Elementare Ableitung der astronomischen Störungsgleichungen (II).

Von

Dr. Fr. Nölke.

In einem kleinen, kürzlich veröffentlichten Aufsatze[1]) habe ich gezeigt, dass die besonders bei der Bestimmung der Störungen der Kometenbahnen angewandten, sog. speziellen Störungsgleichungen eine sehr einfache Herleitung zulassen, wenn anstatt der Bahnelemente, wie es gewöhnlich geschieht, die Integrationskonstanten als variabel betrachtet werden. Es lassen sich jedoch auch die allgemeinen astronomischen Störungsgleichungen, in welche die Störungsfunktion in ihren nach den Elementen genommenen partiellen Ableitungen eingeht, auf ähnliche Weise herleiten, was in diesem Aufsatze nachgewiesen werden soll.

§ 1.

Die Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung lauten

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k\,M\,x}{r^3}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{k\,M\,y}{r^3}, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{k\,M\,z}{r^3}. \end{cases}$$

Die Integrale heissen

$$(2)\quad \begin{cases} x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = \alpha_1, \\[2ex] y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = \alpha_2, \qquad \alpha = +\sqrt{\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2} \\[2ex] z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt} = \alpha_3; \end{cases}$$

$$(3)\quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2\,k\,M}{r} + \beta, \quad \beta = -\frac{k\,M}{a};$$

---

[1]) Archiv der Mathematik und Physik; III. Reihe, XVII, Heft 2/3.

$$(4)\qquad r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)},\quad p = \frac{\alpha^2}{k\,M},\quad e = 1 + \frac{\alpha^2\beta}{k^2 M^2};$$

$$(5)\qquad nt + \sigma = \arccos\frac{\lambda}{e} - \sqrt{e^2 - \lambda^2},\quad n = \sqrt{\frac{k\,M}{a^3}},\quad \lambda = 1 + \frac{r\beta}{k\,M}.$$

Wenn in (4) φ und φ_0 vom aufsteigenden Knoten an gerechnet werden, so ist $\varphi_0 = \omega$ und $\varphi - \varphi_0 = v$. Zwischen den Integrationskonstanten α_1, α_2, α_3, α, β, φ_0, σ und den Bahnelementen bestehen dann folgende Beziehungen:

$$(6)\qquad \alpha_1 = \alpha\cos i,\quad \alpha_2 = \alpha\sin i\,\sin\Omega,\quad \alpha_3 = -\alpha\sin i\cos\Omega,$$

$$(7)\qquad \beta = -\frac{k\,M}{a},\quad \varphi_0 = \omega,\quad \sigma = \sigma.$$

Sämtliche Integrationskonstanten sollen für den Zeitpunkt t gelten und so gewählt sein, dass sie die Bahn bestimmen würden, wenn von diesem Zeitpunkte an keine Störungen mehr stattfänden. Dann ist, wenn $\varkappa$ eine dieser Konstanten bedeutet, im Zeitpunkte $t + dt$ ihr Wert $\varkappa + d\varkappa$. Zunächst sollen die Aenderungen von α_1, α_2, α_3 und α bestimmt werden.

Die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung lauten

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k\,M\,x}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{k\,M\,y}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{k\,M\,z}{r^2} + \dfrac{\partial R}{\partial z}. \end{cases}$$

Die Integrale (2) werden gefunden, indem man die Gleichungen (1) in passender Reihenfolge mit x, y, z multipliziert und sie voneinander subtrahiert. Führt man dasselbe bei den Gleichungen (8) aus, so ergibt sich unmittelbar, dass z. B. der Zuwachs von α_1 in der Zeit dt

$$\left(x\frac{\partial R}{\partial y} - y\frac{\partial R}{\partial x}\right)dt$$

beträgt. Es ist daher

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = x\dfrac{\partial R}{\partial y} - y\dfrac{\partial R}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d\alpha_2}{dt} = y\dfrac{\partial R}{\partial z} - z\dfrac{\partial R}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{d\alpha_3}{dt} = z\dfrac{\partial R}{\partial x} - x\dfrac{\partial R}{\partial z}. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(10)\qquad \begin{cases} \alpha\dfrac{d\alpha}{dt} = \Sigma\,\alpha_\nu\dfrac{d\alpha_\nu}{dt} = a_1\dfrac{\partial R}{\partial x} + a_2\dfrac{\partial R}{\partial y} + a_3\dfrac{\partial R}{\partial z}, \\[2ex] a_1 = -y\,\alpha_1 + z\,\alpha_3,\quad a_2 = -z\,\alpha_2 + x\,\alpha_1,\quad a_3 = -x\,\alpha_3 + y\,\alpha_2. \end{cases}$$

