Geometrische Darstellung recurrirender Reihen mit zwei- und dreigliedriger Relationsscala.

Von Prof. **H. F. Scherk.**

(Hierzu Tafel II.)

Es giebt verschiedene Arten, die einzelnen und die Summenglieder geometrischer Reihen, also recurrirender Reihen mit eingliedriger Relationsscala geometrisch darzustellen. Eine der bekanntesten ist die, dass man von einem gegebenen Dreieck ausgehend, ein zweites bildet, dessen Seiten die von den Spitzen des ersten nach den Mitten seiner Gegenseiten gezogenen Transversalen sind; der Inhalt des zweiten Dreiecks ist bekanntlich $^3/_4$ des ersten. Verfährt man mit dem zweiten Dreieck in gleicher Weise, wie mit dem ersten, so erhält man ein drittes, dessen Inhalt $(\frac{3}{4})^2$ des ersten, dann ein viertes, dessen Inhalt $(\frac{3}{4})^3$ des ersten ist u. s. f. Es ist mir aber nicht bekannt, dass man auch die Glieder von recurrirenden Reihen, deren Relationsscala aus mehr als Einem Gliede besteht, geometrisch darstellen könne, und da jede Beziehung zwischen der reinen Zahlenlehre und der räumlichen Darstellung ihrer Resültate ein besonderes Interesse hat, so glaube ich dasselbe auch für die folgende Untersuchung in Anspruch nehmen zu dürfen.

Aufgabe.

(Fig. I.)

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Ueber den Seiten desselben construire man nach aussen hin, wie bei dem Euclidischen Beweis des Pythagoraeischen Lehrsatzes, Quadrate, und verbinde die Endpuncte je zweier, von demselben Eckpuncte des Dreiecks ausgehenden Seiten der Quadrate, so bilden diese Verbindungslinien mit den, den Seiten des Dreiecks gegenüberstehenden Quadratseiten ein Sechseck DEFGHJ. Construirt man nun ferner über den 3 Verbindungslinien Quadrate, und verbindet wieder die Endpuncte der von derselben Ecke ausgehenden Quadratseiten, so entsteht ein zweites Sechseck KLMNOP. So fährt man mit der Construction neuer Quadrate, neuer Verbindungslinien u. s. w. fort. Es sollen nun die gegenseitigen Beziehungen der auf diese Weise entstandenen Figuren, und namentlich die Grösse der Verbindungslinien und der Inhalt der aufeinander folgenden Sechsecke angegeben werden.

Auflösung.

1) Bezeichnet man wie gewöhnlich die Seiten des gegebenen Dreiecks durch a, b, c, so hat jedes der Dreiecke AGH, BDJ, CEF denselben Inhalt wie das Dreieck ABC, da jedes mit ihm zwei Seiten gemein hat, und die eingeschlossenen Winkel Supplemente der Dreieckswinkel sind; folglich ist

$$\triangle ABC = \triangle AGH = \triangle BDJ = \triangle CEF = J,$$

und demnach der Inhalt des ersten Sechsecks

$$DEFGHJ = a^2 + b^2 + c^2 + 4J.$$

2) Werden die ersten Verbindungslinien GH, JD, EF resp. durch $a_,$, $b_,$, $c_,$ bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \\ a_,^2 &= b^2 + c^2 + 2bc.\cos A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich}\quad a^2 + a_,^2 &= 2(b^2 + c^2), \quad \text{und ebenso} \\ b^2 + b_,^2 &= 2(c^2 + a^2) \\ c^2 + c_,^2 &= 2(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$\text{also}\quad a_,^2 + b_,^2 + c_,^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

3) Ferner haben die Dreiecke OHJ, AGH gleichen Inhalt, da sie 2 gleiche Seiten und Supplementwinkel haben. Aus demselben Grunde ist $\triangle$ PHJ = BDJ. Da nun (nach Nr. 1) $\triangle$ AGH = $\triangle$ BDJ, so ist $\triangle$ OHJ = PHJ und da sie dieselbe Grundlinie haben, so ist OP parallel HJ, also OPHJ ein Paralleltrapez; dasselbe gilt von MNGF und KLED.

