Ueber die Entwicklung der Doppelsternsysteme.

Von

Dr. Fr. Nölke.

Schon vor längerer Zeit hat Th. J. J. See[1]) und kürzlich wieder H. N. Russell[2]) die Annahme zu begründen versucht, dass die Doppelsterne, die visuellen sowohl wie die spektroskopischen, durch Zerfallen eines im hydrodynamischen Gleichgewicht befindlichen, rotierenden Nebels entstanden seien, der bei seiner fortschreitenden Kontraktion die Reihe der möglichen stabilen Gleichgewichtsfiguren bis zu der Poincaré'schen Birnenform durchlaufen habe. Es soll unsere Aufgabe sein, diese Annahme einer Prüfung zu unterziehen.

Aus den schwierigen Untersuchungen Poincarés[3]) und Darwins[4]) über die Gleichgewichtsfiguren rotierender, homogener Flüssigkeitsmassen ergibt sich bekanntlich folgendes: „Bedeutet ω die Winkel-„geschwindigkeit der rotierenden Flüssigkeit, δ ihre Dichte, so ist „die Gleichgewichtsfigur ein stabiles, abgeplattetes Rotationsellipsoid, „falls die Bedingung

$$\frac{\omega^2}{2\pi\delta} \leq 0,1871$$

„besteht. Berechnet sich, unter der Annahme eines Rotations-„ellipsoids als der Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit, für $\frac{\omega^2}{2\pi\delta}$ ein „grösserer Wert als 0,1871, so ist es nicht mehr stabil. Die Flüssig-„keit nimmt dann die Form eines dreiachsigen Jacobi'schen Ellip-„soids an, das sich mehr und mehr in die Länge streckt, bis es für

$$\frac{\omega^2}{2\pi\delta} = 0,1420$$

„die Grenze seiner Stabilität erreicht hat. Jacobi'sche Ellipsoide, „für die sich

$$\frac{\omega^2}{2\pi\delta} < 0,1420$$

„berechnet, sind nicht mehr stabil. In diesem Falle nimmt die

---

[1]) „Die Entwicklung der Doppelsternsysteme". Inauguraldissertation Berlin, 1892.

[2]) Astrophys. Journal, April 1910.

[3]) „Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", Acta mathematica, Bd. 7.

[4]) „On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid", Transactions of the Roy. Soc., Ser. A, 1902.

„Flüssigkeit die Form einer Birne an, und es besteht die Wahr-„scheinlichkeit, dass der dünnere Teil der Birne sich von dem „dickeren trennt, wenn sie sich bis zu den Grenzen ihrer Stabilität entwickelt hat.“ — Auf die, allerdings nicht homogenen, Nebel übertragen, führen diese theoretischen Ergebnisse zu der von See aufgestellten Theorie der Entstehung der Doppelsternsysteme.

§ 1.

Die Entwicklung des Jacobi'schen Ellipsoids bis zur Birnenform.

Wir wollen den vermuteten Entwicklungsgang des Nebels an der Hand der von Darwin bestimmten Werte der Grössenverhältnisse der Rotationsfiguren (l. c.) genauer verfolgen.

Sind bei der Zusammenziehung des Nebels keine störenden tangentialen, sondern nur zentrale Kräfte wirksam, so ist für die rotierende Masse der Flächensatz gültig, d. h. ihr Bewegungsmoment bleibt unverändert. Bedeuten J_0 und J die Trägheitsmomente, ω_0 und ω die Winkelgeschwindigkeiten zur Zeit t_0 und t, so besteht also die Gleichung

$$J_0 \, \omega_0 = J \, \omega.$$

Es sei M die Masse, 2c die Rotationsachse und 2a und 2b seien die beiden anderen Achsen des Ellipsoids; dann ist für ein Rotationsellipsoid

$$J = \frac{2}{5} M a^2,$$

für ein dreiachsiges Ellipsoid

$$J = \frac{1}{5} (a^2 + b^2) M.$$

Für das kritische Rotationsellipsoid $\left(\frac{\omega_0^2}{2 \pi \delta_0} = 0{,}1871\right)$ hat nach Darwin das Achsenverhältnis $\frac{c_0}{a_0}$ den Wert

$$\varepsilon_0 = \frac{0{,}6977}{1{,}1972} = 0{,}5828;$$

Für das kritische Jacobi'sche Ellipsoid $\left(\frac{\omega^2}{2 \pi \delta} = 0{,}1420\right)$ ist

$$\frac{b}{a} = \varepsilon = \frac{0{,}81498}{1{,}88583} = 0{,}4322; \quad \frac{c}{a} = \varepsilon' = \frac{0{,}65066}{1{,}88583} = 0{,}3450.$$

Die Aenderungen, denen der Nebel zu der Zeit, wo er als dreiachsiges Ellipsoid rotiert, unterliegt, ergeben sich also aus der Gleichung

$$\frac{1}{5} (a^2 + b^2) M \omega = \frac{2}{5} M a_0^2 \omega_0.$$

Bedenkt man, dass $a\,b\,c\,\delta = a_0^2\,c_0\,\delta_0$ oder

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = \frac{\delta_0}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon\,\varepsilon'}$$

ist, so erhält man hieraus

$$\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{1+\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon\,\varepsilon'}\right)^{2/3} \left(\frac{0{,}1420}{0{,}1871}\right)^{1/2},$$

oder durch Einsetzen der für ε_0, ε, ε' angegebenen Zahlenwerte

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 4{,}4535.$$

Ferner ist

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1{,}8384, \text{ und } \frac{a}{a_0} = 0{,}9575.$$

Während der Zeit, wo der Nebel als dreiachsiges Ellipsoid existiert, steigt hiernach die Dichte ungefähr auf den $4^1/_2$fachen, die Winkelgeschwindigkeit nicht ganz auf den doppelten Betrag; die grosse Achse verkleinert sich nur unbedeutend.

§ 2.

Der Flächensatz.

Da es bis jetzt noch unbekannt ist, wann die Birnenform die Grenze ihrer Stabilität erreicht hat, so lassen sich keine bestimmten Angaben über den Wert der Dichte machen, bei der sie in zwei Teile zerfällt. Trotzdem kann man aus einer Tabelle, bei deren Berechnung dem fraglichen Dichteverhältnisse verschiedene Werte beigelegt werden, sehr gut erkennen, wie sich die weitere Entwicklung gestaltet.

Die durch Zerfallen der Birne entstehenden Teilmassen betrachten wir näherungsweise als Rotationsellipsoide, sehen also von den gegenseitigen Gezeitenwirkungen vorläufig ab. Die grössere Masse sei m_1, die kleinere m_2, ihre halben Achsen seien a_1, c_1, a_2, c_2, die Entfernung ihrer Mittelpunkte sei r, ihre Entfernung von dem gemeinsamen Schwerpunkte e_1 und e_2. Dann ist

$$M = m_1 + m_2;\; r = e_1 + e_2;\; m_1\,e_1 = m_2\,e_2.$$

Solange beide Körper noch als eine Masse rotieren, sind Umlaufs- und Rotationswinkelgeschwindigkeit identisch; unter der Voraussetzung, dass die Trennung nicht ein mit gewaltsamen, plötzlichen Aenderungen verbundener, sondern ein s t e t i g e r Vorgang sei (siehe hierüber S. 210), werden daher auch unmittelbar nach der Trennung Umlaufs- und Rotationswinkelgeschwindigkeit sehr nahe d e n s e l b e n Wert ω besitzen. Dann ist die Umlaufsbewegungsgrösse gleich

$$(m_1\,e_1^2 + m_2\,e_2^2)\,\omega = \frac{m_1\,m_2}{M}\,r^2\,\omega.$$

Die Rotationsmomente haben den Wert

$$\frac{2}{5} m_1 a_1^2 \omega \text{ und } \frac{2}{5} m_2 a_2^2 \omega;$$

folglich ist die ganze Bewegungsgrösse des Systems

$$\left(\frac{2}{5} m_1 a_1^2 + \frac{2}{5} m_2 a_2^2 + \frac{m_1 m_2}{M} r^2\right) \omega.$$

Bezeichnen wir nunmehr die auf das kritische Jacobi'sche Ellipsoid sich beziehenden Grössen mit dem Index 0, und schreiben

$$\frac{m_1}{M} = \mu_1; \quad \frac{m_2}{M} = \mu_2,$$

so besteht also nach dem Flächensatze die Gleichung

$$\frac{2}{5}\left(\mu_1 a_1^2 + \mu_2 a_2^2\right) + \mu_1 \mu_2 r^2 = \frac{a_0^2}{5}(1 + \varepsilon_0^2) \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Da beide Rotationsellipsoide dieselbe Winkelgeschwindigkeit und Dichte haben, so ist ihr Achsenverhältnis ε dasselbe. Setzt man

$$m_1 = \frac{4\pi}{3} a_1^2 c_1 \delta = \frac{4\pi}{3} a_1^3 \varepsilon \delta,$$

$$m_2 = \frac{4\pi}{3} a_2^2 c_2 \delta = \frac{4\pi}{3} a_2^3 \varepsilon \delta,$$

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \delta,$$

so erhält man

$$\frac{a_1}{R} = \left(\frac{\mu_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}}; \quad \frac{a_2}{R} = \left(\frac{\mu_2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}},$$

und die letzte Gleichung geht über in

$$\mu_1^{\frac{5}{3}} + \mu_2^{\frac{5}{3}} + \frac{5}{2} \varepsilon^{\frac{2}{3}} \mu_1 \mu_2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{(1 + \varepsilon_0^2)\, \varepsilon^{\frac{2}{3}}}{2} \left(\frac{a_0}{R}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

Setzt man voraus, dass m_1 und m_2 um ihren Schwerpunkt eine kreisförmige Bahn beschreiben [vergl. § 4], so ist

$$\omega^2 r^3 = k M,$$

wo k eine von der Form und der Entfernung der Massen m_1 und m_2 abhängende Zahl ist, die den Wert 1 annimmt, wenn die Massen Kugeln sind. Schreibt man

$$\omega^2 = 2 \pi \delta \nu, \quad M = \frac{4\pi}{3} R^3 \delta,$$

so folgt hieraus

$$\frac{r}{R} = \left(\frac{2k}{3\nu}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ferner folgt aus der Gleichung

$$M = \frac{4\pi}{3} a_0 b_0 c_0 \delta_0 = \frac{4\pi}{3} a_0^3 \varepsilon_0 \varepsilon_0' \delta_0 = \frac{4\pi}{3} R^3 \delta$$

$$\frac{a_0}{R} = \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_0'} \frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte geht die Gleichung des Flächensatzes über in

$$\mu_1^{\frac{5}{3}} + \mu_2^{\frac{5}{3}} + \frac{5}{2}\left(\frac{2\varepsilon k}{3\nu}\right)^{\frac{2}{3}} \mu_1 \mu_2 = \frac{1+\varepsilon_0^2}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 \varepsilon_0'}\right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{0,142}{\nu}} \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

In dieser Gleichung ist ε eine Funktion von ν. Schreibt man

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1},$$

so ist bekanntlich

$$\nu = \frac{(3+\lambda^2) \operatorname{arc tg} \lambda - 3\lambda}{\lambda^3}.$$

Für $\lambda = 1$ wird $\nu = \pi - 3 = 0,14159$. Fast für denselben Wert, nämlich für $\nu = 0,1420$, hat nach Darwin das Jacobi'sche Ellipsoid seine Stabilitätsgrenze erreicht. Für die Birnenfigur ist also $\nu < 0,142$, oder $\lambda < 1$, $\varepsilon > \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Da noch nicht bekannt ist, für welches ν die Birnenform ihre Stabilität verliert, so haben wir die Rechnung für verschiedene $\nu < 0,142$ durchgeführt und in der Tabelle I zusammengestellt. Für $\nu < 0,06$ lässt sich mit Vorteil die Gleichung

$$\lambda^2 = v + \frac{6}{7} v^2 + \frac{37}{49} v^3 + \frac{7850}{11319} v^4 + \frac{679266}{1030029} v^5 + \ldots\ldots$$

$$v = \frac{15}{4} \nu,$$

verwenden, die sich aus der für ν angegebenen Gleichung durch Umkehrung der Reihenentwicklung ergibt.

Da die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Körper nicht bekannt ist, so lässt sich der Wert von k nicht angeben. Er wurde daher vorläufig gleich 1 gesetzt. Dann lautet, wenn man für ε_0, ε_0' ihre Zahlenwerte einsetzt, die der Rechnung zu Grunde liegende Gleichung

$$\mu_1^{\frac{5}{3}} + \mu_2^{\frac{5}{3}} + 1,9079\, \mu_1 \mu_2 \left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,79517 \frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{\nu^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Wir schreiben sie in folgender Form

$$\mu_1^{\frac{5}{3}} + \mu_2^{\frac{5}{3}} + A\, \mu_1 \mu_2 = B.$$

Wählt man für $\frac{\delta}{\delta_0}$ nacheinander die Werte 1, 2, 3, 4 . ., so nehmen A und B die in der Tabelle angegebenen Werte an, und durch ein approximatives Verfahren erhält man dann aus der letzten Gleichung die ebenfalls in der Tabelle enthaltenen Werte von μ_1 und μ_2. Die Werte von $\frac{\delta}{\delta_0}$ für den Fall $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$ findet man mit Hülfe der Gleichung

$$\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\nu^{\frac{1}{6}}}\left[0{,}7975\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}} + 0{,}6\,k^{\frac{2}{3}}\right].$$

Da

$$\frac{a_1}{R} = \left(\frac{\mu_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{r}{R} = \left(\frac{2\,k}{3\,\nu}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ist, so folgt

$$\frac{a_1}{r} = \left(\mu_1 \frac{3\,\nu}{2\,\varepsilon\,k}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{a_2}{r} = \left(\mu_2 \frac{3\,\nu}{2\,\varepsilon\,k}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Diese Werte stehen in den beiden folgenden Spalten der Tabelle.

Tabelle I.

