundschen Flächentransformation übergehen und zeigen, wie diese auf die Transformation von Flächenstreifen zurückgeführt werden kann. Endlich soll zum Schluss der Versuch einer Verallgemeinerung der Bäcklundschen Transformation gemacht werden.

Kapitel I.

Die Bäcklundsche Transformation angewendet auf Flächenstreifen.

In jeder Tangentialebene eines gegebenen Flächenstreifens konstruieren wir um den zugehörigen Kurvenpunkt einen Kreis mit konstantem Halbmesser und ordnen die Punkte seiner Peripherie dem ursprünglichen Kurvenpunkte durch die Transformation zu. Ferner lassen wir jeder der gegebenen Tangentialebenen ∞^1 neue Ebenen entsprechen, die jene unter einem bestimmten konstanten Winkel schneiden, und die ausser dem transformierten Punkte auch den Kurvenpunkt enthalten. Die Bianchische Transformation ist dann insbesondere dadurch charakterisiert, dass dieser Winkel ein rechter ist. Die ∞^1 Flächenelemente der alten Kurve werden somit in ∞^2 neue übergeführt, und wir stellen uns jetzt die Aufgabe, diese Flächenelemente in eine einfach unendliche Schar von Flächenstreifen anzuordnen und die Transformation genauer zu untersuchen.

Es ist klar, dass sich die verlangte Anordnung durch eine Relation zwischen der Bogenlänge s und einer Grösse bestimmen lassen muss, welche für jeden Kurvenpunkt die Punkte des zugehörigen Kreises charakterisiert. Ebenso leicht erkennt man, dass diese Beziehung sich in der Form einer Differentialgleichung darstellen wird, da unsere Transformation unendlichdeutig ist und also die Relation zwischen s und der noch nicht näher definierten Variablen von einem Parameter abhängen muss.

Der Rechnung schicken wir folgende Definitionen voraus. Den Halbmesser der ersten Krümmung der ursprünglichen Kurve nennen wir r, den der zweiten ρ. Die Richtungskosinus der Tangente, der Hauptnormalen und der Binormalen wollen wir mit α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν bezeichnen, zu der Normalen der Tangentialebene mögen die Richtungskosinus p, q, r, zur Verbindungsgeraden zwischen dem Kurvenpunkte und dem transformierten Punkte die Richtungskosinus u, v, w gehören. Den Winkel zwischen den Richtungen (α, β, γ) und (u, v, w) nennen wir ϑ, den zwischen (l, m, n) und (p, q, r) φ. Wir können hiernach die drei Gleichungen aufstellen:

$$\sum p\alpha = 0, \quad \sum pl = \cos\varphi, \quad \sum p\lambda = \sin\varphi,$$

aus denen sich leicht die folgenden ableiten lassen:

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} p &= l\cos\varphi + \lambda\sin\varphi \\ q &= m\cos\varphi + \mu\sin\varphi \\ r &= n\cdot\cos\varphi + \nu\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

Um ϑ genau bestimmen zu können, konstruieren wir eine in der Tangentialebene liegende Gerade, die senkrecht auf der Kurventangente steht, so dass sie mit dieser und der Normalen der Tangentialebene zusammen ein rechtwinkliges Triëder bildet. Die

Richtungskosinus dieser Geraden, die wir mit ξ, η, ζ bezeichnen wollen, seien so gewählt, dass

$$\begin{vmatrix} \xi & \alpha & p \\ \eta & \beta & q \\ \zeta & \gamma & r \end{vmatrix} = +1$$

ist. Dann ist bekanntlich:

$$\xi = \beta r - \gamma q$$
$$\eta = \gamma p - \alpha r$$
$$\zeta = \alpha q - \beta p$$

Da die drei Geraden, deren Richtungen durch α, β, γ; u, v, w; ξ, η, ζ gegeben sind, in der Tangentialebene liegen, so können wir nunmehr ϑ durch die Gleichungen definieren:

$$\sum u\alpha = \cos\vartheta$$

$$\sum u(\beta r - \gamma q) = \sin\vartheta.$$

Nehmen wir noch die Gleichung hinzu:

$$\sum up = 0,$$

so ergibt sich für u:

(2) $$u = \alpha\cos\vartheta + (\beta r - \gamma q)\sin\vartheta,$$

worin

(2′) $$\beta r - \gamma q = -l\sin\varphi + \lambda\cos\varphi$$

ist. Die entsprechenden Gleichungen für v, w und η, ζ erhält man durch cyklische Vertauschung.

Bei dem transformierten Flächenstreifen führen wir ganz analoge Bezeichnungen ein wie hier, indem wir zum Unterschiede überall den Index 1 anwenden. Nur bezüglich des Winkels ϑ_1 machen wir eine Ausnahme,[1]) indem wir ihn durch die beiden Gleichungen definieren:

(3) $$\cos\vartheta_1 = \sum \alpha_1 u$$

$$\sin\vartheta_1 = \sum(\beta_1 r_1 - \gamma_1 q_1)\,u,$$

während wir eigentlich statt u $u_1 = -u$ zu nehmen hätten.

Nennen wir die konstante Entfernung zwischen zwei entsprechenden Punkten a, so können wir die Beziehung zwischen den

[1]) Wir tun dies, um in Übereinstimmung mit Lie (Archiv f. M. o. N., Band V, Heft 3, S. 328 ff.) zu bleiben.

Punkten der gegebenen und der transformierten Kurve durch die drei Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + a\,u \\ y_1 &= y + a\,v \\ z_1 &= z + a\,w \end{aligned}$$

wo für u, v, w die aus der Gleichung (2) hervorgehenden Werte einzusetzen sind. Führen wir diese Substitution aus, so haben wir x_1, y_1, z_1 in folgender Weise durch die vorhin definierten Grössen ausgedrückt.

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x + a\,[\alpha \cos\vartheta + (-l \sin\varphi + \lambda \cos\varphi) \sin\vartheta] \\ y_1 &= y + a\,[\beta \cos\vartheta + (-m \sin\varphi + \mu \cos\varphi) \sin\vartheta] \\ z_1 &= z + a\,[\gamma \cos\vartheta + (-n \sin\varphi + \nu \cos\varphi) \sin\vartheta] \end{aligned}\right.$$

In den vorliegenden Gleichungen müssen wir nicht blos x, y, z und die Richtungskosinus als Veränderliche auffassen, sondern auch die Grössen φ und ϑ. Dabei ist φ eine gegebene Funktion der Bogenlänge s, weil wir von einem bestimmten, aber ganz beliebigen Flächenstreifen ausgehen, bei dem also der Neigungswinkel zwischen der Tangentialebene und der zugehörigen Schmiegungsebene der Kurve eine bestimmte, aber beliebige Funktion von s ist. Dagegen ist ϑ eine zunächst noch unbekannte Funktion von s, da die aus demselben Flächenelemente transformierten Flächenelemente gerade durch ϑ unterschieden werden, und da wir alle ∞^2 Flächenelemente in der Weise zu ∞^1 Vereinen von je ∞^1 Elementen anordnen wollen, dass in jedem Vereine ein Element vorhanden ist, das einem beliebig herausgegriffenen Elemente der ursprünglichen Kurve zugeordnet ist.

Die Lage der einander zugeordneten Tangentialebenen bestimmen wir durch den Winkel $\varkappa$, den ihre Normalen einschliessen. $\varkappa$ ist als gegebene Konstante zu betrachten. Aus diesen Definitionen folgen offenbar die Gleichungen:

$$\sum p_1 u = 0$$

$$\sum p_1 p = \cos\varkappa, \qquad \sum p_1 (v r - q w) = \pm \sin\varkappa,$$

von denen die erste ausdrückt, dass die Verbindungsgerade der einander zugeordneten Punkte in der transformierten Ebene liegt, während die beiden letzten den Winkel zwischen den entsprechenden Tangentialebenen angeben. Die Richtung (p_1, q_1, r_1) bestimmen wir dadurch eindeutig, dass wir in der Gleichung

$$\sum p_1 (vr - qw) = \pm sin \varkappa$$

der Rechnung den Wert $+ sin\, \varkappa$ zu Grunde legen. Demnach ergibt sich:

(5) $$p_1 = p \cos \varkappa + \sin \varkappa \, [- \alpha \sin \vartheta + (\beta r - \gamma q) \cos \vartheta],$$

oder:

$$p_1 = - \alpha \sin \varkappa \sin \vartheta + l \, (\cos \varkappa \cos \varphi - \sin \varkappa \sin \varphi \cos \vartheta)$$
$$+ \lambda \, (cso\, \varkappa \sin \varphi + \sin \varkappa \cos \varphi \cos \vartheta)$$

woraus man durch cyklische Vertauschung die Grössen q_1, r_1 erhält.

Denken wir uns jetzt die Gruppierung der ∞^2 Flächenelemente in ∞^1 Flächenstreifen vorgenommen, so muss für jeden Streifen die Gleichung gelten:

$$\sum p_1 \alpha_1 = \sum p_1 \frac{d x_1}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_1} = 0$$

Für $d x_1 : d s$ folgt aber aus (4) der Ausdruck:

(6) $$\frac{d x_1}{ds} = \alpha + a \left[\frac{l}{\mathfrak{r}} \cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{\alpha}{\mathfrak{r}} \sin \vartheta \sin \varphi + \right.$$
$$\left. + p \sin \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right) + \left(\beta r - \gamma q \right) \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \right],$$

worin φ' die nach s genommene Ableitung von φ bedeutet.

Setzt man diesen Ausdruck in die letzte Gleichung ein, so erhält man nach (5), (1) und (2') die auf Seite 4 erwähnte Differentialgleichung in der Gestalt:

I $$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\sin \vartheta}{a} + \frac{\sin \varphi}{\mathfrak{r}} - \frac{\cot \varkappa \cos \vartheta \cos \varphi}{\mathfrak{r}} - \cot \varkappa \sin \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right)$$

Daher wird:

$$\frac{dx_1}{ds} = \alpha_1 . \frac{ds_1}{ds} = \alpha + a \left[\frac{l}{\mathfrak{r}} \cos \vartheta + \left(- \alpha \sin \vartheta + (- l \sin \varphi + \lambda \cos \varphi) \cos \vartheta \right) . \right.$$
$$\left(\frac{\sin \vartheta}{a} + \frac{\sin \varphi}{\mathfrak{r}} - \frac{\cot \varkappa \cos \vartheta \cos \varphi}{\mathfrak{r}} - \cot \varkappa \sin \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right) \right) +$$
$$\left. + \frac{\alpha}{\mathfrak{r}} \sin \vartheta \sin \varphi + (l \cos \varphi + \lambda \sin \varphi) \sin \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right) \right]$$

Man kann zu einer neuen Beziehung gelangen, wenn man diese Gleichung quadriert und darauf die cyklische Summe bildet. Man findet dann:

$$\left(\frac{ds_1}{ds} \right)^2 = 1 + a^2 \left[\frac{\cos^2 \vartheta}{\mathfrak{r}^2} + \left\{ \frac{\sin^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\mathfrak{r}^2} + \frac{\cot^2 \varkappa \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{\mathfrak{r}^2} + \right. \right.$$
$$+ \cot^2 \varkappa \sin^2 \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right)^2 + \frac{2 \sin \vartheta \sin \varphi}{a \mathfrak{r}} - \frac{2 \sin \vartheta \cot \varkappa \cos \vartheta \cos \varphi}{a \mathfrak{r}} -$$

$$-\frac{2\sin\vartheta\cot\varkappa\sin\vartheta}{a}\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)-\frac{2\sin\varphi}{\mathfrak{r}^2}\cot\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi-$$

$$-\frac{2\sin\varphi}{\mathfrak{r}}\cot\varkappa\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)+\frac{2\cot^2\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta}{\mathfrak{r}}\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)\Big\}+$$

$$+\frac{\sin^2\vartheta\sin^2\varphi}{\mathfrak{r}^2}+\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)^2\Big]-2a\sin\vartheta\left(\frac{\sin\vartheta}{a}+\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cot\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}-\cot\varkappa\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)\right)+\frac{2a}{\mathfrak{r}}\sin\vartheta\sin\varphi+$$

$$+\frac{2a^2\cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta}{\mathfrak{r}}\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)-\frac{2a^2\sin\varphi}{\mathfrak{r}}\left(\frac{\sin\vartheta}{a}+\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cot\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}-\cot\varkappa\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)\right).$$

Hieraus erhält man das verhältnismässig einfache Resultat:

$$\text{(II)}\qquad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2=\cos^2\vartheta+\frac{a^2}{\sin^2\varkappa}\left(\frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}+\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)\right)^2$$

Zur Berechnung von ϑ_1 dienen uns die Gleichungen (3). Wir bilden zunächst $\beta_1 r_1-\gamma_1 q_1$, indem wir die Werte für q_1 und r_1 den Gleichungen (5) entnehmen und ferner beachten, dass

$$\beta_1=\frac{dy_1}{ds_1}\ ,\ \gamma_1=\frac{dz_1}{ds_1}$$

ist. Um die Übersicht zu erleichtern, wollen wir die durch cyklische Permutation aus $\beta r-\gamma q$ hervorgehenden Richtungskosinus mit $(\beta r-\gamma q)'$ und $(\beta r-\gamma q)''$ bezeichnen. Dann haben wir:

$$\frac{dy_1}{ds}=\beta+a\left[\frac{m}{\mathfrak{r}}\cos\vartheta-\beta\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}+\frac{\beta}{\mathfrak{r}}\sin\vartheta\sin\varphi+\right.$$

$$\left.+q\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)+(\beta r-\gamma q)\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\right]$$

und

$$r_1=r\cos\varkappa+\sin\varkappa\,(-\gamma\sin\vartheta+(\beta r-\gamma q)''\cos\vartheta).$$

Daher ergiebt sich:

$$(\beta_1 r_1-\gamma_1 q_1)\frac{ds_1}{ds}=\cos\varkappa\left\{\beta r-\gamma q+a\left[(rm-qn)\frac{\cos\vartheta}{\mathfrak{r}}-\right.\right.$$

$$-(\beta r-\gamma q)\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}+(\beta r-\gamma q)\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\mathfrak{r}}+\Big(r(\beta r-\gamma q)'-$$

$$\left.\left.-q(\beta r-\gamma q)''\Big)\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\right]\right\}+a\sin\varkappa\left[(-m\gamma+\beta n)\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\mathfrak{r}}+\right.$$

$$\left.+(-\gamma q+\beta r)\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)\right]+\Big((\beta r-\gamma q)''\beta-(\beta r-\gamma q)'\gamma\Big)\sin\varkappa\cos\vartheta$$

$$+ a \sin \varkappa \left[\left((\beta r - \gamma q)'' m - (\beta r - \gamma q)' n \right) \frac{\cos^2 \vartheta}{\mathfrak{r}} + \left((\beta r - \gamma q)'' \beta - \right. \right.$$
$$\left. - (\beta r - \gamma q)' \gamma \right) \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi}{\mathfrak{r}} + \left((\beta r - \gamma q)'' q - (\beta r - \gamma q)' r \right) \cdot$$
$$\left. \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right) \right]$$