4) Verlängere ferner FG nach beiden Seiten, so dass GQ = FR = RS = FG = b werde, so haben die beiden Dreiecke NGQ und HGA zwei gleiche Seiten $a_,$, b und ihr eingeschlossener Winkel ist das Complement von HGQ, also ist $\angle$ NQG = GAH = 180° — A und NQ = HA = c; ebenso ist $\angle$ MRF = 180° — C = FCE, also sind die Dreiecke MRF und FCE congruent und folglich MR = CE = a. Demnach hat das Dreieck MRS die 3 Stücke a, b, C und folglich ist $\angle$ MSR = A und MS = AB = NQ = c. Da auch NQG = 180° — A war, so ist MNQS ein Parallelogramm, dessen Höhe gleich dem von B auf AC gefallenen Perpendikel ist, und MN = QS = 4 b. Demnach ist, wenn die zweiten Verbindungslinien durch $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$ bezeichnet werden,

$$\begin{aligned} a_{,,} &= 4a \\ b_{,,} &= 4b \\ c_{,,} &= 4c \end{aligned}$$

und der Inhalt des Paralleltrapezes

$$MNGF = NGF + FNM = J + 4\,J, \text{ also}$$

$$FNGM = DEKL = HJOP = 5\,J$$

und demnach der Inhalt des zweiten Sechsecks

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 4\,J + a_,^2 + b_,^2 + c_,^2 + 15\,J$$
$$= 4\,(a^2 + b^2 + c^2) + 19\,J.$$

5) Für das dritte Sechseck ist (Nr. 4) $a_{,,}^2 + b_{,,}^2 + c_{,,}^2 = 16\,(a^2 + b^2 + c^2)$. Die zwischen den Quadraten liegenden Vierecke werden wieder Paralleltrapeze, da die drei Quadrate über den Seiten des zweiten Sechsecks gerade eben so gebildet sind, wie die vorhergehenden über den Seiten des ersten und die Seiten beider Sechsecke parallel sind.

Verlängert man nun z. B. TK und PY bis sie sich in Z schneiden (Fig. I und II), so ist, weil $\angle KTY = 180^0 - TKP = DKL = 180^0 - KDE = BDY$, und eben so $TYP = DJB$ ist, $\triangle KPZ \cong DJB$, also $KZ = a$ der Inhalt des $\triangle KPZ = \triangle BJD = \triangle ABC = J$ und $TZ = a + a_{,,} = 5\,a$, folglich $TY = 5\,KP$, und demnach, wenn die dritten Verbindungslinien durch $a_{,,,}$, $b_{,,,}$, $c_{,,,}$ bezeichnet werden,

$$a_{,,,} = 5\,a$$
$$b_{,,,} = 5\,b$$
$$c_{,,,} = 5\,c$$

und Trapez $KY = \triangle TYZ - \triangle KPZ = (5^2 - 1)\,J$, also jedes der drei Trapeze $= 24\,J$

und der Inhalt des dritten Sechsecks

$$= 4\,(a^2 + b^2 + c^2) + 19\,J + 16\,(a^2 + b^2 + c^2) + 72\,J$$
$$= 20\,(a^2 + b^2 + c^2) + 91\,J.$$

6) Von jetzt an schreitet die Berechnung der entstehenden Figuren gleichmässig fort. Es ergiebt sich z. B. aus Fig. III sehr leicht, dass

$$a_{IV} - a_{,,} = 5\,(a_{,,} - a), \text{ also } a_{IV} = 19\,a = 5a_{,,} - a$$
$$\text{und eben so } b_{IV} = 5\,b_{,,} - b,\ c_{IV} = 5\,c_{,,} - c.$$

Aus Figur II folgt, dass

$$c_V - c_{,,,} = \frac{a_{IV}}{a_{,,}}\left(c_{,,,} - c_,\right) = 19\,c_,, \text{ also}$$
$$c_V = 19\,c_, + c_{,,,} = 24\,c_, = 5\,c_{,,,} - c_,.$$

