Die Berechnung des Ostersonntages.

Von Dr. Friedrich Fricke.

Vorwort.

Zur Berechnung des Ostersonntages sind eine Reihe von Formelgruppen, sogenannte Osterformeln oder Osterregeln, angegeben worden, die erste von Gauß im Jahre 1800 und die letzte von Jacobsthal 1916. Da die Entwickelung aller dieser Formelgruppen auf die feststehenden kirchlichen Bestimmungen zur Ermittelung des Osterfestes zurückgehen müssen, so liegt der Gedanke nahe, zu versuchen, aus den kirchlichen Bestimmungen heraus eine Formelgruppe zu bilden, in der die bisherigen Osterregeln enthalten sind, also eine allgemeine Lösung der Osteraufgabe zu finden und die bekannten Osterregeln auf diese Lösung zurückzuführen.

Diesem Zweck dient die vorliegende Arbeit. Zur Erreichung des Zieles sind im allgemeinen nicht mehr als die notwendigsten Hilfsmittel herangezogen worden; nur die Datumrechnung ist in vollem Umfange dargestellt worden, da sie ein gewisses selbständiges Interesse beanspruchen dürfte und nur sehr kleine Abschnitte derselben für die Arbeit entbehrlich sind.

Andere mathematische Kenntnisse, als die der Grundrechnungsarten, werden bei dem Leser nicht vorausgesetzt. Das gilt auch für die Restrechnung, die für solche, denen die Zeichen dieser Rechnungsart nicht geläufig sind, in einem Anhange so weit entwickelt ist, wie sie in der Arbeit Verwendung findet.

Die folgenden Entwickelungen stützen sich auf Angaben der Werke:

F. J. Brockmann, System der Chronologie. Stuttgart 1883.

W. Jacobsthal, Mondphasen, Osterrechnung und ewiger Kalender. Berlin 1917.

B. M. Lersch, Einleitung in die Chronologie. 2. Teil: Der christliche Kalender. Freiburg i. B. 1899.

W. F. Wislicenus, Der Kalender. 2. Aufl. Leipzig 1914.

Zum Schlusse spreche ich Herrn Prof. Dr. E. Wendt, Oberlehrer an der hiesigen Seefahrtschule, für die liebenswürdige Durchsicht des Manuskripts herzlichen Dank aus.

Bremen, 29. Juli 1918.

Friedr. Fricke.

I. Datumrechnung.

1) Der Anfang der Zeitrechnung sei der letzte Februar des Jahres 1 v. Chr. Dieses Datum kann man bezeichnen mit März 0 des Jahres 0, kürzer mit 0. III. 0. Bei dieser Verabredung, die getroffen wird, um den Schalttag an das Ende des Jahres zu bringen, bedeutet das Datum 5. VI. 1917, daß an diesem Tage seit Beginn der Zeitrechnung 1917 Jahre, die Monate März, April, Mai und 5 Tage des Juni verstrichen sind. Das Datum 13. I. 1918 bedeutet, daß seit Beginn der Zeitrechnung 1917 Jahre, die Monate März bis Dezember und 13 Tage des Januar verflossen sind. Die Monate Januar und Februar eines Jahres zählen also als die letzten Monate des vorhergehenden Jahres nach der üblichen Bezeichnungsweise.

2) Wenn der 0. März ein Sonntag ist, so ist der 1. März ein Montag, der 2. ein Dienstag, . . . der 7. wieder ein Sonntag usw. Will man wissen, auf welchen Wochentag der 23. März fällt, so teilt man 23 durch 7, wobei 2 als Rest bleibt. Der 23. März fällt also auf denselben Wochentag wie der 2. März, d. h. auf einen Dienstag. Wir sagen: Das Datum schreitet in 1 Tage um 1 Wochentag fort, in 3 Tagen um 3 Wochentage, in 7 Tagen um 0, in 23 Tagen um 2 Wochentage. Allgemein beträgt der Fortschritt in D Tagen $\left(\frac{D}{7}\right)$ Wochentage, wobei unter $\left(\frac{D}{7}\right)$ der Rest verstanden werden soll, der bleibt, wenn man D durch 7 teilt.

3) Mit Fortschritt sei im folgenden stets der Fortschritt an Wochentagen seit Beginn der Zeitrechnung bezeichnet. Dies vorausgesetzt, beträgt der Fortschritt am 0. III. 0, an dem noch kein Tag verflossen ist, 0 Tage; am 0. IV. 0, wo 31 Tage des März vorüber sind, $\left(\frac{31}{7}\right) = 3$ Tage; am 0. V. 0, wo weiter 30 Tage des April verstrichen sind, $\left(\frac{3+30}{7}\right) = \left(\frac{3+2}{7}\right)$ *) $= 5$ Tage usw. Die erhaltenen Zahlen 0, 3, 5 usw. heißen Monatsmerkzahlen**). Man kann sie aus der leicht zu merkenden***) Zahlenreihe

15 21 30 43 55 61 73 86 92 104 110 122

entnehmen, in der die vor den Einern stehenden Zahlen die gebräuchlichen Ordnungszahlen der Monate, die Einer die zugehörigen Merk-

---

*) Restrechnung 9.

**) Vgl. Jacobsthal, S. 23.

***) Sechs der Zahlen sind ungerade, sechs gerade; die ungeraden stehen, abgesehen von 30, am Anfang. Zerlegt man die Zahlen in Zehner und Einer, z. B. $122 = 12.10 + 2$, so gehören sie sämtlich zu verschiedenen Zehnern. Von 30 ausgehend — März ist der erste Monat des Jahres — addiert man zur Auffindung einer Zahl aus der vorhergehenden die Zahl 6; gelangt man dadurch nicht in den richtigen Zehner, so addiert man noch einmal 6, im ganzen also 12, und, wenn ein Wechsel von einer geraden zur ungeraden Zahl oder umgekehrt stattfinden muß, 13. So erhält man 61 aus 55 durch Addition von 6, 73 aus 61 durch Addition von 12, 86 aus 73 durch Addition von 13, 135 (=15) aus 122 ebenfalls durch Addition von 13.

zahlen bedeuten. So z. B. entnimmt man aus der Zahl 86, daß 6 die Merkzahl des Monats August (des 8. Monats) ist, d. h., daß am 0. VIII. 0 der Fortschritt 6 Wochentage beträgt.

Damit kann man bereits für jedes Datum des Jahres 0 den Fortschritt angeben. Man soll z. B. den Fortschritt am 18. XII. 0 feststellen. Schreibt man unter den Tag des Datums den Fortschritt für diesen Tag, unter den Monat des Datums die Monatsmerkzahl und dahinter den Gesamtfortschritt, so erhält man folgende Anordnung:

18. XII. 0
4 2 6

D. h. der Fortschritt in 18 Tagen beträgt 4, der Fortschritt in den Monaten März bis November, d. i. die Merkzahl für Dezember, beträgt 2 Wochentage, der Gesamtfortschritt also 6 Wochentage.

Soll man den Fortschritt am 20. I. 1 berechnen, so schreibt man:

20. I. 1
6 5 4

Dabei ist der Gesamtfortschritt 11 Wochentage, die selber wieder einen Fortschritt von 4 Wochentagen bedeuten.

4) Da das Gemeinjahr 365 Tage zählt, so verursacht es einen Fortschritt von $\left(\frac{365}{7}\right) = 1$ Wochentag; J Gemeinjahre verursachen daher einen Fortschritt von

$$\left(\frac{J}{7}\right) = e$$

Wochentagen. Jedes vierte julianische Jahr ist ein Schaltjahr von 366 Tagen, hat darum einen Fortschritt von 2 Wochentagen zur Folge, also 1 Wochentag mehr als das Gemeinjahr. Unter J vom Beginn ab gezählten julianischen Jahren sind $\left[\frac{J}{4}\right]$ Schaltjahre, wobei $\left[\frac{J}{4}\right]$ das Ergebnis der Divisionsaufgabe J:4 bedeutet, wenn man den Rest vernachlässigt, so daß z. B. $\left[\frac{15}{4}\right] = 3$ ist. Diese $\left[\frac{J}{4}\right]$ Jahre haben

$$\left(\frac{\left[\frac{J}{4}\right]}{7}\right) = f$$

Wochentage Fortschritt mehr als ebensoviel Gemeinjahre. Daher ist der Fortschritt für J julianische Jahre seit Beginn der Zeitrechnung $e + f$ oder, da $e + f > 7$ sein kann, $\left(\frac{e+f}{7}\right)$ Wochentage.

Beispiel. Um wieviel Wochentage ist das Datum am 16. X. 24 fortgeschritten?

Man hat: 16. X. 24
2 4 2 1

16 Tage haben nämlich einen Fortschritt von 2 Tagen, zu Oktober

gehört die Merkzahl 4, und in 24 Jahre ist der Fortschritt

$$\left(\frac{\left(\frac{24}{7}\right) + \left[\frac{24}{4}\right]}{7}\right) = \left(\frac{3+6}{7}\right) = 2;$$

ferner ist

$$\left(\frac{2+4+2}{7}\right) = 1.$$

5) Mit den bisher entwickelten Hilfsmitteln läßt sich bereits für jedes Datum des julianischen Kalenders der Fortschritt bestimmen. Aber mit Rücksicht auf das Folgende soll der Fortschritt für Jahreszahlen, die größer als 100 sind, in anderer Weise ermittelt werden. Man kann sagen: Das Jahr 1863 gehört dem Jahrhundert 18 an, und sein Jahrgang ist 63. Man schreibt also

$$1863 = 18.100 + 63.$$

Wenn daher das Jahr N dem Jahrhundert p angehört und sein Jahrgang J ist, so ist

$$N = 100\,p + J.$$

In 1 julianischen Jahrhundert, das immer 25 Schaltjahre enthält, ist der Fortschritt

$$\left(\frac{100}{7}\right) + \left(\frac{25}{7}\right) = 6 \text{ Wochentage;}$$

in p julianischen Jahrhunderten ist er also

$$m_2' = \left(\frac{6\,p}{7}\right) \text{ Wochentage.}$$

Beispiel. Um wieviel Wochentage ist das Datum am 23. IV. 1725 fortgeschritten?

Für $p = 17$ ist

$$m_2' = \left(\frac{6 \cdot 17}{7}\right) = \left(\frac{6 \cdot 3}{7}\right)^{*)} = \left(\frac{18}{7}\right) = 4.$$

$$e = \left(\frac{25}{7}\right) = 4, \quad f = \left(\frac{\left[\frac{25}{4}\right]}{7}\right) = 6.$$

Daher folgt

$$\begin{array}{llllll} 23. & \text{IV.} & 1725 & & & \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 6 & \quad 5 \end{array}$$

Dabei ist 5 der Gesamtfortschritt, nämlich

$$\left(\frac{2+3+4+4+6}{7}\right) = 5.$$

6) Der gregorianische Kalender unterscheidet sich vom julianischen dadurch, daß von den Säkularjahren nur die Vielfachen von 400 Schaltjahre sind. Der gregorianische Kalender enthält also in N ($= 100\,p + J$) Jahren nur $\left[\frac{p}{4}\right]$ Schalt-Säkularjahre, die übrigen $\left(p - \left[\frac{p}{4}\right]\right)$ Säkularjahre sind Gemeinjahre. Der durch diese letzten

*) Restrechnung 12.

im julianischen Kalender hervorgerufene Fortschritt ist also für den gregorianischen Kalender von m_2' abzuziehen. Bei der Einführung dieses Kalenders im 16. Jahrhundert hätten also $15 - [\frac{15}{4}] = 12$ Tage abgezogen werden müssen. Tatsächlich überschlug man im Jahre 1582 nur 10 Tage, also 2 Tage zu wenig. Demnach ist allgemein

$$S = p - [\tfrac{p}{4}] - 2$$

von m_2' zu subtrahieren, wenn man im gregorianischen Kalender den durch die p Hunderte der Jahreszahl N verursachten Fortschritt m_2 erhalten will. Man findet

$$m_2 = \left(\frac{m_2' - S}{7}\right) = \left(\frac{6p - S}{7}\right).$$

Für eine bequeme Berechnung muß der Ausdruck $\left(\frac{S}{7}\right)$ umgeformt werden. Es ist

$$p = 4[\tfrac{p}{4}] + (\tfrac{p}{4}),^{*)}$$

$$2p = 8[\tfrac{p}{4}] + 2(\tfrac{p}{4});$$

also

$$8[\tfrac{p}{4}] = 2p - 2(\tfrac{p}{4}).$$

Da

$$\left(\frac{8[\frac{p}{4}]}{7}\right) = \left(\frac{[\frac{p}{4}]}{7}\right),^{**)}$$

so folgt

$$\left(\frac{[\frac{p}{4}]}{7}\right) = \left(\frac{2p - 2(\frac{p}{4})}{7}\right);^{***)}$$

daher ergibt sich

$$\left(\frac{S}{7}\right) = \left(\frac{p - [\frac{p}{4}] - 2}{7}\right) \overset{***)}{=} \left(\frac{6p + 2(\frac{p}{4}) - 2}{7}\right)^{\dagger)}$$

und

$$m_2 = \left(\frac{6p - S}{7}\right) = \left(\frac{5(\frac{p}{4}) + 2}{7}\right)^{\dagger\dagger)}$$

7) Für den gregorianischen Kalender folgt also, daß am D^{ten} Tage des Monats X (mit der Merkzahl m_1) im Jahre $N = 100p + J$ seit dem 0. III. 0 der Fortschritt

$$m = \left(\frac{D + m_1 + m_2 + e + f}{7}\right)$$

Wochentage beträgt, wo $m_2 = \left(\frac{5(\frac{p}{4}) + 2}{7}\right)$, $e = (\frac{J}{7})$, $f = \left(\frac{[\frac{J}{4}]}{7}\right)$ ist.

---

*) Restrechnung 1.
**) Restrechnung 12.
***) Restrechnung 2.
†) Restrechnung 9.
††) Restrechnung 9 und 13.

Beispiel: Welches ist im gregorianischen Kalender der Fortschritt am 20. VII. 1917?

Man hat 20. VII. 1917
6 3 3 3 4 5,

weil

$$\left(\frac{D}{7}\right) = 6,\ m_1 = 3,\ m_2 = \left(\frac{5\left(\frac{19}{4}\right) + 2}{7}\right) = 3,$$

$$e = \left(\frac{17}{7}\right) = 3,\ f = \left(\frac{\left[\frac{17}{4}\right]}{7}\right) = 4,$$

also

$$m = \left(\frac{6+3+3+3+4}{7}\right) = 5.$$

Nun war der 20. VII. 1917, wie man einem Kalender entnimmt, ein Freitag. Da der Fortschritt am 20. VII. 1917 gegen den 0. III. 0 fünf Tage beträgt, so ist also der Freitag der fünfte Tag nach dem 0. III. 0. D. h. der 0. III. 0 ist ein Sonntag.

Darum kommen den Wochentagen folgende Merkzahlen zu: Sonntag 0, Montag 1, Dienstag 2, Mittwoch 3, Donnerstag 4, Freitag 5, Sonnabend 6.

9) Damit ist man endlich befähigt, für jedes beliebige Datum den Wochtag zu berechnen.

Beispiele.

a) Kalender neuen Stils (gregorianischer Kalender):

1) 25. III. 1863
4 0 5 0 1 3 Mittwoch.

2) 23. II. 1742 (Zu rechnen 1741!)
2 1 0 6 3 5 Freitag.

b) Kalender alten Stils (julianischer Kalender):

1) 25. III. 1863
4 0 3 0 1 1 Montag.

2) 23. II. 1742 (Zu rechnen 1741!)
2 1 4 6 3 2 Dienstag.

II. Epaktenrechnung.

Die Daten der Neumonde, wie sie in den Neumondtafeln der Kalender alten Stils verzeichnet sind, beziehen sich nicht auf die Konjunktion von Sonne und Mond, sondern auf das erste Sichtbarwerden der Mondsichel nach der Konjunktion.*) Wenn also in einer solchen Tafel als Datum des ersten Neumondes eines Jahres der 23. Januar angegeben ist, so bedeutet dies, daß am 23. Januar der neue Mond zum ersten Male sichtbar ist. Bei den folgenden Betrach-

*) Brockmann, S. 59.

tungen soll diese Auffassung beibehalten werden, wenn nicht ausdrücklich auf die Konjunktion hingewiesen wird.

Unter Alter des Mondes an einem Tage versteht man die Zahl der Tage, die seit dem letzten Neumonde bis zu diesem Tage verflossen sind. Wenn z. B. gestern Neumond war, so ist heute der Mond einen Tag alt.

Das Alter des Mondes am 1. Januar eines Jahres nennt man die Epakte des Jahres. Wenn etwa am 1. Januar 1918 das Mondalter 17 Tage betrug, so ist die Epakte von 1918 gleich 17.