Diese Gleichung lässt sich einfacher schreiben, wenn man die folgenden Relationen benutzt:

$$rm - qn = \alpha \sin \varphi, \qquad r (\beta r - \gamma q)' - q (\beta r - \gamma q)'' = - \alpha,$$
$$- m \gamma + \beta n = \lambda, \qquad \beta (\beta r - \gamma q)'' - \gamma (\beta r - \gamma q)' = - p,$$
$$(\beta r - \gamma q)'' m - (\beta r - \gamma q)' n = \alpha \cos \varphi$$

Es wird dann nämlich:

$$(\beta_1 r_1 - \gamma_1 q_1) \frac{ds_1}{ds} = \cos \varkappa \left\{ \beta r - \gamma q + a \left[\frac{\alpha \sin \varphi \cos \vartheta}{\mathfrak{r}} - \right. \right.$$
$$\left. \left. - (\beta r - \gamma q) \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} + (\beta r - \gamma q) \frac{\sin \vartheta \sin \varphi}{\mathfrak{r}} - \alpha \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \right] \right\} -$$
$$- p \sin \varkappa \cos \vartheta + a \sin \varkappa \left[\frac{\lambda \sin \vartheta \cos \vartheta}{\mathfrak{r}} + (\beta r - \gamma q) \sin^2 \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha \cos \varphi \cos^2 \vartheta}{\mathfrak{r}} - \frac{p \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi}{\mathfrak{r}} + \alpha \cos \vartheta \sin \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right) \right]$$

Substituiert man jetzt noch für: $d\vartheta : ds$ seinen Wert, so erhält man:

$$(\beta_1 r_1 - \gamma_1 q_1) \frac{ds_1}{ds} = \cos \varkappa \left\{ \beta r - \gamma q + a \left[\frac{\alpha \sin \varphi \cos \vartheta}{\mathfrak{r}} - \right. \right.$$
$$- (\beta r - \gamma q) \sin \vartheta \left(\frac{\sin \vartheta}{a} + \frac{\sin \varphi}{\mathfrak{r}} - \frac{\cot \varkappa \cos \vartheta \cos \varphi}{\mathfrak{r}} - \cot \varkappa \sin \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right) \right) +$$
$$+ (\beta r - \gamma q) \frac{\sin \vartheta \sin \varphi}{\mathfrak{r}} - \alpha \cos \vartheta \left(\frac{\sin \vartheta}{a} + \frac{\sin \varphi}{\mathfrak{r}} - \frac{\cot \varkappa \cos \vartheta \cos \varphi}{\mathfrak{r}} - \right.$$
$$\left. \left. \left. - \cot \varkappa \sin \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right) \right) \right] \right\} - p \sin \varkappa \cos \vartheta + a \sin \varkappa \left[\frac{\lambda \sin \vartheta \cos \vartheta}{\mathfrak{r}} + \right.$$
$$+ (\beta r - \gamma q) \sin^2 \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right) + \frac{\alpha \cos \varphi \cos^2 \vartheta}{\mathfrak{r}} - \frac{p \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi}{\mathfrak{r}} +$$
$$\left. + \alpha \cos \vartheta \sin \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right) \right] =$$

$$= (\beta r - \gamma q) \cos \varkappa \cos^2 \vartheta + (\beta r - \gamma q) \frac{a \cos^2 \varkappa \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi}{\sin \varkappa \ \mathfrak{r}} +$$
$$+ (\beta r - \gamma q) \frac{a \sin^2 \vartheta}{\sin \varkappa} \left(\frac{1}{\rho} - \varphi' \right) - \alpha \cos \varkappa \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{a \alpha \cos^2 \vartheta \cos \varphi}{\mathfrak{r} \sin \varkappa} +$$

$$+ \alpha \frac{a \sin\vartheta \cos\vartheta}{\sin\varkappa}\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) - p \sin\varkappa \cos\vartheta + a \sin\varkappa \left(\frac{\lambda \sin\vartheta \cos\vartheta}{\mathfrak{r}} - \right.$$

$$\left. - p \frac{\sin\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi}{\mathfrak{r}}\right)$$

Wir können diese Gleichung auf die einfachste Form bringen, wenn wir noch den Ausdruck

$$(\beta r - \gamma q) \frac{a \sin^2\varkappa}{\sin\varkappa} \frac{\sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi}{\mathfrak{r}}$$

addieren und subtrahieren. Denn da

$$\frac{\lambda \sin\vartheta \cos\vartheta}{\mathfrak{r}} - p \frac{\sin\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi}{\mathfrak{r}} - (\beta r - \gamma q) \frac{\sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi}{\mathfrak{r}} \qquad 0$$

ist, so ergibt sich hieraus:

$$(\beta_1 r_1 - \gamma_1 q_1) \frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{\sin\varkappa}\left[a u \left(\frac{\cos\vartheta \cos\varphi}{\mathfrak{r}} + \sin\vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\right) - p \cos\vartheta + \right.$$

(7)

$$\left. + p_1 \cos\varkappa \cos\vartheta\right]$$

Jetzt können wir ϑ_1 sofort bestimmen. Aus den Gleichungen (3) folgt unmittelbar:

III
$$\frac{ds_1}{ds} \cos\vartheta_1 = \cos\vartheta$$

$$\frac{ds_1}{ds} \sin\vartheta_1 = \frac{\mathrm{a}}{\sin\varkappa}\left(\frac{\cos\vartheta \cos\varphi}{\mathfrak{r}} + \sin\vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\right)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und der Relation II lassen sich also $\cos\vartheta_1$ und $\sin\vartheta_1$ als Funktionen bekannter Grössen darstellen.

Wir wenden uns nun zur Berechnung von $\mathfrak{r}_1$, ρ_1 und φ_1. Um zunächst die Werte von $\cos\varphi_1 : \mathfrak{r}_1$ und $\sin\varphi_1 : \mathfrak{r}_1$ zu erhalten, gehen wir von den Gleichungen aus:

$$p_1 = l_1 \cos\varphi_1 + \lambda_1 \sin\varphi_1$$

und:

$$- u_1 = \alpha_1 \cos\vartheta_1 + (\beta_1 r_1 - \gamma_1 q_1) \sin\vartheta_1,$$

worin

$$\beta_1 r_1 - \gamma_1 q_1 = - l_1 \sin\varphi_1 + \lambda_1 \cos\varphi_1$$

zu setzen ist. Dabei berücksichtigen wir, dass p_1, q_1, r_1 und u_1, v_1, w_1 uns als Funktionen bekannter Grössen gegeben sind, nämlich p_1, q_1, r_1 infolge der Gleichungen (5) und u_1, v_1, w_1 wegen der Relationen:

$$u_1 = - u, \quad v_1 = - v, \quad w_1 = - w$$

Durch Differentiation von p_1 und u_1 nach s_1 erhalten wir die beiden Gleichungen:

(8) $$\frac{dp_1}{ds_1} = -\frac{\alpha_1}{\mathfrak{r}_1} cos\varphi_1 + (\beta_1 r_1 - \gamma_1 q_1)\left(\frac{d\varphi_1}{ds_1} - \frac{1}{\rho_1}\right) =$$
$$= \frac{ds}{ds_1}\Big[\Big(-\frac{\alpha}{\mathfrak{r}} cos\varphi + (\beta r - \gamma q)(\varphi' - \frac{1}{\rho})\Big) cos\varkappa + sin\varkappa\Big\{-\frac{l}{\mathfrak{r}} sin\vartheta -$$
$$- \alpha cos\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} + \Big(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}} sin\varphi + p(\frac{1}{\rho} - \varphi')\Big) cos\vartheta - (\beta r - \gamma q) sin\vartheta \frac{d\vartheta}{ds}\Big\}\Big]$$
und

(9) $$\frac{du}{ds_1} = \frac{l_1}{\mathfrak{r}_1} cos\vartheta_1 + sin\vartheta_1\Big(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{r}_1} sin\varphi_1 + p_1(\frac{1}{\rho_1} - \frac{d\varphi_1}{ds_1})\Big) -$$
$$- \alpha_1 sin\vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{ds_1} + (\beta_1 r_1 - \gamma_1 q_1) cos\vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{ds_1} =$$
$$= \frac{ds}{ds_1}\Big[\frac{l}{\mathfrak{r}} cos\vartheta - \alpha sin\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} + \Big(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}} sin\varphi + p(\frac{1}{\rho} - \varphi')\Big) sin\vartheta + (\beta r - \gamma q) cos\vartheta \frac{d\vartheta}{ds}\Big]$$

Bei der Multiplikation der ersten mit α_1 und Bildung der cyklischen Summe ergibt sich:

$$-\frac{cos\varphi_1}{\mathfrak{r}_1} = \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \Big\{-\frac{cos\varphi}{\mathfrak{r}} cos\varkappa - sin\varkappa cos\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{sin\varkappa cos\vartheta sin\varphi}{\mathfrak{r}} +$$
$$+ a\Big[\frac{cos\vartheta}{\mathfrak{r}}\Big(cos\varkappa sin\varphi(\frac{1}{\rho} - \varphi') - \frac{sin\varkappa sin\vartheta}{\mathfrak{r}} + sin\varkappa cos\varphi cos\vartheta(\frac{1}{\rho} - \varphi') +$$
$$+ sin\varkappa sin\varphi sin\vartheta \frac{d\vartheta}{ds}\Big) - sin\vartheta \frac{d\vartheta}{ds}\Big(-\frac{cos\varphi}{\mathfrak{r}} cos\varkappa - sin\varkappa cos\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} +$$
$$+ \frac{sin\varkappa cos\vartheta sin\varphi}{\mathfrak{r}}\Big) + \frac{sin\vartheta sin\varphi}{\mathfrak{r}}\Big(-\frac{cos\varphi cos\varkappa}{\mathfrak{r}} - sin\varkappa cos\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} +$$
$$+ \frac{sin\varkappa cos\vartheta sin\varphi}{\mathfrak{r}}\Big) + sin\vartheta(\frac{1}{\rho} - \varphi')\Big(-\frac{sin\varkappa cos\varphi sin\vartheta}{\mathfrak{r}} +$$
$$+ sin\varkappa cos\vartheta(\frac{1}{\rho} - \varphi')\Big) + cos\vartheta \frac{d\vartheta}{ds}\Big(-cos\varkappa(\frac{1}{\rho} - \varphi') + \frac{sin\varkappa sin\varphi sin\vartheta}{\mathfrak{r}} -$$
$$- sin\varkappa sin\vartheta \frac{d\vartheta}{ds}\Big)\Big]\Big\}$$

Hebt man hierin die einander gleichen Glieder weg und setzt für $d\vartheta : ds$ den früher berechneten Wert ein, so geht die Gleichung über in:

$$-\frac{cos\varphi_1}{\mathfrak{r}_1}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = -\frac{cos\varphi}{\mathfrak{r}} cos\varkappa - sin\varkappa cos\vartheta\Big(\frac{sin\vartheta}{a} + \frac{sin\varphi}{\mathfrak{r}} -$$
$$- \frac{cot\varkappa cos\vartheta cos\varphi}{\mathfrak{r}} - cot\varkappa sin\vartheta(\frac{1}{\rho} - \varphi')\Big) + \frac{sin\varkappa cos\vartheta sin\varphi}{\mathfrak{r}} +$$
$$+ a\Big[\frac{cos\vartheta}{\mathfrak{r}}\Big(cos\varkappa sin\varphi(\frac{1}{\rho} - \varphi') - \frac{sin\varkappa sin\vartheta}{\mathfrak{r}} + sin\varkappa cos\varphi cos\vartheta(\frac{1}{\rho} - \varphi')\Big) +$$
$$+ \frac{sin\vartheta cos\varphi cos\varkappa}{\mathfrak{r}}\Big(\frac{sin\vartheta}{a} + \frac{sin\varphi}{\mathfrak{r}} - \frac{cot\varkappa cos\vartheta cos\varphi}{\mathfrak{r}} -$$

$$- \cot\varkappa \sin\vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\Big) + \frac{\sin\vartheta \sin\varphi}{\mathfrak{r}}\left(- \frac{\cos\varphi\cos\varkappa}{\mathfrak{r}} + \frac{\sin\varkappa\cos\vartheta\sin\varphi}{\mathfrak{r}}\right) +$$

$$+ \sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\left(- \frac{\sin\varkappa\cos\varphi\sin\vartheta}{\mathfrak{r}} + \sin\varkappa\cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\right) -$$

$$- \cos\vartheta\cos\varkappa\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\left(\frac{\sin\vartheta}{a} + \frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}} - \frac{\cot\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}} - \cot\varkappa\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\right)\Big]$$

Als Endresultat folgt hieraus:

$$\text{IV} \qquad - \frac{\cos\varphi_1}{\mathfrak{r}_1}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \frac{a}{\sin\varkappa}\left[- \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{\cos^2\varphi}{\mathfrak{r}^2} + \frac{\sin^2\varkappa}{a^2} - \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\varphi}{\mathfrak{r}\sin\varkappa}\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\right)\right]$$

Zur Berechnung von $\sin\varphi_1 : \mathfrak{r}_1$ multiplizieren wir die Gleichung (9) mit $\beta_1 r_1 - \gamma_1 q_1$ und nehmen dann die cyklische Summe. Wir erhalten zunächst:

$$- \frac{\sin\varphi_1}{\mathfrak{r}_1}\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_1\frac{d\vartheta_1}{ds_1} = \sum \frac{du}{ds_1}(\beta_1 r_1 - \gamma_1 q_1)$$

Diese Gleichung können wir aber mit Rücksicht auf (7) einfacher so schreiben:

$$- \frac{\sin\varphi_1}{\mathfrak{r}_1}\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_1\frac{d\vartheta_1}{ds_1} = \sum \frac{du}{ds_1}\cdot\frac{1}{\sin\varkappa\frac{ds_1}{ds}}(p_1\cos\varkappa\cos\vartheta - p\cos\vartheta),$$

weil u, v, w die Richtungskosinus einer Geraden sind und daher

$$\sum u\frac{du}{ds_1} = 0$$

ist. Infolge der Relation III ergiebt sich hieraus leicht:

$$(10) \qquad \frac{ds_1}{ds}\left(- \frac{\sin\varphi_1}{\mathfrak{r}_1} + \frac{d\vartheta_1}{ds_1}\right) = \sum \frac{du}{ds}\cdot\frac{p_1\cos\varkappa - p}{\sin\varkappa}$$