Ferner aus Figur III:

$$a_{VI} - a_{IV} = \frac{a_V}{a_{,,,}}\left(a_{IV} - a_{,,}\right)$$
$$\text{also } a_{VI} = 91\,a = 5\,a_{IV} - a_{,,}$$

und aus Fig. IV:

$$a_{VII} - a_V = \frac{a_{VI}}{a_{IV}} \left(a_V - a_{,,,} \right)$$

$$\text{also } a_{VII} = 115\, a_, = 5\, a_V - a_{,,,}.$$

Hieraus folgt, dass allgemein

$$a_{n+1} - a_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-2}} \left(a_{n-1} - a_{n-3} \right)$$

sei, und aus den berechneten speciellen Fällen lässt sich bereits vermuthen, dass diese Relation sich auf die einfachere Form

$$a_{n+1} = 5\, a_{n-1} - a_{n-3}$$

bringen lassen werde. Die Richtigkeit dieser Vermuthung lässt sich so beweisen: Man nehme an, das Gesetz habe sich bereits bis a_n bestätigt, so dass

$$a_{n-1} = 5\, a_{n-3} - a_{n-5}$$

$$a_n = 5\, a_{n-2} - a_{n-4}$$

sei, und es soll nun noch bewiesen werden, dass dasselbe Gesetz auch für a_{n+1} geltend bleibe.

Da nun

$$a_{n+1} - a_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-2}} \left(a_{n-1} - a_{n-3} \right)$$

$$= \left\{ 5 - \frac{a_{n-4}}{a_{n-2}} \right\} \left\{ a_{n-1} - a_{n-3} \right\}$$

so ist

$$a_{n+1} = 5\, a_{n-1} + a_{n-1} - 5\, a_{n-3} - \frac{a_{n-4}}{a_{n-2}} \left\{ a_{n-1} - a_{n-3} \right\}$$

Setzt man nun für $a_{n-1} - 5\, a_{n-3}$ seinen Werth $= - a_{n-5}$ und bemerkt, dass die Relation, von der man ausging

$$a_{n-1} - a_{n-3} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-4}} \left\{ a_{n-3} - a_{n-5} \right\}$$

ergiebt, also

$$\frac{a_{n-4}}{a_{n-2}} \left\{ a_{n-1} - a_{n-3} \right\} = a_{n-3} - a_{n-5}$$

ist, so hat man

$$a_{n+1} = 5\, a_{n-1} - a_{n-3}, \text{ w. z. b. w.}$$

Hiernach bilden die Zahlen 1, 5, 24, 115... nämlich die Coefficienten der Glieder der Reihe a,, a,,,, = 5 a,, $a_V = 24$ a, etc. eine recurrirende Reihe mit der Relationsscala 5, — 1, so dass sie aus dem erzeugenden Bruche

$$\frac{1}{1-5x+x^2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}-x\right)\sqrt{21}} - \frac{1}{\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}-x\right)\sqrt{21}}$$

$$= 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots + \alpha_n x^n \text{ etc.}$$

entstehen, in welcher Reihe folglich

$$\alpha_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{21}}\left\{(5+\sqrt{21})^{n+1} - (5-\sqrt{21})^{n+1}\right\}$$

ist.

Ferner sind die Zahlen 1, 4, 19, 91 u. s. f, nämlich die Coefficienten der Reihe a, a,, = 4a, $a_{IV} = 19$ a etc. die Unterschiede je zwei auf einander folgender Glieder der obigen Reihe, sie bilden also gleichfalls eine recurrirende Reihe mit derselben Relationsscala, die aus dem erzeugenden Bruche $\frac{1-x}{1-5x+x^2}$ entsteht. Da dieser aber in die beiden Brüche $\frac{1}{1-5x+x^2} - \frac{x}{1-5x+x^2}$ zerfällt, so ist das $(n+1)^{te}$ Glied der letzten Reihe

$$= \beta_n = \alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{21}}\left\{(\sqrt{21}+3)\,p^n + (\sqrt{21}-3)\,q^n\right\}$$

wenn man, Kürze halber,

$$5+\sqrt{21} = p,$$
$$5-\sqrt{21} = q$$

setzt.

Da nun

$$\frac{a_{2n+1}}{a,} = \frac{b_{2n+1}}{b,} = \frac{c_{2n+1}}{c,} = \alpha_n$$

und

$$a,^2 + b,^2 + c,^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$$

so ist

$$(a_{2n+1})^2 + (b_{2n+1})^2 + (c_{2n+1})^2 =$$
$$\frac{1}{7}\left\{\frac{p^{2n+2}+q^{2n+2}}{2^{2n+2}} - 2\right\}(a^2+b^2+c^2)$$

Da ferner

$$\frac{a_{2n}}{a} = \frac{b_{2n}}{b} = \frac{c_{2n}}{c} = \beta_n$$

so ist

$$(a_{2n})^2 + (b_{2n})^2 + (c_{2n})^2 =$$

$$\frac{1}{7}\left\{\frac{p^{2n+1} + q^{2n+1}}{2^{2n+1}} + 2\right\}(a^2 + b^2 + c^2)$$

und folglich allgemein für jedes gerade und ungerade

$$(a_n)^2 + (b_n)^2 + (c_n)^2 =$$

$$\frac{1}{7}\left\{\frac{p^{n+1} + q^{n+1}}{2^{n+1}} + 2\,(-1)^n\right\}(a^2 + b^2 + c^2)$$

wodurch die Inhalte der Quadrate vollständig bestimmt sind.