Aus der Epakte eines Jahres lassen sich die Epakten sowohl der vorhergehenden als der folgenden Jahre bestimmen. Da während eines synodischen Monats, d. h. in der Zeit von einer Konjunktion bis zur nächsten, im Mittel 29,53059 Tage verfließen, während eines julianischen Jahres aber 365,25 Tage, so hat ein Jahr $\frac{365{,}25}{29{,}53059}$ Monate. Das sind 12 Monate und 10,8829 Tage. Wenn daher am 1. Januar eines Jahres Neumond ist, so ist der Mond am 1. Januar des folgenden Jahres 10,8829, also etwa 11 Tage alt. Allgemein sagt man: Die Epakte eines Jahres ist etwa 11 größer als die des Vorjahres, oder die Epakte wächst in einem Jahre um etwa 11 Tage. Genau genommen, muß es heißen: Die Epakte wächst in einem Jahre um 10,8829 Tage. In zwei Jahren wächst sie also um $2 \cdot 10{,}8829 = 21{,}7658$ Tage, in drei Jahren um $3 \cdot 10{,}8829 = 32{,}6487$ Tage $= 1$ Monat und 3,1181 Tage, also um 3,1181 Tage. Setzt man das so eingeschlagene Verfahren fort, so findet man das Wachstum der Epakte in α Jahren, indem man von dem Produkte $10{,}8829\,\alpha$ möglichst oft 29,5306 Tage abzieht. Also ist der Rest des Quotienten $\frac{10{,}8829\,\alpha}{29{,}5306}$ das Wachstum der Epakte in α Jahren. Dieser Rest werde mit $\left(\frac{10{,}8829\,\alpha}{29{,}5306}\right)$ *) bezeichnet.

Nach 19 Jahren ist die Epakte um

$$\left(\frac{10{,}8829 \cdot 19}{29{,}5306}\right) = 0{,}0609 \text{ Tage}$$

gewachsen. Rechnet man statt dessen 0 Tage, so sieht man, daß sich die Epakten alle 19 Jahre wiederholen. Hat z. B. das Jahr 1918 die Epakte 17, so hat auch das Jahr 1937 und ebenso das Jahr 1956 dieselbe Epakte. Schreibt man also, bei irgend einem Jahre beginnend, die Zunahme der Epakten gegen den Beginn Jahr für Jahr auf, so kehren die Werte in Gruppen von 19 Jahren regelmäßig wieder. Eine solche Gruppe, in der alle Werte verschieden sind, nennt man einen Mondzirkel. Der Fehler, der dabei durch Vernachlässigung der 0,0609 Tage in 19 Jahren gemacht wird, wächst erst in etwa 312 Jahren auf einen Tag an.

In der Epaktenrechnung wird nicht mit diesen genauen Werten gearbeitet, sondern mit abgerundeten Zahlen. Man rechnet den Monat

*) Restrechnung 1.

zu 30 statt 29,5306 Tagen und das jährliche Wachstum der Epakte zu 11 statt 10,8829 Tagen. Bei der Anwendung dieser Werte beträgt das Wachstum der Epakte in α Jahren

$$\beta = \left(\frac{11\,\alpha}{30}\right) \text{ Tage.}$$

Nach 19 Jahren ist es $\left(\frac{11.19}{30}\right) = 29$ Tage. Es muß aber einen Tag mehr betragen, wenn es den wirklichen Wert von 0 Tagen (eigentlich 0,0609) erreichen soll. Man addiert darum, wenn man aus dem Wachstum der Epakte des 19. Jahres das Wachstum der Epakte des 20. Jahres berechnen will, nicht 11 sondern 12 Tage. Man hält also, um sich nicht gar zu weit von der Wirklichkeit zu entfernen, den 19jährigen Mondzirkel fest, und man addiert beim Übergang aus einem Mondzirkel in den folgenden 12 Tage: Diese Zunahme der Epakte um 12 Tage heißt Mondsprung.

Indem man das Wachstum der Epakte von Jahr zu Jahr feststellt, addiert man demnach 18 mal 11 und das neunzehnte Mal 12 Tage. Daher ist der Beginn eines Mondzirkels nicht mehr gleichgültig, während man bei der Verwendung der genauen Werte jedes beliebige Jahr als Anfang eines Mondzirkels nehmen kann. Es ist nun üblich geworden, den ersten Mondzirkel mit dem Jahre 0 (= 1 v. Chr.) zu beginnen. Bei diesem Brauch ist also das Jahr 0 das 1. Jahr, das Jahr 1 das 2. Jahr, das Jahr 2 das 3. usw., das Jahr 18 das 19. Jahr des ersten Mondzirkels, das Jahr 20 das 1. Jahr des zweiten Mondzirkels usw. Die Fortsetzung dieser Betrachtung ergibt allgemein, daß

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) + 1$$

die Zahl ist, die sagt, das wievielte das Jahr N in seinem Mondzirkel ist. Diese Zahl a nennt man die goldene Zahl des Jahres N.

Für das Jahr 1906 ist z. B. die goldene Zahl $a = 7$; d. h. das Jahr 1906 ist das 7. in seinem Mondzirkel. Es hat also im julianischen Kalender gegenüber dem Jahre 1900, dem ersten desselben Zirkels, den gleichen Epaktenzuwachs wie das Jahr 6 gegenüber dem Jahre 0. Dieser beträgt aber $\beta = \left(\frac{11.6}{30}\right) = 6$ Tage. Kennt man nun die Epakte des Jahres 0, so kann man die Epakte des Jahres 1906 finden. Nach dem julianischen Neumondkalender ist in einem Jahre mit der goldenen Zahl 1 am 23. Januar Neumond. Also war im Jahre 0 auch an diesem Tage Neumond; der Mond war folglich am 23. Januar 0 oder 30 Tage alt, am 1. Januar also 22 Tage jünger, d. h. 8 Tage alt. Die Epakte des Jahres 0, wie jedes Jahres mit der goldenen Zahl 1, ist demnach 8. Daher hat das Jahr 1900 des julianischen Kalenders die Epakte 8, das Jahr 1906 die Epakte $8 + 6 = 14$.

Diese Erwägung führt zu einer Methode, aus dem Epaktenzuwachs und der goldenen Zahl für ein beliebiges Jahr die Epakte selbst zu berechnen. Wie gezeigt wurde, ist in einem Jahre des julianischen Kalenders mit der goldenen Zahl 1 die Epakte 8, also um 3 kleiner als der Epaktenzuwachs in einem Jahre. In dem folgenden Jahre, das die goldene Zahl 2 hat, ist die Epakte $8+11 = 19$, d. h. wieder um 3 kleiner als der Epaktenzuwachs in 2 Jahren. Und so ist allgemein für die goldene Zahl a die Epakte gleich $\left(\frac{11\,a}{30}\right) - 3$, oder wenn man $\left(\frac{11\,a}{30}\right) = b$ setzt, gleich $b - 3$ für $b \geqq 3$, aber gleich $30 + b - 3$ für $b < 3$, allgemein also gleich $\left(\frac{b-3}{30}\right)$. Zur Berechnung der Epakte E des Jahres N mit der goldenen Zahl a können somit für den julianischen Kalender folgende Formeln dienen:

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) + 1, \quad b = \left(\frac{11\,a}{30}\right), \quad E = \left(\frac{b-3}{30}\right).$$

Der Ausdruck b führt seit der gregorianischen Kalenderreform den Namen julianische Epakte. Besser käme dieser Name dem Ausdrucke E zu.

Beispiel. Wie groß ist die Epakte des Jahres 1918 alten Stils? Es ist die goldene Zahl $a = \left(\frac{1918}{19}\right) + 1 = 19$, die julianische

$$\text{Epakte } b = \left(\frac{11 \cdot 19}{30}\right) = 29, \text{ also } E = 26.$$

Für den gregorianischen Kalender ist die Ableitung der Epakte nicht so einfach wie für den julianischen. Das nach der bisherigen Rechnung ermittelte Mondalter kann mit dem wirklichen Mondalter wohl in den ersten Zeiten der Zeitrechnung übereinstimmen. Es muß sich aber auf die Dauer aus zwei Gründen von ihm entfernen. Erstens wird im julianischen Kalender das Wachstum der Epakte in 19 Jahren gleich null genommen, was mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmt; der dadurch hervorgerufene Fehler werde als Mondfehler der Epakte bezeichnet. Zweitens wird das Jahr zu 365,25 Tagen gerechnet, was ebenso wenig der Wirklichkeit entspricht; der dadurch entstehende Fehler sei der Sonnenfehler der Epakte.

Bei der Epaktenrechnung im gregorianischen Kalender werden diese Fehler ausgeglichen. Den Ausgleich des ersten nennt man die Mondgleichung, den des zweiten die Sonnengleichung der Epakte.

Da die Epakte in 19 Jahren um 0,0609 Tage wächst, so wächst sie in etwa 312 Jahren um 1 Tag. Die Epakte müßte daher alle 312 Jahre um 1 erhöht werden. Es wurde aber bei der Einführung des gregorianischen Kalenders festgesetzt, daß die Epakte zum ersten Male im Jahre 1800, dann sechsmal alle dreihundert Jahre, also in den Jahren 2100, 2400, 2700, 3000, 3300, 3600 und endlich im Jahre 4000 um 1 zu erhöhen sei. Hätte man die Epakte von vornherein alle 300 Jahre um 1 erhöht, so hätte man sie für die Jahre 300 bis 599 um 1, für die Jahre 600 bis 899 wieder um 1, im ganzen also um 2, usw., allgemein im Jahrhundert p um $\left[\frac{p}{3}\right]$ vermehren müssen. Das hätte für $p = 18$ bis 20, 21 bis 23, 24 bis 27 usw.

eine Vergrößerung von 6, 7, 8 usw. ergeben, wofür aber 1, 2, 3 usw. gerechnet wurde. Es wurden also immer 5 Tage zu wenig hinzugefügt. Daher ist die Mondgleichung für das Jahr $N = 100p + J$, das dem Jahrhundert p angehört,

$$M = [\frac{p}{3}] - 5.$$

Um diesen Wert ist die für N berechnete julianische Epakte zu vergrößern. Das gilt nur, soweit die Mondgleichung richtig ist, also sicher bis zum Schlusse des Jahres 3899. Dem entsprechend haben die Berechnungen der vorliegenden Arbeit, die von der Mondgleichung abhängen, auch nur bis zu diesem Zeitpunkte Gültigkeit.

Da das julianische Jahr zu 365,25 Tagen gerechnet wurde, während das tropische Jahr 365,2422 Tage zählt, nahm man für die Epaktenrechnung im Kalender alten Stils das Jahr 0,0078 Tage zu lang. Man rechnete also in 400 Jahren etwa 3 Tage zu viel. Zum Ausgleich des Fehlers wurde durch die Kalenderreform im 16. Jahrhundert bestimmt, daß alle 400 Jahre, und zwar in den nicht durch 400 teilbaren Säkularjahren der Schalttag auszulassen sei. Es gibt in N Jahren $[\frac{p}{4}]$ durch 400 teilbare Säkularjahre, also $\left(p - [\frac{p}{4}]\right)$ durch 400 nicht teilbare. Wird in diesen letzten je ein Tag weggelassen, so verkleinert man in ihnen die Epakte um 1. Wäre das von vornherein geschehen, so hätte man im Jahre 1582 die Epakte um $15 - [\frac{15}{4}] = 12$ Tage vermindern müssen. Man unterdrückte damals dadurch, daß man auf den 4. den 15. Oktober folgen ließ, aber nur 10 Tage. Daher ist für den gregorianischen Kalender die Sonnengleichung der Epakte

$$S = p - [\frac{p}{4}] - 2.$$

Um diesen Wert ist die für N berechnete julianische Epakte zu verkleinern (Vgl. S. 133).

S ist stets größer als M. Statt die julianische Epakte um S zu verkleinern und um M zu vergrößern, kann man also $(S - M)$ von ihr subtrahieren. Dieser Wert ist

$$Z = p + 3 - [\frac{p}{3}] - [\frac{p}{4}],$$

der als Epaktengleichung bezeichnet sei.

Die gregorianische Epakte ist darum $E = b - Z$, wenn $b \geq Z$, aber $E - 30 + b - Z$, wenn $b < Z$ Dafür kann man allgemein setzen:

$$E = \left(\frac{b - Z}{30}\right).$$

Beispiel. Wie groß ist die Epakte des Jahres 1918 neuen Stils? Es ist $a = 19$, $b = 29$, $Z = 19 + 3 - 6 - 4 = 12$, also $E = 17$.

Aus der gregorianischen Epakte kann übrigens die für den Kalender alten Stils gültige Epakte durch folgende Überlegung abgeleitet werden. In den Jahren vor 1582 muß die Epaktengleichung einen unveränderlichen Wert haben, und zwar denselben wie im ersten Jahrhundert, für das $p = 0$ ist. Für $p = 0$ aber ist $Z = 3$, also

$$E = \left(\frac{b-3}{30}\right).$$

Dieser Wert stimmt mit dem auf Seite 137 entwickelten Ausdruck für E überein.

III. Die Ostergrenze.

Das Osterfest wird nach einer kirchlichen Bestimmung (Konzil zu Nicaea) am Sonntage nach dem Frühlingsvollmonde, d. h. dem ersten Vollmonde nach Frühlingsanfang gefeiert. Daher nennt man den Frühlingsvollmond auch wohl Ostervollmond. Sein Datum, das als Ostergrenze bezeichnet wird, ist frühestens der 21. März; die Ostergrenze ist danach der auf den 20. März folgende Vollmondstag. Der dem Ostervollmond voraufgehende Neumond heißt Osterneumond; er kann also, wenn man unter Neumond das erste Sichtbarwerden der Mondsichel versteht, nicht vor dem 8. März eintreten.*)

Ist die Epakte eines Jahres E, so heißt das, am 1. Januar (= Januar 1) ist der Mond E Tage alt. Setzt man Dezember 32 anstelle von Januar 1, so war Dezember (32 — E) Neumond. Dieser Neumond ist im allgemeinen der letzte des vorhergehenden Jahres, nur für $E = 0$ fällt er auf den 1. Januar. Nun haben im julianischen**) wie auch im gregorianischen***) Mondkalender die Monate, von Neumond bis Neumond gerechnet, in der Regel eine Länge von abwechselnd 29 und 30 Tagen. Es braucht hier nicht untersucht zu werden, wann im Laufe des ganzen Jahres das eine oder andere zutrifft, oder wann von der Regel abgewichen wird; für die laufenden Betrachtungen genügt es, den Mondkalendern folgende Tatsachen zu entnehmen. Der auf den Neumond Dezember (32 — E) folgende Neumond wird stets durch Addition von 30 Tagen gefunden, so daß Januar (31 — E) wieder Neumond ist. Addiert man zu dem Neumonddatum Januar (31 — E) zwei Mondmonate, d. h. 59 Tage, so erhält man wieder ein Neumonddatum, und zwar März (31 — E).

Für den Kalender alten Stils kommt noch folgendes in Betracht. Um aus März (31 — E) das nächste Neumonddatum zu finden, muß man im allgemeinen 29 Tage hinzuzählen; nur wenn E größer ist als 23, hat man 30 Tage zu addieren. Da der Neumond, der für das Datum des Osterfestes bestimmend ist, der Osterneumond, nicht vor dem 8. März liegt, so kann für jede Epakte E, die größer als 23 ist, nicht März (31 — E) das Datum des Osterneumondes sein. Es ist vielmehr der folgende Neumond, und dieser ist 30 Tage später, also März (61 — E) = April (30 — E).

*) Lersch, S. 47.
**) Lersch, S. 27.
***) Lersch, S. 92.

Der Osterneumond ist also entweder März $(31-E)$ oder März $(61-E)$. Setzt man für E die möglichen Werte $b-Z$ oder $30+b-Z$, so ergibt sich für den Osterneumond eins der Daten

$$\begin{aligned}&\text{März } (1+Z-b),\\&\text{März } (31+Z-b),\\&\text{März } (61+Z-b).\end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen seien folgendermaßen zusammengefaßt:

$$(n)=\left(\frac{1+Z-b}{30}\right) \text{ (Märzdatum)*)}$$

(n) soll darin bedeuten, daß derjenige Wert zu wählen ist, der das erste Datum nach dem 7. März ergibt.

Ist Z größer als 9, wie es im Kalender neuen Stils der Fall ist, so kann $1+Z-b$ größer als 8 werden. Ist nun $1+Z-b$ größer als 8, so ist März $(1+Z-b)$ das Datum des Osterneumondes; ist aber $1+Z-b$ kleiner als 8, so ist der nächste Neumond, März $(31+Z-b)$, der Osterneumond. Es können daher für den gregorianischen Kalender nur die ersten beiden Gleichungen von (n) Verwendung finden.

Im Kalender alten Stils mit $Z=3$ dagegen ist die erste Gleichung unbrauchbar, und nur die letzten beiden kommen in Betracht.