ν	ε	$\frac{\delta}{\delta_0}$	A	B	μ_1	μ_2	$\frac{a_1}{r}$	$\frac{a_2}{r}$	k
0,14	0,712	1	5,640	1,694	0,79	0,21	0,62	0,40	1,049
		2		1,901	0,68	0,32	0,59	0,46	1,044
		3		2,034	0,54	0,46	0,54	0,51	1,042
		3,06			0,50	0,50	0,53	0,53	1,041
0,13	0,735	1	6,055	1,796	0,77	0,23	0,59	0,39	1,042
		2		2,016	0,66	0,34	0,56	0,45	1,038
		2,89			0,50	0,50	0,51	0,51	1,036
0,12	0,758	1	6,520	1,908	0,76	0,24	0,57	0,39	1,036
		2		2,142	0,65	0,35	0,54	0,44	1,032
		2,76			0,50	0,50	0,49	0,49	1,031
0,11	0,780	1	7,042	2,031	0,75	0,25	0,54	0,38	1,031
		2		2,280	0,64	0,36	0,51	0,42	1,027
		2,66			0,50	0,50	0,47	0,47	1,026
0,10	0,802	1	7,642	2,170	0,74	0,26	0,52	0,37	1,026
		2		2,436	0,63	0,37	0,49	0,41	1,023
		2,58			0,50	0,50	0.45	0,45	1,022
0,09	0,823	1	8,342	2,328	0,74	0,26	0,50	0,35	1,021
		2		2,613	0,62	0,38	0,47	0,40	1,019
		2,53			0,50	0,50	0,43	0,43	1,018
0,08	0,844	1	9,175	2,510	0,73	0,27	0,47	0,34	1,017
		2		2,818	0,62	0,38	0,45	0,38	1,015
		2,50			0,50	0,50	0,41	0,41	1,015
0,07	0,864	1	10,20	2,727	0,73	0,27	0,45	0,32	1,013
		2		3,060	0,62	0,38	0,42	0,36	1,012
		2,51			0,50	0,50	0,39	0,39	1,012
0,06	0,884	1	11,47	2,990	0,72	0,28	0,42	0,31	1,0100
		2		3,357	0,62	0,38	0,40	0,34	1,0094
		2,56			0,50	0,50	0,37	0,37	1,0090
0,05	0,904	1	13,14	3,324	0,72	0,28	0,39	0,29	1,0073
		2		3,732	0,62	0,38	0,37	0,32	1,0068
		2,67			0,50	0,50	0,35	0,35	1,0066

	ε	$\frac{\delta}{\delta_0}$	A	B	μ_1	μ_2	$\frac{a_1}{r}$	$\frac{a_2}{r}$	k
0,04	0,924	1	15,47	3,771	0,73	0,27	0,36	0,26	1,0050
		2		4,232	0,63	0,37	0,35	0,29	1,0047
		2,88			0,50	0,50	0,32	0,32	1,0045
0,03	0,943	1	19,00	4,414	0,73	0,27	0,33	0,23	1,0031
		2		4,955	0,65	0,35	0,31	0,26	1,0029
		3		5,302	0,57	0,43	0,30	0,27	1,0028
		3,28			0,50	0,50	0,29	0,29	1,0028
0,02	0,962	1	25,24	5,480	0,75	0,25	0,29	0,20	1,0016
		2		6,151	0,68	0,32	0,28	0,22	1,0015
		3		6,590	0,62	0,38	0,27	0,23	1,0015
		4		6,904	0,54	0,46	0,26	0,24	1,0014
		4,13			0,50	0,50	0,25	0,25	1,0014
0,01	0,981	1	40,59	7,852	0,78	0,22	0,23	0,15	1,0005
		2		8,813	0,72	0,28	0,22	0,16	1,0005
		3		9,430	0,68	0,32	0,22	0,17	1,0005
		4		9,892	0,65	0,35	0,22	0,18	1,0005
		5		10,27	0,61	0,39	0,21	0,18	1,0005
		6		10,58	0,57	0,43	0,21	0,19	1,0005
		6,70			0,50	0,50	0,20	0,20	1,0005

Schon aus dieser Tabelle würden sich eine Reihe von wichtigen Schlüssen ziehen lassen. Weil ihre Werte aber nur Näherungswerte sind, da bei ihrer Berechnung $k = 1$ gesetzt wurde, so sollen erst noch genauere Werte bestimmt werden. Mit Hülfe der für $\frac{a_1}{r}$ und $\frac{a_2}{r}$ angegebenen Werte lässt sich nämlich k näherungsweise berechnen.

Die auf den gemeinsamen Schwerpunkt bezogenen Bewegungsgleichungen der beiden Körper lauten, wenn diese als kugelförmig vorausgesetzt werden,

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{m_1 m_2}{r^3} (x_1 - x_2);$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = - \frac{m_1 m_2}{r^3} (y_1 - y_2);$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = - \frac{m_1 m_2}{r^3} (x_2 - x_1);$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = - \frac{m_1 m_2}{r^3} (y_2 - y_1).$$

Verlegt man den Anfangspunkt der Koordinaten in den Mittelpunkt des Körpers m_1, setzt also

$$x = x_1 - x_2, \quad y = y_1 - y_2,$$

so wird, da die Gleichungen

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \quad m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$$

bestehen,
$$x_1 = \frac{m_2 x}{M}, \quad y_1 = \frac{m_2 y}{M},$$
$$x_2 = -\frac{m_1 x}{M}, \quad y_2 = -\frac{m_1 y}{M},$$
und die Differentialgleichungen gehen über in
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -(m_1 + m_2)\frac{x}{r^3},$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -(m_1 + m_2)\frac{y}{r^3}.$$

Die Abweichung der beiden Körper von der Kugelgestalt kann nunmehr in folgender Weise in Rechnung gebracht werden. Bedeuten φ_1 und φ_2 die Potentiale der beiden Ellipsoide in Beziehung auf einen in ihrer gemeinsamen Aequatorebene liegenden Punkt, so sind φ_1 und φ_2 Funktionen von r allein. Wenn φ_1' und φ_2' die Ableitungen von φ_1 und φ_2 nach r bezeichnen, so kann in den beiden letzten Gleichungen $m_1 + m_2$ in erster Näherung durch $-(\varphi_1' + \varphi_2')\,r^2$ ersetzt werden. Dann folgt
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = (\varphi_1' + \varphi_2')\frac{x}{r},$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (\varphi_1' + \varphi_2')\frac{y}{r}.$$

Durch Integration dieser Gleichungen erhält man, wenn man
$$J = \int (\varphi_1' + \varphi_2')\,dr$$
setzt, die neuen Gleichungen
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2J + \beta,$$
$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{dv}{dt} = \alpha,$$
wo α und β Konstanten sind. Aus ihnen folgt
$$\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 = \frac{r^4}{\alpha^2}\left(2J + \beta - \frac{\alpha^2}{r^2}\right).$$

Durch neue Integration möge sich aus dieser Gleichung $r = f(v)$ ergeben. Soll die Bewegung der beiden Körper kreisförmig sein, so müssen alle Ableitungen von r nach v den Wert 0 haben. Durch Differentiation der letzten Gleichung findet man
$$2\frac{d^2 r}{dv^2} = \frac{4r^3}{\alpha^2}\left(2J + \beta - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) + \frac{r^4}{\alpha^2}\left(\frac{2\,dJ}{dr} + \frac{2\alpha^2}{r^3}\right).$$

Es bestehen also die Relationen

$$2\,J + \beta - \frac{\alpha^2}{r^2} = 0,$$

$$\frac{d\,J}{dr} + \frac{\alpha^2}{r^3} = 0.$$

Aus ihnen folgt

$$2\,J + \beta = -\,r\,\frac{d\,J}{dr},$$

demnach ist

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -\,r\,(\varphi_1{}' + \varphi_2{}')$$

oder

$$\omega^2 = -\frac{1}{r}\,(\varphi_1{}' + \varphi_2{}').$$

Nun ist bekanntlich

$$\varphi = \frac{3}{4}\,m \int_{r^2 - a^2}^{\infty} \left(1 - \frac{r^2}{a^2 + \lambda}\right) \frac{d\,\lambda}{(a^2 + \lambda)\,\sqrt{c^2 + \lambda}},$$

und hieraus folgt, wenn man

$$\frac{a}{r}\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = x$$

setzt,

$$\varphi' = -\frac{3}{2}\,\frac{m}{r^2\,x^3}\,[-\,x\,\sqrt{1 - x^2} + \text{arc}\sin x]$$

oder

$$\varphi' = -\frac{m}{r^2}\left(1 + \frac{3}{10}\,x^2 + \ldots\right).$$

Man hat also

$$\omega^2 = \frac{1}{r^3}\left[m_1 + m_2 + \frac{3}{10}\,(m_1\,x_1{}^2 + m_2\,x_2{}^2) + \ldots\right]$$

oder

$$\omega^2 = \frac{M}{r^3}\left[1 + \frac{3}{10}\,(1 - \varepsilon^2)\left(\mu_1\,\frac{a_1{}^2}{r^2} + \mu_2\,\frac{a_2{}^2}{r^2}\right)\right].$$

Demnach ist

$$k = 1 + \frac{3}{10}\,(1 - \varepsilon^2)\left(\mu_1\,\frac{a_1{}^2}{r^2} + \mu_2\,\frac{a_2{}^2}{r^2}\right).$$

Die hieraus mit Hülfe der für $\frac{a_1}{r}$ und $\frac{a_2}{r}$ angegebenen Werte für k sich ergebenden Werte stehen in der letzten Spalte der Tabelle I.

Setzt man die Werte von k in der allgemeinen Gleichung des Flächensatzes ein und bestimmt noch einmal μ_1, μ_2, $\frac{a_1}{r}$, $\frac{a_2}{r}$, so findet man die in der Tabelle II enthaltenen neuen Werte, die nunmehr als die richtigen gelten können. Neu hinzugefügt sind die Werte von $1 - \frac{a_1 + a_2}{r}$, ferner die von $\frac{r}{a_0}$, die sich aus der Gleichung

$$\frac{r}{a_0} = \left(\frac{2\,k}{3\,\nu} \cdot \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_0'\,\delta_0}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ergeben. In der letzten Spalte stehen die Werte von $\frac{\omega}{\omega_0}$, die sich aus der Gleichung

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \left(\frac{\nu\,\delta}{0{,}142\;\delta_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

berechnen lassen. Die für $\nu = 0{,}02$ und $0{,}01$ geltenden Werte sind weggelassen worden, weil sie sich von den entsprechenden Werten der 1. Tabelle kaum unterscheiden.

Tabelle II.

ν	$\frac{\delta}{\delta_0}$	A	B	μ_1	μ_2	$\frac{a_1}{r}$	$\frac{a_2}{r}$	$1-\frac{a_1+a_2}{r}$	$\frac{r}{a_0}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$
0,14	1	5,824	1,694	0,80	0,20	0,61	0,38	0,01	0,90	0,99
	2	5,805	1,901	0,70	0,30	0,58	0,44	—	0,72	1,40
	3	5,795	2,034	0,60	0,40	0,55	0,48	—	0,63	1,72
	3,42			0,50	0,50	0,52	0,52	—	0,60	1,83
0,13	1	6,223	1,796	0,79	0,21	0,59	0,38	0,03	0,93	0,96
	2	6,207	2,016	0,69	0,31	0,56	0,43	0,01	0,74	1,35
	3	6,199	2,157	0,57	0,43	0,53	0,48	—	0,64	1,66
	3,20			0,50	0,50	0,50	0,50	—	0,63	1,71
0,12	1	6,674	1,908	0,77	0,23	0,56	0,37	0,07	0,95	0,92
	2	6,660	2,142	0,67	0,33	0,54	0,42	0,04	0,75	1,30
	3,02	6,649	2,291	0,50	0,50	0,49	0,49	0,02	0,66	1,60
0,11	1	7,182	2,031	0,76	0,24	0,54	0,37	0,09	0,98	0,88
	2	7,170	2,280	0,66	0,34	0,51	0,41	0,08	0,77	1,25
	2,87			0,50	0,50	0,47	0,47	0,06	0,69	1,49
0,10	1	7,768	2,170	0,75	0,25	0,52	0,36	0,12	1,01	0,84
	2	7,758	2,436	0,65	0,35	0,49	0,40	0,11	0,80	1,19
	2,75			0,50	0,50	0,45	0,45	0,10	0,72	1,39
0,09	1	8,450	2,328	0,74	0,26	0,49	0,35	0,16	1,04	0,80
	2	8,447	2,613	0,64	0,36	0,47	0,39	0,14	0,83	1,13
	2,67			0,50	0,50	0,43	0,43	0,14	0,75	1,30
0,08	1	9,273	2,510	0,74	0,26	0,47	0,33	0,20	1,08	0,75
	2	9,269	2,818	0,63	0,37	0,45	0,37	0,18	0,86	1,06
	2,62			0,50	0,50	0,41	0,41	0,18	0,78	1,22
0,07	1	10,29	2,727	0,73	0,27	0,44	0,32	0,24	1,13	0,70
	2	10,28	3,060	0,63	0,37	0,42	0,36	0,22	0,90	0,99
	2,60			0,50	0,50	0,39	0,39	0,22	0,82	1,13
0,06	1	11,55	2,990	0,73	0,27	0,42	0,30	0,28	1,19	0,65
	2	11,54	3,357	0,63	0,37	0,40	0,34	0,26	0,94	0,92
	2,64			0,50	0,50	0,37	0,37	0,26	0,86	1,06
0,05	1	13,20	3,324	0,73	0,27	0,39	0,28	0,33	1,26	0,59
	2	13,20	3,732	0,63	0,37	0,37	0,31	0,32	1,00	0,84
	2,73			0,50	0,50	0,35	0,35	0,30	0,90	0,98
0,04	1	15,52	3,771	0,73	0,27	0,36	0,26	0,38	1,36	0,53
	2	15,52	4,232	0,64	0,36	0,35	0,29	0,36	1,08	0,75
	2,93			0,50	0,50	0,32	0,32	0,36	0,95	0,91
0,03	1	19,04	4,414	0,74	0,26	0,33	0,23	0,44	1,49	0,46
	2	19,04	4,955	0,66	0,34	0,32	0,25	0,43	1,18	0,65
	3	19,04	5,302	0,57	0,43	0,30	0,27	0,43	1,03	0,80
	3,31			0,50	0,50	0,29	0,29	0,42	1,00	0,84

Bei der Berechnung der Tabelle II haben wir die durch die gegenseitige Gezeitenwirkung hervorgerufene Formänderung der Massen m_1 und m_2 nicht berücksichtigt. Es soll nunmehr gezeigt werden, dass diese Formänderungen unsere Rechnungsresultate nur unwesentlich beeinflussen.