7) Was ferner den Inhalt der Trapeze betrifft, so lässt derselbe sich auf folgende Weise bestimmen. Fällt man von J, F, A resp. die Perpendikel auf DB, EC, BC, so sind die △△ BJd und BAf so wie CFe und CAf congruent, also Jd = Af = Fe. Da ferner △ DJd ≌ DKf und △ EFe ≌ LEk, so ist Dg = Jd = Fe = Ek = Af = der Höhe h des Dreiecks ABC. Bezeichnet man also den Inhalt des Trapezes, dessen grösste Seite $a_{,,}$ ist, durch $E_{,,}$, so ist

$$E_{,,} = \left(\frac{a + a_{,,}}{2}\right) h = \frac{5}{2}\, ah = 5\ J$$

wie auch bereits aus Nr. 4 auf anderem Wege gefunden ist. Eben so ist (Fig. II)

$$E_{IV} = TU\pi\varrho = \left(\frac{a_{,,} + a_{IV}}{2}\right) Tl = \left(\frac{a_{,,} + a_{IV}}{2}\right)\frac{b_{,,,}}{b_{,}}\, h$$

$$= \frac{115}{2}\, ah = 115\ J,$$

und im Allgemeinen

$$E_{2n} = \left(\frac{a_{2n-2} + a_{2n}}{2}\right)\frac{b_{2n-1}}{b_{,}}\, h =$$

$$\left(\frac{\beta_{n-1} + \beta_n}{2}\right) a\, \alpha_{n-1}\, h$$

Nun war aber

$$\beta_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$$

$$\beta_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}, \text{ folglich}$$

$$\beta_n + \beta_{n-1} = \alpha_n - \alpha_{n-2} =$$

$$\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{21}}(p^{n+1} - q^{n+1}) - \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{21}}(p^{n-1} - q^{n-1})$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{21}}\left\{p^{n-1}(42 + 10\sqrt{21}) - q^{n-1}(42 - 10\sqrt{21})\right\}$$

$$= \frac{2\sqrt{21}}{2^{n+1}\sqrt{21}}\left\{p^{n-1}(\sqrt{21} + 5) - p^{n-1}(\sqrt{21} - 5)\right\}$$

$$= \frac{1}{2^n}(p^n + q^n)$$

Dies mit

$$\alpha_{n-1} = \frac{1}{2^n\sqrt{21}}(p^n - q^n)$$

multiplicirt, giebt

$$E_{2n} = \frac{1}{2^{2n}\sqrt{21}}(p^{2n} - q^{2n})\frac{ah}{2} = \alpha_{2n-1}\,J$$

In gleicher Weise ergiebt sich der Inhalt des Trapezes, dessen grösste Seite c_{2n+1} ist $=$

$$\left(\frac{c_{2n-1} + c_{2n+1}}{2}\right)\frac{b_{2n}}{b}\,k$$

wenn k die Grösse des von C auf EF gefällten Perpendikels ist. Also ist

$$E_{2n+1} = \left(\frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{2}\right)\beta_n\,c,k =$$

$$\left(\frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{2}\right)(\alpha_n - \alpha_{n-1})\,c,k$$

$$= (\alpha^2_n - \alpha^2_{n-1})\,J$$

$$= \left\{\frac{p^{2n+2} - (pq)^{n+1} + q^{2n+2}}{21.\ 2^{2n+2}} - \frac{(p^{2n} - 2(pq)^2 + q^{2n}}{21.\ 2^{2n}}\right\}J$$

$$= \left\{\frac{p^{2n+2} + q^{2n+2}}{21.\ 2^{2n+2}} - \left(\frac{p^{2n} + q^{2n})}{21.\ 2^{2n}}\right\}J = \left(\frac{p^{2n+1} - q^{2n+1}}{2^{2n+1}\sqrt{21}}\right)J$$

$$= \alpha_{2n}\,J$$

und demnach, mag n gerade oder ungerade sein.

$$E_{(n)} = \alpha_n\,J$$

also werden die Inhalte der Trapeze durch die Coefficienten derselben Reihe

$$\frac{1}{1-5x+x^2} = 1 + \alpha_, x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \text{etc.}$$

bestimmt, durch welche die Längen ihrer grössten Seiten bestimmt werden. (Nr. 6.)