Da 13 Tage nach dem Osterneumond der Ostervollmond eintritt, so ist das (März-)Datum des Ostervollmondes

$$(c)=\left(\frac{14+Z-b}{30}\right).$$

Darunter sollen wieder drei Gleichungen verstanden werden. Die beiden

$$c=14+Z-b \quad \text{und} \quad c=44+Z-b$$

gelten für den gregorianischen Kalender und

$$c=44+Z-b \quad \text{und} \quad c=74+Z-b$$

für den julianischen Kalender. Es werde nochmals betont, daß c (als Märzdatum, wie es in der vorliegenden Arbeit stets gebraucht werden soll,) nicht kleiner als $8+13=21$ sein darf, also größer als 20 sein muß. Daran soll die Form (c) erinnern; (c) ist das erste Datum nach dem 20. März:

$$20<(c)<51.$$

Zusammenfassung. Für die Berechnung des Ostervollmondes c eines Jahres $N=100\,p+J$ hat man folgende Formeln:

$$1)\quad a=\left(\frac{N}{19}\right)+1$$

$$2)\quad b=\left(\frac{11\,a}{30}\right)$$

$$3)\quad (c)=\left(\frac{14+Z-b}{30}\right);\quad Z=p+3-\left[\frac{p}{3}\right]-\left[\frac{p}{4}\right]$$

$$20<(c)<51.$$

---

*) Restrechnung 10.

Beispiele.

1) Wann ist im Jahre 1918 alten Stils Ostervollmond?

$a = 19$, $b = 29$,

$Z = 3$, $c = 74 + 3 - 29 = 48$. Es ist die dritte Gleichung von (c) zu wählen, damit $c > 20$ wird. Folglich ist im Jahre 1918 a. St. Ostervollmond am 17. April.

2) Wann ist im Jahre 1918 neuen Stils Ostervollmond?

$a = 19$, $b = 29$,

$Z = 12$, $c = 44 + 12 - 29 = 27$ [2. Gleichung von (c)]. Folglich ist Ostervollmond im Jahre 1918 n. St. am 27. März.

3) Wann hat das Jahr 1902 neuen Stils Ostervollmond?

$a = 3$, $b = 3$,

$Z = 12$, $c = 14 + 12 - 3 = 23$ [1. Gleichung von (c)]. Folglich ist Ostervollmond im Jahre 1902 n. St. am 23. März.

IV. Die Ausnahmen.

Der mit der gregorianischen Kalenderverbesserung eingeführte neue Mondkalender*) verlangt für die Berechnung der Ostergrenze die Berücksichtigung zweier Ausnahmen:

1) Ergibt sich bei der Rechnung als Ostergrenze der 50. März, so ist statt dessen der 49. März zu nehmen.

2) Ergibt sich in demselben Mondzirkel der 49. März, so ist statt dessen der 48. März zu nehmen. Diese zweite Ausnahme folgt aus der ersten; es würde nach der kirchlichen Anschauung dem Wesen eines Zyklus widersprechen, wenn eine Zahl darin zweimal vorkäme.

Kommen in einem Mondzirkel der 50. und der 49. März vor, wofür also der 49. und 48. März zu setzen ist, so kann, wie aus der folgenden Betrachtung ersichtlich ist, die Rechnung für denselben Zirkel niemals den 48. März ergeben.

Die aus den Formeln auf Seite 140 ermittelte Ostergrenze ist für jede goldene Zahl einer der Werte 21 bis 50. Da es 19 goldene Zahlen gibt, so können in einem Zirkel von den 30 möglichen Werten der Ostergrenze nur 19 vorkommen. Diese sind außer von der goldenen Zahl nur abhängig von der Epaktengleichung Z, d. h. vom Jahrhundert p. Innerhalb eines Jahrhunderts gehört daher zu jeder goldenen Zahl eine ganz bestimmte Ostergrenze, die für jeden Mondzirkel des Jahrhunderts gilt. Zu einer goldenen Zahl gehören dagegen in verschiedenen Jahrhunderten im allgemeinen auch verschiedene Ostergrenzen. Man sieht das aus der folgenden Zusammenstellung:

*) Lersch, S. 91.

Z	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	c	36	25	44	33	22	41	30	49	38	27	46
10		43	32	21	40	29	48	37	26	45	34	23
11		44	33	22	41	30	49	38	27	46	35	24
12		45	34	23	42	31	(50)	39	28	47	36	25

Z	a	12	13	14	15	16	17	18	19
3	c	35	24	43	32	21	40	29	48
10		42	31	(50)	39	28	47	36	25
11		43	32	21	40	29	48	37	26
12		44	33	22	41	30	(49)	38	27

Daraus entnimmt man z. B., daß im Kalender alten Stils ($Z = 3$) die zur goldenen Zahl 7 gehörige Ostergrenze der 30. März ist. Oder man sieht, daß im Kalender neuen Stils für $p = 19$, wofür $Z = 12$ ist, die zur goldenen Zahl 6 gehörige Ostergrenze der 50. März ist, welches Datum aber durch den 49. März zu ersetzen ist; deshalb ist die Zahl 50 eingeklammert. Die für $Z = 12$ zur goldenen Zahl 17 gehörige Ostergrenze ist der 49. März, wofür aber der 48. März zu nehmen ist, was durch (49) angedeutet sein soll. Diese letzte Verschiebung ist nach den kirchlichen Bestimmungen nötig, weil in demselben Zirkel die auf den 50. März berechnete Ostergrenze auf den 49. März verlegt wird. Ein Jahrhundert mit $Z = 12$ hat also zwei Ausnahmen; dagegen hat ein Jahrhundert mit $Z = 10$ nur eine Ausnahme, da die Rechnung nur $c = 50$, aber nicht $c = 49$ ergeben kann, und in einem Jahrhundert mit $Z = 11$ kommt keine Ausnahme vor, da (zwar $c = 49$, aber) $c = 50$ in der Reihe der Ostergrenzen nicht enthalten ist. Besonders betont werde, daß auch im Kalender alten Stils ($Z = 3$) keine Ausnahmen zu berücksichtigen sind.

Ferner geht aus der Zusammenstellung hervor, daß in einem Zirkel nie mehr als zwei aufeinander folgende Werte der Ostergrenze vorkommen. Ordnet man z. B. für $Z = 12$ die berechneten Ostergrenzen nach der Größe, so erhält man die Zahlen

| 22 23 | 25 | 27 28 | 30 31 | 33 34 | 36 | 38 39 | 41 42 | 44 45 | 47 | 49 50 |

Man sieht, daß jede Ostergrenze höchstens einen Nachbarwert hat, wobei unter den Nachbarwerten der Zahl c die Zahlen $c - 1$ und $c + 1$ in zyklischem Sinne verstanden werden sollen, so daß also z. B. die Nachbarwerte von 29 die Werte 28 und 30, die Nachbarwerte von 21 die Werte 50 und 22 sind. Da diese Gesetzmäßigkeit ganz allgemein für jeden Wert von Z gilt, wie leicht nachgewiesen wird, so kann demnach $c = 48$ in einem Zirkel nicht auftreten, wenn $c = 50$ und $c = 49$ darin enthalten sind.

Ist nämlich $(c_1) = \left(\frac{14 + Z - b_1}{30}\right)$ ein Nachbarwert von (c), also z. B. $(c_1) = \left(\frac{(c) - 1}{30}\right)$, so ist b_1 ein Nachbarwert von b, im vorliegenden Falle

$$b_1 = \left(\frac{b + 1}{30}\right).$$

Bezeichnet man mit a_1 die die julianische Epakte b_1 erzeugende goldene Zahl, so ist

$$b_1 = \left(\frac{11 a_1}{30}\right), \text{ also } a_1 = \left(\frac{11 b_1}{30}\right) = \left(\frac{11 b + 11}{30}\right).^{*)}$$

Und da $b = \left(\frac{11 a}{30}\right)$, also $a = \left(\frac{11 b}{30}\right)$ ist, so folgt

$$\left(\frac{a_1 - a}{30}\right) = 11,^{**)}$$

also, da die goldene Zahl a_1 höchstens gleich 19 ist,

$$a_1 = a + 11.^{***)}$$

Ist $(c_2) = \left(\frac{14 + Z - b_2}{30}\right)$ der andere Nachbarwert von (c), also $(c_2) = \left(\frac{(c) + 1}{30}\right)$, so ist $b_2 = \left(\frac{b - 1}{30}\right)$ der zweite Nachbarwert von b. Daraus ergibt sich in ähnlicher Weise wie oben:

$$a_2 = a - 11.$$

Die Nachbarwerte der von der goldenen Zahl a abhängenden Ostergrenze c gehören daher zu den goldenen Zahlen $a + 11$ und $a - 11$. Ist $a < 12$, so scheidet $a - 11$ aus, da $a \leq 0$ nicht vorkommen kann; für $a < 12$ hat also die Ostergrenze c höchstens den zu $a + 11$ gehörigen Nachbarwert. Ist $a > 8$, so scheidet $a + 11$ aus, da $a > 19$ nicht vorkommen kann; für $a > 8$ hat also die Ostergrenze höchstens den zu $a - 11$ gehörigen Nachbarwert. Ist $a < 12$ und zugleich $a > 8$, so hat also die zu a gehörige Ostergrenze keine Nachbarwerte. Unter allen Umständen hat daher die Ostergrenze höchstens einen Nachbarwert.

In der Zusammenstellung auf Seite 142 sind die Ostergrenzen für jedes Z in zwei Zeilen so angeordnet, daß die Nachbarwerte in gleichen senkrechten Reihen stehen. Die drei für jedes Z in der ersten Zeile am weitesten rechts befindlichen Ostergrenzen haben keine Nachbarwerte.

In welchen Jahrhunderten treten nun Ausnahmen auf?

1) $c = 50$ kann sich aus der dritten Gleichung auf Seite 140 nur ergeben, wenn $44 + Z - b = 50$, d. h. wenn

$$b = Z - 6$$

ist. Bezeichnet man die goldene Zahl, aus der dieser besondere Wert

*) Restrechnung 12.
**) Restrechnung 8.
***) Restrechnung 4.

der julianischen Epakte folgt, mit a_1, so ist die Gleichung

$$\left(\frac{11a_1}{30}\right) = Z-6$$

die Bedingung dafür, daß $c = 50$ wird. Dabei ist a_1 als goldene Zahl kleiner als 20. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit 11, so erhält man

$$a_1 = \left(\frac{11(Z-6)}{30}\right) *)$$

Dieser Ausdruck ist nur von Z abhängig. Wird er kleiner als 20, so bezeichnet er für das Jahrhundert, dessen Epaktengleichung Z ist, die goldene Zahl, die der Ostergrenze den 50. März zuweist. Wird er aber größer als 19, so kommt in dem betreffenden Jahrhundert $c = 50$ nicht vor.

2) $c = 49$ kann nur aus $44 + Z - b = 49$, also aus

$$b = Z - 5$$

folgen. Bezeichnet man die zugehörige goldene Zahl mit a_2, so ergibt sich

$$a_2 = \left(\frac{11 Z - 5)}{30}\right).$$

Wird dieser Ausdruck kleiner als 20, so bedeutet er die goldene Zahl, für die $c = 49$ folgt; wird er größer als 19, so kommt $c = 49$ nicht vor.

Da sowohl $a_1 = 19$ als auch $a_2 = 19$ bis zum Schlusse des Jahres 3899, also für $Z = 10$ bis $Z = 20$ nicht möglich sind,**) so darf man sagen: Wird a_1 kleiner als 19, so kommt $c = 50$ vor, und wird a_2 kleiner als 19, so kommt $c = 49$ vor.

Der zweite Fall (für $c = 49$) läßt sich auf den ersten Fall (für $c = 50$) zurückführen. Es ist nämlich

$$\left(\frac{a_2 - a_1}{30}\right) = \left(\frac{11(Z-5) - 11(Z-6)}{30}\right) = 11, ***)$$

d. h.

$$a_2 = \left(\frac{a_1 + 11}{30}\right)$$

und, wenn a_1 kleiner als 19 ist, sogar

$$a_2 = a_1 + 11. †)$$

Damit lassen sich die Bedingungen für das Eintreffen von Ausnahmen im gregorianischen Kalender folgendermaßen aussprechen:

1) Ergibt sich für ein Jahrhundert $a_1 < 19$ und zugleich $a_1 + 11 < 19$, so hat das Jahrhundert in jedem Zirkel zwei Ausnahmen. Es sind für $c = 50$ und 49 die Werte $c = 49$ und 48 zu setzen.

*) Restrechnung 12.

**) Für $a_1 = 19$ ist $\left(\frac{11(Z-6)}{30}\right) = 19$, was $Z = 35$ und 5 ergibt, und für $a_2 = 19$ ist $\left(\frac{11(Z-5)}{30}\right) = 19$, was $Z = 34$ und 4 ergibt.

***) Restrechnung 8.

†) Restrechnung 4.

2) Ergibt sich $a_1 < 19$ und $a_1 + 11 > 19$, so hat das Jahrhundert eine Ausnahme. Man hat für $c = 50$ den Wert $c = 49$ zu nehmen.

3) Ergibt sich $a_1 > 19$, so gibt es keine Ausnahmen.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse für jedes Jahrhundert des Geltungsbereiches zusammengestellt. Darin ist mit A die Anzahl der Ausnahmen bezeichnet, und die diese Anzahl bestimmenden Werte sind in fetten Zahlen gegeben.

p			Z	a_1	a_2	A
15	16		10	**14**	25	1
17	18		11	25	6	0
19	20	21	12	**6**	**17**	2
22		24	13	**17**	28	1
	23	25	14	28	9	0
26	27	28	15	**9**	20	1
29	30		16	20	1	0
31	32	33	17	**1**	**12**	2
34		36	18	**12**	23	1
	35	37	19	23	4	0
38			20	**4**	**15**	2

V. Die Berechnung des Ostersonntages.

Der auf die Ostergrenze folgende Sonntag ist der Ostersonntag. Die Tagesmerkzahl der Ostergrenze, also ihr Wochentag, ist nach den Regeln der Datumrechnung leicht zu bestimmen. Ergibt sich für diese Tagesmerkzahl h, so ist $7 - h$ Tage später Ostern. Ist also c das Märzdatum der Ostergrenze, so ist das Märzdatum für den

$$\text{Ostersonntag} = c + 7 - h.$$

Zur Berechnung des Osterdatums diene folgende Anordnung:*)

N	d e f
a	
b	
c	g
k	h i

Darin werden die Größen der Reihenfolge der Buchstaben nach bestimmt. Es bedeuten

*) Vgl. den Artikel des Verfassers (Math.) in den »Bremer Nachrichten« vom 7. März 1914.

a die goldene Zahl des Jahres N ($=100\,p+J$),
b die julianische Epakte,
c die Ostergrenze,
d der durch p hervorgerufene Fortschritt (siehe Datumrechnung),
e der durch J und
f der durch die Schaltjahre außerdem hervorgerufene Fortschritt,
g der durch c bedingte Fortschritt,
h die Wochentagszahl der Ostergrenze,
i die Zahl der Tage, die man zu h zu addieren hat, um den nächsten Sonntag zu erreichen,
k das Märzdatum des Ostersonntages.

Es ist also:

$$a=\left(\frac{N}{19}\right)+1 \qquad b=\left(\frac{11a}{30}\right) \qquad (c)=\left(\frac{14+Z-b}{30}\right);$$

$$Z=p+3-\left[\frac{p}{3}\right]-\left[\frac{p}{4}\right] \; (p=0 \text{ für den julianischen Kalender})$$

$$d=\left(\frac{5\left(\frac{p}{4}\right)+2}{7}\right) \text{ für den gregorianischen Kalender, aber}$$

$$d=\left(\frac{6\,p}{7}\right) \text{ für den julianischen Kalender,}$$

$$e=\left(\frac{J}{7}\right) \qquad f=\left(\frac{\left[\frac{J}{4}\right]}{7}\right) \qquad g=\left(\frac{c}{7}\right) \qquad h=\left(\frac{d+e+f+g}{7}\right)$$

$$i=7-h \qquad k=c+i$$

Nebenbei bemerkt, ist Mai ($k-12$) der Pfingstsonntag.

Für die später erfolgende Ableitung der Gaußschen Osterformel sollen die Ausdrücke d, e und f eine Umformung erleiden:

1) Es ist $$p=4\left[\frac{p}{4}\right]+\left(\frac{p}{4}\right).\text{*)}$$

also $$5\left(\frac{p}{4}\right)=5\,p-20\left[\frac{p}{4}\right]$$

und folglich $$\left(\frac{5\left(\frac{p}{4}\right)}{7}\right)=\left(\frac{5\,p+\left[\frac{p}{4}\right]}{7}\right).\text{**)}$$

Demnach ist für den gregorianischen Kalender

$$d=\left(\frac{5\,p+\left[\frac{p}{4}\right]+2}{7}\right)$$

2) Es ist $$J=N-100\,p, \text{ also } e=\left(\frac{N-2\,p}{7}\right).\text{***)}$$

*) Restrechnung 1.
**) Restrechnung 2, 9, 13.
***) Restrechnung 9.