Nun ist

$$(11) \quad \begin{cases} x = r\,[\cos(v+\omega)\cos\Omega - \sin(v+\omega)\sin\Omega\cos i], \\ y = r\,[\cos(v+\omega)\sin\Omega + \sin(v+\omega)\cos\Omega\cos i], \\ z = r\sin(v+\omega)\sin i. \end{cases}$$

Setzt man in (10) für α_1, α_2, α_3 und x, y, z ihre Werte aus (6) und (11), so erhält man

$$a_1 = r\,\alpha\,[-\sin(v+\omega)\cos\Omega - \cos(v+\omega)\sin\Omega\cos i],$$
$$a_2 = r\,\alpha\,[-\sin[v+\omega)\sin\Omega + \cos(v+\omega)\cos\Omega\cos i],$$
$$a_3 = r\,\alpha\cos(v+\omega)\sin i.$$

Dieselben Werte wie für $\frac{a_1}{\alpha}$, $\frac{a_2}{\alpha}$, $\frac{a_3}{\alpha}$ erhält man, da

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

von ω unabhängig ist, aus (11) für die partiellen Ableitungen von x, y, z nach ω; d. h. es ist

$$a_1 = \alpha\frac{\partial x}{\partial\omega},\quad a_2 = \alpha\frac{\partial y}{\partial\omega},\quad a_3 = \alpha\frac{\partial z}{\partial\omega}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte geht (10) über in

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\omega} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\omega} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\omega}$$

oder in

$$(12) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial\omega}.$$

Das Integral (3) ergibt sich, indem man die Gleichungen (1) mit d x, d y, d z multipliziert und sie dann addiert. Führt man dasselbe bei den Gleichungen (8) aus, so folgt

$$\frac{1}{2}\,d\beta = \frac{\partial R}{\partial x}\,dx + \frac{\partial R}{\partial y}\,dy + \frac{\partial R}{\partial z}\,dz.$$

In dieser Gleichung bedeuten d x, d y, d z die vollständigen Differentiale von x, y, z. Die Voraussetzung, dass die gestörte Bahn die ungestörte in jedem Punkte oskuliere, also mit ihr stets eine gemeinsame Tangente besitze, führt jedoch zu den Bedingungen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t},\quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Bedeutet $\varkappa$ wieder eine beliebige der Bahnkonstanten Ω, i, ω, a, e, σ, so müssen hiernach die Gleichungen

$$\sum_\varkappa \frac{\partial x}{\partial\varkappa}\frac{d\varkappa}{dt} = 0,\ \sum_\varkappa \frac{\partial y}{\partial\varkappa}\frac{d\varkappa}{dt} = 0,\ \sum_\varkappa \frac{\partial z}{\partial\varkappa}\frac{d\varkappa}{dt} = 0$$

identisch erfüllt sein. Dann geht die obige Gleichung über in

$$(13)\qquad \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Da t in R nur in der Verbindung $n t + \sigma$ und auch σ nur in dieser Verbindung auftritt, so ist

$$(14)\qquad \frac{\partial R}{\partial t} = n \frac{\partial R}{\partial \sigma},$$

also

$$(15)\qquad \frac{d\beta}{dt} = 2n \frac{\partial R}{\partial \sigma}.$$

Aus der Gleichung $\alpha_1 = \alpha \cos i$ findet man nunmehr einen Wert für $\frac{di}{dt}$. Durch Differentiation erhält man

$$(16)\qquad d\alpha_1 = \cos i \, d\alpha - \alpha \sin i \, di.$$

Nun folgt aus (11) unmittelbar

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = 0.$$

Mit Benutzung dieser Werte erhält man aus (9)

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \Omega} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}.$$

Dann folgt aus (16) und (12)

$$(17)\qquad \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{\alpha \sin i}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{\alpha \sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}.$$

Differenziert man ferner die Gleichung

$$\operatorname{tg} \Omega = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3},$$

so entsteht

$$\frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \Omega} d\Omega = \alpha_2 \, d\alpha_3 - \alpha_3 \, d\alpha_2.$$