Nach (5) ist nun:

$$\frac{p_1\cos\varkappa - p}{\sin\varkappa} = - p\sin\varkappa + \cos\varkappa\left[- \alpha\sin\vartheta + (\beta r - \gamma q)\cos\vartheta\right]$$

Setzt man diesen Ausdruck in (10) ein und substituiert für $du : ds$ den Wert aus (9), so folgt für $\sin\varphi_1 : \mathfrak{r}_1$ die Gleichung:

$$\frac{ds_1}{ds}\left(- \frac{\sin\varphi_1}{\mathfrak{r}_1} + \frac{d\vartheta_1}{ds_1}\right) = \sum\left[\frac{l}{\mathfrak{r}}\cos\vartheta - \alpha\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{ds} + \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\sin\varphi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + p\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\right)\sin\vartheta + (\beta r - \gamma q)\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\right]\left[- p\sin\varkappa + \cos\varkappa\left(- \alpha\sin\vartheta + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (\beta r - \gamma q)\cos\vartheta\right)\right],$$

die bei der Ausführung der Summation übergeht in:

$$\frac{ds_1}{ds}\left(-\frac{sin\varphi_1}{\mathfrak{r}_1}+\frac{d\vartheta_1}{ds_1}\right)=-sin\varkappa\left(\frac{cos\varphi cos\vartheta}{\mathfrak{r}}+sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)\right)-$$
$$-cos\varkappa sin\vartheta\left(-sin\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}+\frac{sin\vartheta sin\varphi}{\mathfrak{r}}\right)+cos\varkappa cos\vartheta\left(-\frac{sin\varphi cos\vartheta}{\mathfrak{r}}+\right.$$
$$\left.+cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\right),$$

oder:

$$\frac{ds_1}{ds}\left(-\frac{sin\varphi_1}{\mathfrak{r}_1}+\frac{d\vartheta_1}{ds_1}\right)=\frac{cos\varkappa sin\vartheta}{a}-\frac{cos\vartheta cos\varphi}{\mathfrak{r}\,sin\varkappa}-\frac{sin\vartheta}{sin\varkappa}\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right).$$

Durch Differentation der Gleichung:

$$tg\vartheta_1=\frac{a}{sin\varkappa}\left(\frac{cos\varphi}{\mathfrak{r}}+tg\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)\right),$$

die man durch Division aus den Gleichungen III erhält, ergibt sich noch:

$$\text{V}\quad \frac{d\vartheta_1}{ds_1}=\frac{a\,cos^2\vartheta}{sin\varkappa\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^3}\left[-\frac{sin\varphi\cdot\varphi'}{\mathfrak{r}}-\frac{cos\varphi\,\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}^2}+\frac{\frac{1}{\rho}-\varphi'}{cos^2\vartheta}\frac{d\vartheta}{ds}-tg\vartheta\left(\frac{\rho'}{\rho^2}+\varphi''\right)\right],$$

wo $\mathfrak{r}'$, ρ', φ'' bezw. die Ableitungen von $\mathfrak{r}$, ρ und φ' nach s bedeuten. Folglich hat man:

$$\text{VI}\qquad -\frac{sin\varphi_1}{\mathfrak{r}_1}=\frac{1}{\frac{ds_1}{ds}}\left[\frac{cos\varkappa\,sin\vartheta}{a}-\frac{cos\vartheta\,cos\varphi}{\mathfrak{r}\,sin\varkappa}-\frac{sin\vartheta}{sin\varkappa}\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{a\,cos^2\vartheta}{sin\varkappa\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2}\left(-\frac{sin\varphi\varphi'}{\mathfrak{r}}-\frac{cos\varphi\,\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}^2}+\frac{\frac{1}{\rho}-\varphi'}{cos^2\vartheta}\frac{d\vartheta}{ds}-tg\vartheta\left(\frac{\rho'}{\rho^2}+\varphi''\right)\right)\right]$$

Aus den Gleichungen IV und VI kann man nunmehr $\mathfrak{r}_1$, $sin\varphi_1$ und $cos\varphi_1$ berechnen.

Um ρ_1 zu bestimmen, multiplizieren wir die Gleichung (8) mit $\beta_1 r_1-\gamma_1 q_1$ und summieren. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\left(\frac{d\varphi_1}{ds_1}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 sin\varkappa=a\left(\frac{cos\vartheta cos\varphi}{\mathfrak{r}}+sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)\right)\left\{-\frac{cos\varkappa cos\vartheta cos\varphi}{\mathfrak{r}}-\right.$$
$$\left.-sin\vartheta\,cos\varkappa\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)+sin\varkappa\left(\frac{sin\varphi\,sin^2\vartheta}{\mathfrak{r}}-\frac{d\vartheta}{ds}+\frac{cos^2\vartheta\,sin\varphi}{\mathfrak{r}}\right)\right\}-$$
$$-sin\varkappa cos\vartheta\left(\frac{cos\varphi\,sin\vartheta}{\mathfrak{r}}+cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)\right)+cos\varkappa cos\vartheta\left\{\frac{sin\varkappa sin\vartheta\,cos\varphi\,cos\varkappa}{\mathfrak{r}}-\right.$$
$$-sin\varkappa\,cos\vartheta\,cos\varkappa\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)+sin\varkappa\left(-\frac{cos\varphi\,cos\varkappa\,sin\vartheta}{\mathfrak{r}}+\right.$$

$$+\frac{\sin\varphi\sin\varkappa\cos\vartheta\sin\vartheta}{\mathfrak{r}}+\sin\varkappa\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}-\frac{\sin\varkappa\sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta}{\mathfrak{r}}+$$

$$\left.\left.+\cos\varkappa\cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)-\sin\varkappa\cos\vartheta\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\right)\right\}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich bedeutend, wenn man für $d\vartheta : ds$ seinen Wert substituiert und die gleichen Glieder weghebt. Sie nimmt dann die Form an:

VII $$\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{d\varphi_1}{ds_1}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2=\frac{1}{\rho}-\varphi'$$

Da nun φ_1 und $ds_1 : ds$ bekannt sind, so ist auch $d\varphi_1 : ds_1$ gegeben, also lässt sich ρ_1 aus dieser Gleichung bestimmen.

Durch die Formeln II, III, IV, VI, VII sind jetzt alle Stücke der transformierten Kurven bekannt, wenn man sich ϑ als Funktion von s aus Gleichung I ermittelt denkt.

Im Anschluss an die vorhergehenden Untersuchungen wollen wir noch kurz die beiden Fälle betrachten, in denen die Ausgangskurve eine ebene Kurve oder eine Gerade ist.

Der erste Spezialfall ist durch die Bedingung $\rho=\infty$ charakterisiert. Deshalb werden die Gleichungen I, II, III:

I′ $$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{\sin\vartheta}{a}+\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}}-\frac{\cot\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}+\cot\varkappa\sin\vartheta\varphi'$$

II′ $$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2=\cos^2\vartheta+\frac{a^2}{\sin^2\varkappa}\left(\frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}-\sin\vartheta\varphi'\right)^2$$

III′ $$\left|\begin{aligned}&\frac{ds_1}{ds}\cdot\cos\vartheta_1=\cos\vartheta\\&\frac{ds_1}{ds}\cdot\sin\vartheta_1=\frac{a}{\sin\varkappa}\left(\frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}-\sin\vartheta\varphi'\right),\end{aligned}\right.$$

und die Gleichungen IV, VI, VII gehen über in:

IV′ $$-\frac{\cos\varphi_1}{\mathfrak{r}_1}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2=\frac{a}{\sin\varkappa}\left[-\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{\cos^2\varphi}{\mathfrak{r}^2}+\frac{\sin^2\varkappa}{a^2}-\varphi'^2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{a\cos\varphi\cdot\varphi'}{\mathfrak{r}\sin\varkappa}\left(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta\right)\right]$$

VI′ $$-\frac{\sin\varphi_1}{\mathfrak{r}_1}\cdot\frac{ds_1}{ds}=\frac{\cos\varkappa\sin\vartheta}{a}-\frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}\sin\varkappa}+\frac{\sin\vartheta\cdot\varphi'}{\sin\varkappa}-$$

$$-\frac{a\cos^2\vartheta}{\sin\varkappa\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2}\left(-\frac{\sin\varphi\cdot\varphi'}{\mathfrak{r}}-\frac{\cos\varphi\cdot\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}^2}-\frac{\varphi'}{\cos^2\vartheta}\left(\frac{\sin\vartheta}{a}+\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cot\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}+\cot\varkappa\sin\varphi\cdot\varphi'\right)-tg\vartheta\cdot\varphi''\right)$$

VII' $$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{d\varphi_1}{ds_1}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = -\varphi'$$

Ist die Ausgangskurve eine Gerade, so haben wir zu setzen:

$$\mathfrak{r} = \infty\,,\quad \rho = \infty\,,$$

und die Richtungskosinus α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν können als konstante Grössen aufgefasst werden. Die Differentialgleichung für ϑ wird infolgedessen:

I'' $$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\sin\vartheta}{a} + \cot\varkappa \sin\vartheta \cdot \varphi',$$

und für ds_1 ergibt sich:

II'' $$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \cos^2\vartheta + \frac{a^2 \sin^2\vartheta \varphi'^2}{\sin^2\varkappa}$$

Statt der Gleichungen IV, VI, VII erhalten wir die einfacheren:

IV'' $$-\frac{\cos\varphi_1}{\mathfrak{r}_1} \cdot \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = -\frac{a}{\sin\varkappa} \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{\sin^2\varkappa}{a^2} - \varphi'^2\right)$$

VI'' $$-\frac{\sin\varphi_1}{\mathfrak{r}_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \frac{\cos\varkappa \sin\vartheta}{a} + \frac{\sin\vartheta \cdot \varphi'}{\sin\varkappa} -$$
$$- \frac{a\cos^2\vartheta}{\sin\varkappa \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2}\left[-\frac{\varphi'}{\cos^2\vartheta}\left(\frac{\sin\vartheta}{a} + \cot\varkappa \sin\vartheta \cdot \varphi'\right) - tg\,\vartheta \cdot \varphi''\right]$$

VII'' $$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{d\varphi_1}{ds_1}\right) \cdot \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = -\varphi'$$

Beiläufig sei bemerkt, dass die Gerade in eine Schraubenlinie auf einem Kreiscylinder mit dem Radius $a \sin\vartheta$ transformiert wird, wenn man den Flächenstreifen der Geraden durch die Gleichung bestimmt:

$$\varphi = -\frac{s}{a \cot\varkappa} + Const.$$

Aus Gleichung (I'') ersieht man nämlich, dass ϑ dann konstant wird.

Kapitel II.

Spezielle Fälle.

§ 1.

Unsere bisherigen Betrachtungen wenden wir auf einen besonders interessanten Fall an. Wir denken uns einen Flächenstreifen gegeben, dessen Ebenen sämtlich die Schmiegungsebenen der zu dem Flächenstreifen gehörigen Kurve sind, für den also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ist.

Es werde zunächst vorausgesetzt, dass die vorgelegte Kurve weder eben ist noch eine Gerade.

Würden wir auf diesen Streifen unsere Transformation ausführen, ohne noch eine weitere Forderung zu stellen, so würden sich zwar die früher gefundenen Formeln für die transformierten Flächenstreifen verkürzen, aber wir erhielten keine besonders einfache Beziehung zwischen den entsprechenden Kurven. Dies ist jedoch der Fall, wenn wir verlangen, dass auch die Ebenen der transformierten Flächenstreifen Schmiegungsebenen der transformierten Kurven werden.

Bei dieser ganz speziellen Forderung muss φ_1 entweder $= \frac{1}{2}\pi$ oder $= \frac{3}{2}\pi$ werden.

Zunächst verwandelt sich (I) für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ in:

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\sin\vartheta}{a} + \frac{1}{\mathfrak{r}} - \frac{\cot\varkappa \sin\vartheta}{\rho} \tag{11}$$

und $dx_1 : ds$ nimmt unter Benutzung dieser Gleichung die Form an:

$$\frac{dx_1}{ds} = \alpha + a\left[\frac{\lambda}{\rho}\sin\vartheta - \alpha\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{a} - \frac{\cot\varkappa}{\rho}\right) - l\cos\vartheta\sin\vartheta\left(\frac{1}{a} - \frac{\cot\varkappa}{\rho}\right)\right] \tag{12}$$

Zu einer wichtigen Beziehung gelangt man durch die Überlegung, dass für die transformierte Kurvenschar die Gleichungen gelten müssen:

$$\sum p_1 dx_1 = 0 \quad \sum dp_1 dx_1 = 0$$

Für p_1 erhalten wir bei der Spezialisierung unserer Transformation aus (5)

$$(p_1) \underset{\varphi = \frac{\pi}{2}}{=} \lambda\cos\varkappa - \sin\varkappa\,(\alpha\sin\vartheta + l\cos\vartheta),$$

also ergibt sich:

$$\frac{dp_1}{ds} = \frac{l}{\rho}\cos\varkappa - \sin\varkappa\left[-\frac{\lambda}{\rho}\cos\vartheta + \alpha\cos\vartheta\sin\vartheta\left(\frac{1}{a} - \frac{\cot\varkappa}{\rho}\right) - \right.$$
$$\left. - l\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{a} - \frac{\cot\varkappa}{\rho}\right)\right]$$

Die zweite Gleichung liefert daher bei der Ausrechnung die Bedingung:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\sin^2 \varkappa}{a^2}$$

oder:

VIII $$\rho = \pm \frac{a}{\sin \varkappa}$$

Soll also die Transformation in der verlangten Weise ausführbar sein, so muss ρ den eben berechneten konstanten Wert haben. Diese eine Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn setzt man in der Gleichung IV:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \rho = \pm \frac{a}{\sin \varkappa},$$

so wird in der Tat $\cos \varphi_1 = 0$, d. h. die Ebenen der transformierten Flächenstreifen sind ebenfalls Schmiegungsebenen.

Den für ρ gefundenen Wert substituieren wir nun in der Gleichung (12) und bilden darauf die cyklische Summe. So erhalten wir eine zweite Relation:

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = 1$$

Wir ordnen natürlich einem positiven Kurvenelement ds ein positives ds_1 zu und setzen somit[1]):

IX $$\frac{ds_1}{ds} = +1$$

Entsprechende Bogenlängen der Kurven sind also einander gleich.