Die Flutwirkung ist um so grösser, je kleiner das Massenverhältnis der Körper ist und je näher ihre Oberflächen sind. Für den Fall, wo das Massenverhältnis 1 ist und die Oberflächen sich fast berühren, die Flutwirkung also den denkbar grössten Wert erreicht, hat Darwin die Gleichgewichtsformen der Körper bestimmt.[1]) Sie lassen sich näherungsweise als dreiachsige Ellipsoide mit den Achsenverhältnissen $\frac{b}{a} = 0{,}805$ und $\frac{c}{a} = 0{,}677$ betrachten. Die Kraft, mit der ein dreiachsiges Ellipsoid einen in der Verlängerung der grössten Achse $2a$ liegenden Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte r ist, anzieht, ist gleich

$$\varphi' = -\frac{3}{2} m r \int_{r^2 - a^2}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Setzt man unter der Wurzel für b^2 und c^2 ihr arithmetisches Mittel, so wird der absolute Wert des Integrals etwas zu klein; wählt man das geometrische Mittel, so ist er etwas zu gross. Sind die Grössen b und c nicht beträchtlich voneinander verschieden, so haben das arithmetische und das geometrische Mittel nahe denselben Wert. In diesem Falle ist also der für einen Mittelwert berechnete Integralwert ein sehr genäherter Wert des obigen Integrals. Nennt man den Mittelwert s^2, so erhält man, wenn man

$$x = \frac{a}{r}\sqrt{1 - \frac{s^2}{a^2}}$$

setzt,

$$\varphi' = -\frac{3}{2}\frac{m}{r^2 x^3}\left(\log\frac{1+x}{1-x} - 2x\right)$$

oder

$$\varphi' = -\frac{m}{r^2}\left(1 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{7}x^4 + \ldots\right).$$

Hieraus folgt ähnlich wie früher (S. 201) für den Anziehungskoeffizienten k'

$$k' = 1 + \frac{3}{5}(\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2) + \ldots$$

In dem von Darwin berechneten Falle ist $s^2 = bc = 0{,}545\, a^2$, ferner $r = 2{,}16\, a$, folglich $x_1 = x_2 = \sqrt{0{,}097}$. Man findet dann

$$k' = 1{,}062.$$

---

[1]) On figures of equilibrium of rotating masses of fluid; Philos. Transactions of the Roy. Soc, vol. 178; 1887.

Aus den Rechnungen Darwin's ergibt sich der etwas genauere Wert $k = 1{,}058$. Nach Darwin hat in diesem Falle ferner ν den Wert 0,076. Da, wenn die Gezeitenwirkung unberücksichtigt bleibt, für diesen Wert von ν und für $m_1 = m_2$ nach unserer Tabelle I k den Wert 1,014 besitzt, so zeigt sich, dass, wenn $k = 1 + \varkappa$ und $k' = 1 + \varkappa'$ gesetzt wird, $\varkappa'$ etwas mehr als 4 mal so gross als $\varkappa$ ist. Die durch die Abweichung der Massen m_1 und m_2 von der Kugelgestalt hervorgerufene Vergrösserung der gegenseitigen Anziehung beruht hiernach zu mehr als $\frac{3}{4}$ ihres Betrages auf der Gezeitendeformation und noch nicht zu $\frac{1}{4}$ auf der durch die Rotation bewirkten Abplattung der Massen. Ein ähnliches Verhältnis ergibt sich in den beiden anderen von Darwin unter der Voraussetzung $m_1 = m_2$ berechneten Fällen; er findet $k' = 1{,}0877$ für $\nu = 0{,}099$ und $k' = 1{,}0380$ für $\nu = 0{,}061$ (l. c. S. 403). Hieraus ist zu schliessen, dass auch noch für etwas grössere und kleinere ν ungefähr dasselbe Verhältnis zwischen den Einflüssen der Rotations- und der Gezeitendeformation bestehen wird. Da die Gezeitendeformation jedoch um so kleiner ist, je kleiner die Masse des die Gezeiten bewirkenden Körpers und je grösser die Masse des der Gezeitendeformation unterliegenden Körpers ist, so muss das angegebene Verhältnis schnell kleiner werden, wenn das Massenverhältnis von m_1 und m_2 grösser wird. Bei grösseren Werten von $m_1 : m_2$ muss sich die Gezeitenwirkung auch deswegen verkleinern, weil, wie die Tabellen II und III erkennen lassen, $\frac{r}{a_0}$ um so grössere Werte besitzt, je grösser $\mu_1 : \mu_2$ ist, und die Gezeitenhöhe bekanntlich mit der 3. Potenz der Entfernung der beiden Körper abnimmt. Um uns den bei Berücksichtigung der Gezeitendeformation für grössere Massenverhältnisse geltenden Werten von k zu nähern, haben wir noch zwei Tabellen berechnet. In Tabelle III haben wir $\varkappa$ den doppelten, in Tabelle IV den dreifachen Wert beigelegt, den $\varkappa$ in Tabelle I für $\mu_1 = \mu_2$ hat. Auch noch eine Tabelle für den vierfachen Wert zu berechnen, erschien überflüssig, da dieser Wert wahrscheinlich schon für $\mu_1 = 2\mu_2$ nicht mehr erreicht wird.

Tabelle III.

ν	k	$\frac{\delta}{\delta_0}$	A	B	μ_1	μ_2	$\frac{a_1}{r}$	$\frac{a_2}{r}$	$1 - \frac{a_1 + a_2}{r}$	$\frac{r}{a_0}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$
0,14	1,083	1	5,965	1,694	0,80	0,20	0,60	0,38	0,02	0,92	0,99
		2		1,901	0,72	0,28	0,58	0,42	—	0,73	1,40
		3		2,034	0.63	0,37	0,56	0,47	—	0,64	1,72
		3,82			0,50	0,50	0,52	0,52	—	0,59	1,94
0,13	1,072	1	6,341	1,796	0,79	0,21	0,58	0,37	0,05	0,94	0,96
		2		2,016	0,70	0,30	0,56	0,42	0,02	0,74	1,35
		3		2.157	0,61	0,39	0,53	0,46	0.01	0,65	1,66
		3,53			0,50	0,50	0.50	0,50	0,00	0,62	1,80

ν	k	$\frac{\delta}{\delta_0}$	A	B	μ_1	μ_2	$\frac{a_1}{r}$	$\frac{a_2}{r}$	$1-\frac{a_1+a_2}{r}$	$\frac{r}{a_0}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$
0,12	1,062	1	6,786	1,908	0,78	0,22	0,56	0,37	0.07	0,96	0,92
		2		2,142	0,69	0,31	0,54	0,41	0,05	0,76	1,30
		3		2,291	0,58	0,42	0,51	0,45	0,04	0,66	1,59
		3,29			0.50	0.50	0,48	0,48	0.04	0,64	1,67
0,11	1,053	1	7,287	2,031	0,77	0,23	0,54	0,36	0,10	0,98	0,88
		2		2.280	0,67	0,33	0,51	0,41	0,08	0,78	1,25
		3		2,439	0,54	0,46	0,48	0,45	0,07	0.68	1,52
		3,10			0,50	0,50	0,47	0,47	0,06	0,67	1,55
0,10	1,044	1	7,864	2,170	0,76	0,24	0,52	0,35	0,13	1,01	0,84
		2		2,436	0,66	0,34	0,49	0,39	0,12	0,80	1,19
		2,94			0,50	0.50	0,45	0,45	0,10	0,70	1,44
0,09	1,037	1	8,543	2,328	0,75	0,25	0,49	0,34	0,17	1,05	0,80
		2		2,613	0,65	0,35	0,47	0,38	0,15	0,83	1,13
		2,82			0,50	0,50	0,43	0,43	0,14	0,74	1,34
0,08	1,030	1	9,354	2,510	0,74	0,26	0,47	0,33	0,20	1,09	0,75
		2		2,818	0.64	0.36	0,45	0,37	0.18	0,86	1.06
		2,74			0,50	0,50	0,41	0,41	0,18	0,78	1,24
0,07	1,023	1	10,36	2,727	0,74	0,26	0,44	0,32	0,24	1,13	0,70
		2		3,060	0,63	0,37	0,42	0,35	0,23	0,90	0,99
		2,70			0,50	0,50	0,39	0,39	0,22	0,81	1,15
0,06	1,018	1	11,61	2,990	0,73	0,27	0,42	0.30	0,28	1,19	0,65
		2		3,357	0,63	0,37	0,40	0,33	0,27	0,95	0,92
		2,72			0,50	0,50	0,37	0,37	0,26	0,85	1,07
0,05	1,013	1	13,25	3,324	0.73	0,27	0,39	0,28	0,33	1,26	0,59
		2		3,732	0,63	0,37	0,37	0,31	0,32	1,00	0.84
		2,79			0,50	0,50	0,35	0,35	0,30	0,90	0,99
0,04	1,009	1	15,56	3,771	0,73	0,27	0,36	0,26	0,38	1,40	0,53
		2		4,232	0,64	0.36	0,35	0,29	0,36	1,08	0,75
		2,97			0,50	0,50	0,32	0,32	0,36	0,95	0,92
0,03	1,006	1	19,07	4,414	0,74	0,26	0,33	0,23	0,44	1,49	0.46
		2		4,955	0,66	0,34	0,32	0,25	0,43	1,19	0,65
		3		5,302	0,57	0,43	0,30	0,27	0,43	1,04	0,80
		3,35			0,50	0,50	0.29	0,29	0,42	1,00	0,84

Tabelle IV.

	k	$\frac{\delta}{\delta_0}$	A	B	μ_1	μ_2	$\frac{a_1}{r}$	$\frac{a_2}{r}$	$1-\frac{a_1+a_2}{r}$
0,14	1,124	1	6,134	1,694	0,81	0,19	0,61	0,37	0,02
		2		1,901	0,74	0,26	0,58	0,42	0,00
		3		2,034	0,67	0,33	0,57	0,45	—
		4		2,134	0,58	0,42	0,54	0,49	—
		4,29			0,50	0,50	0,51	0,51	—
0,13	1,108	1	6,490	1,796	0,80	0,20	0,58	0,37	0,05
		2		2,016	0,72	0,28	0,56	0,41	0.03
		3		2,157	0.64	0,36	0,54	0,45	0.01
		3,92			0,50	0,50	0,50	0,50	0,00
0,12	1,093	1	6,922	1,908	0,79	0,21	0,56	0,36	0,08
		2		2,142	0,70	0,30	0,54	0,41	0,05
		3		2,291	0,61	0,39	0,51	0,44	0,05
		3,61			0,50	0,50	0,48	0,48	0,04

ν	k	$\frac{\delta}{\delta_0}$	A	B	μ_1	μ_2	$\frac{a_1}{r}$	$\frac{a_2}{r}$	$1 - \frac{a_1 + a_2}{r}$
0,11	1,079	1	7,413	2,031	0,78	0,22	0,54	0,36	0,10
		2		2,280	0,68	0,32	0,52	0,40	0,08
		3		2,439	0,58	0,42	0,49	0,44	0,07
		3,36			0.50	0,50	0,47	0,47	0,06
0,10	1,066	1	7.979	2,170	0,76	0,24	0,52	0,35	0,13
		2		2,436	0,67	0,33	0.49	0,39	0,12
		3		2.606	0,55	0,45	0,46	0.43	0,11
		3,16			0,50	0,50	0,45	0,45	0,10
0,09	1,054	1	8,646	2,328	0,75	0,25	0,49	0,34	0,17
		2		2,613	0,66	0,34	0,47	0,38	0,15
		3			0.50	0,50	0,43	0,43	0,14
0,08	1,044	1	9,445	2,510	0,74	0,26	0,47	0,33	0,20
		2		2,818	0,65	0,35	0,45	0,36	0,19
		2,89			0,50	0,50	0,41	0,41	0,18
0,07	1,035	1	10,44	2,727	0,74	0,26	0,45	0,31	0,24
		2		3,060	0,64	0,36	0,42	0,35	0,23
		2,82			0,50	0,50	0,39	0,39	0,22
0,06	1,027	1	11,68	2,990	0,73	0,27	0,42	0,30	0,28
		2		3,357	0.64	0,36	0,40	0,33	0,27
		2,81			0,50	0,50	0,37	0,37	0,26
0.05	1,020	1	13,31	3,324	0,73	0,27	0,39	0,28	0,33
		2		3,732	0,64	0,36	0,37	0,31	0,32
		2, 88			0,50	0,50	0,35	0,35	0,30
0,04	1.014	1	15,61	3,771	0,73	0,27	0,36	0,26	0,38
		2		4,232	0,65	0,35	0,35	0,28	0,37
		3,04			0,50	0,50	0,32	0,32	0,36
0,03	1,008	1	19,11	4,414	0,74	0,26	0,33	0,23	0,44
		2		4,955	0,66	0,34	0,32	0,25	0,43
		3		5,302	0,58	0,42	0,30	0,27	0,43
		3,39			0,50	0,50	0,29	0,29	0,42

In der letzten Tabelle sind die Werte von $\frac{r}{a_0}$ und von $\frac{\omega}{\omega_0}$ weggelassen worden. Da $\frac{r}{a_0}$ der 3. Wurzel aus k proportional ist, so ändern die Werte sich wenig, wenn k sich etwas vergrössert; eine Vergleichung der Zahlenwerte in den Tabellen II und III lässt eine Schätzung des Betrages der Aenderungen zu. Die Werte von $\frac{\omega}{\omega_0}$ sind, abgesehen von dem Falle $\mu_1 = \mu_2$, dieselben wie in den Tabellen II und III.

§ 3.

Das Grössenverhältnis der Teilmassen.

Aus den im vorigen § berechneten Tabellen II, III und IV lassen sich mehrere wichtige Schlüsse ziehen.

Zunächst erkennt man, dass für $\nu = 0{,}14$ das Zerfallen der Birne noch nicht eintreten kann, da, wenn die Dichte die des kritischen Jacobi'schen Ellipsoids auch nur wenig übersteigt, $a_1 + a_2$

noch grösser als r ist, die Ellipsoide also miteinander verschmelzen. Dasselbe trifft wahrscheinlich auch noch für $\nu = 0{,}13$ und $0{,}12$ zu; denn in diesen Fällen ist, wie die entsprechende Spalte der Tabellen zeigt,

$$1 - \frac{a_1 + a_2}{r}$$

so wenig von 0 verschieden, dass die bei der Berechnung von $\frac{a_1}{r}$ und $\frac{a_2}{r}$ nicht berücksichtigte, durch die gegenseitige Gezeitenwirkung hervorgerufene Verlängerung der beiden Ellipsoide zu einer Verschmelzung derselben führen dürfte. Erst für $\nu < 0{,}12$ ist die Entfernung der Ellipsoidoberflächen so gross, dass auch infolge der gegenseitigen Gezeitenwirkung keine Berührung der beiden Ellipsoide mehr eintreten wird.