Setzt man für α_2, α_3, $d\alpha_2$, $d\alpha_3$ ihre Werte aus (6) und (9), so folgt

$$\alpha \sin^2 i \frac{d\Omega}{dt} = z \sin \Omega \sin i \frac{\partial R}{\partial x} - z \cos \Omega \sin i \frac{\partial R}{\partial y}$$
$$+ (y \cos \Omega - x \sin \Omega)\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Setzt man für x und y ihre Werte aus (11), so wird

$$y \cos \Omega - x \sin \Omega = z \cos i.$$

Nun folgt aus (11)

$$\frac{\partial x}{\partial i} = z \sin \Omega, \quad \frac{\partial y}{\partial i} = -z \cos \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial i} = \operatorname{cotg} i;$$

Demnach hat man

$$\alpha \sin i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial i} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial i} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial i} = \frac{\partial R}{\partial i},$$

oder

$$\text{(18)} \qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\alpha \sin i}\frac{\partial R}{\partial i}.$$

In (17) und (18) sind zwei der abzuleitenden Störungsgleichungen bereits gefunden. Zu zwei weiteren führen die Gleichungen (12) und (15). Da $\beta = -\frac{kM}{a}$ ist, so folgt nämlich aus (15)

$$\frac{1}{a^2}\frac{da}{dt} = \frac{2n}{kM}\frac{\partial R}{\partial \sigma}$$

oder

$$\text{(19)} \qquad \frac{da}{dt} = \frac{2}{an}\frac{\partial R}{\partial \sigma}.$$

Ferner ist

$$e^2 = 1 + \frac{\alpha^2 \beta}{k^2 M^2},$$

also

$$2e\,de = \frac{2\alpha\beta}{k^2M^2}d\alpha + \frac{\alpha^2}{k^2M^2}d\beta$$

oder

$$\text{(20)} \qquad \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial \sigma} - \frac{1-e^2}{\alpha e}\frac{\partial R}{\partial \omega}.$$

Es fehlen nur noch die Werte für $\frac{d\omega}{dt}$ und $\frac{d\sigma}{dt}$. Sie sind es allein, die etwas grössere Rechnungen erfordern (siehe jedoch § 2). Um zunächst für $\frac{d\omega}{dt}$ einen Wert zu finden, ist zu bedenken, dass die Aenderungen, denen ω unterliegt, auf zwei verschiedene Ursachen zurückgehen. Einmal verschiebt sich das Perihel in der Bahn selbst; diese Verschiebung möge mit $d\omega_0$ bezeichnet werden. Da ω vom Knoten an gerechnet wird, so hat aber auch jede Aenderung des Knotens eine Aenderung von ω zur Folge. Verschiebt sich Ω um $d\Omega$, so ändert sich ω um $-\cos i\, d\Omega$. Demnach hat man

$$\frac{d\omega}{dt} = -\cos i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega_0}{dt}.$$

Für $\frac{d\omega_0}{dt}$ erhält man auf folgende Weise einen Wert. Differenziert man die Gleichung der Bahnellipse

$$1 + e\cos(\varphi - \omega_0) = \frac{p}{r},$$

indem man die Bahnelemente als veränderlich betrachtet, so folgt, wenn man die Beziehung

$$p = \frac{\alpha^2}{k\,M}$$

beachtet,

$$\cos(\varphi - \omega_0)\,d\,e + e \sin(\varphi - \omega_0)\,d\,\omega_0 = \frac{2\,\alpha\,d\alpha}{k\,M},$$

$$e \sin v\,d\,\omega_0 = \frac{2\,p}{\alpha\,r}\,d\,\alpha - \cos v\,d\,e.$$

Setzt man für $d\alpha$ und $d\,e$ ihre Werte aus (12) und (20) und beachtet (14), so erhält man

$$e \sin v \frac{d\,\omega_0}{dt} = \left(\frac{2\,p}{\alpha\,r} + \frac{1 - e^2}{\alpha\,e} \cos v\right) \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p^2 \cos v}{e\,\alpha^2} \frac{\partial R}{\partial t}.$$

$$\text{(21)} \qquad \frac{\alpha\,e \sin v}{p} \frac{d\,\omega_0}{dt} = \left(\frac{2}{r} + \frac{\cos v}{a\,e}\right) \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p \cos v}{e\,\alpha} \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Diese Gleichung drückt zwar $\frac{d\,\omega_0}{dt}$ durch partielle Ableitungen der störenden Kraft aus; aber ihre Koeffizienten enthalten ausser den Bahnelementen noch die Variabeln r und v. Eine andere Gleichung, bei der dies nicht der Fall ist, erhält man auf folgende Weise.