Ferner ist
$$\left[\frac{J}{4}\right] = \left[\frac{N}{4}\right] - 25\,p$$

und folglich
$$\left(\frac{\left[\frac{J}{4}\right]}{7}\right) = \left(\frac{\left[\frac{N}{4}\right] - 4\,p}{7}\right).\text{*)}$$

Nun ist
$$N = 4\left[\frac{N}{4}\right] + \left(\frac{N}{4}\right),\text{**)}$$

also
$$8\left[\frac{N}{4}\right] = 2\,N - 2\left(\frac{N}{4}\right).$$

Daraus folgt
$$\left(\frac{\left[\frac{N}{4}\right]}{7}\right) = \left(\frac{2\,N - 2\left(\frac{N}{4}\right)}{7}\right).\text{***)}$$

Demnach ist
$$f = \left(\frac{2\,N - 2\left(\frac{N}{4}\right) - 4\,p}{7}\right) = \left(\frac{2\,N + 5\left(\frac{N}{4}\right) + 3\,p}{7}\right).\text{†)}$$

Beispiele für die Berechnung des Ostersonntages.

1) Wann ist im Jahre 1917 a. St. das Osterfest?

1917	2	3	4
18			
18			
29	1		
33	3	4	

Ostern ist am 2. April.

2) Wann ist im Jahre 1917 n. St. das Osterfest?

1917	3	3	4
18			
18			
38	3		
39	6	1	

Ostern ist am 8. April.

3) Wann ist im Jahre 1905 n. St. das Osterfest?

1905	3	5	1
6			
6			
49	0		
54	2	5	

Ostern ist am 23. April.

Die Rechnung ergibt $c = 50$; dafür ist aber $c = 49$ zu setzen.

*) Restrechnung 2, 9, 13. **) Restr. 1. ***) Restr. 2, 12. †) Restr. 9, 12, 13.

Die Ostergrenze c kann, wie die folgenden Abschnitte zeigen werden, in mannigfacher Weise berechnet werden. Immer aber ist für die Berechnung des Osterdatums die gegebene Anordnung brauchbar.

VI. Die Formelgruppen.

Unter einer Formelgruppe (Lösung) soll die Gesamtheit der Gleichungen verstanden werden, die zur Berechnung der Ostergrenze erforderlich sind. Eine dieser Gruppen, die einzige, von der bisher die Rede war, ist:

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) + 1 \qquad b = \left(\frac{11a}{30}\right) \qquad (c) = \left(\frac{14 + Z - b}{30}\right) \tag{1}$$

Das Wesentliche von a, der goldenen Zahl, ist, daß sie um 1 wächst, wenn N um 1 wächst, und daß für die nacheinander folgenden Werte von N die Werte von a in Zirkeln von 19 Zahlen wiederkehren. Das Wesentliche von b, der julianischen Epakte, ist, daß sie um 11 wächst, wenn a um 1 wächst, und daß sie stets kleiner als 30 ist.

Man kann für a und b andere Größen a_1 und b_1 so wählen, daß die wesentlichen Merkmale erhalten bleiben. Das ist z. B. der Fall, wenn man setzt:

$$a_1 = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b_1 = \left(\frac{11a_1}{30}\right).$$

a_1 ist zwar nicht die goldene Zahl des Jahres N und b_1 nicht die julianische Epakte;*) aber die Werte entsprechen dem Wesen dieser Begriffe.

Aus diesen Größen ist c so zu bestimmen, daß c für N denselben Wert hat wie der aus (1) hervorgehende. Man hat

$$a_1 = a - 1, \text{ also } b_1 = \left(\frac{11(a-1)}{30}\right) = \left(\frac{b-11}{30}\right), \text{**)}$$

woraus man erhält: $$b = \left(\frac{b_1 + 11}{30}\right). \text{**)}$$

Setzt man diesen Wert in die dritte Gleichung (1) ein, so findet man

$$(c) = \left(\frac{3 + Z - b_1}{30}\right). \text{**)}$$

Also kann (bei Weglassung der Indices) auch die Gruppe

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b = \left(\frac{11a}{30}\right) \qquad (c) = \left(\frac{3 + Z - b}{30}\right) \tag{2}$$

zur Ermittelung der Ostergrenze dienen.

---

*) $b = \left(\frac{11a}{30}\right)$ für $a = \left(\frac{N}{19}\right)$ ist die alte Epakte, die vor der julianischen im Gebrauche war; sie drückt das Mondalter am 22. März aus (Vgl. Wislicenus, S. 46).

**) Restrechnung 9.

Beispiel. $N = 1917$ n. St.

$$a = 17 \qquad b = 7 \qquad (c) = \left(\frac{3 + 12 - 7}{30}\right)$$

Man hat für c den Wert zu wählen, der größer als 20 und kleiner als 51 ist (S. 140), also $c = 38$. Das stimmt mit dem Beispiel auf Seite 147 überein.

Diese Gruppe soll verallgemeinert werden. Das Wesen der Größe a wird durch Addition einer Zahl nicht geändert. Man kann daher statt a auch

$$a_1 = a + x = \left(\frac{N}{19}\right) + x$$

einführen, wenn man nur die entsprechende Änderung von c vornimmt. Und ebenso kann man, ohne das Wesen von b zu berühren, anstelle von b auch

$$b_1 = \left(\frac{11a_1 + y}{30}\right)$$

setzen, wenn man bei der Berechnung von c auf die Änderung Rücksicht nimmt.

Wird x so groß gewählt, daß a_1 größer als 30 wird, so ergeben a_1 und $a_1 - 30$ denselben Wert b_1; deshalb setzt man besser von vornherein

$$a_1 = \left(\frac{a + x}{30}\right).$$

Daraus folgt
$$b_1 = \left(\frac{11a + 11x + y}{30}\right).^{*)}$$

Da $\left(\frac{11a}{30}\right) = b$ ist, ergibt sich

$$b_1 = \left(\frac{b + 11x + y}{30}\right),^{*)}$$

also
$$b = \left(\frac{b_1 - 11x - y}{30}\right).^{*)}$$

Folglich ist nach (2)

$$(c) = \left(\frac{3 + Z + 11x + y - b_1}{30}\right).^{*)}$$

Demnach kann auch die Gruppe

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{11a + y}{30}\right) \qquad (c) = \left(\frac{3 + Z + 11x + y - b}{30}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

zur Berechnung der Ostergrenze verwandt werden.

Beispiel. $N = 1917$ n. St., $x = 5$, $y = 3$.

$$a = 22 \qquad b = 5$$

$$(c) = \left(\frac{3 + 12 + 55 + 3 - 5}{30}\right); \text{ also } c = 38.$$

*) Restrechnung 9.

Für $x = 1$ und $y = 0$ geht die Gruppe (3) in die Gruppe (1), für $x = 0$ und $y = 0$ in die Gruppe (2) über.

Lösungen der Aufgabe, die Östergrenze zu ermitteln, die auf die Formelgruppe (3) zurückgehen, sollen Subtraktionslösungen genannt werden, da in dem Ergebnis für c der Wert b als Subtrahend auftritt. Eine solche ist die im Abschnitt III streng nach den kirchlichen Vorschriften entwickelte Lösung.

Gauß hat in seiner berühmten Regel für die Berechnung des Osterdatums eine andere Art der Bestimmung der Ostergrenze benutzt, wie der bei ihm neben $a = \left(\frac{N}{19}\right)$ vorkommende Ausdruck

$$b = \left(\frac{19a + y}{30}\right)$$

beweist. Nimmt man dafür den gleichwertigen

$$b = \left(\frac{-11a + y}{30}\right),\text{*)}$$

so sieht man, daß hier das Wesen der Epakte verloren gegangen ist. Die Werte b wachsen, wenn a um 1 zunimmt, nicht um 11, sondern sie fallen um 11, oder — anders ausgedrückt — sie wachsen um 19.

Um für diesen Fall zu einer Formelgruppe zu gelangen, setzt man in der Gruppe (2) statt der zweiten Gleichung die folgende:

$$b_1 = \left(\frac{19a}{30}\right) = \left(\frac{-11a}{30}\right).$$

Da in (2) $b = \left(\frac{11a}{30}\right)$ ist, so folgt

$$b_1 = \left(\frac{-b}{30}\right),\text{**)}$$

woraus sich

$$b = \left(\frac{-b_1}{30}\right)\text{**)}$$

ergibt. Setzt man diesen Wert in die dritte Gleichung der Gruppe (2) ein, so erhält man

$$(c) = \left(\frac{3 + Z + b_1}{30}\right).$$

Danach kann auch die Gruppe

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \quad b = \left(\frac{19a}{30}\right) \quad (c) = \left(\frac{3 + Z + b}{30}\right) \tag{4}$$

zur Auffindung der Ostergrenze dienen.

Beispiel. Es sei $N = 1917$ n. St.

Dann ist $a = 17 \quad b = 23 \quad c = 38$.

Genau so, wie (3) durch Verallgemeinerung aus (2) abgeleitet wurde, läßt sich aus (4) eine allgemeinere Gruppe entwickeln.

---

*) Restrechnung 9, 12, 13.
**) Restrechnung 15.

Man setzt

$$a_1 = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) = \left(\frac{a + x}{30}\right)$$

und

$$b_1 = \left(\frac{19 a_1 + y}{30}\right) = \left(\frac{-11 a_1 + y}{30}\right)$$

und findet

$$b_1 = \left(\frac{-11 a - 11 x + y}{30}\right),$$

wofür man

$$b_1 = \left(\frac{b - 11 x + y}{30}\right)$$

setzen kann. Daraus folgt

$$b = \left(\frac{b_1 + 11 x - y}{30}\right)$$

und

$$(c) = \left(\frac{3 + Z + 11 x - y + b_1}{30}\right).$$

Es ergibt sich also als neue Gruppe:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \quad b = \left(\frac{19 a + y}{30}\right) \quad (c) = \left(\frac{3 + Z + 11 x - y + b}{30}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

Beispiel. $N = 1917$ n. St., $x = 4$, $y = 3$.
$a = 21$, $b = 12$, $c = 38$.

Für $x = 0$ und $y = 0$ geht (5) in (4) über.

Lösungen der Aufgabe, die Ostergrenze zu bestimmen, die aus der Gruppe (5) folgen, sollen als Additionslösungen bezeichnet werden.

Wenn man in der Gruppe (5) $-11a$ statt $19a$ schreibt, so läßt sie sich mit der Gruppe (3) folgendermaßen vereinigen:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \quad b = \left(\frac{\pm 11 a + y}{30}\right) \quad (c) = \left(\frac{3 + Z + 11 x \pm y \mp b}{30}\right), \qquad \textbf{(6)}$$

wobei das obere Vorzeichen für die Subtraktionslösungen, das untere für die Additionslösungen gilt.

Die Gleichungen (6) bilden die **allgemeine Lösung** der Aufgabe, die Ostergrenze zu berechnen.

Setzt man in der dritten Gleichung von (6) $b = 0$, so erhält man

$$(c) = \left(\frac{3 + Z + 11 x \pm y}{30}\right).$$

Berechnet man diesen Wert für jedes Jahr eines Zirkels, so kommen dabei im allgemeinen zwei Gleichungen zur Anwendung, wie aus den Betrachtungen des III. Abschnittes hervorgeht. Die beiden sich ergebenden Werte von c sollen Nullwerte genannt werden. Von ihnen ist der eine um 30 größer als der andere.

Für $Z = 10$, $x = 1$, $y = 0$ ist z. B. nach (3)

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) + 1 \qquad b = \left(\frac{11a}{30}\right) \qquad (c) = \left(\frac{24 - b}{30}\right) = \begin{cases} 24 - b \\ 54 - b \end{cases}$$

Beispiel. $N = 1625$:

$a = 11 \qquad b = 1 \qquad c = 24 - 1$

$N = 1620$:

$a = 6 \qquad b = 6 \qquad c = 54 - 6$

Für $Z = 10$, $x = 0$, $y = 1$ ist nach (5)

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b = \left(\frac{19a + 1}{30}\right) \qquad (c) = \left(\frac{12 + b}{30}\right) = \begin{cases} 12 + b \\ 42 + b \end{cases}$$

Beispiel. $N = 1625$:

$a = 10 \qquad b = 1 \qquad c = 12 + 11$

$N = 1620$:

$a = 5 \qquad b = 6 \qquad c = 42 + 6.$

Im ersten Beispiel (Subtraktionslösung) sind 24 und 54 die Nullwerte, im zweiten Beispiel (Additionslösung) 12 und 42. Treten, wie hier, zwei Nullwerte auf, so ist im Falle einer Subtraktionslösung der eine kleiner als 50, der andere größer als 50; im Falle einer Additionslösung aber ist der eine kleiner als 21, der andere größer als 21.

Solche Lösungen der Aufgabe, die Ostergrenze zu berechnen, bei denen die Wahl zwischen zwei Gleichungen zu treffen ist, seien als zweigleisige Lösungen bezeichnet. Derartige Lösungen sind die auf Seite 141 durchgeführten.

Es kann nun im Falle einer Subtraktionslösung der eine Nullwert 50 werden. Dann müßte der andere 80 oder 20 sein; da aber c einen der Werte 21 bis 50 annehmen muß, so kann c nicht 80—b sein, weil b kleiner als 30 ist, und nicht 20—b sein, weil b größer als 0 ist. Also fällt der zweite Nullwert aus, wenn der erste 50 ist. Ebenso kann im Falle einer Additionslösung der eine Nullwert 21 sein; auch dann fällt der andere aus. Es wird daher beidemal für c nur eine Gleichung aufgestellt werden können Solche Lösungen der Aufgabe, die Ostergrenze zu berechnen, seien eingleisige Lösungen oder Vollösungen genannt. Es wird sich zeigen, daß sich Vollösungen auch bei anderen Nullwerten als 50 oder 21 ergeben können. Die Vollösungen mit den Nullwerten 50 oder 21 sollen Hauptlösungen, die mit anderen Nullwerten Nebenlösungen heißen. (Der Begriff Hauptlösung wird durch Abschnitt IX insofern etwas erweitert, als auch Vollösungen mit den Nullwerten 50—A und 21—A zu den Hauptlösungen gerechnet werden.)

Nur der Vollständigkeit halber sei noch auf folgende Gruppe hingewiesen:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \quad b = \left(\frac{\pm 11a + y}{30}\right) + z \quad (c) = \left(\frac{3 + Z + 11x \pm y}{30}\right) \pm z \mp b.$$

Beispiele.

1) $N = 1594$ n. St. $(Z = 10)$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 100$:

$a = 18 \quad b = 118 \quad c = 154 - 118 = 36$ (Subtraktionslösung).

2) $N = 1594$ n. St., $x = 0$, $y = 1$, $z = 10$:

$a = 17 \quad b = 34 \quad c = 2 + 34 = 36$ (Additionslösung).

Solche Lösungen sind willkürliche Lösungen, auf die näher einzugehen, überflüssig erscheint.

VII. Subtraktions-Vollösungen.

Die Subtraktionslösung (3), Seite 149, ist eine Hauptlösung, wenn der Nullwert der Ostergrenze

$$\left(\frac{3 + Z + 11x + y}{30}\right) = 50,$$

wenn demnach

$$\left(\frac{11x + y}{30}\right) = \left(\frac{17 - Z}{30}\right) \text{*)}$$

wird. Die Formelgruppe (3) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \quad b = \left(\frac{11a + y}{30}\right) \quad c = 50 - b, \qquad (7)$$

wobei

$$\left(\frac{11x + y}{30}\right) = \left(\frac{17 - Z}{30}\right).$$

Beispiele.

1) Für $Z = 12$ lautet die Bedingungsgleichung zwischen x und y

$$\left(\frac{11x + y}{30}\right) = 5.$$

Sie wird z. B. befriedigt durch $x = 3$ und $y = 2$. Für diesen Fall dient die Gruppe

---

*) Restrechnung 9.

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) + 3 \qquad b = \left(\frac{11\,a + 2}{30}\right) \qquad c = 50 - b$$

zur Bestimmung der Ostergrenze. Danach ist für das Jahr 1918 n. St.

$$a = 21 \qquad b = 23 \qquad c = 27,$$

d. h. im Jahre 1918 ist der 27. März die Ostergrenze.

2) Für $Z = 12$ wird die Bedingung in (7) auch erfüllt durch $x = 6$ und $y = -1$. Dafür dient die Gruppe

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) + 6 \qquad b = \left(\frac{11\,a - 1}{30}\right) \qquad c = 50 - b$$

zur Berechnung der Ostergrenze. So ergibt sich für 1918

$$a = 24 \qquad b = 23 \qquad c = 27,$$

d. h. für die Ostergrenze derselbe Wert wie im vorigen Beispiel.