ϑ_1 ist jetzt auf Grund von III in folgender Weise bestimmt:

$$\cos \vartheta_1 = \cos \vartheta, \quad \sin \vartheta_1 = \frac{a}{\rho \sin \varkappa} \sin \vartheta$$

Wird $\rho = \pm a : \sin \varkappa$ gesetzt, so folgt für ϑ_1 entsprechend[2]):

X $$\vartheta_1 = \pm \vartheta$$

Es mögen nunmehr die Werte von ρ_1 und r_1 berechnet werden. Da φ und φ_1 hier konstante Grössen sind, so liefert uns die Gleichung VII mit Berücksichtigung von IX[1]):

XI $$\rho_1 = \rho$$

Wir können daher den schon von Bäcklund gefundenen Satz aussprechen: Führt man die Bäcklundsche Transformation auf einen

[1]) A. V. Bäcklund, Om ytor med . . . ., Lund 1883.

[2]) Für den Fall $\varkappa = \frac{\pi}{2}$ s. S. Lie, Archiv for M. og. N. Kristiania 1880, Band V, Heft 3, S. 328 ff.

Flächenstreifen aus, dessen Kurve die konstante Torsion $\pm \sin \varkappa : a$ hat, und dessen Ebenen Schmiegungsebenen der Kurve sind, so sind die Ebenen der transformierten Flächenstreifen wieder Schmiegungsebenen der transformierten Kurven, und diese besitzen dieselbe konstante Torsion $\pm \sin \varkappa : a$ wie die ursprüngliche Kurve.

Der Krümmungsradius $\mathfrak{r}_1$ lässt sich leicht aus der Gleichung VI ermitteln, wenn man hier substituiert:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi' = 0, \quad \frac{ds_1}{ds} = 1, \quad \rho = \pm \frac{a}{\sin \varkappa}, \quad \rho' = 0$$

Es wird dann:

$$(13) \qquad = \frac{\sin \varphi_1}{\mathfrak{r}_1} = \mp \frac{1}{\mathfrak{r}} - \frac{2 \sin \vartheta}{a}(1 - \cos \varkappa)$$

Nun wissen wir zwar, dass die transformierten Ebenen Schmiegungsebenen der transformierten Kurven sind, dass also

$$\cos \varphi_1 = 0$$

ist, dagegen ist noch unbekannt, ob der Ausdruck $\sin \varphi_1$ den Wert $+1$ oder -1 erhalten muss. Wir können das Vorzeichen auf folgende Weise bestimmen. Gleichung (13) gilt in ein und demselben Punkte der Kurve für jedes beliebige ϑ, also auch z. B. für $\vartheta = 0$. In diesem Fall ergibt sich aber:

$$-\frac{\sin \varphi_1}{\mathfrak{r}_1} = \mp \frac{1}{\mathfrak{r}}$$

Da nun $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ ihrer Natur nach positive Grössen sind, und da wir annehmen dürfen, dass $\mathfrak{r}_1$ sich stetig mit ϑ ändert, so folgt hieraus, das $\sin \varphi_1$ den Wert ± 1 haben muss, wenn $\rho = \pm a : \sin \varkappa$ gesetzt wird. Für $\mathfrak{r}_1$ ergibt sich demnach die Gleichung[1]):

$$\text{XII} \qquad \pm \frac{1}{\mathfrak{r}} \mp \frac{1}{\mathfrak{r}_1} = -\frac{2 \sin \vartheta}{a}(1 - \cos \varkappa),$$

wobei dem Werte $\rho = + a : \sin \varkappa$ das obere, dem Wert $\rho = - a : \sin \varkappa$ das untere Vorzeichen entspricht.

Es ist noch zu bemerken, dass diese Gleichung mit Sicherheit nur in einer gewissen Umgebung von $\vartheta = 0$ gilt. Denn nimmt ϑ einen Wert an, der die Gleichung befriedigt:

$$\pm \frac{1}{\mathfrak{r}} = -\frac{2 \sin \vartheta}{a}(1 - \cos \varkappa),$$

---

[1]) Für den Fall $\varkappa = \frac{\pi}{2}$, $\rho = + a$ s. S. Lie, Archiv for M. og. N., Kristiania 1880, Band V, Heft 3, S. 328 ff.

so wird $\mathfrak{r}_1 = \infty$, und wenn ϑ diese Grenze überschreitet, muss $sin\, \varphi_1$ im Allgemeinen das Vorzeichen wechseln.

Führen wir unsere spezielle Transformation auf eine ebene Kurve aus, so können wir mit Hilfe der Gleichungen (4) und (5) leicht auf analytischem Wege die geometrisch sofort einleuchtende Tatsache bestätigen, dass die transformierten Kurven gleichfalls eben sind, und dass ϑ in keiner Weise als Funktion von s bestimmt ist.

Von grösserem Interesse ist der Fall, wo die Ausgangskurve eine Gerade ist. Die Forderung, dass die transformierten Ebenen Schmiegungsebenen der transformierten Kurven sind, wird nach Gleichung IV″ offenbar befriedigt durch die Relation:

XIII $$\varphi'^2 = \frac{sin^2 \varkappa}{a^2}$$

Wählt man φ' in dieser Weise, so ergibt die Gleichung II′:

$$\frac{ds_1}{ds} = 1$$

Obwohl die Torsion der Geraden unbestimmt ist, können wir doch von der Torsion des Streifens sprechen, indem wir an die Stelle des Torsionswinkels den Winkel zweier konsekutiver Tangentialebenen treten lassen. Die Torsion ist dann dem zuerst behandelten Fall entsprechend ebenfalls $\pm\, sin\, \varkappa : a$.

§ 2.

Es liegt nahe, die allgemeine Transformation noch in einer anderen Weise zu spezialisieren. Man kann nämlich die Forderung stellen, dass die Tangentialebenen der Flächenstreifen beide Male rektifizierende Ebenen der zugehörigen Kurven seien.

Nehmen wir zunächst wieder an, dass die vorgelegte Kurve weder eine ebene Kurve noch eine Gerade ist, so haben wir die Bedingung dafür aufzustellen, dass die beiden Grössen φ und $sin\, \varphi_1$ identisch gleich 0 sind. Infolge von VI erhalten wir demnach als Kriterium die Gleichung:

$$\frac{cos\, \varkappa\, sin\, \vartheta}{a} - \frac{cos\, \vartheta}{\mathfrak{r}\, sin\, \varkappa} - \frac{sin\, \vartheta}{\rho\, sin\, \varkappa} - \frac{a\, cos^2 \vartheta}{sin\, \varkappa \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2} \left[- \frac{\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\rho\, cos^2 \vartheta} \left(\frac{sin\, \vartheta}{a} - \frac{cot\, \varkappa\, cos\, \vartheta}{\mathfrak{r}} - \frac{cot\, \varkappa\, sin\, \vartheta}{\rho} \right) - \frac{tg\, \vartheta \cdot \rho'}{\rho^2} \right] = 0$$

oder:

$$\left[\frac{\cos\varkappa\sin\vartheta}{a}-\frac{\cos\vartheta}{\mathfrak{r}\sin\varkappa}-\frac{\sin\vartheta}{\rho\sin\varkappa}\right]\left[\cos^2\vartheta+\frac{a^2}{\sin^2\varkappa}\frac{\cos^2\vartheta}{\mathfrak{r}^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2a^2}{\sin^2\varkappa}\frac{\cos\vartheta\sin\vartheta}{\mathfrak{r}\rho}+\frac{a^2}{\sin^2\varkappa}\frac{\sin^2\vartheta}{\rho^2}\right]+\frac{a\cos^2\vartheta}{\sin\varkappa}\cdot\frac{\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}^2}-$$
$$-\frac{a}{\rho\sin\varkappa}\left(\frac{\sin\vartheta}{a}-\frac{\cot\varkappa\cos\vartheta}{\mathfrak{r}}-\frac{\cot\varkappa\sin\vartheta}{\rho}\right)+\frac{a\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin\varkappa}\cdot\frac{\rho'}{\rho^2}=0$$

Führt man die Multiplikation aus, so erhält man:

$$\frac{\cos\varkappa}{a}\sin\vartheta\cos^2\vartheta+\frac{a\cos\varkappa}{\sin^2\varkappa\,\mathfrak{r}^2}\sin\vartheta\cos^2\vartheta+\frac{2a\cos\varkappa}{\sin^2\varkappa\,\mathfrak{r}\rho}\sin^2\vartheta\cos\vartheta+$$
$$+\frac{a\cos\varkappa}{\sin^2\varkappa\,\rho^2}\sin^3\vartheta-\frac{\cos^3\vartheta}{\mathfrak{r}\sin\varkappa}-\frac{a^2\cos^3\vartheta}{\sin^3\varkappa\,\mathfrak{r}^3}-\frac{3a^2\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{\sin^3\varkappa\,\mathfrak{r}^2\rho}-$$
$$-\frac{3a^2\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{\sin^3\varkappa\,\rho^2\mathfrak{r}}-\frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{\rho\sin\varkappa}-\frac{a^2\sin^3\vartheta}{\rho^3\sin^3\varkappa}+\frac{a\cos^2\vartheta\,\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}^2\sin\varkappa}-$$
$$-\frac{\sin\vartheta}{\rho\sin\varkappa}+\frac{a\cos\varkappa\cos\vartheta}{\sin^2\varkappa\,\mathfrak{r}\rho}+\frac{a\cos\varkappa\sin\vartheta}{\rho^2\sin^2\varkappa}+\frac{a\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin\varkappa}\frac{\rho'}{\rho^2}=0$$

Diese Gleichung können wir übersichtlicher so schreiben:

$$\sin\vartheta\left[\cos^2\vartheta\left(\frac{\cos\varkappa}{a}+\frac{a\cos\varkappa}{\sin^2\varkappa\,\mathfrak{r}^2}-\frac{a\cos\varkappa}{\sin^2\varkappa\,\rho^2}-\frac{3a^2}{\mathfrak{r}^2\rho\sin^3\varkappa}-\frac{1}{\rho\sin\varkappa}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{a^2}{\rho^3\sin^3\varkappa}\right)+\cos\vartheta\cdot\frac{a\rho'}{\sin\varkappa\,\rho^2}+\frac{2a\cos\varkappa}{\rho^2\sin^2\varkappa}-\frac{a^2}{\rho^3\sin^3\varkappa}-\frac{1}{\rho\sin\varkappa}\right]+$$
$$+\cos^3\vartheta\left[-\frac{2a\cos\varkappa}{\sin^2\varkappa\,\mathfrak{r}\rho}-\frac{1}{\mathfrak{r}\sin\varkappa}-\frac{a^2}{\mathfrak{r}^3\sin^3\varkappa}+\frac{3a^2}{\mathfrak{r}\rho^2\sin^3\varkappa}\right]+$$
$$+\cos^2\vartheta\cdot\frac{a\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}^2\sin\varkappa}+\cos\vartheta\left[\frac{3a\cos\varkappa}{\mathfrak{r}\rho\sin^2\varkappa}-\frac{3a^2}{\mathfrak{r}\rho^2\sin^3\varkappa}\right]=0$$

Wegen der Unendlichdeutigkeit von ϑ ergibt sich hieraus das Gleichungssystem:

$$\text{XIV}\left\{\begin{aligned}
&\frac{\cos\varkappa}{a}+\frac{a\cos\varkappa}{\mathfrak{r}^2\sin^2\varkappa}-\frac{a\cos\varkappa}{\rho^2\sin^2\varkappa}-\frac{3a^2}{\mathfrak{r}^2\rho\sin^3\varkappa}-\frac{1}{\rho\sin\varkappa}+\frac{a^2}{\rho^3\sin^3\varkappa}=0\\
&\frac{a\rho'}{\rho^2\sin\varkappa}=0\\
&\frac{2a\cos\varkappa}{\rho^2\sin^2\varkappa}-\frac{a^2}{\rho^3\sin^3\varkappa}-\frac{1}{\rho\sin\varkappa}=0\\
&-\frac{2a\cos\varkappa}{\mathfrak{r}\rho\sin^2\varkappa}-\frac{1}{\mathfrak{r}\sin\varkappa}-\frac{a^2}{\mathfrak{r}^3\sin^3\varkappa}+\frac{3a^2}{\mathfrak{r}\rho^2\sin^3\varkappa}=0\\
&\frac{a\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}^2\sin\varkappa}=0\\
&\frac{3a}{\mathfrak{r}\rho\sin^2\varkappa}\left[\cos\varkappa-\frac{a}{\rho\sin\varkappa}\right]=0
\end{aligned}\right.$$

Dieses lässt sich nun nicht befriedigen. Um das zu beweisen, gehen wir von der letzten Gleichung aus. Ist $\cos \varkappa = 0$, so kann ihr wegen der Endlichkeit der Grössen $\mathfrak{r}$ und ρ nicht Genüge geleistet werden. Ist aber $\cos \varkappa \neq 0$, so ergiebt sich für ρ:

$$\rho = \frac{a}{\sin \varkappa \cos \varkappa},$$

und die Substitution dieses Wertes von ρ in die erste Gleichung führt auf einen Widerspruch, da diese dann die Form annimmt:

$$-\frac{2a\cos\varkappa}{\mathfrak{r}^2 \sin^2 \varkappa} = 0$$

Sind also $\mathfrak{r}$ und ρ endliche Grössen, so lässt sich die verlangte Transformation nicht ausführen.

Dagegen kann unsere Forderung für einen bestimmten Fall der ebenen Kurve und für die Gerade erfüllt werden.

Geht man von einer ebenen Kurve aus, so wird die gesuchte Bedingung infolge von (VI'):

$$\frac{\cos\varkappa \sin\vartheta}{a} - \frac{\cos\vartheta}{\mathfrak{r}\sin\varkappa} + \frac{a\cos^2\vartheta\,\mathfrak{r}'}{\sin\varkappa\,\mathfrak{r}^2\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2} = 0$$

oder:

$$\frac{\cos\varkappa\sin\vartheta}{a} - \frac{\cos\vartheta}{\mathfrak{r}\sin\varkappa} + \frac{\cos\varkappa\sin\vartheta\, a}{\mathfrak{r}^2\sin^2\varkappa} - \frac{\cos\vartheta\, a^2}{\mathfrak{r}^3\sin^3\varkappa} + \frac{a\,\mathfrak{r}'}{\sin\varkappa\,\mathfrak{r}^2} = 0$$

Wegen der Vieldeutigkeit von ϑ ergeben sich hieraus die drei Gleichungen:

$$\text{XV}\qquad \begin{aligned} &\frac{\cos\varkappa}{a} + \frac{a\cos\varkappa}{\mathfrak{r}^2\sin^2\varkappa} = 0\\ &-\frac{1}{\mathfrak{r}\sin\varkappa} - \frac{a^2}{\mathfrak{r}^3\sin^3\varkappa} = 0\\ &\frac{a\,\mathfrak{r}'}{\sin\varkappa\cdot\mathfrak{r}^2} = 0, \end{aligned}$$

die offenbar für $\mathfrak{r} = \pm ia : \sin\varkappa$ befriedigt werden.