Dass für $\nu > 0{,}12$ die Birne noch nicht zerfallen kann, geht auch aus folgendem hervor. Nach dem Zerfallen darf die Ausdehnung der Massen m_1 und m_2 nicht so gross sein, dass die grössere Masse m_1 imstande wäre, Randteile der Masse m_2 zu sich heranzuziehen. Da sich die einzelnen Massenteilchen von m_2 zu dem Anziehungszentrum von m_2 in relativer Ruhe befinden, so müssen sie also innerhalb der kritischen Nullfläche der Geschwindigkeit, deren Form und Grösse sich aus der Diskussion des Jacobi'schen Integrals des Dreikörperproblems ergibt, liegen. Diese Fläche hat ungefähr Ellipsoidform; sie schneidet die Verbindungslinie der Mittelpunkte von m_1 und m_2 in zwei Punkten, die sich aus den Gleichungen

$$x^5 \pm (3 - \mu_2)\, x^4 + (3 - 2\,\mu_2)\, x^3 - \mu_2\, x^2 \mp 2\,\mu_2\, x - \mu_2 = 0$$

ergeben.[1]) Die Entfernung der Mittelpunkte ist hier gleich 1 gesetzt; die oberen Zeichen gelten für den äusseren, die unteren für den inneren Schnittpunkt. Die Wurzeln sind die Entfernungen der Schnittpunkte von dem Mittelpunkte von m_2. Nur die innerhalb der angegebenen Grenzfläche liegenden Massenteilchen von m_2 können im Anziehungsbereiche von m_2 bleiben; die ausserhalb befindlichen entfernen sich von m_2 und beschreiben komplizierte Bahnen um m_1 und m_2. In der folgenden Tabelle sind für einige Werte von μ_2 die entsprechenden Wurzelwerte zusammengestellt:

μ_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
x_1	0,70	0,58	0,52	0,48	0,44	0,41	0,39	0,37	0,36
x_2	0,50	0,43	0,39	0,36	0,34	0,33	0,31	0,30	0,29

x_1 bezeichnet den äusseren, x_2 den inneren Schnittpunkt. Die Vergleichung der Werte x_2 mit den Werten von $\frac{a_2}{r}$ in den Tabellen zeigt

[1]) Vergl. z. B. F. R. Moulton: Celestial Mechanics, 1902, § 121.

nun, dass diese für $\nu = 0{,}14$ und $0{,}13$ die Werte x_2 übersteigen, und für $\nu = 0{,}12$ ihnen so nahe kommen, dass die angegebenen Werte von ν aus der Betrachtung ausscheiden müssen, um so mehr, da in Wirklichkeit die Massen nicht homogen, sondern im Innern verdichtet sind, sich also weiter erstrecken müssen, als die Annahme der Homogenität bestimmt.

Für kleine ν wird andererseits der Ausdruck

$$1 - \frac{a_1 + a_2}{r}$$

so gross, dass die unter einer bestimmten Grenze liegenden ν für den Zeitpunkt des Zerfallens der Birne ebenfalls ausgeschaltet werden müssen. Es erscheint äusserst fraglich, ob unmittelbar nach der Teilung der Birne die Oberflächen der beiden Teilmassen weiter als $\frac{1}{3}$ r voneinander entfernt sein können, da andernfalls angenommen werden müsste, dass die Birne vor dem Zerfallen sich sehr beträchtlich, stabförmig, in die Länge streckt, wofür sich aus den Untersuchungen Darwins keinerlei Anhaltspunkte ergeben. Es dürften daher auch alle $\nu < 0{,}06$ auszuschliessen sein. In dieser Annahme werden wir dadurch bestärkt, dass für $\nu < 0{,}06$ der Wert $\frac{\omega}{\omega_0}$, wie die Tabellen zeigen, kleiner als 1 ist, also eine Verlangsamung der Rotation eintritt. Ebenso aber, wie die rotierende Flüssigkeit im Zustande des dreiachsigen Jacobi'schen Ellipsoids bei fortschreitender Kontraktion, trotzdem sie sich mehr und mehr in die Länge zieht, ihre Rotation beschleunigt [ungefähr auf den doppelten Wert], dürfte sie auch im Zustande der Birnenform bei weiterer Vergrösserung der Dichte eine Beschleunigung ihrer Rotation erfahren. Mit Sicherheit lässt sich hierüber allerdings nichts aussagen, da noch nicht bestimmt werden konnte, wo die Stabilitätsgrenzen der Birnenfigur liegen.

Nach allem Gesagten kann es als wahrscheinlich gelten, dass das Zerfallen der Birne für einen Wert von ν eintritt, der zwischen 0,12 und 0,06 liegt.[1]) Dann zeigen die Tabellen das bemerkenswerte Ergebnis, dass die entstehenden Teilmassen in einem sehr kleinen Grössenverhältnisse zueinander stehen. Der grösste Wert von $\mu_1 : \mu_2$ ist, für $\nu = 0{,}12$, $79 : 21$; selbst wenn man die in den Tabellen enthaltenen grösseren und kleineren Werte von ν

[1]) Aus Darwins Untersuchungen (Phil. Transactions, vol. 178) folgt, dass im Falle $m_1 = m_2$ das Zerfallen der Birne eintritt, wenn ν ungefähr gleich 0,08 oder 0,09 ist. Er findet, dass für $\nu = 0{,}10$ beide Körper noch miteinander zusammenhängen und eine sanduhrförmige Figur bilden, dass sie aber für $\nu = 0{,}076$ bereits etwas voneinander getrennt sind. Da $1 - \frac{a_1 + a_2}{r}$, wie die Tabellen erkennen lassen, bei allen ν um so grösser ist, je mehr sich die Massen der Körper voneinander unterscheiden, so kann gefolgert werden, dass im Augenblicke des Zerfallens der Birne das Massenverhältnis um so grösser ist, je grösser ν ist. Hiernach werden die Massen der Teilkörper um so verschiedener ausfallen, je früher die Birne beim Durchlaufen ihres Entwicklungsganges zerfällt.

gelten lassen wollte, so würde das Massenverhältnis im Maximum [für $\nu = 0{,}14$], nur 81 : 19 sein.

Diese Werte erfahren noch eine weitere Einschränkung. Sie ergeben sich bei der Annahme, dass $\delta = \delta_0$, die Dichte der Birne beim Zerfallen also dieselbe sei, wie die des kritischen Jacobi'schen Ellipsoids, was natürlich ausgeschlossen ist. Im Zustande des Jacobi'schen Ellipsoids vergrössert die rotierende Flüssigkeit ihre Dichte ungefähr bis zu dem $4^1/_2$fachen Betrag [siehe § 1]. Angenommen, die Flüssigkeit würde, während sie die Stadien der Birnenfigur durchläuft, ihre Dichte nur verdoppeln, so folgt aus der Tabelle IV, dass für alle angegebenen ν das maximale Massenverhältnis den kleinen Wert 74 : 26, für $0{,}10 > \nu > 0{,}02$ gar nur 2 : 1 besitzt. Bis zu dreifacher Dichte kann sich die Birne nur für die grösseren und die kleineren ν entwickeln.

Ist unsere Annahme, dass die Birnenfigur bis zu ihrem Zerfallen eine Rotationsbeschleunigung erfährt, richtig, so zeigen die Werte von $\frac{\omega}{\omega_0}$ in den Tabellen II, III und der im § 5 enthaltenen Tabelle VII, in der die Rechnung noch einmal für kleine ganzzahlige Grössenverhältnisse von m_1 und m_2 durchgeführt ist, dass das Massenverhältnis 3 : 1 sich nur bei $\nu = 0{,}12$ entwickeln kann. Da aber in diesem Falle nach dem früher Gesagten der Radius von m_2 fast den Grenzwert x_2 erreicht und ausserdem eine nur geringe Vergrösserung der Dichte angenommen werden müsste [$\delta = 1{,}28\,\delta_0$], so darf ein Zerfallen der Birne im Massenverhältnisse 3 : 1 noch als unwahrscheinlich gelten.

Als wichtigstes Resultat geht also aus den Tabellen hervor, dass die aus einer Birne entstehenden Teilmassen höchstens in dem Massenverhältnisse 3 : 1, wahrscheinlich aber in einem kleineren Verhältnisse zueinander stehen. Dieses Resultat kann dadurch, dass in der Natur die Massen nicht homogen sind, nur unwesentlich modifiziert werden. Denn zu der Ausbildung der Birnenfigur können naturgemäss nur die inneren dichteren Teile des Nebels, in denen die Hauptmasse konzentriert ist, den Anstoss geben, während die äusseren feineren Massen, da sie nur einen Bruchteil der Gesamtmasse bilden, dabei keine grosse Rolle spielen können. Man kann die äussern feinen Massen als Atmosphäre betrachten, welche die inneren dichteren Massen umgeben. Ist die Masse der einen Komponente eines Doppelsternsystems mehr als das dreifache der anderen, so steht hiernach fest, dass es nicht durch Zerfallen eines im hydrodynamischen Gleichgewichte seiner Teile befindlichen, rotierenden Nebels entstanden sein kann.

Am Schlusse mag noch bemerkt werden, dass unsere Resultate von der noch nicht mit Bestimmtheit beantworteten Frage, ob, da der Poincaré'sche Stabilitätsbeweis bekanntlich von Schwarzschild angezweifelt worden ist, bei einer rotierenden Flüssigkeit überhaupt die Birnenfigur zur Ausbildung komme, unabhängig sind. Keine unserer Rechnungen bezieht sich auf die Birnenfigur selbst; der Name figuriert in unserer Darstellung eigentlich nur zur Erleichterung der Ausdrucksweise. Denn da sich das Jacobi'sche Ellipsoid an der Grenze seiner Stabilität nicht selbst schon in zwei Körper spalten kann, so muss zwischen ihm und dem Trennungszustand noch eine Durchgangsform vorhanden sein, und diese haben wir, auf Grund der Untersuchungen von Poincaré und Darwin, als Birnenform bezeichnet.

§ 4.

Die ursprüngliche Bahnexzentrizität.

Ein anderes zuverlässiges Kriterium für die Beurteilung der Frage, ob ein Doppelsternsystem durch Zerfallen eines im hydrodynamischen Gleichgewichte befindlichen rotierenden Nebels entstanden sei oder nicht, liefert die Bahnexzentrizität. Allgemein wird zugestanden, dass die anfängliche Bahnexzentrizität sehr klein sein müsse. Eine solche allgemeine Angabe hat aber, da es gänzlich dem subjektiven Empfinden überlassen bleibt, z. B. die Exzentrizität 0,1 als gross oder als klein zu bezeichnen, gar keinen Wert. Wir wollen uns daher bemühen, zu bestimmteren Vorstellungen über die Grösse der Anfangsexzentrizität zu gelangen.

Poincaré hat gezeigt, dass, wenn eine Gleichgewichtsfigur einer homogenen rotierenden Flüssigkeit ihre sämtlichen stabilen Formen durchlaufen und die Grenze ihrer Stabilität erreicht hat, eine andere Gleichgewichtsfigur vorhanden ist, die mit der früheren bei diesem Stadium zusammenfällt. Wenn die Regel, dass die neue Gleichgewichtsfigur stabil ist, was tatsächlich beim Uebergang des kritischen Rotationsellipsoids in das Jacobi'sche und nach Poincaré auch beim Uebergang des kritischen Jacobi'schen Ellipsoids in die Birnenform zutrifft, sich auch auf die Birnenfigur übertragen lassen sollte, wenn diese die Grenze ihrer Stabilität erreicht hat, so müssten sich die durch Zerfallen der Birne entstehenden beiden Körper genau kreisförmig bewegen; denn wenn auch nur eine geringe Anfangsexzentrizität vorhanden wäre, so würde der Gleichgewichtszustand kein stabiler sein. In diesem Falle wäre also die Anfangsexzentrizität nicht sehr klein, sondern genau gleich 0.

Da aber das Poincaré'sche Prinzip, dass die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, wenn sie sich bis zu den Grenzen ihrer Stabilität entwickelt haben, ineinander übergehen und immer neue stabile Formen durchlaufen, noch nicht für alle Fälle feststeht, so soll jetzt angenommen werden, beim Zerfallen der Birne höre der stabile Gleichgewichtszustand auf. In diesem Falle werden beide Teilkörper unmittelbar nach der Trennung ihre Form ändern. Dadurch erleidet auch die zwischen ihnen bestehende Anziehung eine Aenderung, und zwar wird sie, da die Körper sich abzurunden streben, sich verringern. Beziehen wir die Bahn des kleineren Körpers m_2 auf den Schwerpunkt des grösseren m_1, so wird der kleinere also in dem Augenblick, wo er eine selbständige Bahn beginnt, durch das Periastron derselben gehen.[1]) Die Integrale der Bewegungsgleichungen von m_2 unmittelbar nach der Trennung mögen lauten

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \alpha.$$

a bedeutet die halbe grosse Bahnachse, α das Flächenmoment. Die Verkleinerung der Anziehung ist einer Abnahme der Masse M gleichwertig. Schreibt man in der ersten Gleichung $M + \delta M$ für M und $a + \delta a$ für a, so erhält man

$$\frac{\delta a}{a^2} = -\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\frac{\delta M}{M}.$$

Da δM negativ ist, so nimmt a hiernach zu. In der zweiten Gleichung, die den Flächensatz ausdrückt, ist die Konstante α von der anziehenden Masse ganz unabhängig. Bedeutet p den Parameter der Bahn, so ist

$$\alpha^2 = p\,M.$$

Hieraus folgt

$$p\,\delta M + M\,\delta p = 0.$$

Nun ist

$$\frac{p}{a} = 1 - e^2,$$

wo e die Bahnexzentrizität bezeichnet, folglich

$$\delta(1 - e^2) = \frac{1}{a}\delta p + p\,\delta\frac{1}{a}.$$

Setzt man für δp und $\delta \frac{1}{a}$ ihre Werte, so folgt

$$\delta(1 - e^2) = \frac{2p}{M}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right]\delta M,$$

oder

$$e\,\delta e = \frac{p}{M}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right]\delta M.$$

Diese Gleichung zeigt, dass e zunimmt, wenn $r < a$, dass e abnimmt, wenn $r > a$ ist. Da sich der kleinere Körper im Augenblicke der Trennung in seinem Periastron befindet, so nimmt hiernach die Exzentrizität anfangs zu.