In den für x, y, z angegebenen Ausdrücken sind die Grössen a, e, t nur in r und v enthalten. Da v und ω immer in der Verbindung $v + \omega$ auftreten, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial \omega}.$$

Aus

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a}$$

folgt also, da ausserdem $\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r}$ ist,

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{r}\frac{\partial r}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial \omega}\frac{\partial v}{\partial a}.$$

Entsprechende Gleichungen bestehen für y und z. Setzt man in der Gleichung

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$$

für $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$ die angegebenen Werte ein und schreibt

$$\frac{x}{r}\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{z}{r}\frac{\partial R}{\partial z} = R',$$

so ergibt sich

$$(22)\qquad \frac{\partial R}{\partial a} = R' \frac{\partial r}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial \omega} \frac{\partial v}{\partial a}.$$

In derselben Weise erhält man für e und t

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial e} = R' \dfrac{\partial r}{\partial e} + \dfrac{\partial R}{\partial \omega} \dfrac{\partial v}{\partial e}, \\[2ex] \dfrac{\partial R}{\partial t} = R' \dfrac{\partial r}{\partial t} + \dfrac{\partial R}{\partial \omega} \dfrac{\partial v}{\partial t}. \end{cases}$$

Die Werte der in diesen Gleichungen auftretenden partiellen Ableitungen von r und v nach a und e erhält man leicht aus der Gleichung (5). Differenziert man (5), indem man r, σ, a und e als veränderlich betrachtet, so folgt, wenn man

$$(23)\qquad t\, d n + d \sigma = d \sigma'$$

schreibt,

$$(24)\qquad \begin{cases} d \sigma' = \dfrac{1}{\sqrt{e^2 - \lambda^2}} \left(\dfrac{p - r}{a e} d e - \dfrac{r}{a} d \lambda \right), \\[2ex] \lambda = 1 + \dfrac{r \beta}{k M} = 1 - \dfrac{r}{a};\ d \lambda = \dfrac{r}{a^2} d a - \dfrac{1}{a} dr. \end{cases}$$

Durch Einführung der neuen Grösse

$$\sigma' = \sigma + nt - \int n\, dt$$

wird die Bildung der partiellen Ableitungen nach a dadurch erleichtert, dass man auf das implizite Vorkommen von a in n keine Rücksicht mehr zu nehmen braucht. Setzt man in (24) $d \sigma'$ und $d e = 0$, so wird $d \lambda = 0$ oder

$$(25)\qquad \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a}.$$

Setzt man $d \sigma'$ und $d a = 0$, so entsteht

$$(26)\qquad \frac{\partial r}{\partial e} = - \frac{a (p - r)}{e r} = a \cos v.$$

Ausserdem ist

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma'} = \frac{\partial r}{\partial \sigma} = \frac{1}{n} \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\alpha e \sin v}{n p},$$

was auch aus (24) hervorgeht, wenn man $d e$ und $d a = 0$ setzt. Ferner folgt aus der Gleichung

$$\cos v = \frac{1}{e} \left(\frac{a (1 - e^2)}{r} - 1 \right)$$

durch partielle Differentiation nach a und e, wenn man die für $\frac{\partial r}{\partial e}$ und $\frac{\partial r}{\partial a}$ berechneten Werte benutzt,

(27) $$\sin v \frac{\partial v}{\partial a} = \frac{p}{a r e} - \frac{1-e^2}{e r} = 0,$$

(28) $$\sin v \frac{\partial v}{\partial e} = \frac{\cos v}{e} + \frac{2a}{r} - \frac{a p \cos v}{r^2 e}.$$

Hinzu kommt die Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\alpha}{r^2}.$$

Eliminiert man aus den beiden letzten der Gleichungen (22) R', so folgt

$$\frac{\partial R}{\partial e}\frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial e} = \frac{\partial R}{\partial \omega}\left(\frac{\partial v}{\partial e}\frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial e}\right).$$

Setzt man in dieser Gleichung für die partiellen Ableitungen von r und v nach e und t die angegebenen Werte, so erhält man

(29) $$\frac{1-e^2}{e\alpha}\frac{e\alpha \sin v}{p}\frac{\partial R}{\partial e} = \left(\frac{2}{r} + \frac{\cos v}{ae}\right)\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p \cos v}{e\alpha}\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt überein mit der rechten Seite der Gleichung (21), folglich hat man

$$\frac{d\omega_0}{dt} = \frac{1-e^2}{e\alpha}\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Die Gesamtänderung von ω ergibt sich demnach aus der Gleichung