Für die Rechnung ist es bequemer, wenn man in (7) — das ist auch für sämtliche folgenden Gruppen zutreffend — entweder $x = 0$ oder $y = 0$ setzt (Vgl. Abschnitt XIII).

Für $x = 0$ erhält man

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b = \left(\frac{11\,a + y}{30}\right) \qquad c = 50 - b, \tag{7_1}$$

wobei

$$\left(\frac{y}{30}\right) = \left(\frac{17 - Z}{30}\right).$$

Beispiel. $N = 1918$ n. St.:

$$y = 5 \qquad a = 18 \qquad b = 23 \qquad c = 27$$

Für $y = 0$ erhält man

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{11\,a}{30}\right) \qquad c = 50 - b, \tag{7_2}$$

wobei

$$\left(\frac{11\,x}{30}\right) = \left(\frac{17 - Z}{30}\right).$$

Beispiel. $N = 1918$ n. St.:

$$\left(\frac{11\,x}{30}\right) = 5, \text{ also } x = \left(\frac{5 \cdot 11}{30}\right)^{*)} = 25$$

$$a = 13 \qquad b = 23 \qquad c = 27$$

Die Ermittelung der Nebenlösungen durch reine Rechnung ist ziemlich umständlich; sie wird aber einfach, wenn man die folgende Tabelle zu Hilfe nimmt:

---

*) Restrechnung 12.

c	(50)	49 (49)	48		22	21	
Z	b						A
10	23		25			22	1
11		25	26		22	23	0
12	25	26			23		2
13	26		28			25	1
14		28			25	26	0
15	28		0		26		1
16		0	1			28	0
17	0	1			28		2
18	1		3			0	1
19		3	4		0	1	0
20	3	4			1		2

Zur Erklärung der Tabelle diene folgendes. Aus $c = 50, 49, 48, \ldots 22$ und 21 sind für jedes Jahrhundert die entsprechenden Werte von b ermittelt unter Anwendung der aus Gruppe (2) sich ergebenden Gleichungen

$$(b) = \left(\frac{3+Z-c}{30}\right),\text{*)} \quad a = \left(\frac{11\,b}{30}\right),\text{**)}$$

wobei nur solche Werte b genommen werden durften, für die $a < 19$ ist.

1) Im Falle $A = 0$, also in den Jahrhunderten mit $Z = 11, 14, 16$ und 19, fehlt $c = 50$; man kann daher für diese Jahrhunderte statt $c = 50 - b$ auch $c = 49 - b_1$ als Ostergrenze wählen, wobei $b_1 = b - 1$ ist.

Nach der allgemeinen Subtraktionslösung ist dann

$$\left(\frac{3+Z+11x+y}{30}\right) = 49,$$

d. h.

$$\left(\frac{11x+y}{30}\right) = \left(\frac{16-Z}{30}\right).$$

Es gilt also für die Berechnung der Ostergrenze in den Jahrhunderten, die keine Ausnahmen aufweisen, als Nebenlösung die Gruppe von Gleichungen:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{11a+y}{30}\right) \qquad c = 49 - b, \tag{8}$$

*) Restrechnung 9.
**) Restrechnung 12.

wobei
$$\left(\frac{11x+y}{30}\right)=\left(\frac{16-Z}{30}\right).$$

Beispiel. $N=1863$ n. St. $(Z=11)$. Für $x=0$ wird $y=5$, und es ist
$$a=1 \qquad b=16 \qquad c=33.$$

Die Prüfung mit Hilfe einer früheren Lösung, z. B. der Lösung (2), wonach $a=1$, $b=11$, $c=33$, ergibt die Richtigkeit des Ergebnisses.

2) Im Falle $A=2$ $(Z=12,\ 17,\ 20)$ und im Falle $Z=15$ fehlt $c=21$. Da b höchstens 29 sein kann, darf auch $c=51-b$ als Ostergrenze genommen werden; denn für den größten Wert von b ergibt sich gerade noch der kleinste Wert 22 von c. Hier ist zu setzen:
$$\left(\frac{3+Z+11x+y}{30}\right)=51,$$
also
$$\left(\frac{11x+y}{30}\right)=\left(\frac{18-Z}{30}\right).$$

Das ergibt für die Jahrhunderte, in denen im Mondzirkel zwei Ausnahmen vorkommen, und in den Jahrhunderten, für die $Z=15$ ist, zur Berechnung der Ostergrenze die Nebenlösung:
$$a=\left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right)+x}{30}\right) \qquad b=\left(\frac{11a+y}{30}\right) \qquad c=51-b, \tag{9}$$
wobei
$$\left(\frac{11x+y}{30}\right)=\left(\frac{18-Z}{30}\right).$$

Beispiel. $N=1918$ $(Z=12)$. Für $x=0$ wird $y=6$. Also ist $a=18$, $b=24$, $c=27$. (Vgl. die Beispiele zu (7), (7_1) und (7_2).)

3) Für $Z=15$ ist $A=1$. In den übrigen Jahrhunderten mit $A=1$, d. i. für $Z=10$, 13 und 18, fehlt weder $c=50$ noch $c=21$. Also kann es dafür keine Nebenlösungen geben.

4) Die Nebenlösungen lassen sich zu folgender Formelgruppe zusammenziehen:
$$a=\left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right)+x}{30}\right) \qquad b=\left(\frac{11a+y}{30}\right) \qquad c=49+A-b, \tag{10}$$
wobei
$$\left(\frac{11x+y}{30}\right)=\left(\frac{16+A-Z}{30}\right).$$

Für $A=0$ erhält man daraus die Gruppe (8).

Für $A = 1$ ergibt sich die Gruppe (7). Da (7) die Hauptlösung darstellt, so folgt, daß für $A = 1$ Nebenlösungen nicht vorhanden sind.

Für $A = 2$ findet man die Gruppe (9). Es ist dabei zu bemerken, daß bei $Z = 15$ ausnahmsweise auch $A = 2$ gesetzt werden darf.

VIII. Additions-Vollösungen.

Die Additionslösung (5) ist eine Hauptlösung, wenn der Nullwert der Ostergrenze

$$\left(\frac{3 + Z + 11x - y}{30}\right) = 21,$$

wenn also

$$\left(\frac{11x - y}{30}\right) = \left(\frac{18 - Z}{30}\right)$$

ist. Dadurch verwandelt sich die Gruppe (5) in folgende:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{19a + y}{30}\right) \qquad c = 21 + b, \tag{11}$$

wobei

$$\left(\frac{11x - y}{30}\right) = \left(\frac{18 - Z}{30}\right).$$

Beispiel. $N = 1918$ $(Z = 12)$. Für $x = 0$ ist $y = 24$, und es ergibt sich $a = 18$, $b = 6$, $c = 27$.

Zur Ermittelung der Nebenlösungen zieht man wieder die Tabelle auf Seite 155 heran und wiederholt die Betrachtungen des vorigen Abschnittes. Es dürfte deshalb genügen, die Ergebnisse anzugeben.

1) In den Jahrhunderten, für die $A = 0$ ist, gilt als Nebenlösung die Gruppe:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{19a + y}{30}\right) \qquad c = 20 + b, \tag{12}$$

wobei

$$\left(\frac{11x - y}{30}\right) = \left(\frac{17 - Z}{30}\right).$$

Beispiel. $N = 1863$ $(Z = 11)$. Für $x = 0$ wird $y = 24$, und es folgt $a = 1$, $b = 13$, $c = 33$. (Siehe Beispiel zu (8).)

2) In den Jahrhunderten, für die $A = 2$, und in den Jahrhunderten, für die $Z = 15$ $(A = 1)$ ist, gilt als Nebenlösung:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{19a + y}{30}\right) \qquad c = 22 + b, \tag{13}$$

wobei $$\left(\frac{11x-y}{30}\right)=\left(\frac{19-Z}{30}\right)$$

3) Für $Z=10$, 13 und 18 fehlt auch hier die Nebenlösung.

4) Die Nebenlösungen gestatten folgende Zusammenfassung:

$$a=\left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right)+x}{30}\right) \qquad b=\left(\frac{19a+y}{30}\right) \qquad c=20+A+b, \tag{14}$$

wobei $$\left(\frac{11x-y}{30}\right)=\left(\frac{17+A-Z}{30}\right).$$

Für $A=0$ erhält man daraus die Gruppe (12).

Für $A=1$ ergibt sich die Hauptlösung (11), woraus folgt, daß für $A=1$ Nebenlösungen fehlen.

Für $A=2$ findet man die Gruppe (13). Hervorzuheben ist, daß bei $Z=15$ ausnahmsweise auch $A=2$ gesetzt werden darf.

Bemerkung. Die Lösungen (7) bis (14) sollen im Gegensatz zu den Lösungen im folgenden Abschnitt als Lösungen erster Art bezeichnet werden.

IX. Vollösungen zweiter Art.

Vertauscht man in der Tabelle Seite 155 in jeder Reihe die Zahlen zyklisch in solcher Weise, daß die Ausnahmen ans Ende kommen, so ergibt sich folgendes Bild:

c	50	49	48	47		22	21	(20)	(19)	
Z	b									A
10	.		25	26			22	23		1
11		25	26			22	23		—	0
12	.	.		28		23		25	26	2
13	.		28				25	26		1
14		28		0		25	26		—	0
15	.		0	1		26		28		1
16		0	1				28		—	0
17	.	.		3		28		0	1	2
18	.		3	4			0	1		1
19		3	4			0	1		—	0
20	.	.		6		1		3	4	2

Die Punkte bezeichnen die Stellen der Werte b, die die Ausnahmen ergeben haben.

In jeder Reihe kommen A Zahlen, nämlich soviel, wie die Anzahl der Ausnahmen beträgt, vom Anfang an das Ende. Man kann also zur Berechnung der Ostergrenze die Gruppe (7):

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{11a + y}{30}\right) \qquad c = 50 - b,$$

wobei
$$\left(\frac{11x + y}{30}\right) = \left(\frac{17 - Z}{30}\right),$$

anwenden, wenn man den Nullwert um A verkleinert, wenn man also
$$c = 50 - A - b$$
setzt. Damit aber das gleiche c erhalten wird, muß auch b um A verkleinert werden.

Nun ist nach (7)
$$b = \left(\frac{11\left(\frac{N}{19}\right) + 11x + y}{30}\right), \quad \left(\frac{11x + y}{30}\right) = \left(\frac{17 - Z}{30}\right).$$

Danach wird b um A kleiner, wenn man
$$\left(\frac{11x + y}{30}\right) = \left(\frac{17 - A - Z}{30}\right)$$
nimmt.

Für die Berechnung der Ostergrenze eignet sich daher auch die Gruppe (Hauptlösung zweiter Art, Subtraktionslösung):

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{11a + y}{30}\right) \qquad c = 50 - A - b, \tag{15}$$

wobei
$$\left(\frac{11x + y}{30}\right) = \left(\frac{17 - A - Z}{30}\right).$$

Die Gruppe (15) geht für $A = 0$ in die Gruppe (7) über.

Im übrigen ist folgendes zu bemerken. Die Ausnahmewerte $c = (50)$ und $c = (49)$ können in der Rechnung nicht mehr vorkommen, da der Nullwert $50 - A$ der Ostergrenze unter allen Umständen kleiner ist als die Ausnahmewerte. Für diese Werte treten die um 30 kleineren $c = (20)$ und $c = (19)$ ein, und die im Beginn des Abschnittes IV erwähnten kirchlichen Bestimmungen müssen darum hier lauten:

1) Ergibt sich bei der Berechnung der Ostergrenze der 20. März, so ist statt dessen der 49. März zu nehmen.

Beispiel. $N = 1905$ ($Z = 12$). Setzt man $x = 0$, so ist nach (15) $y = 3$ und $a = 5$, $b = 28$, $c = 20$, wofür 49 zu setzen ist.

2) Ergibt sich in demselben Mondzirkel der 19. März, so ist statt dessen der 48. März zu nehmen.

Beispiel. $N = 1916$ $(Z = 12)$. Für $x = 0$ wird $y = 3$ und $a = 16$, $b = 29$, $c = 19$, wofür 48 zu setzen ist.

Diese geänderten Bestimmungen haben auch für die folgenden Gruppen dieses Abschnittes Geltung.

Die höchsten Werte der Ostergrenze sind nach der Tabelle auf Seite 158

$$c = 49 \text{ für } A = 0,$$
$$c = 48 \text{ für } A = 1,$$
$$\text{und } c = 47 \text{ für } A = 2.$$

Allgemein ist also

$$c = 49 - A$$

der höchste Wert der Ostergrenze. Deshalb kann auch dieser als Nullwert gelten, wenn

$$\left(\frac{11x + y}{30}\right) = \left(\frac{16 - A - Z}{30}\right)$$

ist, und es kann zur Ermittelung der Ostergrenze auch folgende Gruppe benutzt werden:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{11a + y}{30}\right) \qquad c = 49 - A - b, \qquad (16)$$

wobei $$\left(\frac{11x + y}{30}\right) = \left(\frac{16 - A - Z}{30}\right).$$

Diese Lösung soll als Nebenlösung zweiter Art, Subtraktionslösung, bezeichnet werden. Sie geht für $A = 0$ in die Lösung (8) über.

Ähnliche Vollösungen zweiter Art können aus den Additionslösungen gefolgert werden. In der Tabelle auf Seite 158 ist der kleinste Wert der Ostergrenze für jede Reihe der Wert $c = 21 - A$. Dieser kann daher als Nullwert der Ostergrenze gewählt werden. Ersetzt man in der Gruppe (11):

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{19a + y}{30}\right) \qquad c = 21 + b$$

$$\left(\frac{11x - y}{30}\right) = \left(\frac{18 - Z}{30}\right)$$

c durch $21 - A + b$, so hat man b durch $b + A$ zu ersetzen. Nun ist

$$b = \left(\frac{19\left(\frac{N}{19}\right) + 19x + y}{30}\right) = \left(\frac{19\left(\frac{N}{19}\right) - (11x - y)}{30}\right),$$

also wächst b um A, wenn $11x - y$ um A fällt. Demnach bestimmt auch die Gruppe (Hauptlösung zweiter Art, Additionslösung)

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{19a + y}{30}\right) \qquad c = 21 - A + b, \qquad \textbf{(17)}$$

wobei
$$\left(\frac{11x - y}{30}\right) = \left(\frac{18 - A - Z}{30}\right),$$

die Ostergrenze. Sie geht für $A = 0$ in die Lösung (11) über.

Da die Werte $c = 50 - A$, also auch die Werte $c = 20 - A$ in der Tabelle nicht vorhanden sind, so kann endlich noch der letzte Wert als Nullwert in Betracht kommen; dabei ist

$$\left(\frac{11x - y}{39}\right) = \left(\frac{17 - A - Z}{30}\right)$$

die Bedingungsgleichung für x und y. Also kann auch die folgende Gruppe zur Berechnung der Ostergrenze herangezogen werden:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{19a + y}{30}\right) \qquad c = 20 - A + b, \qquad \textbf{(18)}$$

wobei
$$\left(\frac{11x - y}{30}\right) = \left(\frac{17 - A - Z}{30}\right).$$

Diese Gruppe soll Nebenlösung zweiter Art; Additionslösung, genannt werden. Sie geht für $A = 0$ in die Gruppe (12) über.

X. Eine zweigleisige Lösung besonderer Art.

Die Nullwerte der Ostergrenze für die Vollösungen sind nach den vorhergehenden Betrachtungen 50, 50 — A, $49 \pm A$; 21, 21 — A, $20 \pm A$. Alle anderen Nullwerte haben zweigleisige Lösungen zur Folge. Von solchen Lösungen verdienen wegen ihrer Einfachheit die eine besondere Besprechung, bei denen der Nullwert null ist.

Man kommt am schnellsten zum Ziele, wenn man von der allgemeinen Lösung (6) ausgeht. Setzt man darin

$$\left(\frac{3 + Z + 11x \pm y}{30}\right) = 0,$$

so erhält man
$$\left(\frac{11x \pm y}{30}\right) = \left(\frac{27 - Z}{30}\right).$$

Das ergibt als Gruppe zur Berechnung der Ostergrenze:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{\pm 11a + y}{30}\right) \qquad (c) = \left(\frac{\mp b}{30}\right).$$

Diese Gruppe wird besonders einfach für $x = 0$:

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b = \left(\frac{\pm 11a + y}{30}\right) \qquad (c) = \left(\frac{\mp b}{30}\right).$$

Nun ist hier
$$\left(\frac{\pm y}{30}\right) = \left(\frac{27 - Z}{30}\right),$$

also
$$y = \left(\frac{\mp(3 + Z)}{30}\right).$$

Folglich ist

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b = \left(\frac{\pm 11a \mp (3 + Z)}{30}\right) \qquad (c) = \left(\frac{\mp b}{30}\right).$$

D. h. Als besondere zweigleisige Lösung ergibt sich:

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad (c) = \left(\frac{-11a + 3 + Z}{30}\right) \tag{19}$$

Diese Lösung kann sowohl als Additions- wie auch als Subtraktionslösung aufgefaßt werden; sie erscheint aber in der Gestalt der Additionslösung, was besonders hervortritt, wenn man 19a statt —11a setzt.