Da bei einer Geraden jede Tangentialebene als rektifizierende Ebene aufgefasst werden kann, so haben wir hier nur die Bedingung $\sin\varphi_1 = 0$ zu erfüllen. Diese wird nach VI''

$$\frac{\cos\varkappa}{a} + \frac{\varphi'}{\sin\varkappa} - \frac{a\cos^2\vartheta}{\sin\varkappa\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2}\left[-\frac{\varphi'}{\cos^2\vartheta}\left(\frac{1}{a} + \cot\varkappa\,\varphi'\right) - \frac{\varphi''}{\cos\vartheta}\right] = 0$$

Durch dieselben Überlegungen wie früher kommen wir hier zu dem Gleichungssystem:

$$\frac{\cos\varkappa \sin^2\varkappa}{a} + \sin\varkappa \cdot \varphi' - \cos\varkappa\, a \cdot \varphi'^2 - \frac{a^2 \varphi'^3}{\sin\varkappa} = 0$$

$$a \sin\varkappa \cdot \varphi'' = 0$$

$$\varphi' \left[a \cos\varkappa\, \varphi' + \frac{a^2 \varphi'^2}{\sin\varkappa} + \sin\varkappa + a \cos\varkappa\, \varphi' \right] = 0,$$

und eine einfache Rechnung zeigt, dass unsere Forderung auf die Erfüllung der einzigen Gleichung hinauskommt:

$$\text{XVI} \qquad \varphi' = -\frac{tg\,\varkappa}{a}\,(1 \mp \sin\varkappa)$$

Der imaginäre Kreis mit dem Radius $\pm ia$ und die Gerade sind also die einzigen Kurven, welche die verlangte Transformation gestatten.

Kapitel III.

Die Bäcklundsche Transformation angewendet auf Flächen.

Der Zusammenhang zwischen der Transformation von Flächenstreifen und Flächen besteht darin, dass jede Flächenkurve einen ganz bestimmten Flächenstreifen definiert, dessen einzelne Elemente sich aus den Punkten der Kurve und den zugehörigen Tangentialebenen der Fläche zusammensetzen, und dass man jede Fläche auf unendlich viele Arten als eine einfach unendliche Schar solcher Flächenstreifen auffassen kann.

Greifen wir nun eine solche Schar beliebig heraus und wenden auf jeden ihrer Streifen die Bäcklundsche Transformation an, so erhalten wir nach den Auseinandersetzungen in Kapitel II eine zweifach unendliche Schar von Streifen. Bei der Bäcklundschen Flächentransformation wird jetzt verlangt, diese ∞^2 Streifen in eine Schar von ∞^1 Flächen in der Weise anzuordnen, dass jene Beziehungen nicht blos hinsichtlich der Streifen unserer Schar gelten, sondern dass einem ganz beliebigen Streifen der vorgelegten Fläche ein solcher auf jeder der ∞^1 neuen Flächen entspricht.

Zu der Bedingung, der die gegebene Fläche dann genügen muss, gelangen wir auf folgendem Wege. Wir konstruieren zu einer ganz beliebigen Flächenkurve die unendlich benachbarte geodätische Parallele und stellen die Forderung, dass die beiden durch diese Kurven definierten Flächenstreifen wieder in zwei auf einer Fläche liegende Streifen übergehen. Wenn unsere Transformation überhaupt möglich sein soll, so muss die gesuchte Bedingung offenbar unabhängig von dem speziellen Charakter der gewählten Kurve sein. Ist dies aber der Fall, dann ist die Bedingung auch hinreichend.

Da die Tangentialebenen eines Streifens, der zu einer Flächenkurve gehört, mit den Tangentialebenen der Fläche identisch sind, so stellen die früher definierten Grössen p, q, r bei unserer jetzigen Betrachtung die Richtungskosinus der Flächennormalen dar, die zu den Punkten der Flächenkurve gehören. Infolgedessen haben wir hier unter φ den Winkel zwischen der Flächennormalen und der Hauptnormalen der Flächenkurve zu verstehen, so dass die geodätische und die normale Krümmung der Kurve durch die Ausdrücke $\sin\varphi : \mathfrak{r}$ und $\cos\varphi : \mathfrak{r}$ wiedergegeben werden.

Ist nun $P(x, y, z)$ ein Punkt auf der beliebig gewählten Kurve, so möge der $P(x, y, z)$ zunächstliegende Punkt auf der unendlich benachbarten geodätischen Parallele die Koordinaten, $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ haben, und seine Entfernung von $P(x, y, z)$ sei

$$\delta t = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2},$$

so dass also δt das Element einer geodätischen Linie darstellt. Da δt in der zum Punkte $P(x, y, z)$ gehörigen Tangentialebene liegt und senkrecht auf der Tangente der oben erwähnten Kurve steht, so sind die Richtungskosinus zu δt, nämlich $\delta x : \delta t$, $\delta y : \delta t$, $\delta z : \delta t$ identisch mit den früher berechneten Grössen $\beta r - \gamma q$, $\gamma p - \alpha r$, $\alpha q - \beta p$. Es ist daher:

$$\frac{\delta x}{\delta t} = -l \sin\varphi + \lambda \cos\varphi$$

$$\frac{\delta y}{\delta t} = -m \sin\varphi + \mu \cos\varphi$$

$$\frac{\delta z}{\delta t} = -n \sin\varphi + \nu \cos\varphi$$

$P(x, y, z)$ werde bei der Transformation wie früher in $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und entsprechend $P(x + \delta x, \ldots z + \delta z)$ in $P_1(x_1 + \delta x_1, \ldots z_1 + \delta z_1)$ übergeführt.

Bevor wir jedoch zur Transformation übergehen, wollen wir noch die Zuwachse berechnen, die die einzelnen Elemente unserer

Kurve bei dem Übergange zu der unendlich benachbarten geodätischen Parallelen erfahren.

Wir bilden zuerst die Identität:

$$d\delta x = \delta d x$$

Es ist:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right) = \sin\varphi\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}} + \frac{\lambda}{\rho}\right) - l\cos\varphi\cdot\varphi' + \frac{l}{\rho}\cos\varphi - \lambda\sin\varphi\cdot\varphi'$$

oder nach (1):

$$d\frac{\delta x}{\delta t} = p\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) ds + \alpha g\, ds,$$

worin g die geodätische Krümmung bedeutet.

Da nun aber

$$\delta ds = \frac{\sum dx\,\delta dx}{ds}$$

ist, so erhält man hieraus wegen

$$\sum p\,dx = 0, \quad \sum \alpha\,dx = ds$$

die Formel[1])

$$\delta ds = g\,ds\,\delta t$$

Nunmehr wird andererseits:

$$\frac{\delta dx}{\delta t} = \frac{\delta(\alpha\,ds)}{\delta t} = \frac{\delta\alpha}{\delta t}ds + \alpha\frac{\delta ds}{\delta t} = \frac{\delta\alpha}{\delta t}ds + \alpha g\,ds,$$

somit folgt:

(14) $$\frac{\delta\alpha}{\delta t} = p\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)$$

Entsprechende Gleichungen ergeben sich für $\delta\beta$ und $\delta\gamma$.

Zur Berechnung von δl und $\delta\lambda$ benutzen wir die Identität:

$$\delta d\alpha = d\delta\alpha$$

Nach den Frenet-Serretschen Formeln ist:

$$\delta d\alpha = \delta\left(\frac{l}{\mathfrak{r}}ds\right) = \frac{\delta l\cdot ds}{\mathfrak{r}} + \frac{l}{\mathfrak{r}}\delta ds - \frac{l}{\mathfrak{r}^2}ds\cdot\delta\mathfrak{r}$$

und ferner gilt:

$$d\delta\alpha = dp\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\delta t + p\left(-\frac{\rho'}{\rho^2} - \varphi''\right) ds\cdot\delta t,$$

daher ist:

$$\frac{dp}{ds}\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) + p\left(-\frac{\rho'}{\rho^2} - \varphi''\right) = \frac{\delta l}{\delta t}\cdot\frac{1}{\mathfrak{r}} - \frac{l}{\mathfrak{r}^2}\frac{\delta\mathfrak{r}}{\delta t} + \frac{l}{\mathfrak{r}}g$$

---

[1]) F. Engel, Leipziger Berichte, Jahrgang 1901, S. 404 bis 412, Zur Flächentheorie.

Aus dieser und den beiden entsprechenden Gleichungen kann man zunächst $\delta \mathfrak{r}$ berechnen, indem man der Reihe nach mit l, m, n multipliziert und dann summiert. Infolge von

$$p = l \cos\varphi + \lambda \sin\varphi$$

wird

$$\frac{dp}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}} + \frac{\lambda}{\rho}\right)\cos\varphi + \frac{l}{\rho}\sin\varphi - l\sin\varphi\cdot\varphi' + \lambda\cos\varphi\cdot\varphi' =$$

$$= -\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\cos\varphi - (\beta r - \gamma q)\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)$$

Also hat man:

$$\sum \frac{dp}{ds}\cdot l = \sin\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)$$

Die angekündigte Operation liefert daher:

$$(15) \qquad \sin\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 - \cos\varphi\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right) = -\frac{1}{\mathfrak{r}^2}\frac{\delta\mathfrak{r}}{\delta t} + \frac{g}{\mathfrak{r}}$$

woraus für $\delta\mathfrak{r}$ die Gleichung folgt:

$$\text{XVII} \qquad \frac{\delta\mathfrak{r}}{\delta t} = \mathfrak{r}^2\cos\varphi\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right) = \mathfrak{r}^2\sin\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 + \sin\varphi$$

Die analoge Rechnung mit λ, μ, ν ergibt:

$$-\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 - \sin\varphi\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right) = \frac{1}{\mathfrak{r}}\sum\lambda\frac{\delta l}{\delta t}$$

und die mit α, β, γ:

$$-\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) = \sum\alpha\frac{\delta l}{\delta t}$$

Da endlich

$$\sum l\frac{\delta l}{\delta t} = 0$$

ist, so erhält man für δl die Gleichung:

$$\text{XVIII} \; \frac{\delta l}{\delta t} = -\alpha\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) - \lambda\,\mathfrak{r}\left[\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 + \sin\varphi\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right)\right]$$

Entsprechende Gleichungen gelten für δm und δn.

Die Grössen $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ sind bestimmt durch die drei Relationen:

$$\sum\lambda\frac{\delta\lambda}{\delta t} = 0$$

$$\sum\alpha\frac{\delta\lambda}{\delta t} = -\sum\lambda\frac{\delta\alpha}{\delta t} = -\sin\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)$$

$$\sum l\frac{\delta\lambda}{\delta t} = -\sum\lambda\frac{\delta l}{\delta t} = \mathfrak{r}\left[\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 + \sin\varphi\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right)\right]$$

Aus ihnen folgt für $\delta\lambda$:

$$\text{XIX}\ \frac{\delta\lambda}{\delta t} = -\alpha \sin\varphi \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) + l\mathfrak{r}\left[\cos\varphi \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 + \sin\varphi\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right)\right]$$

Um $\delta\rho$ zu berechnen, gehen wir aus von der Gleichung:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{\rho}$$

und bilden:

$$\frac{ds}{\rho} = \sum l\, d\lambda$$

Hieraus erhält man durch Variation:

$$\frac{\delta ds}{\rho} - \frac{ds \cdot \delta\rho}{\rho^2} = \sum (\delta l \cdot d\lambda + l\,\delta d\lambda)$$

oder:

$$(16) \qquad \frac{g}{\rho} - \frac{\frac{\delta\rho}{\delta t}}{\rho^2} = \sum l \frac{d}{ds}\left(\frac{\delta\lambda}{\delta t}\right)$$

Infolge der Gleichung XIX wird nun:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta\lambda}{\delta t}\right) = -\frac{l}{\mathfrak{r}} \sin\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) - \alpha\frac{d}{ds}\left(\sin\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\right) -$$
$$- \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}} + \frac{\lambda}{\rho}\right)\mathfrak{r}\left[\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 + \sin\varphi\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right)\right] +$$
$$+ l \cdot \frac{d}{ds}\left\{\mathfrak{r}\left[\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 + \sin\varphi\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right)\right]\right\}$$

und daher:

$$\sum l \frac{d}{ds}\left(\frac{\delta\lambda}{\delta t}\right) = -\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}}\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) + \frac{d}{ds}\left\{\mathfrak{r}\left[\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sin\varphi\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right)\right]\right\},$$

mithin ergibt sich aus der Gleichung (16) für $\delta\rho$ die Beziehung:

$$\text{XX} \qquad \frac{\delta\rho}{\delta t} = \frac{\rho\sin\varphi}{\mathfrak{r}}(2 - \rho\cdot\varphi') - \rho^2\cdot\frac{d}{ds}\left\{\mathfrak{r}\left[\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sin\varphi\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right)\right]\right\}$$

Was die Berechnung von δp, $\delta(\beta r - \gamma q)$ und den entsprechenden Grössen anbetrifft, so reicht hierzu die Kenntnis der Verhältnisse eines einzigen Flächenstreifens nicht aus. Denn δp, δq, δr charakterisieren die Lage der Tangentialebene in $P(x + \delta x \ldots z + \delta z)$ zu der Tangentialebene in $P(x, y, z)$. Durch einen Flächenstreifen ist aber immer nur die gegenseitige Lage von Tangentialebenen bestimmt, die diesem Streifen selbst angehören. Dagegen lassen sich diese Grössen leicht ermitteln, wenn man in jedem Punkte unserer Flächenkurve das Gaussische Krümmungsmass der Fläche als gegeben betrachtet. Wir brauchen nur auf die Gleichungen zurückzugehen:

$$p = l\cos\varphi + \lambda\sin\varphi$$

und

$$\beta r - \gamma q = -l\sin\varphi + \lambda\cos\varphi,$$

aus denen durch Variation folgt:

$$\frac{\delta p}{\delta t} = \frac{\delta l}{\delta t}\cos\varphi + \frac{\delta\lambda}{\delta t}\sin\varphi + (\beta r - \gamma q)\frac{\delta\varphi}{\delta t} \tag{17}$$

und

$$\frac{\delta(\beta r - \gamma q)}{\delta t} = -\frac{\delta l}{\delta t}\sin\varphi + \frac{\delta\lambda}{\delta t}\cos\varphi - p\frac{\delta\varphi}{\delta t} \tag{18}$$

Für $\delta\varphi : \delta t$ erhalten wir durch Variation der Gleichung:

$$\sin\varphi = g\,\mathfrak{r}$$

die Relation:

$$\cos\varphi\,\delta\varphi = g\,\delta\mathfrak{r} + \mathfrak{r}\,\delta g$$

Da nun die Beziehung gilt[1]):

$$\frac{\delta g}{\delta t} = -K - g^2,$$

wo unter K das Gaussische Krümmungsmass verstanden ist, so ergibt sich bei gleichzeitiger Berücksichtigung von XVII:

$$\text{XXI} \quad \frac{\delta\varphi}{\delta t} = -\frac{K\mathfrak{r}}{\cos\varphi} + \mathfrak{r}\,tg\,\varphi\left[\cos\varphi\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right) - \sin\varphi\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2\right]$$

Setzt man diesen Wert von $\delta\varphi$ und die schon berechneten Ausdrücke für δl und $\delta\lambda$ in (17) und (18) ein, so kommt man zu den gewünschten Gleichungen:

$$\text{XXII} \quad \frac{\delta p}{\delta t} = -\alpha\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) - (\beta r - \gamma q)\frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left(K + \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2\right)$$

und

$$\text{XXIII} \quad \frac{\delta(\beta r - \gamma q)}{\delta t} = p\frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left(K + \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2\right)$$

Mit Hilfe der abgeleiteten Gleichungen können wir jetzt die Bedingung dafür aufstellen, dass die Anwendung der Bäcklundschen

[1]) F. Engel, Leipziger Berichte, Jahrgang 1901, S. 404 bis 412, Zur Flächentheorie.