8) Um nun den Inhalt der aufeinander folgenden Sechsecke zu finden, bemerke man, dass zum gegebenen Dreieck, dessen Inhalt $= J$ ist

für das 1te Sechseck hinzukommen $a^2 + b^2 + c^2 + 3J$

" " 2te " " $a_,^2 + b_,^2 + c_,^2 + 3E_{,,}$

" " 3te " " $a_{,,}^2 + b_{,,}^2 + c_{,,}^2 + 3E_{,,,}$

" " nte " " $(a_{n-1})^2 + (b_{n-1}) + (c_{n-1}) + 3E_{(n)}$

Nach Nr. 6 und 7 ist aber

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3J = \left(\frac{p+q}{2} + 2\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{7}\right) + 3J$$

$$a_,^2 + b_,^2 + c_,^2 + 3E_{,,}$$

$$\left(\frac{p^2+q^2}{2} + 2\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{7}\right) + 3\alpha_, J$$

$$\alpha_{,,}^2 + b_{,,}^2 + c_{,,}^2 + 3E_{,,,}$$

$$= \left(\frac{p^3+q^3}{2} + 2\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{7}\right) + 3\alpha_2 J$$

$$(a_{n-1})^2 + (b_{n-1})^2 + (c_{n-1})^2 + 3E_n$$

$$= \left(\frac{p^n+q^n}{2} + 2(-1)^{n-1}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{7}\right) + 3\alpha_{n-1} J$$

folglich ergiebt sich der Inhalt des nten Sechsecks

$$= M\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{7}\right) + NJ$$

wobei

$$M = \frac{p+q}{2} + \frac{p^2+q^2}{2^2} + \frac{p^3+q^3}{3^3} + \frac{p^n+q^n}{2^n}$$

$$+ 2\left[(-1)^0 + (-1) + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\right]$$

$$\text{und } N = 1 + 3(1 + \alpha_, + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1})$$

Nun ist aber bei der Umformung von E_{2n} in Nr. 7 nachgewiesen, dass

$$\frac{p^n + q^n}{2^n} = \alpha_n - \alpha_{n-2}, \text{ folglich ist}$$

$$\frac{p^{n-1} + q^{n-1}}{2^{n-1}} = \alpha_{n-1} - \alpha_{n-3}$$

$$\frac{p^{n-2} + q^{n-2}}{2^{n-2}} = \alpha_{n-1} - \alpha_{n-4}$$

$$\frac{p^3 + q^3}{2^3} = \alpha_3 - \alpha_1$$

$$\frac{p^2 + q^2}{2^2} = \alpha_2 - 1$$

$$\frac{p + q}{2} = \alpha_1$$

folglich ist

$$\frac{p + q}{2} + \frac{p^2 + q^2}{2^2} + \frac{p^3 + q^3}{2^3} \ldots + \frac{p^n + q^n}{2^n} = \alpha_n + \alpha_{n-1} - 1$$

und da

$$(-1)^0 + (-1)^1 + \ldots + (-1)^{n-1} = \frac{1 - (-1)^n}{2}, \text{ so ist}$$

$$M = \alpha_n + \alpha_{n-1} + (-1)^{n-1}$$

Ferner ergiebt sich aus der Gleichung

$$a_{2n+1} = 5 a_{2n-1} - a_{2n-3}$$

wenn in dieselbe $a_{2n+1} = \alpha_n a$, gesetzt wird.

$$\alpha_n = 5 \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}$$

übereinstimmend mit dem aus der gefundenen Reihenentwicklung sich ergebenden Gesetze. Dieser Gleichung lässt sich die Form