Beispiele:

1) $N = 1917$: $a = 17$ $(c) = \left(\frac{-7 + 3 + 12}{30}\right)$,

also $c = 38$.

2) $N = 1927$: $a = 8$ $(c) = \left(\frac{2 + 3 + 12}{30}\right)$,

also $c = 47$.

3) $N = 1905$: $a = 5$ $(c) = \left(\frac{5 + 3 + 12}{30}\right)$,

also $c = 50$, wofür 49 gilt.

4) $N = 1916$: $a = 16$ $(c) = \left(\frac{4 + 3 + 12}{30}\right)$,

also $c = 49$, wofür 48 gilt.

XI. Übersicht über die Lösungen.

1. Subtraktionslösungen:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{11a + y}{30}\right)$$

Art	c	$\left(\frac{11x+y}{30}\right)$	Hinweis
ein- und zweigleisige Lösungen	$(3+Z+11x+y-b)$[1]		(3)
Hauptlösung 1. Art	$50-b$	$(17-Z)$[2]	(7)
Hauptlösung 2. Art	$50-A-b$	$(17-A-Z)$[2]	(15)
Nebenlösung 1. Art	$49+A-b$	$(16+A-Z)$[2][3]	(10)
Nebenlösung 2. Art	$49-A-b$	$(16-A-Z)$[2]	(16)

2. Additionslösungen:

$$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right) + x}{30}\right) \qquad b = \left(\frac{19a + y}{19}\right)$$

Art	c	$\left(\frac{11x-y}{30}\right)$	Hinweis
ein- und zweigleisige Lösungen	$(3+Z+11x-y+b)$[4]		(5)
Hauptlösung 1. Art	$21+b$	$(18-Z)$[2]	(11)
Hauptlösung 2. Art	$21-A+b$	$(18-A-Z)$[2]	(17)
Nebenlösung 1. Art	$20+A+b$	$(17+A-Z)$[2][3]	(14)
Nebenlösung 2. Art	$20-A+b$	$(17-A-Z)$[2]	(18)

3. Besondere zweigleisige Lösung:

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad (c) = \left(\frac{-11a+3+Z}{30}\right). \qquad (19)$$

---

[1] $(c) = (3+Z+11x+y-b)$.

[1] [2] [4] Der Teiler 30 ist weggelassen.

[3] Gilt auch für $Z = 15$ mit $A = 2$.

[4] $(c) = (3+Z+11x-y+b)$.

XII. Ableitung einiger bekannter Osterformeln.

1. Die Gaußsche Formel. Die Gaußsche Regel für die Berechnung des Ostersonntages lautet (bei Anwendung der Ausdrucksmittel dieser Arbeit):

Ist 1) $N = 100p + J$, 2) $y = \left(\frac{Z+12}{30}\right)$, 3) $q = \left(\frac{p + 4 - [\frac{p}{4}]}{7}\right)$,

5) $a = \left(\frac{N}{19}\right)$, 6) $b = \left(\frac{19a + y}{30}\right)$, 7) $s = \left(\frac{N}{4}\right)$, 8) $t = \left(\frac{N}{7}\right)$,

9) $u = \left(\frac{2s + 4t + 6b + q}{7}\right)$, so ist $k = 22 + b + u$ das Märzdatum des Ostersonntages.

Dieser Regel liegt die Formelgruppe (11) zur Berechnung der Ostergrenze zugrunde; denn diese Gruppe nimmt für $x = 0$ folgende Form an:

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b = \left(\frac{19a + y}{30}\right) \qquad c = 21 + b \qquad y = \left(\frac{Z - 18}{30}\right)$$

und es ist

$$\left(\frac{Z-18}{30}\right) = \left(\frac{Z+12}{30}\right).$$

Die Gaußsche Formel geht also auf eine Additionshauptlösung zurück. Im übrigen gestaltet sich der Beweis für ihre Richtigkeit folgendermaßen:

Nach Seite 145 bis 147 ist

$$k = c + 7 - h \text{ und } h = \left(\frac{d + e + f + g}{7}\right)$$

$$= \left(\frac{5p + [\frac{p}{4}] + 2 + N - 2p + 2N + 5(\frac{N}{4}) + 3p + c}{7}\right)$$

$$= \left(\frac{5(\frac{N}{4}) + 3N + c + 6p + 2 + [\frac{p}{4}]}{7}\right).$$

Setzt man die Gaußschen Zeichen ein und berücksichtigt, daß

$$c = 21 + b, \text{ also } \left(\frac{c}{7}\right) = \left(\frac{b}{7}\right)$$

ist, so folgt $k = 21 + b + 7 - h = 22 + b + 6 - h$

$$\text{und } h = \left(\frac{5s + 3t + b + 6p + 2 + [\frac{p}{4}]}{7}\right).$$

Nun ist
$$6-h=\left(\frac{2s+4t+6b+p+4-[\frac{p}{4}]}{7}\right)^{*)}$$
$$=\left(\frac{2s+4t+6b+q}{7}\right)$$
$$=u.$$
Also ist in der Tat $k=22+b+u$.

Die Gaußsche Osterregel gilt in dieser Form nur für den gregorianischen Kalender. Für den julianischen Kalender ist sie aber anwendbar, wenn $y=15$ und $q=6$ gesetzt wird. Das ergibt sich sehr einfach. Nach Seite 146 ist d des julianischen Kalenders um $p-[\frac{p}{4}]-2$ größer als d des gregorianischen Kalenders. Dementsprechend wird h um ebensoviel größer, also
$$h=\left(\frac{5s+3t+b}{7}\right).$$
Daraus folgt
$$6-h=\left(\frac{2s+4t+6b+6}{7}\right).$$
Dieser Wert ist u, wenn $q=6$ ist.

Ferner ist für den julianischen Kalender stets $Z=3$, also $y=15$.

Für die Gaußsche Osterformel gelten folgende Ausnahmebestimmungen: Ergibt die Rechnung den 26. April als Ostersonntag, so ist statt dessen der 19. April zu nehmen; ergibt sie den 25. April, und ist dabei $a>10$ und $b=28$, so ist statt dessen der 18. April zu nehmen (S. Abschnitt XIII).

Diese Ausnahmebestimmungen sind leicht abzuleiten. Ostern kann auf den 26. April nur dann fallen, wenn die Ostergrenze $c=50$ ein Sonntag ist, und auf den 25. April nur, wenn die Ostergrenze $c=50$ ein Montag oder $c=49$ ein Sonntag ist.

Ist $c=50$, so ist $b=29$, d. h. es ist
$$\left(\frac{19a_1+y}{30}\right)=\left(\frac{19a_1+Z+12}{30}\right)=29,$$
wenn der Wert von a, der $b=29$ zur Folge hat, mit a_1 bezeichnet wird. Daraus folgt
$$a_1=\left(\frac{11(Z+13)}{30}\right).$$

Nach den kirchlichen Ausnahmebestimmungen (Abschnitt IV) ist $c=49$ anstatt $c=50$ zu setzen, wenn $a_1<19$. Das ist der Fall für $Z=10$, 12, 13, 15, 17, 18 und 20.

*) Restrechnung 9, 15.

Ist $c = 49$, so ist $b = 28$, d. h. es ist

$$\left(\frac{19a_2 + Z + 12}{30}\right) = 28,$$

wenn der Wert von a, der $b = 28$ ergibt, mit a_2 bezeichnet wird. Das ergibt

$$a_2 = \left(\frac{11(Z + 14)}{30}\right),$$

woraus folgt, daß

$$a_2 = \left(\frac{a_1 + 11}{30}\right) \cdot \text{ist.}$$

Für $c = 49$ ist $c = 48$ zu setzen, wenn $a_2 < 19$ und wenn $c = 50$ bereits durch $c = 49$ ersetzt ist, d. h., wenn sowohl $a_1 < 19$ als auch $a_2 < 19$ ist. Das tritt ein für $Z = 12$, 17 und 20. Dabei ist 11 der kleinste Wert von a_2, für den die zweite Ausnahme stattfinden kann, wenn nämlich a_1 den kleinsten Wert 0 hat. Also ist $a_2 > 10$.

Damit ist die Richtigkeit der Gaußschen Ausnahmebestimmung bestätigt.

2. Kaisers Formel*) geht auch aus der Additionshauptlösung (11) hervor. Nach dieser ist für $x = 0$

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b = \left(\frac{19a + Z + 12}{30}\right) \qquad c = 21 + b$$

Ostersonntag hat dann dem Abschnitt V gemäß das Märzdatum

$$k = 28 + b - h,$$

wobei im julianischen Kalender:

$$h = \left(\frac{6p + J + [\frac{J}{4}] + b}{7}\right)$$

und im gregorianischen:

$$h = \left(\frac{5(\frac{p}{4}) + 2 + J + [\frac{J}{4}] + b}{7}\right) \text{ ist.}$$

Kaiser gibt als Märzdatum des Ostersonntages

$$k = 29 + b - w,$$

d. h. $w = h + 1$. Da h die Werte 0 bis 6 annimmt, so nimmt w die Werte 1 bis 7 an. Also ist für den julianischen Kalender:

$$w = \left(\frac{1 - p + J + [\frac{J}{4}] + b}{7}\right)$$

*) Lersch, S. 104. Die Originalabhandlung war dem Verfasser nicht zugänglich.

und für den gregorianischen, wenn man zugleich $5\left(\frac{p}{4}\right)$ durch $5p-20\left[\frac{p}{4}\right]$ *) ersetzt:

$$w=\left(\frac{\left[\frac{p}{4}\right]-2p+3+J+\left[\frac{J}{4}\right]+b}{7}\right),$$

wobei in beiden Fällen $w=7$ zu setzen ist, wenn sich $w=0$ ergibt.

Für den julianischen Kalender lautet also Kaisers Osterformel:

$$a=\left(\frac{N}{19}\right) \qquad b=\left(\frac{19a+15}{30}\right) \qquad \underset{(1\ldots7)}{w}=\left(\frac{1-p+J+\left[\frac{J}{4}\right]+b}{7}\right)$$

$$k=29+b-w.$$

Für den gregorianischen Kalender findet sich bei Kaiser noch eine Aenderung des Ausdruckes

$$b=\left(\frac{19a+Z+12}{30}\right).$$

Zunächst ist

$$b=\left(\frac{19a+p+15-\left[\frac{p}{4}\right]-\left[\frac{p}{3}\right]}{30}\right)$$

oder, wenn man anstelle von $\left[\frac{p}{3}\right]$ den auch über das Jahr 3900 hinaus richtigen Wert

$$\left[\frac{8p+13}{25}\right]\text{**)}$$

einführt:

$$b=\left(\frac{19a+p+15-\left[\frac{p}{4}\right]-\left[\frac{8p+13}{25}\right]}{30}\right).$$

Weiter ist

$$8p-112=25\cdot\left[\frac{8p-112}{25}\right]+\left(\frac{8p-112}{25}\right)\text{***)}$$

$$=25\cdot\left[\frac{8p-112}{25}\right]+\left(\frac{8p+13}{25}\right)\dagger)$$

und

$$8p+13=25\cdot\left[\frac{8p+13}{25}\right]+\left(\frac{8p+13}{25}\right)\text{***)},$$

also

$$8p-112=25\cdot\left[\frac{8p-112}{25}\right]+8p+13-25\cdot\left[\frac{8p+13}{25}\right],$$

d. h.

$$\left[\frac{8p+13}{25}\right]=\left[\frac{8p-112}{25}\right]+5$$

---

*) S. 146.

**) Lersch, S. 103, Fußnote, wonach dieser Wert von Gauß stammt.

***) Restrechnung 1.

†) Restrechnung 9.

Setzt man diesen Wert ein, so erhält man schließlich

$$b = \left(\frac{19a + p - [\frac{p}{4}] - [\frac{8p - 112}{25}] + 10}{30}\right) *).$$

Danach lauten Kaisers Formeln zur Berechnung des Ostersonntages im gregorianischen Kalender:

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b = \left(\frac{19a + p - [\frac{p}{4}] - [\frac{8p - 112}{25}] + 10}{30}\right)$$

$$\underset{(1\ldots7)}{w} = \left(\frac{[\frac{p}{4}] - 2p + 3 + J + [\frac{J}{4}] + b}{7}\right)$$

$$k = 29 + b - w.$$

3. Goldscheiders Formel**) ist genau die Gaußsche mit dem Werte $[\frac{8p + 13}{25}]$ anstelle von $[\frac{p}{3}]$ in der Epaktengleichung.

4. Die Formel von Jacobsthal.***) Die Formelgruppe (7) nimmt für $x = 0$ folgende Gestalt (7_1) an:

$$1)\ a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad 2)\ b = \left(\frac{11a + y}{30}\right)$$

$$y = \left(\frac{17 - Z}{30}\right), \text{ also } \quad 3)\ y = \left(\frac{14 - p + [\frac{p}{3}] + [\frac{p}{4}]}{30}\right)$$

$$c = 50 - b$$

Nach Abschnitt V ist also das Datum des Ostersonntages

$$4)\ k = 57 - b - h,$$

wenn h die Tagesmerkzahl der Ostergrenze ist. Diese beträgt (S. 146)

$$h = \left(\frac{5(\frac{p}{4}) + 2 + J + [\frac{J}{4}] + 50 - b}{7}\right)$$

$$= \left(\frac{J + [\frac{J}{4}] + 3 - 2(\frac{p}{4}) - b}{7}\right).$$

Setzt man

$$5)\ \mu = \left(\frac{3 - 2(\frac{p}{4})}{7}\right),$$

*) bei Lersch, S. 104, offenbar falsch wiedergegeben.
**) Lersch, S. 105, auch ungenau angegeben.
***) Jacobsthal, S. 51, 76 und 77.

so ist

$$6)\ h = \left(\frac{J + \left[\frac{J}{4}\right] + \mu - b}{7}\right).$$

Die mit laufenden Nummern versehenen Gleichungen sind genau die von Jacobsthal angegebenen Formeln zur Berechnung des Ostersonntages. Die Lösung von Jacobsthal geht also auf eine Subtraktions-Hauptlösung zurück.

Dazu treten, wie bei der Gaußschen Formel, folgende Ausnahmebestimmungen:

1) Da $c = 49$ anstatt $c = 50$ zu nehmen ist, wenn $h = 0$ ist, d. h., wenn die Ostergrenze auf einen Sonntag fällt, so ist bei $b = 0$ und $h = 0$ die Verlegung des für den 26. April berechneten Ostertages auf den 19. April nötig.

2) Für $b = 1$, $h = 0$ und $a > 10$ (Seite 166) wird statt des errechneten 25. April der 18. April gewählt.

5. Die Formel von Wislicenus. Die Ermittelung der Ostergrenze, der die Osterformel von Wislicenus zugrunde liegt, ist eine zweigleisige Lösung der Formelgruppe (2). Nach dieser Gruppe ist

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b = \left(\frac{11\,a}{30}\right)\ \text{(II.)} \qquad c = \left(\frac{3 + Z - b}{30}\right)$$

Wislicenus beschränkt sich auf die Zeit von 1900 bis 2099. Für diese ist $Z = 12$, also gemäß den Ausführungen auf Seite 140:

$$1)\ c = 45 - b \text{ für } b \leqq 24$$

und

$$2)\ c = 75 - b \text{ für } b > 24.$$

Wislicenus setzt ferner für die beiden in Betracht kommenden Jahrhunderte:

$$N = 1900 + J;$$

deshalb ist

$$a = \left(\frac{J}{19}\right)\ \text{(I.)}.$$

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich (Seite 146) die Tagesmerkzahl h der Ostergrenze für den ersten Wert von c:

$$h_1 = \left(\frac{3 + e + f + 45 - b}{7}\right),$$

also

$$h_1 = \left(\frac{6 + e + f - b}{7}\right)\ \text{(III.)}$$

und für den zweiten Wert von c:

$$h_2 = \left(\frac{3 + e + f + 75 - b}{7}\right),$$

also

$$h_2 = \left(\frac{1 + e + f - b}{7}\right) = \left(\frac{h_1 + 2}{7}\right),$$

wobei

$$h_2 = h_1 + 2 \text{ für } h_1 < 5$$

und

$$h_2 = h_1 - 5 \text{ für } h \geqq 5.$$

Ist $h_2 = 0$, also $h_1 = 5$, so fällt die Ostergrenze aut einen Sonntag. Ist zugleich $b = 25$ oder $b = 26$ — denn für die geltenden Jahrhunderte sind zwei Ausnahmen vorhanden —, so ist infolge der kirchlichen Ausnahmebestimmungen Ostern eine Woche früher zu feiern, als die Rechnung (bei ungeänderter Ostergrenze) ergibt.