Die im Zeitpunkte der Trennung beginnende Formänderung der beiden Körper erfolgt nun nicht in einem Augenblick, sondern

[1]) Bei einer Vergrösserung der Anziehung nach der Trennung würde der Zeitpunkt derselben dem Hindurchgehen durch das Apiastron entsprechen; d. h. es würde sogleich wieder eine Annäherung der Körper eintreten und eine dauernde Trennung also nicht stattfinden.

nimmt längere Zeit in Anspruch. Zugleich mit der Annäherung der sich verschiebenden Massen an die Mittelpunkte, deren Schnelligkeit von der Grösse der Anziehung beider Körper abhängt, tritt eine seitliche Ausbreitung ein. Diese erfolgt, da sie nur auf einer seitlichen Druckwirkung beruht, ohne Zweifel ziemlich langsam. Hieraus geht hervor, dass, wenn die Gesamtänderung der Exzentrizität festgestellt werden soll, über einen längeren Zeitraum integriert werden muss. Die einfachste Annahme über die Art der Abhängigkeit der Anziehung von der Zeit wäre, ihre Abnahme der Zeit proportional zu setzen. Bei dieser Annahme ist

$$\frac{\delta M}{M} = - A\, dt,$$

wo A eine Konstante bedeutet, und man erhält

$$e\, d\, e = p\, A \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right] dt.$$

Da

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}$$

ist, so folgt hieraus, wenn der Zeitraum, über den sich die Integration erstreckt, so klein gewählt wird, dass die Bahnelemente innerhalb desselben als konstant gelten können,

$$\int d\, e = \frac{p\, r\, A}{M e} \sqrt{M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}} = A\, r \sin v \sqrt{\frac{p}{M}}.$$

Die Grösse r sin v ist die auf der Apsidenlinie senkrecht stehende Ordinate der Bahnkurve. Bezeichnet man sie für die Punkte, in denen sich am Anfang und am Ende des Integrationsintervalls der Körper m_2 befindet, mit y_1 und y_2, so ist also

$$\triangle\, e = A\, (y_2 - y_1) \sqrt{\frac{p}{M}}.$$

Hiernach ist die Zunahme der Exzentrizität am grössten im Periastron, die Abnahme am grössten im Apiastron; die Abnahme der Exzentrizität im 2. und 3. Viertel der Bahn hebt die Zunahme derselben im 1. und 4. Viertel genau auf. Darf während der ganzen Umlaufszeit die Aenderung der Anziehung der Zeit proportional gesetzt werden, so ist die Gesamtänderung der Exzentrizität während des Umlaufs also gleich Null; d. h. die Bahn bleibt kreisförmig. In unserem Falle ist diese Annahme näherungsweise erfüllt. Denn da, wie bereits bemerkt, die die Anziehung beeinflussenden Gestaltsänderungen der Körper m_1 und m_2 zum grossen Teile durch seitliche, auf blossen Druckwirkungen beruhende Verschiebungen veranlasst werden, so erstrecken sie sich über einen längeren Zeitraum. Jedenfalls geht diese Verschiebung, da Gravitationswirkungen bei ihr nur eine untergeordnete Rolle spielen, langsamer vor sich, als die Bewegung des Körpers m_2 in seiner

Bahn.[1]) Sie wird also noch nicht beendet sein, wenn m_2 erst das erste Viertel seiner Bahn zurückgelegt hat. Die im 2. und 3. Viertel der Bahn eintretende Verkleinerung der Exzentrizität hebt dann die im 1. Viertel erfolgte Vergrösserung wieder auf; wenn die Exzentrizität anfangs nicht Null wäre, so würde ihr Wert im 3. Viertel sogar unter den Anfangswert heruntersinken.[2]) — Es ist auch möglich, dass die Verschiebung der Massen an der Oberfläche von m_1 und und m_2 in oszillatorischer Weise vor sich geht, indem die in Bewegung begriffenen Massen über den Ort ihrer Ruhelage hinausfahren, dann zurückeilen, u. s. f., bis infolge der inneren Reibung endlich der Gleichgewichtszustand erreicht ist. Diese Oszillationen werden sich natürlich über längere Zeiträume erstrecken, innerhalb deren die Exzentrizität bald zu- und bald abnimmt; das Gesamtergebnis wird fast gleich Null sein.

Ueber den Maximalwert, den die Exzentrizität annehmen kann, und über die Grösse der Schwankungen, denen sie ausgesetzt ist, lassen sich noch einige genauere Angaben machen. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}$$

folgt durch Integration

$$t + \text{const.} = -\frac{r\,a\,e}{\alpha} \sin v + \sqrt{\frac{a^3}{M}} \arccos \frac{a-r}{ae}.$$

Für kleine Exzentrizitäten erhält man hieraus

$$t - t_0 = (v - v_0)\sqrt{\frac{a^3}{M}}.$$

Aus der Gleichung

$$A\,dt = -\frac{\delta M}{M}$$

folgt ferner, wenn man die Abnahme, welche die gegenseitige Anziehung der Massen m_1 und m_2 in der Zeit $t - t_0$ erleidet, mit λ bezeichnet,

$$A\,(t - t_0) = \lambda.$$

Setzt man den Wert von $t - t_0$ in dieser Gleichung ein und substituiert den Wert für A in dem für $\triangle e$ abgeleiteten Ausdrucke,

---

[1]) Auf die Wirkungen der durch die gegenseitige Anziehung von m_1 und m_2 hervorgerufenen Gezeitenwelle, die mit der Bewegung der Körper in ihrer Bahn gleichen Schritt hält, kommen wir erst später zu sprechen [§ 5].

[2]) Bei dieser Einteilung der Bahn ist auf die Verschiebung des Periastrons, die gemäss der Gleichung

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\sin v}{e}\,\frac{\delta M}{M}$$

erfolgt, Rücksicht zu nehmen. Da bei kleinen Werten der Exzentrizität die Verschiebung ziemlich beträchtlich sein kann, so sind die 4 angegebenen Bahnviertel nicht gleichbedeutend mit den 4 Winkelquadranten.

so ergibt sich, da für kleine Exzentrizitäten $r = p = a$ gesetzt werden kann,

$$\triangle e = \lambda \frac{\sin v - \sin v_0}{v - v_0}.$$

Bei dem Versuche, für die Grösse

$$\lambda = -\int_{t_0}^{t} \frac{\delta M}{M}$$

genauere Zahlenwerte zu erhalten, ist man natürlich auf Vermutungen angewiesen. Doch dürfte folgende Ueberlegung geeignet sein, wenigstens die Grössenordnung und einen Maximalwert von λ zu bestimmen.

Verfolgt man den Entwicklungsgang der Birnenfigur von dem kritischen Jacobi'schen Ellipsoid an durch ihre verschiedenen Formen hindurch, so geht aus den Untersuchungen von Poincaré und Darwin hervor, dass sich die eine Hälfte des Jacobi'schen Ellipsoids zusammenzieht und dabei mehr und mehr verdickt, während sich die andere Hälfte über die Grenze des Ellipsoids hinaus in die Länge streckt. Der Hauptteil der Gesamtmasse bestrebt sich also, schon bevor die endgültige Trennung eintritt, sich derjenigen Form zu nähern, die es nach der Trennung annehmen wird, nämlich der Form eines durch die gegenseitigen Gezeitenwirkungen allerdings mehr oder weniger deformierten Rotationsellipsoids. Der in der Gleichung

$$\omega^2 r^3 = k M$$

auftretende Faktor k, der nach dem früheren einen Maßstab für die durch die Abweichung der Körper m_1 und m_2 von der Kugelform bewirkte Vergrösserung der gegenseitigen Anziehung liefert, sei im Augenblicke der Trennung oder kurze Zeit vor derselben k_0, und, nachdem die mit der Trennung einsetzenden Formänderungen der Körper beendet sind und diese ihre neue Gleichgewichtsfigur angenommen haben, k_1. Dann ist

$$\lambda = k_0 - k_1.$$

Für den Fall gleicher Massen m_1 und m_2 hat Darwin die Werte von k_0 und k_1 bestimmt. Der für die sanduhrförmige, der Trennung vorangehende Gleichgewichtsfigur geltende Wert k_0 ist 1,088; für fast sich berührende Massen ist $k_1 = 1{,}058$ (l. c. S. 403 und Tafel); hieraus folgt $\lambda = 0{,}03$. Da die gegenseitigen störenden Einflüsse der Massen m_1 und m_2 um so kleiner werden, je verschiedener sie sind, so ist dieser Wert ein Maximalwert.

Rechnet man die Zeit vom Augenblicke der Trennung an, so ist in der oben abgeleiteten Formel $v_0 = 0$. Man hat also

$$\triangle e = \lambda \frac{\sin v}{v}.$$

Die rechte Seite erreicht ihren grössten Wert, wenn $v = 0$ ist, die

Formänderungen also in einem Augenblick erfolgen; dann ist $\Delta e = \lambda = 0{,}03$. Finden die Aenderungen im ersten Viertel des ersten Umlaufs statt, so ist $v > \frac{\pi}{2}$, also $\Delta e < 0{,}02$. Erstrecken sie sich über eine noch längere Zeit, so wird Δe entsprechend kleiner. Da im Augenblicke der Trennung die Exzentrizität 0 ist, so kann mithin die ursprüngliche Bahnexzentrizität den Wert 0,03 nicht übersteigen.[1]) Der wahrscheinliche Wert ist bedeutend geringer; er dürfte kaum jemals grösser als 0,01 sein. — Bei den Rechnungen des folgenden § haben wir, um auf keinen Fall für die Anfangsexzentrizität einen zu kleinen Wert zu benutzen, den ohne jeden Zweifel zu grossen Wert 0,04 zu Grunde gelegt.

Nach allem Gesagten können wir unserem früheren, das Massenverhältnis der aus einer Rotationsfigur entstandenen Doppelsterne betreffende Resultat folgendes anreihen: Die ursprüngliche Bahnexzentrizität solcher Doppelsterne ist sehr gering die Bahnen sind fast genau kreisförmig.

§ 5.

Der Einfluss der Gezeitenreibung auf die Bahnexzentrizität.

Es bleibt jedoch noch die Frage zu beantworten, ob die Exzentrizität vielleicht nachträglich zu grösseren Werten anwachsen kann. Die Möglichkeit einer Exzentrizitätsvergrösserung hat bekanntlich Darwin nachgewiesen. Auf Darwins Untersuchungen zurückgehend, hat See dann versucht (l. c.), die bei den Doppelsternen beobachteten grossen Bahnexzentrizitäten zu erklären. Nach Darwin kann die Vergrösserung der Exzentrizität eine Wirkung der Gezeitenreibung sein. Bei rotierenden Flüssigkeiten mit geringer Viskosität eilt der Flutberg, der durch die Anziehung von m_2 auf m_1 hervorgerufen wird, falls m_1 schneller rotiert als m_2 seinen Umlauf vollendet, dem Körper m_2 voraus und bewirkt ausser einer Vergrösserung seines Abstandes auch eine Vergrösserung der Bahnexzentrizität.

Bedeutet x die Umlaufsbewegungsgrösse der beiden Körper, Ω ihre Umlaufswinkelgeschwindigkeit, ω_1 und ω_2 ihre Rotationswinkelgeschwindigkeiten, α_1 und α_2 ihre halben grossen Achsen, φ_1 und φ_2 die Verzögerungswinkel der Gezeiten, und ist

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3}{2}\frac{m_2^2}{r^3}, & \tau_2 &= \frac{3}{2}\frac{m_1^2}{r^3}, \\ \gamma_1 &= \frac{2}{5}\frac{m_1}{\alpha_1^3}, & \gamma_2 &= \frac{2}{5}\frac{m_2}{\alpha_2^3}, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\frac{\tau_1^2}{\gamma_1}\sin 2\varphi_1, \\ A_2 &= \frac{1}{2}\frac{\tau_2^2}{\gamma_2}\sin 2\varphi_2, \end{aligned}$$

[1]) Hiernach versteht es sich von selbst, dass der von See (l. c.) für die ursprüngliche Bahnexzentrizität angenommene Wert 0,1 viel zu gross ist. Selbst wenn sich nach dem Zerfallen der sanduhrförmigen Figur beide Teilmassen augenblicklich in Kugeln verwandelten, würde die ursprüngliche Bahnexzentrizität noch nicht 0,09 betragen.

so sind nach Darwin[1]) die Veränderungen der Umlaufsbewegungsgrösse und der Exzentrizität an folgende Gleichungen gebunden

$$\frac{dx}{dt} = A_1\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_1}\right) + A_2\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_2}\right).$$

$$\frac{d\log e}{dt} = \frac{A_1}{2x}\left(11 - \frac{18\,\Omega}{\omega_1}\right) + \frac{A_2}{2x}\left(11 - \frac{18\,\Omega}{\omega_2}\right).$$

Um diese Gleichungen zu vereinfachen und aus ihnen ein Integral zu gewinnen, hat See die Annahme $m_1 = m_2$ zu Grunde gelegt. Die Resultate lassen sich aber bedeutend verallgemeinern, wenn man nur die Voraussetzung $\omega_1 = \omega_2$ beibehält. Bei ungleichen Massen m_1 und m_2 wird diese Voraussetzung, die bei Beginn der selbständigen Bewegung von m_1 und m_2 tatsächlich besteht, später allerdings nicht mehr zutreffen; denn die kleinere Masse m_2 wird sich schneller kontrahieren und infolge davon ihre Rotation in gleichen Zeiten mehr beschleunigen als die grössere Masse m_1. Jedoch wird durch die grössere retardierende Gezeitenwirkung, welche m_1 auf m_2 ausübt, dieser Unterschied wenigstens teilweise wieder aufgehoben. Aber wenn sich auch grössere Unterschiede zwischen ω_1 und ω_2 herausbilden sollten, so wird bei der Annahme $\omega_1 = \omega_2$ das Rechnungsresultat doch nur unwesentlich von dem richtigen abweichen, da die Entwicklung in jedem Falle dem Endzustande $\omega_1 = \omega_2 = \Omega$ zustrebt und der Integrationswert sich nur unbedeutend ändern kann, wenn dieser Endzustand auf ziemlich eng benachbarten Integrationswegen erreicht wird. Das im Falle $\omega_1 = \omega_2$ sich ergebende Integral kann daher als ziemlich genauer Näherungswert gelten.