(30) $$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{\alpha \sin i}\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1-e^2}{e\alpha}\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Einen Wert für $\frac{d\sigma'}{dt}$ findet man endlich aus der Gleichung (24), wenn man in derselben nur die Bahnelemente als veränderlich betrachtet. Setzt man in (24) für $d e$ und für

$$d\lambda = \frac{r\, d\beta}{k M}$$

ihre Werte aus (20) und (13), so folgt

(31) $$\frac{k M a}{r}\sqrt{e^2-\lambda^2}\frac{d\sigma'}{dt} = -\frac{\alpha \cos v}{a e}\frac{\partial R}{\partial \omega} + \left(\frac{p \cos v}{e} - 2r\right)\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Die Koeffizienten enthalten wieder die Variabeln r und v. Mit Hülfe der Gleichungen (22) kann man jedoch auch hier einen Ausdruck herleiten, bei dem dies nicht der Fall ist. Eliminiert man aus der 1. und 3. und aus der 2. und 3. der Gleichungen (22) die Grösse R', so erhält man, wenn man beachtet, dass nach (27) $\frac{\partial v}{\partial a} = 0$ ist,

(32) $$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial e}\frac{\partial r}{\partial a} - \frac{\partial R}{\partial a}\frac{\partial r}{\partial e} = \frac{\partial R}{\partial \omega}\frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial e}, \\ \frac{\partial R}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial a} - \frac{\partial R}{\partial a}\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial \omega}\frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial t}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn $\frac{\partial R}{\partial \omega}$ eliminiert wird,

$$(33) \quad \frac{\partial R}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial e} - \frac{\partial R}{\partial e}\frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial a}\left(\frac{\partial r}{\partial e}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial e}\right) = 0.$$

Mit Hülfe der 1. Gleichung (32) soll in (31) $\frac{\partial R}{\partial \omega}$, mit Hülfe von (33) dann $\frac{\partial R}{\partial t}$ durch $\frac{\partial R}{\partial a}$ und $\frac{\partial R}{\partial e}$ ausgedrückt werden. Schreibt man

$$(34) \quad \frac{\alpha \cos v}{a e} - \left(\frac{p \cos v}{e} - 2r\right)\frac{\partial v}{\partial t} \doteq A,$$

so findet man

$$(35) \quad \frac{k M a}{r}\sqrt{e^2 - \lambda^2}\,\frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial e}\frac{d\sigma'}{dt} = \left[A\frac{\partial r}{\partial e} + \left(\frac{p \cos v}{e} - 2r\right)\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial e}\right]\frac{\partial R}{\partial a} - A\frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Setzt man in (34) für $\frac{\partial v}{\partial t}$ seinen Wert $\frac{\alpha}{r^2}$ und vergleicht dann (34) mit (28), so folgt

$$(36) \quad A = \frac{\alpha \sin v}{a}\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{1 - e^2}{e}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial e}.$$

Ferner ist nach (24)

$$\sqrt{e^2 - \lambda^2} = \frac{r}{a^2}\frac{\partial r}{\partial \sigma'} = \frac{r}{a^2 n}\frac{\partial r}{\partial t},$$

also, da $k M = n^2 a^3$ ist,

$$(37) \quad k M \sqrt{e^2 - \lambda^2} = a r n \frac{\partial r}{\partial t}.$$

Substituiert man die Werte (36) und (37) in (35), so erhält man nach Division durch $\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial e}$

$$a^2 n \frac{\partial r}{\partial a}\frac{d\sigma'}{dt} = \left(\frac{1 - e^2}{e}\frac{\partial r}{\partial e} + \frac{p \cos v}{e} - 2r\right)\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{e}\frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Setzt man hierin noch für $\frac{\partial r}{\partial e}$ seinen Wert $-a \cos v$ und dividiert die Gleichung durch $\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a}$, so ergibt sich endlich

$$(38) \quad \frac{d\sigma'}{dt} = -\frac{2}{n a}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{n a^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Hiermit sind sämtliche Störungsgleichungen gefunden.

§ 2.