Also ist Ostersonntag wirklich (nach Seite 145): März	wenn		Nach Wislicenus aber ist Ostern: März	mit Ausnahme der Jahre**)
	h_1	b		
A. $52 - b - h_1$	beliebig	≤ 24	$52 - b - h_1$	—
B. $82 - b - h_2$ $= 80 - b - h_1$	< 5	> 24		—
C. $80 - b - h_1$	5	25, 26	$80 - b - h_1$	—
D. $87 - b - h_1$	5	28*)		2079
E. $87 - b - h_1$	6	25, 26		1943, 2011, 2038
F. $87 - b - h_1$	6	28		1984

Danach kann man die Regel von Wislicenus folgendermaßen aussprechen:

Berechnet man die Größen a, b und h_1 mit Hilfe der Gleichungen I, II und III, so hat der Ostersonntag das Datum März $(52 - b - h_1)$, wenn $b \leq 24$ ist, aber März $(80 - b - h_1) =$ April $(49 - b - h_1)$, wenn $b > 24$ ist. Für den letzten Fall finden Ausnahmen statt in den Jahren 1943, 1984, 2011, 2038 und 2079, in denen Ostern eine Woche später gefeiert werden muß, als errechnet wird.

Es fallen demnach die Ausnahmejahre, die nach den kirchlichen Bestimmungen (Fall C der obigen Tabelle) eintreten müssen, weg; das sind die Jahre 1954, 1981, 2049 und 2076. Dafür treten aber, wie erwähnt, fünf andere Ausnahmejahre ein (siehe den folgenden Abschnitt).

6. Die Ostergrenze nach den Bestimmungen des russischen Kalenders. Diese Bestimmungen können aufgrund der Angaben von Wislicenus folgendermaßen gefaßt werden:

a) Ist $a = \left(\frac{N}{19}\right) + 1$, so heißt $b = \left(\frac{11a}{30}\right)$ die Osnowanie. Sie ist also gleichbedeutend mit der julianischen Epakte.

b) Unter Epakta ist der Ausdruck $E = \left(\frac{51 - b}{30}\right)$ zu verstehen.

*) $b = 27$ und $b = 29$ kommen nicht vor.
**) Berechnung im folgenden Abschnitt.

c) Die Epakta bezeichnet die Zahl der Tage, die die Ostergrenze c später ist als der 26. März. Danach ist $c = 26 + E$.

d) Wird bei der Rechnung $c > 49$, so muß c um 30 vermindert werden. D. h. die Ostergrenze darf spätestens auf März 49 = April 18 fallen.

e) Die Ostergrenze darf frühestens der 21. März sein.

Da aus b) und c)

$$c = 26 + \left(\frac{51 - b}{30}\right)$$

folgt, so gelten nach den Bestimmungen folgende Formeln zur Berechnung der Ostergrenze:

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) + 1 \qquad b = \left(\frac{11\,a}{30}\right) \qquad (c) = \left(\frac{17 - b}{30}\right),$$

$$\text{wobei} \begin{cases} c = 47 - b & \text{für } b < 27 \quad \text{(e)}, \\ c = 77 - b & \text{für } b > 27 \quad \text{(d)}. \end{cases}$$

Diese Formeln ergeben sich aus Gruppe (3) für $x = 1$, $y = 0$, $Z = 3$. Sie stellen eine zweigleisige Subtraktionslösung dar.

7. Die Subtraktionshauptlösung

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b = \left(\frac{11\,a + 14}{30}\right) \qquad c = 50 - b,$$

die aus der Gruppe (3) für $x = 0$, $y = 14$, $Z = 3$ entsteht, führt zu einer Bestimmung des Osterdatums im russischen Kalender, wie sie der Formel von Jacobsthal entspricht.

8. Nach einer „Anweisung“ zur Berechnung der Ostergrenze im russischen Kalender sind nach Wislicenus folgende Formeln zu benutzen:

$$a = \left(\frac{N}{19}\right) \qquad b = \left(\frac{19\,a}{30}\right) \qquad (c) = \left(\frac{6 + b}{30}\right),$$

$$\text{wobei} \begin{cases} c = 6 + b & \text{für } b > 14, \\ c = 36 + b & \text{für } b < 14. \end{cases}$$

Sie werden aus der Gruppe (5) genommen, wenn $x = 0$, $y = 0$, $Z = 3$ gesetzt wird. Es liegt also eine zweigleisige Additionslösung vor.

9. Die Additionshauptlösung für den russischen Kalender ist durch die Herleitung der Gaußschen Formel erledigt.

XIII. Ausnahmejahre.

Gemäß den kirchlichen Ausnahmebestimmungen hat man statt der durch die Rechnung sich ergebenden Ostergrenze $c = 50$ den Wert $c_1 = 49$ zu setzen, und der Ostersonntag hat dann nach Seite 145 das Märzdatum

$$k_1 = 49 + 7 - h_1,$$

wenn h_1 die Tagesmerkzahl von c_1 ist. Rechnet man aber statt $c_1 = 49$ doch $c = 50$, so ist

$$h = \left(\frac{h_1 + 1}{7}\right)$$

die Tagesmerkzahl von c. Für $h < 6$ folgt

$$h = h_1 + 1$$

und

$$k = 50 + 7 - (h_1 + 1) = k_1.$$

Im allgemeinen erhält man daher doch das richtige Osterdatum, wenn man die Ostergrenze $c = 50$ nicht auf $c_1 = 49$ verlegt. Für $h_1 = 6$ aber ist $h = 0$, und es wird

$$k = 50 + 7 = 57 \ (= \text{April } 26),$$

während sich bei $c_1 = 49$ ergibt:

$$k_1 = 49 + 7 - 6 = 50 \ (= \text{April } 19).$$

Also folgt

$$k_1 = k - 7.$$

D. h. Verschiebt man die Ostergrenze $c = 50$ nicht auf $c_1 = 49$, so ist, wenn die Tagesmerkzahl von c null ist, Ostersonntag eine Woche früher, als die Rechnung ergibt; statt des aus der Rechnung folgenden 26. April hat man den 19. April zu nehmen.

Kommt in einem Mondzirkel $c = 49$ neben $c = 50$ vor, so hat man die Ostergrenze 49 auf 48 zu verschieben. Nimmt man diese Verschiebung nicht vor, so ist wie in dem soeben besprochenen Falle Ostersonntag eine Woche früher, als die Rechnung ergibt, wenn die Tagesmerkzahl von $c = 49$ null ist; statt des aus der Rechnung folgenden 25. April hat man den 18. April zu nehmen.

Demnach kann man bei der Berechnung des Osterdatums — falls das Datum der Ostergrenze nicht auch ermittelt werden soll — die kirchlichen Ausnahmebestimmungen unberücksichtigt lassen, wenn man in den Fällen $A = 1$ und $A = 2$ bei $c = 50$ und $h = 0$ und im Falle $A = 2$ außerdem bei $c = 49$ und $h = 0$ das Datum des Ostersonntages eine Woche früher legt, als es die Rechnung ergibt.

Die Jahre, in denen danach das Vorlegen des Osterdatums erforderlich ist, sollen als **Ausnahmejahre** bezeichnet werden.

Zur Ermittelung dieser Ausnahmejahre diene die Formelgruppe (7_1) in folgender Gestalt:

$$1)\ a = \left(\frac{5p + J}{19}\right) \qquad 2)\ b = \left(\frac{11a + 17 - Z}{30}\right) \qquad 3)\ c = 50 - b$$

Die Tagesmerkzahl der Ostergrenze ist nach Seite 146:

$$h = \left(\frac{5\left(\frac{p}{4}\right) + 2 + J + \left[\frac{J}{4}\right] + c}{7}\right).$$

Da $\left(\frac{[\frac{J}{4}]}{7}\right) = \left(\frac{2J - 2(\frac{J}{4})}{7}\right)$ *) ist, folgt

$$4)\quad h = \left(\frac{5(\frac{p}{4}) + 2 + 3J - 2(\frac{J}{4}) + c}{7}\right).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man für jedes Jahrhundert finden, wann die Ostergrenze $c = 50$ oder $c = 49$ auf einen Sonntag $(h = 0)$ fällt. Aus 3) ergibt sich zunächst:

$$b = 50 - c$$

und daraus durch Einsetzen dieses Wertes in 2):

$$5)\quad a = \left(\frac{3 + 11Z - 11c}{30}\right),$$

wobei nur $a < 19$ zu berücksichtigen ist. Dann folgt aus 1):

$$6)\quad \left(\frac{J}{19}\right) = \left(\frac{a - 5p}{19}\right).$$

Mittels dieser Gleichung erhält man 5 oder 6 Werte für J, je nachdem $\left(\frac{J}{19}\right) \geqq 5$ oder < 5 ist. Endlich ergibt sich aus 4), wenn $h = 0$ genommen wird:

$$\left(\frac{3J - 2(\frac{J}{4})}{7}\right) = \left(\frac{2(\frac{p}{4}) + 5 - c}{7}\right)$$

oder

$$\left(\frac{J + 4(\frac{J}{4})}{7}\right) = \left(\frac{3(\frac{p}{4}) + 4 - 5c}{7}\right) \text{**)}$$

und, wenn

$$7)\quad \left(\frac{3(\frac{p}{4}) + 4 - 5c}{7}\right) = v \text{ gesetzt wird:}$$

$$8)\quad \left(\frac{J + 4(\frac{J}{4})}{7}\right) = v.$$

Diese Gleichung bestimmt diejenigen der aus 6) berechneten Werte von J, für die $h = 0$ ist. Mit anderen Worten: Für die Werte von J, die den Gleichungen 6) und 8) gleichzeitig genügen, ist $100p + J$ ein Ausnahmejahr.

Beispiele. 1) In welchen Jahren des 20. Jahrhunderts fällt die Ostergrenze $c = 50$ auf einen Sonntag?

---

*) Siehe Seite 147; man setze J statt N.
**) Durch Erweiterung mit 5.

Da $p = 19$ $(Z = 12)$ ist, ergibt die Gleichung 5):

$$a = \left(\frac{3 + 11 \cdot 12 - 11 \cdot 50}{30}\right) = 5$$

und deshalb die Gleichung 6):

$$\left(\frac{J}{19}\right) = \left(\frac{5 - 5 \cdot 19}{19}\right) = 5$$

D. h. $J = 5,\ 24,\ 43,\ 62$ oder 81.

Nun ist $\left(\frac{J}{7}\right) = 5,\quad 3,\quad 1,\quad 6,\qquad 4$

und $\left(\frac{4\left(\frac{J}{4}\right)}{7}\right) = 4,\quad 0,\quad 5,\quad 1,\qquad 4,$

also $\left(\frac{J + 4\left(\frac{J}{4}\right)}{7}\right) = 2,\quad 3,\quad 6,\quad 0,\qquad 1.$

Aus 7) folgt aber $v = \left(\frac{3 \cdot 3 + 4 - 5}{7}\right) = 1.$

$J = 81$ genügt folglich den beiden Gleichungen 6) und 8). Also ergibt sich, daß im 20. Jahrhundert nur einmal die Ostergrenze $c = 50$ auf einen Sonntag fällt. Es geschieht im Jahre 1981.

2) Wann fällt für $p = 19$ die Ostergrenze $c = 49$ auf einen Sonntag?

Man erhält $a = 16$, also $\left(\frac{J}{19}\right) = 16$

$$J = 16\quad 35\quad 54\quad 73\quad 92$$

$$\left(\frac{J}{7}\right) = \quad 2\quad 0\quad 5\quad 3\quad 1$$

$$\left(\frac{4\left(\frac{J}{4}\right)}{7}\right) = \quad 0\quad 5\quad 1\quad 4\quad 0$$

$$\left(\frac{J + 4\left(\frac{J}{4}\right)}{7}\right) = \quad 2\quad 5\quad 6\quad 0\quad 1$$

$$v = 6$$

Also ist nur einmal im 20. Jahrhundert die Ostergrenze $c = 49$ ein Sonntag, und zwar 1954.

3) Welche Ausnahmejahre hat das 23. Jahrhundert?

Da für $p = 22$ $(Z = 13)$ die Anzahl der Ausnahmen in einem Zirkel 1 ist, so ist nur $c = 50$ zu berücksichtigen. Es ist $a = 16$ und $\left(\frac{J}{19}\right) = 1.$

$$J = 1 \quad 20 \quad 39 \quad 58 \quad 77 \quad 96$$

$$\left(\frac{J}{7}\right) = 1 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 5$$

$$\left(\frac{4\left(\frac{J}{4}\right)}{7}\right) = 4 \quad 0 \quad 5 \quad 1 \quad 4 \quad 0$$

$$\left(\frac{J+4\left(\frac{J}{4}\right)}{7}\right) = 5 \quad 6 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$v = 5$$

Also fällt im 23. Jahrhundert die Ostergrenze $c = 50$ zweimal, in den Jahren 2201 und 2296, auf einen Sonntag.

Wieviel Ausnahmejahre können nun allgemein in einem Jahrhundert vorhanden sein?

Ist J der kleinste Wert, der die Gleichung 6) befriedigt, so sind die anderen Werte $J+19$, $J+38$, $J+57$, $J+76$, wenn $J \geqq 5$, und außerdem $J+95$, wenn $J < 5$ ist. Diese Werte seien allgemein mit $J+i$ bezeichnet. Setzt man dann gemäß 8)

$$s_i = \left(\frac{J+i+4\left(\frac{J+i}{4}\right)}{7}\right),$$

so kann man sagen, daß solche Jahre $J+i$ Ausnahmejahre sind, für die $s_i = v$ ist. In der folgenden Tabelle sind die Werte von s_i für die vier Möglichkeiten von $\left(\frac{J}{4}\right)$ zusammengestellt:

$\left(\frac{J}{4}\right)$	s_0	s_{19}	s_{38}	s_{57}	s_{76}	s_{95}
0	J	(J+3)	(J+4)	(J+5)	(J+6)	(J+2)
1	(J+4)	(J+5)	(J+1)	(J+2)	(J+3)	(J+4)
2	(J+1)	(J+2)	(J+3)	(J+6)	(J)	(J+1)
3	(J+5)	(J+6)	(J)	(J+1)	(J+4)	(J+5),

wobei der Teiler 7 weggelassen ist, so daß z. B. $(J+5)$ statt $\left(\frac{J+5}{7}\right)$ steht. Man erkennt daraus, daß alle s_i voneinander verschieden sind, wenn $\left(\frac{J}{4}\right) = 0$ ist, daß also in diesem Falle höchstens ein s_i den Wert v haben kann, oder daß in dem gerade vorliegenden Jahrhundert höchstens ein Ausnahmejahr für $c = 50$ und ebenso nur eins für $c = 49$ vorkommen kann.

Ist aber $\left(\frac{J}{4}\right) > 0$, so stimmt s_0 mit s_{95} überein, und ist $J < 4$ ($J = 4$ scheidet wegen $\left(\frac{J}{4}\right) = 0$ aus) und $s_0 = v$, so ist auch $s_{95} = v$. In diesem Falle gibt es darum zwei Ausnahmejahre. Tritt das ein für $c = 50$, so gilt es aber nicht für $c = 49$. Denn ist $c = 49$, so ist a nach Formel 5) um 11 größer als bei $c = 50$, d. h., ist J die kleinste Jahreszahl (unter den Jahren $J + i$) für $c = 50$, so ist $\left(\frac{J+11}{19}\right)$ nach Formel 6) die kleinste Jahreszahl für $c = 49$; und weil $J < 4$, so ist sicher $\left(\frac{J+11}{19}\right) = J + 11$ größer als 4. Also kann es für $c = 49$ höchstens ein einziges Ausnahmejahr in einem Jahrhundert geben, wenn für $c = 50$ zwei vorhanden sind.

Ist umgekehrt die kleinste Jahreszahl für $c = 49$ kleiner als 4, so kann es für $c = 50$ höchstens ein einziges Ausnahmejahr geben, da nicht die kleinste Jahreszahl für $c = 50$ auch kleiner als 4 sein kann.

Ist endlich $J > 4$, so liegt der Fall genau so wie bei $\left(\frac{J}{4}\right) = 0$; es kann höchstens ein einziges Ausnahmejahr eintreten.

Es können also nach dieser Überlegung in einem Jahrhundert nicht mehr als drei Ausnahmejahre enthalten sein. Tatsächlich kommen aber mehr als zwei Ausnahmejahre nicht vor.