Ist $\omega_1 = \omega_2 = \omega'$, so lässt sich bei der Verfolgung der Exzentrizitätsänderungen die Zeit ganz ausschalten, indem man die obigen Gleichungen durcheinander dividiert und den gleichen Faktor $A_1 + A_2$ forthebt. Man erhält

$$\frac{d\log e}{dx} = \frac{1}{2x}\,\frac{11\,\omega' - 18\,\Omega}{\omega' - \Omega}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass, wenn x zunimmt, e sich verkleinert, solange $11\,\omega' < 18\,\Omega$ ist. Wenn die Gezeitenreibung keine Rotationsenergie in potentielle Energie der Umlaufsbewegung verwandeln würde, so würde für die Kontraktion von m_1 und m_2 der Flächensatz gelten; dann wäre $\omega = \Omega$ und

$$a_1^2\,\omega = \alpha_1^2\,\omega' = a_1^2\,\Omega.$$

Es tritt also auf jeden Fall eine Verkleinerung der Exzentrizität ein, solange

$$\frac{\alpha_1}{a_1} > \sqrt{\frac{11}{18}}$$

oder $\alpha_1 > 0{,}782\,a_1$ ist. Da sich aber während der Zeit, wo sich α_1

[1]) Proc. Roy. Soc. 1880, Nr. 202.

von dem Werte a_1 bis $0{,}782\,a_1$ verkürzt, ein Teil der Rotationsenergie in potentielle Energie der Umlaufsbewegung verwandelt und eine Vergrösserung von x bewirkt, so hält die Zeit der Exzentrizitätsverkleinerung länger an. Solange $11\,\omega' > 18\,\Omega$ ist, vergrössert sich die Exzentrizität. Ist aber infolge Energieverlustes die Rotationsgeschwindigkeit endlich so klein geworden, dass $11\,\omega' < 18\,\Omega$ ist, so tritt wieder eine Verkleinerung der Exzentrizität ein.

Um mit Hülfe der angegebenen Differentialgleichung beurteilen zu können, wie die Exzentrizität sich ändert, verfahren wir zunächst ähnlich wie Darwin und See. Bedeutet H die Bewegungsgrösse des ganzen Systems, i_1 und i_2 das Trägheitsmoment der Massen m_1 und m_2, so besteht, da x die Umlaufsbewegungsgrösse bezeichnet, die Gleichung

$$H = (i_1 + i_2)\,\omega' + x.$$

Aus ihr folgt

$$\omega' = \frac{H - x}{i_1 + i_2}.$$

Nun ist

$$x = \frac{m_1\, m_2}{M}\, r^2\, \Omega,$$

oder, da

$$r^3\, \Omega^2 = M$$

ist,

$$x = \frac{m_1\, m_2}{\sqrt{M}}\, r^{\frac{1}{2}}.$$

Also ist

$$\Omega = \frac{M^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}} = \frac{(m_1\, m_2)^3}{M\, x^3}.$$

Setzt man die für ω' und Ω angegebenen Werte in der Differentialgleichung ein und schreibt

$$\left.\begin{aligned} x &= y\,\tau, \\ H &= h\,\tau, \end{aligned}\right\}\ \tau = \sqrt[4]{\frac{(i_1 + i_2)\,(m_1\, m_2)^3}{M}},$$

so geht sie über in

$$\frac{d \log e}{d y} = \frac{11}{2\,y}\,\frac{y^4 - h\,y^3 + \frac{18}{11}}{y^4 - h\,y^3 + 1}.$$

Die Grösse H ist eine Konstante, aber nicht die Grösse h, da bei der Zusammenziehung der Massen m_1 und m_2 eine Verkleinerung von i_1 und i_2 eintritt. Die Veränderliche t, die wir aus der letzten Gleichung entfernt haben, ist also implizite in ihr doch enthalten. Um ein Integral zu gewinnen, müssten wir h als konstant betrachten. Es ist nun nicht schwer zu beurteilen, in welcher Beziehung der bei konstantem h erhaltene Integralwert zu dem wahren steht. Wird h als konstant betrachtet, so ist damit angenommen, dass während der ganzen Zeit, wo die Massen m_1 und m_2 ihre Aequatorealachsen bis zu den Werten $2\,\alpha_1$ und $2\,\alpha_2$ verkürzen, für sie der Flächensatz gilt, dass sie also ihre Rotationsgeschwindigkeit gemäss den Gleichungen

$$a_1^2\,\omega = \alpha_1^2\,\omega', \quad a_2^2\,\omega = \alpha_2^2\,\omega'$$

vergrössern, und dass erst am Ende dieser Zeit die Gezeitenwirkung einsetzt, die nunmehr, bei konstant vorausgesetztem α_1 und α_2, x und e verändert, bis die Rotationsgeschwindigkeit von m_1 und m_2 der Umlaufswinkelgeschwindigkeit gleich wird. Bei dieser Voraussetzung ist während des grössten Teiles der Zeit, in der die Gezeitenreibung wirkt, ω' sehr gross gegen Ω. Bei der wirklich stattfindenden Entwicklung ist dies nicht in demselben Grade der Fall; anfangs ist ω' sogar so klein, dass [für $\alpha_1 < 0{,}782\,a_1$] eine Verkleinerung von e eintritt. Da der Ausdruck

$$\frac{\dfrac{\omega'}{\Omega} - \dfrac{18}{11}}{\dfrac{\omega'}{\Omega} - 1}$$

mit wachsendem $\frac{\omega'}{\Omega}$ beständig zunimmt, so ist also der wirkliche Integralwert stets kleiner als der bei der Annahme $h = \text{const.}$ sich ergebende. Wird der Rechnung ein bestimmter Zahlenwert von h zu Grunde gelegt, so ist allerdings die Entwicklung des Systems noch nicht beendet, wenn der Endzustand $\omega' = \Omega$ erreicht ist, da eine weitere Verkleinerung von α_1 und α_2 die Winkelgeschwindigkeit von m_1 und m_2 wieder vergrössert, was zu einer neuen Aenderung von x und e Anlass gibt. Da aber in der Natur bei den Doppelsternen die Entwicklung auch noch nicht als vollendet gelten kann, so bleiben unsere Rechnungsresultate passende Vergleichungswerte, um so mehr, als wir imstande sind, auch die absoluten Maximalwerte der Aenderungen von x und e festzustellen, die sich ergeben, wenn angenommen wird, die Massen m_1 und m_2 seien an der Grenze ihrer Kontraktionsfähigkeit angelangt.

Da H eine Konstante ist, so hat sie während der ganzen Entwicklung denselben Wert wie z. B. bei dem kritischen Jacobi'schen Ellipsoid. Es ist also

$$H = \frac{1}{5}\,(1 + \varepsilon_0^2)\,M\,a_0^2\,\omega_0.$$

Schreibt man

$$i_1 = \frac{2}{5}\,m_1\,\alpha_1^2, \quad i_2 = \frac{2}{5}\,m_2\,\alpha_2^2,$$

so erhält man aus der Gleichung $H = h\,\tau$, wenn man

$$\omega_0^2 = 2\,\pi\,\delta_0\,.\,0{,}142$$

setzt,

$$h = \frac{1}{5}\,(1 + \varepsilon_0^2)\sqrt{\frac{3.0{,}142\,a_0}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon_0'\,\alpha_1}}\;\sqrt[4]{\frac{5}{2\,(\mu_1\,\mu_2)^3\left[\mu_1 + \mu_2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}}.$$

Für den Fall $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$ wählen wir als besonderes Beispiel den Wert

$$\frac{a_0}{\alpha_1} = 10.$$

Dann berechnet sich für h der Wert 3,1904. Aus der Gleichung

$$y = \frac{x}{\tau} = \sqrt{\frac{r}{\alpha_1}} \sqrt[4]{\frac{5\,\mu_1\,\mu_2}{2\left[\mu_1 + \mu_2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}}$$

findet man ferner

$$y = 0{,}88914 \sqrt{\frac{r}{\alpha_1}}.$$

Die für den Anfang der eine Vergrösserung von e bewirkenden Entwicklung geltenden Werte von y und r sollen mit dem Index a, die für das Ende derselben geltenden mit dem Index e bezeichnet werden. Bezeichnet man ferner die in den Tabellen II und III für $\frac{r}{a_0}$ angegebenen Werte mit λ, so ist

$$r_a = \lambda\, a_0$$

und man erhält also

$$y_a = 2{,}8117 \sqrt{\lambda}.$$

Die Grösse $y^4 - hy^3 + 1$ ist immer negativ, da sie sich von dem Ausdrucke

$$1 - \frac{\omega'}{\Omega}$$

nur durch einen positiven Faktor unterscheidet. Die Exzentrizität nimmt also zu, solange die Bedingung

$$y^4 - hy^3 + \frac{18}{11} < 0$$

besteht. Aus ihr folgt

$$y_e < 3{,}1376.$$

Um die Rechnung für die beiden noch in Frage kommenden Fälle $\mu_1 : \mu_2 = 2:1$ und $\mu_1 : \mu_2 = 3:1$ zu vereinfachen, setzen wir fest, dass h denselben Wert behalte. Dann ergibt sich im ersten Falle

$$\frac{a_0}{\alpha_1} = 7{,}847, \quad y = 0{,}8922 \sqrt{\frac{r}{\alpha_1}},$$

$$y_a = 2{,}4993 \sqrt{\lambda}, \quad y_e = 3{,}1376,$$

im zweiten Falle

$$\frac{a_0}{\alpha_1} = 6{,}059, \quad y = 0{,}8567 \sqrt{\frac{r}{\alpha_1}},$$

$$y_a = 2{,}1088 \sqrt{\lambda}, \quad y_e = 3{,}1376.$$

Der Bruch
$$\frac{y_a}{y_e} = \sqrt{\frac{r_a}{r_e}} = \frac{x_a}{x_e}$$
lässt die im Laufe der Entwicklung eingetretene Vergrösserung der Umlaufsbewegungsgrösse erkennen. In der folgenden Tabelle sind die angegebenen Zahlenwerte noch einmal übersichtlich zusammengestellt:

Tabelle V.

$\frac{\mu_1}{\mu_2}$	$\frac{a_0}{\alpha_1}$	$\frac{y_a}{\sqrt{\lambda}}$	y_e	$\lambda\frac{r_e}{r_a}$
1	10	2,8117	3,1376	1,2452
2	7,847	2,4993	3,1376	1,5759
3	6,059	2,1088	3,1376	2,2137

Wird y grösser als y_e, so verkleinert sich die Exzentrizität wieder. Der grösste Wert, den y, bei dem für α_1 angenommenen Werte, erreichen kann, ergibt sich aus der Gleichung $\omega' = \Omega$, welche, in y ausgedrückt,
$$y^4 - hy^3 + 1 = 0$$
lautet. Man findet $y = 3{,}1587$.

Da fast während der ganzen Zeit der Exzentrizitätszunahme $\frac{\omega'}{\Omega}$ einen grossen Wert hat, so nähert sich der über diesen Zeitraum erstreckte Integralwert unserer Gleichung dem Integrale der Gleichung
$$\frac{d \log e}{dy} = \frac{11}{2\,y}.$$
Schreiben wir die Differentialgleichung in der Form
$$\frac{d \log e}{dy} = \frac{11}{2\,y} + \frac{7}{2}\,\frac{1}{y\,(y^4 - hy^3 + 1)},$$
so hat also der letzte Ausdruck einen verhältnismässig kleinen Wert. Soll die ganze mögliche Vergrösserung der Exzentrizität bestimmt werden, so ist zwischen den Grenzen y_a und y_e zu integrieren. Schreibt man
$$\sigma = -\frac{7}{2}\int_{y_a}^{y_e} \frac{dy}{y\,(y^4 - hy^3 + 1)},$$
so folgt aus der letzten Gleichung unmittelbar
$$\log \frac{e_e}{e_a} = \frac{11}{2} \log \frac{y_e}{y_e} - \sigma.$$
Um den Wert von σ zu bestimmen, wählen wir das Verfahren der approximativen Integration. Als Integrationsintervall nehmen wir $dy = 0{,}1$. Es sei
$$Y = -\frac{1}{y\,(y^4 - hy^3 + 1)};$$

Dann findet man

Tabelle VI.

y_a	Y	σ	y_a	Y	σ
3,1376	0,5009	—	2,4	0,0420	0.1947
3,1	0,1905	0,0455	2,3	0,0442	0,2098
3,0	0,0805	0,0929	2,2	0,0476	0,2259
2,9	0,0567	0,1169	2,1	0.0523	0,2433
2,8	0,0472	0,1353	2,0	0,0586	0,2627
2,7	0,0428	0,1512	1,9	0,0670	0,2847
2,6	0,0410	0,1659	1,8	0,0781	0,3101
2,5	0,0409	0,1802	1,7	0,0930	0,3401

Alle Werte von σ sind etwas zu gross; doch ist der Fehler nur unbedeutend und relativ um so kleiner, je grösser σ ist.

In der nachfolgenden Tabelle VII sind die in den drei Fällen $\mu_1 : \mu_2 = 1, 2, 3$ sich ergebenden Zahlenwerte zusammengestellt. Der im Augenblicke der Trennung der beiden Körper bestehende Wert von $\frac{\delta}{\delta_0}$ folgt aus der im § 2 abgeleiteten Gleichung des Flächensatzes, unter Benutzung der in Tabelle III enthaltenen Werte von ε und k. Mit Hülfe desselben findet man den Wert von $\frac{\omega}{\omega_0}$ aus der Gleichung

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\delta\,\nu}{0{,}142\,\delta_0}},$$

und den Wert von $\frac{r_a}{a_0} = \lambda$ aus der Gleichung

$$\frac{r_a}{a_0} = \left(\frac{2\,k}{3\,\nu}\,\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_0'\,\delta_0}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(vergl. § 2). Der Wert von $\frac{a_1}{r_a}$ ergibt sich ebenso wie früher (§ 2) aus der Gleichung

$$\frac{a_1}{r_a} = \left(\mu_1\,\frac{3\,\nu}{2\,\varepsilon\,k}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Den Wert von $\frac{\alpha_1}{r_a}$ erhält man, indem man $\frac{r_a}{a_0} = \lambda$ mit dem in Tabelle V angegebenen Werte von $\frac{a_0}{\alpha_1}$ multipliziert. Der Wert von $\frac{\alpha_1}{a_1}$ ist das Ergebnis der Division von $\frac{\alpha_1}{r_a}$ und $\frac{a_1}{r_a}$. y_a berechnet sich ebenfalls aus Tabelle V mit Hülfe der für λ geltenden Werte. Dann folgt $\frac{r_e}{r_a}$ aus der Gleichung

$$\frac{r_e}{r_a} = \left(\frac{y_e}{y_a}\right)^2.$$

σ ergibt sich durch Interpolation aus der Tabelle VI, wenn man beachtet, dass von y_a bis y_e zu integrieren ist. Durch Einsetzen der Werte von $\frac{y_e}{y}$ und σ in der für die Exzentrizität hergeleiteten Integralgleichung findet man endlich den Wert von $\frac{e_e}{e_a}$.