Transformation ∞^1 neue Flächen liefert. Es muss dann offenbar die Gleichung erfüllt sein:

$$\sum p_1 \,\delta x_1 = 0$$

Die Variation von

$$x_1 = x + a u = x + a\,[\alpha \cos\vartheta + (\beta r - \gamma q) \sin\vartheta]$$

liefert:

$$\frac{\delta x_1}{\delta t} = \beta r - \gamma q + a\left[p\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\cos\vartheta - \alpha \sin\vartheta \frac{\delta\vartheta}{\delta t} + \right.$$
$$\left. + (\beta r - \gamma q) \cos\vartheta \frac{\delta\vartheta}{\delta t} + \sin\vartheta \cdot \frac{\delta(\beta r - \gamma q)}{\delta t}\right]$$

Mit Rücksicht auf:

$$p_1 = p \cos\varkappa + \sin\varkappa\,[-\alpha \sin\vartheta + (\beta r - \gamma q)\cos\vartheta]$$

wird also unsere Forderung:

$$a\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\cos\vartheta\cos\varkappa + a \sin\vartheta\cos\varkappa \sum p \frac{\delta(\beta r - \gamma q)}{\delta t} + a \sin\varkappa \frac{\delta\vartheta}{\delta t} +$$
$$+ \sin\varkappa\cos\vartheta = 0$$

oder:

$$\frac{\delta\vartheta}{\delta t} = -\frac{\cos\vartheta}{a} - \cot\varkappa\cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) - \cot\varkappa\sin\vartheta \sum p \frac{\delta(\beta r - \gamma q)}{\delta t}$$

Berücksichtigt man die Relation XXIII, so erhält man durch Einsetzen:

$$(18') \quad \frac{\delta\vartheta}{\delta t} = -\frac{\cos\vartheta}{a} - \cot\varkappa\cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) - \frac{\cot\varkappa\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left(\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 + K\right)$$

Dieser Wert für $\delta\vartheta$ muss jedoch noch die weitere Bedingung erfüllen:

$$d\,\delta\vartheta = \delta\,d\vartheta,$$

wobei für $d\vartheta : ds$ Gleichung I

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\sin\vartheta}{a} + \frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}} - \frac{\cot\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}} - \cot\varkappa\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)$$

zu Grunde zu legen ist.

Es ist nun:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta\vartheta}{\delta t}\right) \quad \frac{\sin\vartheta}{a}\left[\frac{\sin\vartheta}{a} + \frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}} - \frac{\cot\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}} - \cot\varkappa\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\right]$$

$$(19) \qquad -\cot\varkappa\left\{-\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\left[\frac{\sin\vartheta}{a} + \frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}} - \frac{\cot\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \cot\varkappa\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\right] - \cos\vartheta\left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \varphi''\right)\right\} -$$

$$-\frac{\cot\varkappa}{\cos\varphi}\left\{\left[(\frac{1}{\rho}-\varphi')^2+K\right]\left[\mathfrak{r}\cos\vartheta\left(\frac{\sin\vartheta}{a}+\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}}-\frac{\cot\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}-\right.\right.\right.$$

$$(19)\qquad -\cot\varkappa\sin\vartheta\,(\frac{1}{\rho}-\varphi')\Big)+\sin\vartheta\,\mathfrak{r}'+\mathfrak{r}\sin\vartheta\,tg\,\varphi\cdot\varphi'\Big]+$$

$$+\,\mathfrak{r}\sin\vartheta\left[2\,(\frac{1}{\rho}-\varphi')\,(-\frac{\rho'}{\rho^2}-\varphi'')+K'\right]\Big\}$$

Ferner erhält man unter Benutzung der früheren Gleichungen:

$$\frac{1}{ds}\cdot\frac{\delta d\vartheta}{\delta t}=\frac{\cos\vartheta}{a}\left[-\frac{\cos\vartheta}{a}\quad\cot\varkappa\cos\vartheta(\frac{1}{\rho}-\varphi')-\frac{\cot\varkappa\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left((\frac{1}{\rho}\quad\varphi')^2+K\right)\right]-$$

$$-K-\frac{\sin^2\varphi}{\mathfrak{r}^2}-$$

$$\cot\varkappa\left\{\quad\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}\left[\quad\frac{\cos\vartheta}{a}\quad\cot\varkappa\cos\vartheta\,(\frac{1}{\rho}\quad\varphi')\quad\frac{\cot\varkappa\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left((\frac{1}{\rho}\quad\varphi')^2+K\right)\right]\right.$$

$$(20)\qquad -\cos\vartheta\left[-K\,tg\,\varphi+\frac{\rho'}{\rho^2}+\varphi''-tg\,\varphi\,(\frac{1}{\rho}-\varphi')^2+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\mathfrak{r}^2}\right]\Big\}-$$

$$\cot\varkappa\left\{\cos\vartheta\,(\frac{1}{\rho}\quad\varphi')\left[\quad\frac{\cos\vartheta}{a}\quad\cot\varkappa\cos\vartheta\,(\frac{1}{\rho}\quad\varphi')\quad\frac{\cot\varkappa\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left((\frac{1}{\rho}\quad\varphi')^2+K)\right)\right]+\right.$$

$$+\sin\vartheta\left[\frac{K'\mathfrak{r}+K\mathfrak{r}'}{\cos\varphi}+\frac{K\mathfrak{r}\sin\varphi\cdot\varphi'}{\cos^2\varphi}+\frac{\mathfrak{r}\sin\varphi\cdot\varphi'}{\cos^2\varphi}(\frac{1}{\rho}-\varphi')^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathfrak{r}'}{\cos\varphi}(\frac{1}{\rho}-\varphi')^2-\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}\rho}(2-\rho\varphi')-\frac{2\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}(\frac{1}{\rho}-\varphi')(\frac{\rho'}{\rho^2}+\varphi'')+\frac{\varphi'\sin\varphi}{\mathfrak{r}}\right]\Big\}+$$

$$+\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}}\left[\frac{\sin\vartheta}{a}+\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}}-\frac{\cot\varkappa\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}-\cot\varkappa\sin\vartheta\,(\frac{1}{\rho}-\varphi')\right]$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, so erhält man als die gesuchte Bedingung das elegante Resultat, das die vorgelegte Fläche die konstante negative Krümmung[1])

$$\text{XXIII}'\qquad K=-\frac{\sin^2\varkappa}{a^2}$$

besitzen muss. Diese Bedingung ist in der Tat unabhängig von der Auswahl der Streifen auf der Fläche, also ist sie auch hinreichend. Aus ihr lässt sich sofort entnehmen, dass auch die transformierten Flächen die konstante negative Krümmung $K=-\sin^2\varkappa:a^2$ besitzen müssen. Denn durch Anwendung der Bäcklundschen Transformation kann man von jeder der transformierten Flächen wieder zur ursprünglichen Fläche zurückgelangen. Das besagt aber, dass zwei ganz beliebige unendlich benachbarte

---

[1]) A. V. Bäcklund, Om ytor med konstant negativ krökning, Lund 1883, S. 10.

geodätische Parallelen der transformierten Fläche in zwei unendlich benachbarte Kurven auf der ursprünglichen Fläche übergehen. Folglich muss auch jede der transformierten Flächen der für die ursprüngliche Fläche abgeleiteten Bedingung unterworfen sein, d. h. sie muss ebenfalls die konstante negative Krümmung $K = -\sin^2 \varkappa : a^2$ besitzen.

Nach Lie könnten wir den Beweis auch so führen. Die Asymptotenlinien auf der ursprünglichen Fläche haben bekanntlich die Torsion $+\sin \varkappa : a$ und $-\sin \varkappa : a$. Aus unsern früheren Sätzen folgt daher, dass auch die transformierten Flächen eine Schar von ∞^1 Kurven mit der konstanten Torsion $+\sin \varkappa : a$ und $-\sin \varkappa : a$ besitzen müssen, deren Schmiegungsebenen gleichfalls mit den Tangentialebenen der Fläche zusammenfallen. Das besagt aber, dass auch die transformierten[1]) Flächen dasselbe konstante negative Krümmungsmass $-\sin^2 \varkappa : a^2$ haben wie die vorgelegte Fläche, und dass die Asymptotenlinien[2]) einander entsprechen.

Diese letzte Eigenschaft kommt übrigens auch den Krümmungslinien zu.[3]) Um dies zu beweisen, stützen wir uns mit Bäcklund auf den Satz, dass auf einer pseudosphärischen Fläche die Gegenseiten in einem von vier Haupttangentenkurven gebildeten Viereck einander gleich sind. Ein unendlich kleines Viereck dieser Art, in dem ausserdem zwei zusammenstossende Seiten dieselbe Länge haben, können wir daher als Rhombus auffassen. Die beiden Diagonalen eines solchen Vierecks halbieren mithin die Winkel der Haupttangentenkurven, sind also Elemente von Krümmungslinien. Da nun allen diesen unendlich kleinen Rhomben auf der gegebenen Fläche ebensolche auf den transformierten Flächen entsprechen, so entsprechen sich auch ihre unendlich kleinen Diagonalen, also auch die Krümmungslinien.

Als weitere Eigenschaft unserer Transformation erkennt man nach früheren Auseinandersetzungen die, dass entsprechende Stücke der Haupttangentenkurven einander gleich sind.[4])

Andererseits folgt aus dem § 2 in Kapitel III, dass es auf der ursprünglichen Fläche kein System von geodätischen Linien gibt, dem auf den transformierten Flächen ein ebensolches entspricht.

---

[1]) A. V. Bäcklund, Om ytor med konstant negativ krökning, Lund 1883, S. 10.

[2]) Ebenda, S. 24.

[3]) Ebenda, S. 25.

[4]) Ebenda, S. 24.

Besonderes Interesse hat es, zu untersuchen, bei welchen Kurven eine Paralleltransformation stattfindet, d. h. wann die unendlich benachbarte geodätische Parallele einer Kurve auf der ursprünglichen Fläche in eine unendlich benachbarte geodätische Parallele der transformierten Kurve auf der neuen Fläche übergeht. Es müssen dann offenbar die beiden Bedingungen erfüllt sein

$$\sum \delta x_1\, dx_1 = 0$$

und

$$\sum \delta x_1^2 = \delta t_1^2 = Const.$$

Nun ist:

$$\frac{dx_1}{ds} = \alpha + a\left[\frac{l}{\mathfrak{r}}\cos\vartheta - \alpha\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{ds} + p\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) + (\beta r - \gamma q)\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\sin\varphi\sin\vartheta\right]$$

und

$$\frac{\delta x_1}{\delta t} = \beta r - \gamma q + a\left[p\cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) - \alpha\sin\vartheta\frac{\delta\vartheta}{\delta t} + (\beta r - \gamma q)\cos\vartheta\frac{\delta\vartheta}{\delta t} + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta(\beta r - \gamma q)}{\delta t}\sin\vartheta\right], \tag{21}$$

wo für $d\vartheta : ds$ und $\delta\vartheta : \delta t$ die früher gefundenen Werte einzusetzen sind. $\Sigma\delta x_1 dx_1 = 0$ wird also:

$$-\ \alpha\sin\vartheta\frac{\delta\vartheta}{\delta t} - \frac{a}{\mathfrak{r}}\cos\vartheta\sin\varphi + \frac{a^2}{\mathfrak{r}}\cos^2\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\cos\varphi -$$
$$- \frac{a^2}{\mathfrak{r}}\sin\varphi\cos^2\vartheta\frac{\delta\vartheta}{\delta t} + \frac{a^2}{\mathfrak{r}}\cos\vartheta\sin\vartheta\sum l\frac{\delta(\beta r - \gamma q)}{\delta t} + a^2\sin^2\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\cdot\frac{\delta\vartheta}{\delta t} +$$
$$+ a^2\sin\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2\cos\vartheta + a^2\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\sum p\frac{\delta(\beta r - \gamma q)}{\delta t} + a\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds} +$$
$$+ a^2\cos^2\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\cdot\frac{\delta\vartheta}{\delta t} - a^2\sin^2\vartheta\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}}\frac{\delta\vartheta}{\delta t} = 0$$

Da

$$\sum p\frac{\delta(\beta r - \gamma q)}{\delta t} = \frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left[\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 - \frac{\sin^2\varkappa}{a^2}\right]$$

und

$$\sum l\frac{\delta(\beta r - \gamma q)}{\delta t} = \mathfrak{r}\left[\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 - \frac{\sin^2\varkappa}{a^2}\right]$$

ist, so geht obige Gleichung über in:

$$- a\sin\vartheta\left\{-\frac{\cos\vartheta}{a} - \cot\varkappa\cos\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi') - \frac{\cot\varkappa\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left[(\frac{1}{\rho} - \varphi')^2 - \frac{\sin^2\varkappa}{a^2}\right]\right\} -$$

$$- ag\cos\vartheta + a^2\cos^2\vartheta\frac{\cos\varphi}{\mathfrak{r}}(\frac{1}{\rho} - \varphi') - a^2 g\left\{-\frac{\cos\vartheta}{a} - \cot\varkappa\cos\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi') -\right.$$

$$\left. - \frac{\cot\varkappa\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left[(\frac{1}{\rho} - \varphi')^2 - \frac{\sin^2\varkappa}{a^2}\right]\right\} + a^2\cos\vartheta\sin\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi')^2 -$$

$$- \cos\vartheta\sin\vartheta\sin^2\varkappa + a^2\left[\frac{\sin\vartheta}{a} + g + \cot\varkappa\left(\sin\vartheta\,\varphi' - \frac{\sin\vartheta}{\rho} - \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left\{-\frac{\cos\vartheta}{a} - \cot\varkappa\cos\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi') - \frac{\cot\varkappa\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left[(\frac{1}{\rho} - \varphi')^2 - \frac{\sin^2\varkappa}{a^2}\right)\right] +$$

$$+ a^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi')^2 + a^2\sin^2\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi')^3\frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi} - \sin^2\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi')\frac{\mathfrak{r}\sin^2\varkappa}{\cos\varphi} +$$

$$+ a\cos\vartheta\left[\frac{\sin\vartheta}{a} + g + \cot\varkappa\left(\sin\vartheta\cdot\varphi' - \frac{\sin\vartheta}{\rho} - \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}}\right)\right] = 0$$