Die vorgetragene Methode besitzt einen kleinen Mangel, den sie mit der gewöhnlichen Lagrange'schen Methode teilt. Sie lässt von vornherein nicht übersehen, dass sämtliche Grössen $\frac{d\varkappa}{dt}$ so durch partielle Ableitungen von R ausgedrückt werden können, dass die Koeffizienten nicht mehr die Variabeln enthalten. Dass dies der Fall ist, ergibt sich jedoch nach unserer Methode bei $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ und $\frac{di}{dt}$ auf sehr einfache Weise. Wir können nun leicht zeigen, dass, wenn für diese Grössen die Störungsausdrücke bereits bekannt sind, durch sie die noch nicht bekannten Ausdrücke bestimmt sind und fast ohne Rechnung aus ihnen abgeleitet werden können, wodurch sich die Unabhängigkeit der Koeffizienten von den Variabeln dann von selbst ergibt. Die Rechnungen, welche zur Herleitung der Werte von $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\sigma'}{dt}$, $\frac{d\Omega}{dt}$ erforderlich waren, lassen sich nämlich durch folgende einfache Ueberlegungen ersetzen.

Es sei bekannt, dass sich $\frac{d\omega}{dt}$ in der Form

$$(39) \qquad -\cos i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega_0}{dt}$$

schreiben lässt, dass sich $\frac{d\omega_0}{dt}$ und $\frac{d\sigma'}{dt}$, wie es im § 1 gezeigt wurde, durch $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\beta}{dt}$, d. h durch $\frac{\partial R}{\partial \omega}$ und $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$ ausdrücken lassen, und dass zwischen $\frac{\partial R}{\partial \omega}$, $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial R}{\partial a}$, $\frac{\partial R}{\partial e}$ lineare Gleichungen [die Gleichungen (22)] bestehen, welche es erlauben, eine beliebige dieser Grössen durch zwei andere auszudrücken. Man denke sich mit Hülfe dieser Gleichungen $\frac{d\omega_0}{dt}$ durch $\frac{\partial R}{\partial e}$ und $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$ $\left(\text{oder } \frac{\partial R}{\partial a}\right)$, $\frac{d\sigma'}{dt}$ durch $\frac{\partial R}{\partial e}$ und $\frac{\partial R}{\partial a}$ ausgedrückt und schreibe die betr. Gleichungen mit unbestimmten Koeffizienten, also

$$(40) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega_0}{dt} = a_1 \dfrac{\partial R}{\partial e} + b_1 \dfrac{\partial R}{\partial \sigma}, \\[2ex] \dfrac{d\sigma'}{dt} = a_2 \dfrac{\partial R}{\partial e} + b_2 \dfrac{\partial R}{\partial a}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t}$$

folgt, dass

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t}$$

ist, dass also die Gleichung

$$\sum_{\varkappa} \frac{\partial R}{\partial \varkappa} \frac{d\varkappa}{dt} = 0$$

identisch erfüllt sein muss, wenn man für $\frac{d\varkappa}{dt}$ die berechneten Werte setzt. Führt man die Substitution mit Hülfe der Gleichungen (17), (19), (20), (39) und (40) aus und schreibt $\frac{d\Omega}{dt} = N$, so erhält man

$$\left(\cos i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega}\right)\left(\frac{1}{\alpha \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} - N\right) + \left(a_1 - \frac{1-e^2}{\alpha e}\right) \frac{\partial R}{\partial \omega} \frac{\partial R}{\partial e}$$

$$+ b_1 \frac{\partial R}{\partial \omega} \frac{\partial R}{\partial \sigma} + \left(a_2 + \frac{1-e^2}{en\, a^2}\right) \frac{\partial R}{\partial e} \frac{\partial R}{\partial \sigma} + \left(b_2 + \frac{2}{na}\right) \frac{\partial R}{\partial a} \frac{\partial R}{\partial \sigma} = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt zunächst

$$N = \frac{1}{\alpha \sin i} \frac{\partial R}{\partial i},$$

da sich andernfalls $\frac{\partial R}{\partial \Omega}$ und $\frac{\partial R}{\partial i}$ nicht fortheben würden. Sämtliche übrigen Koeffizienten sind gleich 0 zu setzen, d. h. es ist

$$a_1 = \frac{1-e^2}{\alpha e}, \quad b_1 = 0,$$

$$a_2 = -\frac{1-e^2}{ena^2}, \quad b_2 = -\frac{2}{na}.$$

Damit sind sämtliche Störungsausdrücke gefunden.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Bremen

Jahr/Year: 1910-1911

Band/Volume: 20

Autor(en)/Author(s): Nölke Fr.

Artikel/Article: Elementare Ableitung der astronomischen Störungsgleichungen 361-371