Tabelle VII.

ν	$\frac{\mu_1}{\mu_2}$	$\frac{\delta}{\delta_0}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{r_a}{a_0}=\lambda$	$\frac{a_1}{r_a}$	$\frac{\alpha_1}{r_a}$	$\frac{\alpha_1}{a_1}$	y_a	$\frac{r_e}{r_a}$	σ	$\frac{e_e}{e_a}$	$\frac{E}{e_a}$
0,12	3	1,28	1,04	0,88	0,55	0,187	0,34	1,98	2,51	0,268	9,64	13,8
	2	2,21	1,37	0,74	0,53	1,173	0,33	2,15	2,14	0,235	6,39	8,86
	1	3,29	1,67	0,64	0,48	0,155	0,32	2,26	1,93	0,217	4,94	6,72
0,11	3	1,16	0,95	0,94	0,54	0,177	0 33	2,04	2,37	0,255	8,29	11,7
	2	2,04	1,26	0,78	0,51	0,164	0,32	2,20	2,03	0,226	5,62	7,72
	1	3,10	1,55	0,67	0,47	0,148	0,32	2,31	1,85	0,209	4,39	5,93
0,10	3	1,06	0,86	0,99	0,51	0,166	0,33	2,10	2,23	0,243	7,12	9,97
	2	1,91	1,16	0,82	0,49	0,156	0,32	2,26	1,93	0,217	4,92	6,70
	1	2,94	1,44	0,70	0,45	0,143	0,32	2,35	1,78	0,202	3,96	5,32
0,09	3	0,98	0,79	1,05	0,49	0,157	0,32	2,16	2,10	0,233	6,11	8,46
	2	1,80	1,07	0,86	0,47	0,148	0,32	2,32	1,83	0,207	4,30	5,80
	1	2,82	1,34	0,74	0,43	0,135	0,32	2,42	1,68	0,192	3,46	4,59
0,08	2	1,72	0,98	0,91	0,45	0,141	0,31	2,38	1,74	0,198	3,76	5,02
	1	2,74	1,24	0,78	0,41	0,129	0,32	2,48	1,61	0,184	3,05	4,02
0,07	2	1,67	0,91	0,96	0,43	0,133	0,31	2,44	1,65	0,189	3,28	4,34
	1	2,70	1,15	0,81	0,39	0,123	0,32	2,54	1,53	0,175	2,71	3,54
0,06	2	1,64	0,83	1,01	0,41	0,126	0,31	2,51	1,56	0,179	2,85	3,73
	1	2,72	1,07	0,85	0,37	0,117	0,32	2,60	1,46	0,166	2,40	3,10

Bevor wir, auf Grund der für $\frac{e_e}{e_a}$ hergeleiteten Zahlenwerte, in eine Diskussion der See'schen Theorie eintreten, wollen wir noch einmal kurz darauf hinweisen, unter welchen Voraussetzungen sie berechnet wurden. Um eine Integration der Differentialgleichung für e zu ermöglichen, haben wir h als konstant angenommen. Die in der Tabelle VII für $\frac{\alpha_1}{a_1}$ angegebenen Werte lassen erkennen, dass bei dem der Rechnung zu Grunde gelegten Werte von h [$h = 3{,}1904$], stets eine Kontraktion erfolgt ist, die die ursprünglichen Achsen der Massen m_1 und m_2 ungefähr auf den dritten Teil verkürzt hat. Die Annahme $h = \text{const.}$ verlangt, dass die Gezeitenwirkung erst dann einsetzt, wenn die angegebene Verkürzung der Achsen[1]) bereits

[1]) Während der Zeit der Achsenverkürzung würde die Rotationsbeschleunigung von m_1 und m_2 dem Flächensatze gemäss erfolgen. Durch eine leichte Rechnung findet man, dass, wenn die Achsen sich bis auf den 3. Teil verkürzt haben, die Rotationsgeschwindigkeit nur in den Fällen $\nu \lesseqgtr 0{,}09$ so klein bleibt, dass m_1 und m_2 als stabile Rotationsellipsoide existieren können; für $\nu > 0{,}09$ müssen sie bereits dreiachsige Ellipsoide geworden sein. Bei der Berechnung der Tabelle VII nahmen wir an, dass auch im letzten Falle m_1 und m_2 Rotationsellipsoide seien. Da unsere Rechnungen jedoch von der Gestalt

eingetreten ist. Die in der Tabelle enthaltenen Werte von $\frac{e_e}{e_a}$ geben nun den Maximalwert der unter dieser Voraussetzung stattfindenden Exzentrizitätsvergrösserung, da das Integral bis zu dem Zeitpunkte erstreckt wurde, von welchem an wieder eine Verkleinerung der Exzentrizität eintritt, was der Fall ist, wenn 18 Rotationen dieselbe Zeit erfordern wie 11 Umläufe.

Die wirklich stattfindenden Exzentrizitätsänderungen sind nun auf jeden Fall geringer als die berechneten, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Bei der Annahme $h = \text{const.}$ hat während der Zeit, wo die Gezeitenwirkung die Exzentrizität vergrössert, der Bruch $\frac{\omega'}{\Omega}$ und folglich auch

$$\frac{d \log e}{d x}$$

stets einen grösseren Wert als in Wirklichkeit. — Während der Zeit, wo sich die Achsen von m_1 und m_2 von dem Werte a bis zu dem Werte 0,782 a verkürzen, tritt sogar eine Verkleinerung der Exzentrizität ein; bei der Annahme $h = \text{const.}$ trägt aber die dieser Zeit entsprechende Vergrösserung von x zu einer Vergrösserung von e bei.

2. Wenn die Achsen sich bis auf den dritten Teil verkürzt haben, wird die Rotationsbewegungsgrösse der Massen m_1 und m_2 nie so sehr geschwächt ein, dass die Gleichung $11\,\omega' = 18\,\Omega$ bestünde; denn diese Annahme setzt voraus, dass die Verkleinerung der Umlaufs- und der Rotationswinkelgeschwindigkeit ungefähr gleichen Schritt halten, was ganz ausgeschlossen ist, da die Gezeitenwirkung der 6. Potenz von r umgekehrt proportional und der 3. Potenz der Achsen direkt proportional ist, also sehr schnell abnimmt[1]), wenn die Entfernung zwischen den Mittelpunkten sich vergrössert und die Kontraktion die Dimensionen der Massen verkleinert.

Die in der Tabelle angegebenen Exzentrizitätsänderungen sind also Maximalwerte, hinter denen die wirklich vorkommenden

---

der Massen m_1 und m_2 im Grunde ganz unabhängig sind und nur auf der Voraussetzung beruhen, dass eine Umwandlung der Rotationsenergie in Revolutionsenergie eintrete, bis ein bestimmter Endzustand $[11\,\omega' = 18\,\Omega]$ erreicht ist, so ist es für unsere Untersuchungen gänzlich belanglos, ob m_1 und m_2 anfangs als Rotationsellipsoide mit den Achsen $2\alpha_1$ und $2\alpha_2$ wirklich bestehen können oder nicht.

[1]) Diese Verkleinerung der Gezeitenwirkung kann durch eine Vergrösserung des Verzögerungswinkels φ nicht wieder aufgehoben werden. Da die Viskosität eines Gases von seiner Dichte ganz unabhängig ist, so ist φ_1, wenn Ω gegen ω' vernachlässigt werden kann, ω' proportional. Bei der Kontraktion verkleinert sich durch die Gezeitenwirkung die Grösse $\omega' \alpha_1^2$; ω' ist also nicht einmal dem Quadrat der Achse umgekehrt proportional. Berücksichtigt man, dass die Gezeitenwirkung mit der 3. Potenz von α_1 abnimmt, dass der sinus weniger schnell wächst als der Winkel, und dass r sich vergrössert, so folgt, dass sich bei der Kontraktion der Massen die Gezeitenwirkung auf jeden Fall schneller als α_1 verringert.

im allgemeinen beträchtlich zurückstehen müssen. Allerdings ist die Entwicklung der Massen m_1 und m_2 noch nicht abgeschlossen, wenn sich ihre Achsen ungefähr auf den dritten Teil verkürzt haben. Die berechneten Zahlen behalten aber doch ihren Wert; denn einmal ist auch bei den beobachteten Doppelsternen die Entwicklung noch längst nicht abgeschlossen; und ferner ist leicht zu zeigen, dass, wenn bei der Voraussetzung $\alpha_1 = \frac{1}{3} a_1$

$$11\,\omega' = 18\,\Omega$$

geworden ist, die in den Massen m_1 und m_2 noch enthaltene Bewegungsgrösse so gering ist, dass ihre Verwandlung in Umlaufsbewegungsgrösse nicht mehr zu einer beträchtlichen Aenderung von r und e führen kann.

Den Maximalwert von r und damit auch von e erhält man, wenn man annimmt, m_1 und m_2 seien zu materiellen Punkten zusammengeschrumpft; dann ist am Ende der Entwicklung die ganze Bewegungsgrösse des Systems in Umlaufsbewegungsgrösse verwandelt. Dieser Maximalwert von r sei R; die maximale Exzentrizität sei E. Dann besteht die Gleichung $x = H$ oder

$$\frac{m_1\, m_2}{M} R^2\, \Omega = \frac{1 + \varepsilon_0^2}{5} M\, a_0^2 \omega_0.$$

Da $R^3\,\Omega^2 = M$ ist, so folgt hieraus

$$\mu_1\, \mu_2\, M^{\frac{1}{2}}\, R^{\frac{1}{2}} = \frac{1 + \varepsilon_0^2}{5}\, a_0^2\, \omega_0.$$

Setzt man

$$\omega_0 = \sqrt{2\,\pi\,\delta_0\, 0{,}142}$$

und

$$M = \frac{4\,\pi}{3} a_0^3\, \varepsilon_0\, \varepsilon_0'\, \delta_0,$$

so erhält man

$$\frac{R}{a_0} = \frac{3.0{,}142}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon_0'} \left(\frac{1 + \varepsilon_0^2}{5\,\mu_1\,\mu_2}\right)^2.$$

Da

$$\frac{r_a}{a_0} = \lambda$$

ist, so ergibt sich endlich

$$\frac{R}{r_a} = \frac{3.\,0{,}142}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon_0'\,\lambda} \left(\frac{1 + \varepsilon_0^2}{5\,\mu_1\,\mu_2}\right)^2.$$

Das Integral σ wird um so kleiner, je grösser h ist. Für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ wird h unendlich gross und $\sigma = 0$. Die für e abgeleitete Integralgleichung reduziert sich dann auf

$$\frac{E}{e_a} = \left(\frac{R}{r_a}\right)^{\frac{11}{4}}.$$

Die Werte von $\frac{E}{e_a}$ stehen in der letzten Spalte der Tabelle VII. Nach dem Gesagten bedeuten sie absolute Maxima der Exzentritätsänderungen, die von den in den beobachteten Doppelsternsystemen wirklich eingetretenen Aenderungen bei weitem nicht erreicht werden können. Denn erstens sind die Sterne nicht materielle Punkte, sondern noch einer grösseren oder geringeren Kontraktion fähig; und zweitens kann der Zeitpunkt, bis zu welchem die Integration erstreckt wurde, noch bei keinem Doppelsternsystem eingetreten sein, da die Bedingung $11\,\omega' = 18\,\Omega$ für unendlich kleines α_1 mit der das Ziel der gesamten Entwicklung bestimmenden Bedingung $\omega' = \Omega$ zusammenfällt, dieser Endzustand aber nur asymptotisch, d. h. nach unendlich langer Entwicklungszeit, erreicht werden kann.

Auch wenn man α_1 endliche Werte beilegt, wird die obere Integrationsgrenze fast für alle wirklich bestehenden Doppelsternsysteme zu gross gewählt sein, da die der Gezeitenreibung zur Verfügung stehende bisherige Entwicklungszeit der Systeme bei weitem nicht ausreichen dürfte, die Bedingung $11\,\omega' = 18\,\Omega$ zu verwirklichen. Wenn man das Gegenteil annehmen wollte, so müsste man, da unmöglich alle Doppelsterne gleichzeitig diesen Zustand erreichen konnten, die weitere Annahme machen, dass durchschnittlich ebensoviele Doppelsterne den Zustand bereits überschritten haben, wie ihm noch entgegenstreben. Bei den Sternen der ersten Art würde aber schon eine geringe Verkleinerung von ω' [von dem Werte $\frac{18}{11}\,\Omega$ bis zu dem Werte Ω[1])] genügen, die Exzentrizität auf den Wert 0 zu reduzieren. Der mittlere Wert der Bahnexzentrizitäten müsste also bedeutend kleiner sein als der in der Tabelle enthaltene, der sich ergibt, wenn der Zeitpunkt $11\,\omega' = 18\,\Omega$ als Endpunkt der Integration gewählt wird.

Durch frühere Betrachtungen (§ 4) wurden wir bei dem Versuche, für die Anfangsexzentrizität e_a einen wahrscheinlichen Wert festzusetzen, auf $\frac{1}{25}$ als Maximalwert geführt. Selbst wenn wir für e_a diesen Maximalwert wählen, erreicht im Falle $\mu_1 = \mu_2$ e_e für kein ν den Wert 0,2, E nicht den Wert 0,27; für $\mu_1 = 2\,\mu_2$ wird e_e höchstens gleich 0,25 und E gleich 0,35, und sogar bei dem nach unseren früheren Untersuchungen (§ 3) bereits unwahrscheinlichen Massenverhältnisse $\mu_1 = 3\,\mu_2$ würde e_e erst den Wert 0,38 und E den Wert 0,55 erreichen.