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} - (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) = 3 \alpha_{n-1}$$

geben. Da aber

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = \beta_n \text{ ist, so hat man}$$

$$\beta_n - \beta_{n-1} = 3 \alpha_{n-1}, \text{ also auch}$$

$$\beta_{n-1} - \beta_{n-2} = 3 \alpha_{n-2}$$

$$\beta_{n-2} - \beta_{n-3} = 3 \alpha_{n-3}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 3\alpha_1$$

$$\beta_1 - 1 = 3, \text{ folglich}$$

$$\beta_n = 1 + 3\,(1 + \alpha_1 + \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}) = N$$

und demnach ist der Inhalt des n^{ten} Sechsecks

$$= \left(\frac{\alpha_n + \alpha_{n-1} + (-1)^{n-1}}{7}\right)(a^2 + b^2 + c^2) + \beta_n\,J.$$

Da aber $\dfrac{1}{1 - 5x + x^2} = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$

$$\frac{x}{1 - 5x + x^2} = x + \alpha_1 x^2 + \alpha_{n-1} x^n + \ldots$$

$$-\frac{1}{1+x} = -1 + x - x^2 + (-1)^{n-1} x^n + \ldots \text{ so ist}$$

$\alpha_n + \alpha_{n-1} + (-1)^{n-1}$ der Coefficient von x^n in dem Ausdruck

$$\frac{1}{7}\left(\frac{1+x}{1 - 5x + x^2} - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{x}{1 - 4x - 4x^2 + x^3}$$

$$= \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \ldots + \gamma_n x^n +$$

und demnach der Inhalt des n^{ten} Sechsecks

$$= \gamma_n\,(a^2 + b^2 + c^2) + \beta_n\,J,$$

wobei die Coefficienten γ durch die dreigliedrige Relationsscala $4, 4, -1$ auseinander hergeleitet werden können. In der That ist, da sich übereinstimmend aus Nr. 1, 2, und 3 aus dem gegenwärtigen Herleitung $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 4$, $\gamma_3 = 20$ ergiebt

$$\begin{aligned} 4 &= 4.1 + 4.0 - 1.0 \\ 20 &= 4.4 + 4.1 - 1.0 \\ 95 &= 4.20 + 4.4 - 1.1 \\ 456 &= 4.95 + 4.20 - 1.4. \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Ich bemerke noch, dass die Coefficenten γ abwechselnd, je nachdem sie geradstellig oder ungeradstellig sind, aus den Coefficienten α oder β gebildet werden. Denn da

$$\gamma_n = {}^1\!/_7\,(\alpha_n + \alpha_{n-1} + (-1)^{n-1})$$

$$\gamma_{n-1} = {}^1\!/_7\,(\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} - (-1)^{n-1})$$

$$\text{so ist } \gamma_n - \gamma_{n-1} = {}^1\!/_7\,(\alpha_n - \alpha_{n-2} + 2\,(-1)^{n-1})$$

$$= {}^1\!/_7\left(\frac{p^n + q^n}{2^n} - 2\,(-1)^n\right)$$

folglich $\gamma_{2n} - \gamma_{2n-1} = {}^1\!/_7 \left(\frac{p^{2n} + q^{2n}}{2^{2n}} - 2\right) = 3\,(\alpha_{n-1})^2$
und

$$\gamma_{2n+1} - \gamma_{2n} = {}^1\!/_7 \left(\frac{p^{2n} + q^{2n}}{2^{2n+1}} + 2\right) = (\beta_n)^2$$

also

$$\gamma_{2n} = \gamma_{2n-1} + 3\,(\alpha_{n-1})^2$$

$$\gamma_{2n+1} = \gamma_{2n} + (\beta_n)^2$$

z. B.

$$\begin{array}{rrr} 1 = & & 1^2 \\ 4 = & 1 + 3 & 1^2 \\ 20 = & 4 + & 4^2 \\ 95 = & 20 + 3 & 5^2 \\ 456 = & 95 + & 19^2 \\ 728 = & 456 + 3. & 24^2 \end{array}$$

wo die Zahlen 1, 1; 4, 5; 19, 24 etc. abwechselnd aus den Zahlenreihen der

$$\alpha = 1,\ 4,\ 19 \text{ etc.}$$

und der $\beta = 1,\ 5,\ 24$ etc.

genommen sind.