Dies gibt:

$$\frac{a^2\cos^2\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}\sin^2\varkappa}(\frac{1}{\rho} - \varphi') + \frac{2a^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin^2\varkappa}(\frac{1}{\rho} - \varphi')^2 +$$

$$(21') \qquad + a^2\sin^2\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi')^3\frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi\sin^2\varkappa} - \sin^2\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi')\frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi} = 0$$

Diese Gleichung lässt sich befriedigen durch $\frac{1}{\rho} - \varphi' = 0$. Wir wollen unter Voraussetzung der Giltigkeit dieser Relation die zweite Bedingung $\Sigma\delta x_1{}^2 = Const$ untersuchen. Zu dem Zweck stellen wir mit Berücksichtigung von (18'), (21), XXIII die Gleichung auf:

$$\left(\frac{\delta x_1}{\delta t}\right)_{\varphi' = \frac{1}{\rho}} = \beta r - \gamma q + a\left[- a\sin\vartheta\left\{-\frac{\cos\vartheta}{a} + \frac{\cos\varkappa\sin\varkappa\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi\cdot a^2}\right\} +\right.$$

$$\left. + (\beta r - \gamma q)\cos\vartheta\left\{-\frac{\cos\vartheta}{a} + \frac{\cos\varkappa\sin\varkappa\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi\cdot a^2}\right\} - \frac{p\sin\vartheta\,\mathfrak{r}\sin^2\varkappa}{\cos\varphi\, a^2}\right]$$

Hieraus ergibt sich die Bedingung:

$$\sin^2\vartheta\left(1 + \frac{\mathfrak{r}^2\sin^2\varkappa}{a^2\cos^2\varphi}\right) = Const$$

oder nach Differentiation:

$$\sin\vartheta\left[\frac{\cos\vartheta}{a}\left(1 + \frac{\mathfrak{r}^2\sin^2\varkappa}{a^2\cos^2\varphi}\right) + \frac{\mathfrak{r}\sin^2\varkappa}{a^2\cos^2\varphi}\left(\mathfrak{r}' + \frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\sin\varphi\cdot\varphi'\right)\right] -$$

$$- \cos^2\vartheta\left(1 + \frac{\mathfrak{r}^2\sin^2\varkappa}{a^2\cos^2\varphi}\right)\frac{\cot\varkappa\cos\varphi}{\mathfrak{r}} + \cos\vartheta\left(1 + \frac{\mathfrak{r}^2\sin^2\varkappa}{a^2\cos^2\varphi}\right)\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}} = 0$$

Da nun ϑ in einem Punkte nicht auf eine endliche Anzahl von Werten beschränkt werden darf, so folgen hieraus die Gleichungen:

$$1 + \frac{\mathfrak{r}^2 \sin^2 \varkappa}{a^2 \cos^2 \varphi} = 0$$

$$\frac{\mathfrak{r} \sin^2 \varkappa}{a^2 \cos^2 \varphi} \left[\mathfrak{r}' + \frac{\mathfrak{r}}{\cos \varphi} \sin \varphi \cdot \varphi'\right] = 0$$

$$\left(1 + \frac{\mathfrak{r}^2 \sin^2 \varkappa}{a^2 \cos^2 \varphi}\right) \frac{\cot \varkappa \cos \varphi}{\mathfrak{r}} = 0$$

$$\left(1 + \frac{\mathfrak{r}^2 \sin^2 \varkappa}{a^2 \cos^2 \varphi}\right) \frac{\sin \varphi}{\mathfrak{r}} = 0,$$

die wir durch die eine ersetzen können:

$$1 + \frac{\mathfrak{r}^2 \sin^2 \varkappa}{a^2 \cos^2 \varphi} = 0$$

Dies Resultat steht aber im Widerspruch mit der Gleichung $\frac{1}{\rho} - \varphi' = 0$. Denn die letzte Relation sagt bekanntlich[1]) aus, dass die Kurve eine Krümmungslinie ist, die als solche auf unserer Fläche reell ist, während sich aus der ersten für $\mathfrak{r}$ ein imaginärer Wert ergibt.

Wir können also in der Gleichung (21′) den Ausdruck $\frac{1}{\rho} - \varphi'$ als von 0 verschieden voraussetzen. Dann ist aber (21′) äquivalent mit der Gleichung:

$$(22) \qquad \pm \operatorname{tg} \vartheta = \frac{a \cos \varphi}{\mathfrak{r} \sin \varkappa} + \frac{a \operatorname{tg} \vartheta}{\sin \varkappa} \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass die zweite Forderung schon von selbst erfüllt ist, wenn diese eine Beziehung gilt. Aus den schon oben angeführten Gleichungen (18′), (21), XXIII ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\delta x_1}{\delta t} = \beta r - \gamma q + a \Bigg[& p \cos \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) - \\ & - \dot{a} \sin \vartheta \left\{ - \frac{\cos \vartheta}{a} - \cot \varkappa \cos \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) - \frac{\cot \varkappa \sin \vartheta\, \mathfrak{r}}{\cos \varphi} \left(\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 - \right.\right. \\ 22' \quad & \left.\left. - \frac{\sin^2 \varkappa}{a^2} \right) \right\} + (\beta r - \gamma q) \cos \vartheta \left\{ - \frac{\cos \vartheta}{a} - \cot \varkappa \cos \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) - \right. \\ & \left. - \frac{\cot \varkappa \sin \vartheta\, \mathfrak{r}}{\cos \varphi} \left(\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 - \frac{\sin^2 \varkappa}{a^2} \right) \right\} + \frac{p \sin \vartheta\, \mathfrak{r}}{\cos \varphi} \left(\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 - \frac{\sin^2 \varkappa}{a^2} \right) \Bigg] \end{aligned}$$

Hierin können wir das Glied:

$$\cos \vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) + \frac{\sin \vartheta\, \mathfrak{r}}{\cos \varphi} \left(\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 - \frac{\sin^2 \varkappa}{a^2} \right),$$

---

[1]) Siehe z. B. Stahl u. Kommerell, Die Grundformeln der Allgemeinen Flächentheorie, S. 89, Leipzig, 1893.

das als Faktor von p, α und $\beta r - \gamma q$ auftritt, mit Hilfe von (22) bedeutend vereinfachen. Durch Quadrieren von (22) erhält man nämlich:

$$tg^2\,\vartheta \mp \frac{2\,tg\,\vartheta\,a\cos\varphi}{\mathfrak{r}\sin\varkappa} + \frac{a^2\cos^2\varphi}{\mathfrak{r}^2\sin^2\varkappa} = \frac{a^2\,tg^2\,\vartheta}{\sin^2\varkappa}\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2$$

und hieraus:

$$\frac{\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left(\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 - \frac{\sin^2\varkappa}{a^2}\right) = \frac{\cos^2\vartheta\,\mathfrak{r}\sin^2\varkappa}{\sin\vartheta\cos\varphi\,a^2}\left(\mp\frac{2\,tg\,\vartheta\,a\cos\varphi}{\mathfrak{r}\sin\varkappa} + \frac{a^2\cos^2\varphi}{\mathfrak{r}^2\sin^2\varkappa}\right) =$$

$$= \mp\frac{2\sin\varkappa\cos\vartheta}{a} + \frac{\cos^2\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}\sin\vartheta}$$

Also wird:

$$\cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) + \frac{\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left(\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 - \frac{\sin^2\varkappa}{a^2}\right) = \cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) \mp \frac{2\sin\varkappa\cos\vartheta}{a} + \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}\sin\vartheta}$$

Da man nun schreiben kann:

$$\cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) + \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}\sin\vartheta} = \frac{\sin\varkappa\cos^2\vartheta}{a\sin\vartheta}\left(\frac{a\,tg\,\vartheta}{\sin\varkappa}\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) + \frac{a\cos\varphi}{\mathfrak{r}\sin\varkappa}\right),$$

so ist auf Grund von (22):

$$\cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) + \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}\sin\vartheta} = \pm\frac{\sin\varkappa\cos\vartheta}{a}$$

Daher findet man endlich:

$$\cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) + \frac{\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left(\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 - \frac{\sin^2\varkappa}{a^2}\right) = \mp\frac{\sin\varkappa\cos\vartheta}{a}$$

Mithin nimmt die Gleichung (22') die einfache Form an:

$$\frac{\delta x_1}{\delta t} = (\beta r - \gamma q)\cos\vartheta\left(\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta} \pm \cos\varkappa\cos\vartheta\right) \mp p\sin\varkappa\cos\vartheta -$$

$$- \alpha\sin\vartheta\left(-\cos\vartheta \pm \cos\varkappa\cos\vartheta\right),$$

woraus sich durch Quadrieren und Bildung der cyklischen Summe ergibt:

XXIV $$\sum\left(\frac{\delta x_1}{\delta t}\right)^2 = \left(\frac{\delta t_1}{\delta t}\right)^2 = 1 = Const$$

Hiermit haben wir bewiesen, dass unsere Forderung durch die einzige Gleichung (22) wiedergegeben wird. Soll also die Kurve mit ihrer unendlich benachbarten geodätischen Parallelen bei allen ∞^1 Transformationen so transformiert werden, dass die beiden transformierten Kurven wieder geodätisch parallel sind, so muss in jedem Punkte der ursprünglichen Kurve eine der beiden folgenden Gleichungen identisch erfüllt sein:

$$\text{XXV} \qquad \begin{aligned} tg\,\vartheta &= -\frac{a\cos\varphi}{\mathfrak{r}\left[a\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)-\sin\varkappa\right]} \\ tg\,\vartheta &= -\frac{a\cos\varphi}{\mathfrak{r}\left[a\left(\frac{1}{\rho}-\varphi'\right)+\sin\varkappa\right]} \end{aligned}$$

Nun ist die Unendlichdeutigkeit der Bäcklundschen Transformation dadurch gekennzeichnet, dass ϑ in ein und demselben Punkte ∞^1 verschiedene Werte annehmen kann. Da andererseits φ, $\mathfrak{r}$, ρ und φ' für einen Kurvenpunkt konstante Grössen sind, so können die Gleichungen XXV nur dann Identitäten sein, wenn ihre rechte Seite die unbestimmte Form 0 : 0 annimmt. Es muss daher in jedem Kurvenpunkte entweder

$$\text{XXVI} \qquad \cos\varphi \equiv \frac{a}{\rho} - \sin\varkappa \equiv 0$$

oder

$$\text{XXVI}' \qquad \cos\varphi \equiv \frac{a}{\rho} + \sin\varkappa \equiv 0$$

sein, d. h. die Kurve muss eine Haupttangentenkurve der Fläche sein.

Kapitel IV.

Versuch einer Verallgemeinerung der Bäcklundschen Transformation.

§ 1.

Bei den bis jetzt angestellten Untersuchungen haben wir stets die Voraussetzung gemacht, dass die Entfernung a zweier einander entsprechender Punkte und der Winkel $\varkappa$ zwischen je zwei entsprechenden Ebenen konstante Grössen sind. Es drängt sich uns die Frage auf, ob die Bäcklundsche Transformation nicht noch einer Verallgemeinerung fähig ist, und worin diese möglichen Falls besteht. Eine Erweiterung der Transformation ist offenbar auf drei Arten denkbar. Man kann nämlich entweder nur eine von den Grössen a und $\varkappa$ variieren oder beide als Veränderliche auffassen. In allen drei Fällen aber büsst die Bäcklundsche Transformation in anderer Hinsicht einen Teil ihres allgemeinen Charakters ein. Während sie nämlich bei konstantem a und $\varkappa$ für jeden Punkt des Raumes definiert ist, erscheint sie jetzt zunächst an eine Kurve oder Fläche gebunden, sobald man a und $\varkappa$ variiert. Denn handelt es sich um die Transformation eines Flächenstreifens, so muss man sich a und $\varkappa$ als Funktionen der Bogenlänge s gegeben denken, und bei der Flächentransformation müssen sich diese Grössen als Funktionen der Koordinaten auf der Fläche darstellen lassen.

In den folgenden Rechnungen betrachten wir gleich den allgemeinsten Fall, wo a und $\varkappa$ beide veränderlich sind.

Wir wenden uns zunächst zur Transformation eines Flächenstreifens. Die Transformationsgleichungen sind:

$$x_1 = x + a\,[\alpha \cos\vartheta + (\beta r - \gamma q) \sin\vartheta]$$
$$y_1 = y + a\,[\beta \cos\vartheta + (\beta r - \gamma q)' \sin\vartheta]$$
$$z_1 = z + a\,[\gamma \cos\vartheta + (\beta r - \gamma q)'' \sin\vartheta]$$

Die Ebenen der transformierten Flächenelemente haben zu Normalen die Geraden mit den Richtungskosinus p_1, q_1, r_1, von denen der erste lautet:

$$p_1 = p \cos\varkappa + \sin\varkappa\,[-\alpha \sin\vartheta + (\beta r - \gamma q) \cos\vartheta]$$

a und $\varkappa$ sind aber jetzt nicht konstant, sondern als Funktionen der Bogenlänge s der gegebenen Kurve zu betrachten. Demnach wird:

$$(23)\qquad \frac{dx_1}{ds} = \alpha + a\left[\frac{l}{\mathfrak{r}} \cos\vartheta - \alpha \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{\alpha}{\mathfrak{r}} \sin\vartheta \sin\varphi + \right.$$
$$\left. + p \sin\vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) + (\beta r - \gamma q) \cos\vartheta \frac{d\vartheta}{ds}\right] + \Big[\alpha \cos\vartheta + (\beta r - \gamma q) \sin\vartheta\Big] \cdot \frac{da}{ds}$$

Wie man sich jedoch leicht überzeugt, geht aus der Forderung:

$$\sum p_1\, dx_1 = 0$$

für $d\vartheta : ds$ dieselbe Gleichung (I) hervor wie früher:

$$(24)\qquad \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\sin\vartheta}{a} + \frac{\sin\varphi}{\mathfrak{r}} - \cot\varkappa \left(\frac{\cos\vartheta \cos\varphi}{\mathfrak{r}} + \sin\vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\right),$$

da sich die Glieder mit $da : ds$ wegheben.