Aber auch diese Maximalwerte sind noch bedeutend zu reduzieren. Die für e angegebene, unserer ganzen Rechnung zu Grunde liegende Differentialgleichung ist nämlich nur eine Näherungsformel. Schreibt man

$$q = 1 - \sqrt{1 - e^2},$$

[1]) Für $\alpha_1 = \frac{a_1}{3}$ verschiebt sich dann in dem Integrale $\int \frac{d \log e}{d\,y}$ die obere Integrationsgrenze von dem Werte 3,1376 nur bis zu dem Werte 3,1587.

so lautet die genauere Gleichung[1]), nachdem man die entsprechenden Umformungen wie früher vorgenommen hat,

$$\frac{d \log q}{d y} = \frac{11}{y} \frac{\left(1 + \frac{27}{2} q\right)\left(\omega' - \frac{18}{11} \Omega\right)}{(1 + 27 q)(\omega' - \Omega)}.$$

Schreibt man

$$\frac{1}{2} \int_{y_a}^{y_e} \frac{11 \omega' - 18 \Omega}{\omega' - \Omega} \frac{d y}{y} = \log \left(\frac{y_e}{y_a}\right)^{\frac{11}{2}} - \sigma = \log k,$$

so folgt aus der letzten Gleichung durch Integration

$$\frac{q_e \left(1 + \frac{27}{2} q_e\right)}{q_a \left(1 + \frac{27}{2} q_a\right)} = k^2.$$

Löst man diese Gleichung nach q auf und setzt für q seinen Wert, so erhält man

$$\sqrt{1 - e_e^2} = \frac{28 - \sqrt{27 k^2 q_a (2 + 27 q_a) + 1}}{27}.$$

k' und K seien die Werte von k in den beiden Fällen $\alpha_1 = \frac{1}{3} a_1$ und $\alpha_1 = 0$. Für e_a wählen wir zwei Werte, zuerst den von uns als Maximalwert bezeichneten Wert $\frac{1}{25}$, für welchen $q_a = \frac{1}{1250}$ ist, ausserdem den von See benutzten, aber ohne Zweifel viel zu grossen (vergl. S. 214 f.) Wert $\frac{1}{10}$, für welchen $q_a = \frac{1}{200}$ ist. Die für e_e und E aus der obigen Gleichung sich ergebenden Werte stehen in der Tabelle VIII in den Spalten hinter k' und K.

Aus den früher angegebenen Gründen sind auch die in nachstehender Tabelle enthaltenen Werte e_e und E Maximalwerte, hinter denen die wirklichen Werte weit zurückbleiben müssen. Sie sind so klein,[2]) dass es fraglich erscheint, ob die

---

[1]) Darwin, Phil. Trans., Part. II, 1880.

[2]) Die Tabellen VII und VIII zeigen, dass, gleiche Anfangsexzentrizitäten vorausgesetzt, die Exzentrizitäten um so grösser werden, je grösser das Massenverhältnis $\mu_1 : \mu_2$ ist. Daraus folgt aber nicht, dass in der Natur die Doppelsternsysteme mit grösseren Massenverhältnissen im allgemeinen grössere Bahnexzentrizitäten aufweisen müssten als die Systeme mit kleineren Massenverhältnissen. Die Gezeitenwirkung nimmt nämlich schnell ab, wenn sich das Massenverhältnis vergrössert. Da sie der Grösse $m_2^2 : m_1$ proportional ist, so erhalten sich, bei gleicher Gesamtmasse des Systems und sonst gleichen Umständen, ihre Beträge bei den Massenverhältnissen $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}$ wie $6 : 2 : 1$. Die Exzentrizitätsänderungen erfordern hiernach um so längere Zeit, je grösser das Massenverhältnis ist. Ausserdem vergrössert sich, bis der Endzustand

Tabelle VIII.

ν	$\frac{\mu_1}{\mu_2}$	k'	e_e		K	E	
			$e_a = 0{,}04$	$e_a = 0{,}1$		$e_a = 0{,}04$	$e_a = 0{,}1$
0,12	3	9,64	0.30	0,54	13,80	0,38	0,65
	2	6,39	0,22	0,43	8,86	0.28	0,52
	1	4,94	0,18	0,36	6,72	0,23	0,44
0,11	3	8,29	0.27	0,50	11,73	0,34	0,60
	2	5,62	0,20	0,39	7,72	0,26	0,48
	1	4.39	0,16	0,34	5,93	0,21	0,41
0.10	3	7,12	0,24	0,46	9,97	0,31	0,55
	2	4.92	0,18	0,36	6,70	0,23	0,44
	1	3,96	0,15	0,31	5,32	0,19	0,38
0,09	3	6,11	0.22	0,42	8,46	0.27	0,50
	2	4.30	0,16	0,33	5,80	0,20	0,40
	1*)	3,46*)	0,13	0,29*)	4,59	0,17	0,35
0,08	2	3,76	0.14	0,30	5,02	0,18	0,37
	1	3.05	0,12	0,26	4,02	0,15	0,32
0.07	2	3,28	0,12	0,27	4,34	0,16	0,33
	1	2,71	0,11	0,24	3,54	0,13	0,29
0.06	2	2,85	0,11	0,25	3,73	0,14	0.30
	1	2,40	0,09	0,23	3,10	0,12	0,26

*) Dieses Beispiel entspricht ungefähr dem von See (l. c. S. 39 ff.) berechneten Beispiel. See gelangt zu dem Werte $e_e = 0{,}57$. Die grosse Differenz zwischen diesem und unserem Werte $e_e = 0{,}29$ erklärt sich dadurch, dass See den negativen Wert der von ihm mit K bezeichneten Grösse irrtümlicherweise als positiv in Rechnung bringt.

durch Gezeitenreibung entstehende Exzentrizitätsvergrösserung überhaupt bis zu dem Werte 0,1 steigen kann. Es ist also ausgeschlossen, dass die Doppelsternsysteme, deren Bahnen einigermassen bedeutende Exzentrizitäten aufweisen,[1]) durch Zerfallen eines im hydrodynamischen Gleichgewichte befindlichen, rotierenden Nebels entstanden sind.

§ 6.

Die Bedeutung der Gezeitenreibung für die Entwicklung der Sternsysteme.

Es wird nützlich sein, die Bedeutung, welche die Gezeitenreibung als kosmischer Entwicklungsfaktor besitzt, noch etwas näher zu beleuchten.

$11\,\omega' = 18\,\Omega$ erreicht ist, bei grösserem Massenverhältnis der Abstand der Massen m_1 und m_2 mehr als bei kleinerem Verhältnis; die Gezeitenwirkung ist aber der 6. Potenz von r umgekehrt proportional. Wenn man gleiche Entwicklungszeiten annimmt, so sind also aus den angeführten Gründen die bei grösseren Massenverhältnissen möglichen grösseren Exzentrizitätsänderungen auf kleinere Beträge zu reduzieren.

[1]) Bemerkenswert ist, dass auch Darwin Bedenken äussert, ob die Gezeitenreibung imstande sei, die von See behauptete Wirkung hervorzubringen. Die Exzentrizitäten sind häufig so gross, dass wir nach ihm vielleicht der angenommenen Ursache ein zu grosses Gewicht beilegen (Darwin, Ebbe u. Flut, Teubner 1902, S. 312).

Die Gezeitenwirkung der Masse m_1 auf die Masse m_2 ist der Grösse

$$\frac{\tau^2}{\gamma} \sin 2\varphi = \frac{m_2^2}{m_1} \frac{\alpha_1^3}{r^6} \sin 2\varphi$$

proportional. Sind in zwei, dieselben Massen aufweisenden Doppelsternsystemen D und d sämtliche Dimensionen des ersten das n-fache der Dimensionen des zweiten, so ist also, wenn φ in beiden Systemen denselben Wert hat, die Gezeitenwirkung in d n^3mal so gross als in D. Da aber φ von der Rotationsgeschwindigkeit der Masse m_1 abhängt und diese, wenn beide Systeme ihre Entwicklungsphasen in übereinstimmender Weise durchmachen, in d n^2mal so gross ist als in D, so ist sin 2φ in D bedeutend kleiner als in d. Ist der Verzögerungswinkel so klein, dass für den sinus der Bogen gesetzt werden kann, so wirkt hiernach die Gezeitenreibung in D nur ungefähr mit dem n^5ten Teile der Kraft als in d; sie ist also in e n g e n Systemen unverhältnismässig grösser als in w e i t e n Systemen. Soll auch in weiten Systemen die Gezeitenreibung eine grössere Wirkung ausüben, so müsste die Viskosität so gross angenommen werden, dass sin 2φ nicht mehr verschwindend kleine Werte hätte. Dies ist aber nicht zulässig, erstens, weil die erforderliche Viskosität alle bei Gasen gemessenen Werte weit übersteigen würde, und zweitens, weil in späteren Zeiten, infolge der durch die Kontraktion verursachten Rotationsbeschleunigung, sin 2φ bald negativ werden und die Wirkungen der Gezeitenreibung in die entgegengesetzten verwandeln würde. In weiten Systemen kann daher die Gezeitenreibung nicht von Bedeutung sein; ausserdem muss sie an Grösse ziemlich schnell abnehmen, weil bei der geringen Dichte die Gravitationskontraktion noch eine beträchtliche Verkleinerung von α_1 zulässt. Ist die Gezeitenwirkung nur schwach, so bleibt fast die ganze Rotationsbewegungsgrösse den Teilmassen erhalten, sie beschleunigen ihre Rotation also fast in dem Maße, wie es der Flächensatz verlangt. Dann aber nimmt schon bei verhältnismässig geringer Kontraktion die Rotationsgeschwindigkeit so sehr zu, dass das Rotationsellipsoid in ein dreiachsiges Ellipsoid und dieses in die Birnenfigur übergeht, worauf bald eine neue Teilung eintritt. Die Grösse der erforderlichen Kontraktion lässt sich leicht berechnen. α_1 sei die halbe grosse Achse des kritischen Rotationsellipsoids m_1, δ_1 seine Dichte, ε_1 das Verhältnis seiner Achsen, ω_1 seine Winkelgeschwindigkeit; dann bestehen die Gleichungen

$$a_1^3 \varepsilon \delta = \alpha_1^3 \varepsilon_1 \delta_1,$$

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 = \frac{0{,}1871}{\nu} \frac{\delta_1}{\delta}.$$

Gilt für m_1 der Flächensatz, so ist ausserdem

$$a_1^2 \omega = \alpha_1^2 \omega_1.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\nu \varepsilon_1}{0{,}1871\,\varepsilon}$$

oder

$$\alpha_1 = 3{,}11 \frac{\nu}{\varepsilon} a_1 .$$

Setzt man für ν und ε ihre Werte aus der Tabelle I, so findet man [für $\nu = 0{,}06$ bis $0{,}12$], dass α_1 zwischen $0{,}21\,a_1$ und $0{,}5\,a_1$ liegt. Wenn sich die Dimensionen von m_1 und m_2 um etwas mehr als die Hälfte verkürzen, so kommt also bereits wieder das kritische Rotationsellipsoid zur Ausbildung. Eine weitere verhältnismässig geringe Vergrösserung der Dichte [auf den 4,5fachen Wert, vergl. § 1] genügt dann, es in das kritische Jacobi'sche Ellipsoid überzuführen; darauf tritt bald die Teilung ein. Derselbe Vorgang kann sich noch mehrere Male wiederholen, bis endlich die Dichte einen solchen Grad erlangt, dass eine weitere beträchtliche Kontraktion unmöglich ist. Aus dem Gesagten folgt, dass weite Systeme sich nicht in Doppelsterne, sondern in mehrfache Sterne verwandeln müssen, ferner, dass die Gezeitenreibung in diesen Systemen nur eine unbedeutende Rolle gespielt hat und spielt. Umgekehrt lässt sich schliessen, dass wirklich bestehende, weite Doppelsternsysteme [d. h. also alle visuellen] nicht durch Zerfallen von Rotationsfiguren entstanden sein können. Nur in engen Systemen, wo die Entfernung der Schwerpunkte klein ist, der Verzögerungswinkel φ infolge der grösseren Rotationsgeschwindigkeit nennenswerte Beträge erreicht und die Gravitationskontraktion so langsam erfolgt, dass die Oberflächen von m_1 und m_2 längere Zeiträume einander benachbart bleiben, kann die Gezeitenreibung grössere Bedeutung gewinnen. Sie bewirkt in diesen Systemen eine Vergrösserung ihrer Stabilität. Da die Vergrösserung des Abstandes der Massen durch einen Verlust an Rotationsbewegungsgrösse kompensiert wird und eine beträchtliche Kontraktion nicht mehr eintreten kann, so besteht für sie keine Gefahr mehr, von neuem in Teile zu zerfallen; sie gehen einer ruhigen Entwicklung entgegen. Nach dem im vorigen § Gesagten bleibt ihre Bahnexzentrizität klein.

Hiernach ist es wahrscheinlich, dass die engen, spektroskopischen Doppelsterne, deren Bahnexzentrizität durchschnittlich sehr gering ist, falls ihr Massenverhältnis nicht den Wert 3 : 1 übersteigt, durch Zerfallen rotierender, bereits ziemlich verdichteter Massen entstanden sind. Im Gegensatze hierzu müssen die Doppelsterne weit ausgedehnter Systeme, da sie durch Zerfallen rotierender, im hydrodynamischen Gleichgewichte befindlicher Massen nicht entstanden sein können, von Anfang an als getrennte Massen bestanden haben; sie sind wahrscheinlich aus Nebeln hervorgegangen, die verschiedene Verdichtungszentren aufwiesen.

§ 7.

Schluss.

Unsere Untersuchungen haben zu folgenden Ergebnissen geführt:

1. Die durch Zerfallen eines homogenen, rotierenden Nebels entstehenden Teilmassen stehen in einem Massenverhältnisse, das den Wert 3 : 1 nicht übersteigt (§ 3).
2. Die Anfangsexzentrizität e_a der Bahnen ist sehr klein. Ihr Maximalwert ist ungefähr 0,03, ihr durchschnittlicher Wert aber beträchtlich kleiner (§ 4).
3. Die Gezeitenreibung ist nicht imstande, die geringe Anfangsexzentrizität nachträglich so sehr zu vergrössern, dass die bei den meisten Doppelsternen festgestellten grossen Bahnexzentrizitäten ihre Erklärung fänden. Die Maximalwerte der durch die Gezeitenreibung vergrösserten Exzentrizität, hinter denen aber die wirklich vorkommenden Exzentrizitätswerte durchschnittlich weit zurückbleiben müssen, sind für $e_a = 0{,}04$ bei den Massenverhältnissen $\frac{m_1}{m_2} = 3, 2, 1$ nur 0,38, 0,28 und 0,23 (§ 5).
4. Durch Zerfallen eines rotierenden Nebels können nur enge Doppelsternsysteme entstehen. In solchen Systemen bewirkt die Gezeitenreibung wahrscheinlich eine Vergrösserung der Stabilität. Die *weiten* Systeme müssen, da die Gezeitenreibung in ihnen keine grossen Wirkungen ausüben kann, in *mehrfache* Systeme übergehen (§ 6).