9) Ist das gegebene Dreieck bei A rechtwinklig, also

$$b^2 + c^2 = a^2$$

so hat man, da nach Nr. 6, $b_{2n} = \beta_n\, b$, $c_{2n} = \beta_n\, c$, $a_{2n} = \beta_n a$ ist

$$(b_{2n})^2 + (c_{2n})^2 = (\beta_n)^2\,(b^2 + c^2) = (a_{2n})^2$$

so dass nicht bloss

$$b^2 + c^2 = a^2$$

sondern auch

$$(b_{,,})^2 + (c_{,,})^2 = (a_{,,})^2,$$

$$(b_{IV})^2 + (c_{IV})^2 = (a_{IV})^2 \text{ etc.}$$

d. h. der Pythagorische Lehrsatz gilt nicht bloss für die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, sondern für alle geradstelligen Verbindungslinien. Das ursprüngliche Dreieck ist in diesem Falle als Sechseck mit 3 verschwindenden Seiten zu betrachten.

Ferner ist

$$b_{2n-1} = \alpha_n\, b_,,\quad c_{2n+1} = \alpha_n\, c_,,\quad a_{2n+1} = \alpha_n\, a_,$$

Da aber in diesem Falle $\triangle$ GAH $\cong$ $\triangle$ ABC, also $a_, = a$ wird, so hat man (Nr. 2)

$$b_,^2 + c_,^2 = 5\,(b^2 + c^2) = 5\,a_,^2$$

also auch

$$(b_{2n+1})^2 + (c_{2n+1})^2 = 5\,(\alpha_n)^2\,a'^2 = 5\,(a_{2n+1})^2$$

Beide Resultate lassen sich durch die Gleichung

$$(b_n)^2 + (c_n)^2 = \left(3 + 2\,(-1)^{n-1}\right)(a_n)^2$$

darstellen. — Der Inhalt des n^{ten} Sechsecks ist in diesem Falle

$$= 2\,\gamma_n\,a^2 + \beta_n\,J.$$

10) Zuletzt bemerke ich noch, dass, wenn man sich ein ringsumher aufgetrepptes Postament errichtet denkt, dessen Stufen durch sechsseitige Prismen gebildet werden, in denen das n^{te}, $(n-1)^{te}$ . . . erste Sechseck resp. die unterste, die nächstfolgende, . . . die oberste Grundfläche ist, auch der Gesammtinhalt dieses Postaments, wie leicht zu übersehen, durch die Coefficienten α bestimmt wird.

Taf. II.

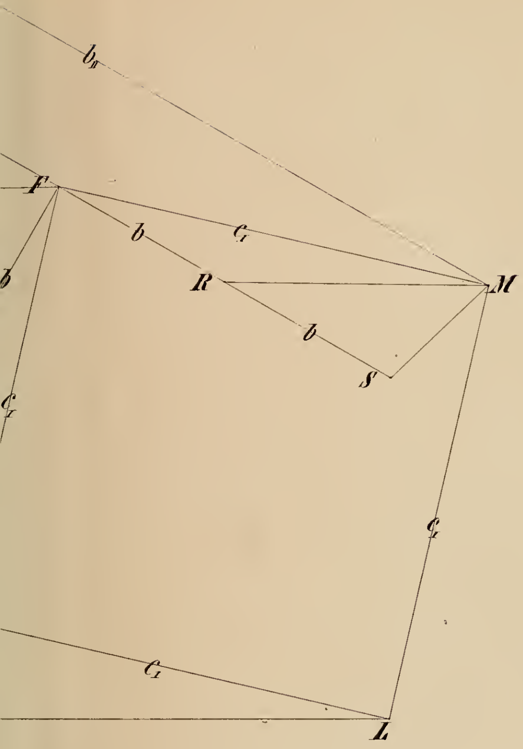
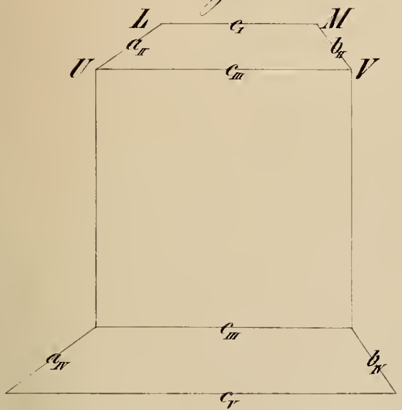
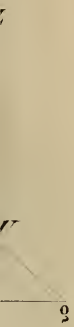


Fig. 4.





Taf. II.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Bremen

Jahr/Year: 1867-1868

Band/Volume: 1

Autor(en)/Author(s): Scherk Heinrich Ferdinand

Artikel/Article: Geometrische Darstellung recurrirender Reihen mit zwei- und dreigliedriger Relationsscala. 225-236