Betrachten wir jetzt den Spezialfall, wo die Tangentialebenen Schmiegungsebenen der Kurven sind, also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ist, so wird:

$$(25)\qquad \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\sin\vartheta}{a} + \frac{1}{\mathfrak{r}} - \frac{\cot\varkappa \sin\vartheta}{\rho},$$

und für p_1 haben wir zu nehmen:

$$p_1 = \lambda \cos\varkappa - \sin\varkappa\,(\alpha \sin\vartheta + l \cos\vartheta),$$

was $= \pm \lambda_1$ werden muss. Wir wählen:

$$p_1 = + \lambda_1,$$

da die Wahl des Vorzeichens bei den folgenden Untersuchungen nicht in Betracht kommt.

Setzt man den Wert von $d\vartheta : ds$ aus der Gleichung (25) in (23) ein, so wird:

$$\frac{dx_1}{ds} = \alpha + a\left[\frac{\lambda}{\rho}\sin\vartheta - \alpha\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{a} - \frac{\cot\varkappa}{\rho}\right) - l\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{1}{a} - \frac{\cot\varkappa}{\rho}\right)\right] +$$

$$(26) \qquad + (\alpha\cos\vartheta - l\sin\vartheta)\frac{da}{ds}$$

Es muss jetzt ebenso wie früher die Gleichung gelten:

$$\frac{ds_1}{\rho_1}\sum l_1\, dx_1 = \sum d\lambda_1\, dx_1 = 0$$

Da

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = \frac{l}{\rho}\cos\varkappa - \sin\varkappa\left[-\frac{\lambda}{\rho}\cos\vartheta + \alpha\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{1}{a} - \frac{\cot\varkappa}{\rho}\right) - \right.$$

$$\left. - l\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{a} - \frac{\cot\varkappa}{\rho}\right)\right] - \lambda\sin\varkappa\frac{d\varkappa}{ds} - \cos\varkappa\frac{d\varkappa}{ds}\left(\alpha\sin\vartheta + l\cos\vartheta\right)$$

ist, so liefert uns diese Bedingung bei der Ausrechnung die Gleichung:

$$-\frac{\sin\varkappa\cos\vartheta}{a} + \frac{a}{\rho^2}\frac{\cos\vartheta}{\sin\varkappa} - \frac{a}{\rho\sin\varkappa}\frac{d\varkappa}{ds} - \frac{\sin\varkappa}{a}\frac{da}{ds} = 0$$

Weil nun die Transformation gerade durch ϑ als eine unendlich-deutige charakterisiert ist, so müssen der Koeffizient von $\cos\vartheta$ und das von ϑ freie Glied für sich allein verschwinden, es müssen also die Gleichungen bestehen:

$$\text{XXVII} \qquad \rho^2 = \frac{a^2}{\sin^2\varkappa}$$

und

$$\text{XXVIII} \qquad \frac{da}{ds} = -\frac{a^2}{\rho\sin^2\varkappa}\cdot\frac{d\varkappa}{ds}$$

Die erste stimmt vollkommen mit dem analogen Ergebnis überein, das wir in Kapitel III bei der gewöhnlichen Bäcklundschen Transformation fanden. Die zweite ergibt, wenn wir für ρ den Wert $\pm a : \sin\varkappa$ einsetzen:

$$\mp\frac{da}{ds} = \frac{a}{\sin\varkappa}\frac{d\varkappa}{ds}$$

Je nach der Wahl des Vorzeichens folgt hieraus durch Integration:

XXIX $$a\, tg \frac{1}{2} \varkappa = a_0\, tg \frac{1}{2} \varkappa_0$$

und

XXIX' $$\frac{tg \frac{1}{2} \varkappa}{a} = \frac{tg \frac{1}{2} \varkappa_0}{a_0}$$

wobei wir unter $a_0, \varkappa_0$ zwei beliebige, aber zusammengehörige Anfangswerte von a und $\varkappa$ verstehen. Diese Relation besagt, dass unsere Transformation nur dann ausführbar ist, wenn a und $\varkappa$ entweder beide wirkliche Funktionen von s oder beide konstant sind. Ferner zeigt sie, dass im ersten Fall für a und $\varkappa$ nicht beliebige Funktionen von s gewählt werden dürfen, sondern dass zwischen beiden ein bestimmter Zusammenhang besteht.

Aus der Gleichung (26) lässt sich leicht der Wert von $ds_1 : ds$ ableiten, wenn man in ihr die Grösse ρ mit Hilfe von XXVII eliminiert, die Gleichung dann quadriert und nun die cyklische Summe nimmt. Man erhält die einfache Relation:

XXX $$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = 1 + \left(\frac{da}{ds}\right)^2 + 2 \cos\vartheta \frac{da}{ds} = \sin^2\vartheta + \left(\frac{da}{ds} + \cos\vartheta\right)^2,$$

die für a $=$ *Const* wieder die Form:

$$\frac{ds_1}{ds} = 1$$

annimmt.

Um die enge Verwandtschaft unserer Transformation mit der Bäcklundschen noch mehr hervorzuheben, wollen wir schliesslich noch ρ_1 berechnen. Durch Quadrieren der Gleichung:

$$\frac{d\lambda_1}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_1} = \frac{l_1}{\rho_1}$$

und Summation ergibt sich infolge der Gleichung (27):

$$\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \cdot \sum \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)^2 = \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \cdot \left[\frac{\sin^2\varkappa}{a^2} + \left(\frac{d\varkappa}{ds}\right)^2 - \frac{2\cos\vartheta}{\rho} \frac{d\varkappa}{ds}\right] = \frac{1}{\rho_1^2}$$

Setzt man hierin für $\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2$, $\left(\frac{d\varkappa}{ds}\right)^2$ und $\frac{1}{\rho} \frac{d\varkappa}{ds}$ ihre eindeutig bestimmten Werte ein; so wird:

XXXI $$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{\sin^2\varkappa}{a^2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{da}{ds}\right)^2 + 2\cos\vartheta \frac{da}{ds}}{\sin^2\vartheta + \left(\frac{da}{ds} + \cos\vartheta\right)^2} = \frac{\sin^2\varkappa}{a^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

Wir haben also das merkwürdige Resultat erhalten, dass auch bei der verallgemeinerten Transformation die Torsionsradien der entsprechenden Kurven in entsprechenden Punkten einander gleich sind.

§ 2.

Um die Bedingungen für die Existenz einer allgemeineren Bäcklundschen Flächentransformation zu erfahren, schlagen wir denselben Weg ein, den wir in Kapitel IV zur Bestimmung der Flächen konstanter negativer Krümmung benutzt haben. Dabei fassen wir jetzt a und $\varkappa$ als Funktionen des Ortes auf der Fläche auf.

Wir konstruieren zu einer beliebigen Kurve der vorgelegten Fläche eine unendlich benachbarte geodätische Parallele und verlangen, dass die Flächenstreifen dieser beiden Kurven bei der Transformation in Flächenstreifen übergehen, die wieder unendlich benachbart sind und auf ein und derselben Fläche liegen.

Indem wir ganz an den früheren Bezeichnungen festhalten, suchen wir zuerst die Gleichung:

$$\sum p_1 \delta x_1 = 0$$

zu befriedigen. Es ist bemerkenswert, dass sich infolge dieser Bedingungsgleichung für $\delta\vartheta$ derselbe Wert ergibt wie bei der Bäcklundschen Transformation. Denn es ist:

$$\frac{\delta x_1}{\delta t} \; \frac{\delta x}{\delta t} + a \cdot \frac{\delta}{\delta t}\left(\alpha \cos\vartheta + (\beta r - \gamma q) \sin\vartheta\right) + \left(\alpha \cos\vartheta + (\beta r - \gamma q) \sin\vartheta\right) \; \frac{\delta a}{\delta t} ,$$

und ganz analog zu den entsprechenden Verhältnissen in § 1 fällt hier bei der Bildung des Ausdruckes $\Sigma p_1 \delta x_1$ das Glied mit $\delta a : \delta t$ fort. Es gilt somit die Relation:

$$\text{(28)} \quad \frac{\delta\vartheta}{\delta t} = -\frac{\cos\vartheta}{a} - \cot\varkappa \cos\vartheta \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right) - \frac{\cot\varkappa \sin\vartheta\, \mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left(\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)^2 + K\right)$$

Jetzt benutzen wir die Identität:

$$d\left(\frac{\delta\vartheta}{\delta t}\right) = \frac{\delta\, d\vartheta}{\delta t}$$

Die Ausdrücke für $d\left(\frac{\delta\vartheta}{\delta t}\right)$ und $\frac{\delta\, d\vartheta}{\delta t}$ unterscheiden sich von den entsprechenden Grössen, die wir in Kap. IV gebildet haben, und die wir zur Abkürzung mit $\left\{d\left(\frac{\delta\vartheta}{\delta t}\right)\right\}_B$ und $\left\{\frac{\delta\, d\vartheta}{\delta t}\right\}_B$ bezeichnen wollen, nur durch einige Summanden, die mit den Differentialen da, $d\varkappa$, δa, $\delta\varkappa$ behaftet sind. Mit Hilfe der Gleichungen (24) und (28) überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der beiden Gleichungen:

$$d\left(\frac{\delta\vartheta}{\delta t}\right) = \left\{d\left(\frac{\delta\vartheta}{\delta t}\right)\right\}_B + \frac{\cos\vartheta}{a^2}\,da + \frac{d\varkappa}{\sin^2\varkappa}\left\{\cos\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi') + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left((\frac{1}{\rho} - \varphi')^2 + K\right)\right\}$$

und

$$\frac{\delta\,d\vartheta}{\delta t} = \left\{\frac{\delta\,d\vartheta}{\delta t}\right\}_B - \frac{\sin\vartheta}{a^2}\,ds\,\frac{\delta a}{\delta t} + \frac{ds}{\sin^2\varkappa}\,\frac{\delta\varkappa}{\delta t}\left[\frac{\cos\varphi\cos\vartheta}{\mathfrak{r}} + \sin\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi')\right]$$

Setzt man die beiden Ausdrücke einander gleich, so ergibt sich:

$$d\left(\frac{\delta\vartheta}{\delta t}\right) - \frac{\delta\,d\vartheta}{\delta t} = \frac{ds}{a^2} + \frac{K ds}{\sin^2\varkappa} + \frac{\cos\vartheta}{a^2}\,da + \frac{d\varkappa}{\sin^2\varkappa}\left\{\cos\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi') + \right.$$
$$(29)\quad \left. + \frac{\sin\vartheta\,\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left(K + (\frac{1}{\rho} - \varphi')^2\right)\right\} - \frac{ds}{\sin^2\varkappa}\,\frac{\delta\varkappa}{\delta t}\left[\frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\mathfrak{r}} + \sin\vartheta\,(\frac{1}{\rho} - \varphi')\right] +$$
$$+ \frac{\sin\vartheta}{a^2}\,ds\cdot\frac{\delta a}{\delta t} = 0$$

Weil unsere Transformation unendlichdeutig sein soll, so müssen hier die Koeffizienten von $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ und das von ϑ freie Glied identisch verschwinden, wir erhalten demnach die drei Gleichungen:

$$\text{XXXII}\qquad K = -\frac{\sin^2\varkappa}{a^2}$$

$$(30)\qquad \frac{1}{a^2}\,\frac{da}{ds} + \frac{1}{\sin^2\varkappa}\,\frac{d\varkappa}{ds}\,(\frac{1}{\rho} - \varphi') - \frac{1}{\sin^2\varkappa}\,\frac{\delta\varkappa}{\delta t}\,\frac{\cos\varphi}{\mathfrak{r}} = 0\,.$$

und:

$$(31)\qquad \frac{1}{\sin^2\varkappa}\,\frac{d\varkappa}{ds}\,\frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\left(K + (\frac{1}{\rho} - \varphi')^2\right) + \frac{1}{a^2}\,\frac{\delta a}{\delta t} - \frac{1}{\sin^2\varkappa}\,\frac{\delta\varkappa}{\delta t}\,(\frac{1}{\rho} - \varphi') = 0$$

Ersetzen wir in der letzten K durch $-\sin^2\varkappa : a^2$, so geht sie über in:

$$(32)\qquad -\frac{1}{a^2}\,\frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\,\frac{d\varkappa}{ds} + \frac{1}{\sin^2\varkappa}\,\frac{d\varkappa}{ds}\,\frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\,(\frac{1}{\rho} - \varphi')^2 + \frac{1}{a^2}\,\frac{\delta a}{\delta t} - \frac{1}{\sin^2\varkappa}\,\frac{\delta\varkappa}{\delta t}\,(\frac{1}{\rho} - \varphi') = 0$$

Multiplizieren wir jetzt die Gleichung (30) mit $\mathfrak{r}\,(\frac{1}{\rho} - \varphi')\cos\varphi$ und ziehen dann von ihr die Gleichung (32) ab, so folgt:

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\,(\frac{1}{\rho} - \varphi')\,\frac{da}{ds} + \frac{1}{a^2}\,\frac{\mathfrak{r}}{\cos\varphi}\,\frac{d\varkappa}{ds} - \frac{1}{a^2}\,\frac{\delta a}{\delta t} = 0$$

Wir kommen nunmehr leicht zu den beiden Bedingungsgleichungen:

XXXIII $$\left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\frac{da}{ds} + \frac{d\varkappa}{ds} = \frac{\delta a}{\delta t} \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$$

und

XXXIV $$\frac{\sin^2\varkappa}{a^2}\frac{da}{ds} + \left(\frac{1}{\rho} - \varphi'\right)\frac{d\varkappa}{ds} = \frac{\delta\varkappa}{\delta t} \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$$

Aus ihnen können wir sofort den Schluss ziehen, dass a und $\varkappa$ beide konstant sein müssen, wenn nur eine von diesen Grössen als konstant vorausgesetzt wird. Demnach kann eine Verallgemeinerung der Bäcklundschen Transformation höchstens dadurch erzielt werden, dass man a und $\varkappa$ zugleich variiert. Es ist mir indes noch nicht gelungen festzustellen, ob wirklich Flächen existieren, auf die sich diese verallgemeinerte Bäcklundsche Transformation ausführen lässt.

Die vorliegende Arbeit ist auf Anregung von Herrn Professor Dr. Engel entstanden, dem ich auch an dieser Stelle für die mir stets gern gewährte Unterstützung zu danken nicht unterlassen will.

Ebenso fühle ich mich der Naturforschenden Gesellschaft in Görlitz dafür verpflichtet, dass sie meine Arbeit in ihre Abhandlungen aufgenommen hat, und Herrn Oberlehrer Dr. Lorey, insofern als diese Vergünstigung auf seine freundliche Vermittelung zurückzuführen ist.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Görlitz

Jahr/Year: 1906

Band/Volume: 25

Autor(en)/Author(s): Roelcke Otto

Artikel/Article: Über die Bäcklundsche Transformation der Flächen konstanter Krümmung 65-105