In der folgenden Tabelle sind die Ausnahmejahre zusammengestellt, wobei die Jahrhunderte, für die $A = 0$ ist, ausgelassen sind:

p	Ausnahmejahre für $c = 50$	Ausnahmejahre für $c = 49$	A	Z
15	(1514)		1	10
16	1609		1	10
19	1981	1954	2	12
20	2076	2049	2	12
21	2133	2106	2	12
22	2201, 2296		1	13
24	2448		1	13
26	2668		1	15
27	2725		1	15
28	2820		1	15
31	3192	3165	2	17
32	—	3260	2	17
33	3344	3317	2	17
34	3412		1	18
36	—		1	18
38	—	3852	2	20

Erwähnenswert ist noch die Beziehung zwischen den Ausnahmejahren in den Jahrhunderten, in denen $A = 2$ ist, die im folgenden entwickelt werden soll.

Die Gleichung 5) lautet für $c = 50$:

$$a = \left(\frac{3 + 11\,Z - 10}{30}\right)$$

und für $c = 49$:

$$a' = \left(\frac{3 + 11\,Z - 29}{30}\right),$$

so daß

$$a' = \left(\frac{a + 11}{30}\right).$$

Die Gleichung 6) ergibt für $c = 50$:

$$\left(\frac{J + i}{19}\right) = \left(\frac{a - 5\,p}{19}\right)$$

und für $c = 49$:

$$\left(\frac{J + i'}{19}\right) = \left(\frac{a' - 5\,p}{19}\right) = \left(\frac{a - 5\,p + 11}{19}\right),$$

so daß $\left(\frac{J + i'}{19}\right) = \left(\frac{J + i + 11}{19}\right)$ oder auch $= \left(\frac{J + i - 8}{19}\right)$.

Die sämtlichen Ausnahmejahre eines Jahrhunderts finden sich also unter folgenden Jahren, wobei **i** anstelle von $J + i$ steht:

$c = 50$:	**i**:		**0**		**19**		**38**		**57**		**76**		**95**
$c = 49$:	**i'**:	**−8**		**11**		**30**		**49**		**68**		**87**	

Dazu berechnet man wie oben:

$\left(\frac{J}{4}\right)$	s_i: / s_i':	s_{-8}	s_0	s_{11}	s_{19}	s_{30}	s_{38}	s_{49}	s_{57}	s_{68}	s_{76}	s_{87}	s_{95}
0		(6)	(0)	(2)	(3)	(3)	(4)	(4)	(5)	(5)	(6)	(1)	(2)
1		(3)	(4)	(4)	(5)	(0)	(1)	(1)	(2)	(2)	(3)	(3)	(4)
2		(0)	(1)	(1)	(2)	(2)	(3)	(5)	(6)	(6)	(0)	(0)	(1)
3		(4)	(5)	(5)	(6)	(6)	(0)	(0)	(1)	(3)	(4)	(4)	(5)

Dabei ist $\left(\frac{J + i}{7}\right)$ durch (i), z. B. $\left(\frac{J + 5}{7}\right)$ durch (5) bezeichnet.

Ferner ist nach Gleichung 7) für $c = 50$:

$$v = \left(\frac{3\left(\frac{p}{4}\right)+6}{7}\right)$$

und für $e = 49$:

$$v' = \left(\frac{3\left(\frac{p}{4}\right)+4}{7}\right) = \left(\frac{v-2}{7}\right).$$

Ist $s_i = v$, so ist nach dem oben Ermittelten $J+i$ ein Ausnahmejahr, und ist $s_i' = \left(\frac{v-2}{7}\right)$, so ist ebenso $J+i'$ ein solches. Im letzten Falle ist

$$s_i' = \left(\frac{s_i-2}{7}\right)$$

Diese Bedingung trifft nach der Tabelle auf Seite 177 nur zu, wenn $i' = i-27$ ist, aber sie trifft nicht immer zu, wenn $i' = i-27$ ist.

Man findet nun leicht durch Berechnung von s_i und s_i-27:

$$s_i-27 = \left(\frac{s_i-2}{7}\right) \text{ für } \left(\frac{J+i}{4}\right) < 3, \text{ d. h. für } \left(\frac{J+i-27}{4}\right) > 0,$$

$$\text{aber } s_i-27 = \left(\frac{s_i-4}{7}\right) \text{ für } \left(\frac{J+i}{4}\right) = 3, \text{ d. h. für } \left(\frac{J+i-27}{4}\right) = 0,$$

was die Tabelle bestätigt.

Setzt man wieder allgemein J für alle Werte $J+i$, so folgt:

Ist J in einem Jahrhundert mit $A = 2$ ein Ausnahmejahr für $c = 50$, so ist $J-27$ ein solches für $c = 49$, wenn $\left(\frac{J-27}{4}\right) > 0$ ist. $\left(\frac{J-27}{4}\right) = \left(\frac{J+1}{4}\right)$ kann nur null sein, wenn $\left(\frac{J}{4}\right) = 3$ ist. Da es aber von $p = 15$ bis $p = 38$ kein Ausnahmejahr (Seite 176) von der Form $\left(\frac{J}{4}\right) = 3$ gibt, so gilt ohne Einschränkung:

Ist J bei $A = 2$ ein Ausnahmejahr für $c = 50$, so ist $J-27$ ein Ausnahmejahr für $c = 49$.

Umgekehrt: Ist J bei $A = 2$ ein Ausnahmejahr für $c = 49$, so ist $J+27$ ein solches für $c = 50$, wenn $\left(\frac{J}{4}\right) > 0$ Ist aber $\left(\frac{J}{4}\right) = 0$, so gibt es kein Ausnahmejahr für $c = 50$ (bei $p = 32$ und $p = 38$, Seite 176).

Die bei Anwendung der Regel von Wislicenus zu berücksichtigenden Ausnahmejahre sind anderer Art als die bisher behandelten, aber ihre Ermittelung kann nach gleichem Verfahren geschehen.

Nach Seite 169 ist

1) $b = \left(\frac{11\,a}{30}\right)$, also $a = \left(\frac{11\,b}{30}\right)$, d. h. $\left(\frac{J}{19}\right) = \left(\frac{11\,b}{30}\right)$,

2) $h_1 = \left(\frac{6+e+f-b}{7}\right)$, also $\left(\frac{e+f}{7}\right) = \left(\frac{b+h_1-6}{7}\right)$,

d. h. nach Seite 146 mit Berücksichtigung der ersten Gleichung auf Seite 173

$$\left(\frac{3\,J - 2\left(\frac{J}{4}\right)}{7}\right) = \left(\frac{b+h_1-6}{7}\right),$$

daher

$$\left(\frac{J + 4\left(\frac{J}{4}\right)}{7}\right) = \left(\frac{5(b+h_1-6)}{7}\right).$$

Die Jahre J, die beiden Gleichungen genügen, sind gemäß Seite 170 Ausnahmejahre, wenn $b = 25$ oder 26 und $h_1 = 6$, oder wenn $b = 28$ und $h_1 = 5$ oder 6 ist.

Beispiel der Berechnung für $b = 25$, $h_1 = 6$.

1) $\left(\frac{J}{19}\right) = \left(\frac{11 \cdot 25}{30}\right) = 5$

Also ist

$J =$	5	24	43	62	81	100	119	138	157	176	195
$\left(\frac{J}{7}\right) =$	5	3	1	6	4	2	0	5	3	1	6
$\left(\frac{4\left(\frac{J}{4}\right)}{7}\right) =$	4	0	5	1	4	0	5	1	4	0	5
$\left(\frac{J + 4\left(\frac{J}{4}\right)}{7}\right) =$	2	3	6	0	1	2	5	6	0	1	4

2) $\left(\frac{J + 4\left(\frac{J}{4}\right)}{7}\right) = \left(\frac{5(25+6-6)}{7}\right) = 6$

Folglich genügen die Jahre 1943 und 2038 beiden Bedingungen gleichzeitig. Sie sind daher bei Wislicenus Ausnahmejahre. Die übrigen auf Seite 170 vermerkten Jahre ergeben sich ebenso.

XIV. Berechnung des Ostersonntages im 20. Jahrhundert.

Vollösungen als Beispiele für die Anwendung der Abschnitte V u XI.

Man berechnet

$$J = \left(\frac{N}{100}\right) \qquad e = \left(\frac{J}{7}\right) \qquad f = \left(\frac{\left[\frac{J}{4}\right]}{7}\right)$$

und nach einer der Nummern der beiden folgenden Tabellen

a, b, h und k.

Dann ist k das Märzdatum des Ostersonntages. Eine Ausnahme findet statt in den Jahren 1954 und 1981, wo Ostern eine Woche vor dem berechneten Datum gefeiert wird.

I. Nr.	Hinweis auf die Gruppe	$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right)+x}{30}\right)$ worin x:	$b = \left(\frac{11a+y}{30}\right)$ worin y:	$h = \left(\frac{m+e+f-b}{7}\right)$ worin m:	$k = n - b - h$ worin n:
1	(7)	25	0	4	57
2		0	5		
3	(15)	3	0	2	55
4		0	3		
5	(10)	6	0	5	58
6		0	6		
7	(16)	22	0	1	54
8		0	2		

II. Nr.	Hinweis auf die Gruppe	$a = \left(\frac{\left(\frac{N}{19}\right)+x}{30}\right)$ worin x:	$b = \left(\frac{19a+y}{30}\right)$ worin y:	$h = \left(\frac{m+e+f+b}{7}\right)$ worin m:	$k = n + b - h$ worin n:
9	(11)	6	0	3	28
10		0	24		
11	(17)	14	0	1	26
12		0	26		
13	(14)	17	0	4	29
14		0	23		
15	(18)	3	0	0	25
16		0	27		

Nr. 2 ist die Lösung von Jacobsthal, Nr. 10 die von Gauß.

Beispiel. Es ist der Ostersonntag des Jahres 1918 n. St. zu berechnen.

1) Nach Nr. 8. $J = 18 \quad e = 4 \quad f = 4$

$$a = 18 \qquad b = \left(\frac{11a+2}{30}\right) = 20$$

$$h = \left(\frac{1+4+4-20}{7}\right) = 3$$

$$k = 54 - 20 - 3 = 31$$

2) Nach Nr. 3. $J = 18 \quad e = 4 \quad f = 4$

$$a = \left(\frac{18+3}{30}\right) = 21 \qquad b = 21$$

$$h = \left(\frac{2+4+4-21}{7}\right) = 3$$

$$k = 55 - 21 - 3 = 31$$

3) Nach Nr. 16. $J = 18 \quad e = 4 \quad f = 4$

$$a = 18 \qquad b = \left(\frac{19a+27}{30}\right) = \left(\frac{-11a-3}{30}\right) = 9$$

$$h = \left(\frac{4+4+9}{7}\right) = 3$$

$$k = 25 + 9 - 3 = 31$$

Es ergibt sich also übereinstimmend, daß im Jahre 1918 am 31. März Ostersonntag ist.

1. Bemerkung. Von einer Verlängerung der beiden Tabellen, die dadurch hervorgerufen wird, daß man weder x noch y gleich null nimmt, ist abgesehen worden. Da x, wie auch y, jeden Wert von 0 bis 29 annehmen kann, würden die vollständigen Tabellen statt der 16 Lösungen 30 mal soviel, also 480 Lösungen aufweisen.

2. Bemerkung. Es lohnt sich nicht, auf die von manchen beliebte Frage näher einzugehen, ob eine der Lösungen den Vorzug vor den anderen verdient; dazu sind die Unterschiede, die doch nur von der Größe der zum Gebrauch kommenden Zahlen abhängen, zu geringfügig. Auch die in Abschnitt V aufgestellte Anordnung, in der ja die Berechnung der Ostergrenze nicht umgangen wird, dürfte als ebenso einfach gelten. Als Beleg dafür diene die Berechnung des Osterfestes im Jahre 1918 mittels der Gruppe (15) für $x = 0$:

	1918	3	4	4	
$a = \left(\frac{N}{19}\right)$	18				
$b = \left(\frac{11a+3}{30}\right)$	21				
$c = 48 - b$	27	6			
	31	3	4		31. März.

Oder mittels der Gruppe (19):

	1918	3	4	4	
$a = \left(\frac{N}{19}\right)$ …………	18				
$(c) = \left(\frac{-11a+15}{30}\right)$ ..	27	6			
	31	3	4		31. März.

XV. Anhang.

Restrechnung.

Von den Regeln der Restrechnung sind hier nur die aufgenommen worden, die in den vorhergehenden Abschnitten Anwendung gefunden haben.

1. Erklärungen.

a) a, b, c, m, q, r, T bedeuten positive ganze Zahlen.

b) Zieht man von einer Zahl a möglichst oft eine Zahl T ab, so sagt man: Man teilt a durch T. Das Ergebnis läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\frac{a}{T} = q + \frac{r}{T}$$

D. h. nach dem üblichen Sprachgebrauche: T ist q mal in a enthalten, und es bleibt ein Rest r. Setzt man

$$q = \left[\frac{a}{T}\right] \text{ und } r = \left(\frac{a}{T}\right),$$

so ist

$$a = T\left[\frac{a}{T}\right] + \left(\frac{a}{T}\right).$$

Es bedeuten folglich $\left[\frac{a}{T}\right]$ das Ergebnis der Divisionsaufgabe $\frac{a}{T}$ unter Vernachlässigung des Restes und $\left(\frac{a}{T}\right)$ den Rest.

Beispiel. $$\frac{23}{7} = 3 + \frac{2}{7}$$

Also ist $$\left[\frac{23}{7}\right] = 3 \text{ und } \left(\frac{23}{7}\right) = 2.$$

Besonders bemerkt sei, daß $\left[\frac{a}{T}\right]$ und $\left(\frac{a}{T}\right)$ auch null sein können.

c) Lassen zwei Zahlen a und b bei der Division durch denselben Teiler T gleiche Reste, so sollen sie gleichrestig genannt werden.

Beispiel. 15 und 22 sind für den Teiler 7 gleichrestig:

$$\left(\frac{15}{7}\right) = \left(\frac{22}{7}\right).$$

2. Daraus folgt unmittelbar: Ist $a = b$, so ist $\left(\frac{a}{T}\right) = \left(\frac{b}{T}\right)$.

3. Ebenso folgt aus 1 b) ohne weiteres:

$$0 \leqq \left(\frac{a}{T}\right) < T$$

4. Ist $0 \leqq a < T$, so ist $\left(\frac{a}{T}\right) = a$.

Denn $a = T \cdot 0 + a$.

5. $\left(\frac{\left(\frac{a}{T}\right)}{T}\right) = \left(\frac{a}{T}\right)$ folgt aus 4), da $\left(\frac{a}{T}\right)$ nach 3) kleiner als T ist.

6. Ist $a = T\left[\frac{a}{T}\right] + b$, so ist $b = \left(\frac{a}{T}\right)$.

Denn nach 2) ist der Rest von a gleich dem Rest von $T\left[\frac{a}{T}\right] + b$; da $T\left[\frac{a}{T}\right]$ durch T teilbar ist, so ist der Rest von a gleich dem Rest von b, d. h. $\left(\frac{a}{T}\right) = \left(\frac{b}{T}\right)$, und da nach 1 b) $b < T$, so ist nach 4) $\left(\frac{b}{T}\right) = b$.

Aus $a = qT + b$ aber ergibt sich nur $\left(\frac{a}{T}\right) = \left(\frac{b}{T}\right)$.

Beispiel. $23 = 2 \cdot 7 + 9$.

Also $\left(\frac{23}{7}\right) = \left(\frac{9}{7}\right)$. Das ist richtig, da beide Reste den Wert 2 haben.

7. $\left(\frac{qT}{T}\right) = 0$; denn $\frac{qT}{T} = q + 0$.

Beispiel. $\left(\frac{35}{7}\right) = 0$.

8. Summe. Ist $\left(\frac{a}{T}\right) = m$ und $\left(\frac{b}{T}\right) = n$, so ist

$$\left(\frac{a \pm b}{T}\right) = \left(\frac{m \pm n}{T}\right)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\left(\frac{a \pm b}{T}\right) = \left(\frac{\left(\frac{a}{T}\right) \pm \left(\frac{b}{T}\right)}{T}\right).$$

Denn es gelten nach 1b) die Gleichungen:

$$a = qT + m$$
$$b = q_1 T + n,$$

woraus durch Addition und Subtraktion folgt:

$$a \pm b = (q \pm q_1)T + (m \pm n).$$

Diese Gleichung ergibt nach 6) die Behauptung.

Beispiel. $\left(\frac{23+41}{7}\right) = \left(\frac{2+6}{7}\right) = \left(\frac{8}{7}\right) = 1$

9. Vergrößerung, Verkleinerung. Ist $\left(\frac{a}{T}\right) = \left(\frac{b}{T}\right)$, so ist

$$\left(\frac{a \pm m}{T}\right) = \left(\frac{b \pm m}{T}\right)$$

und

$$\left(\frac{m \pm a}{T}\right) = \left(\frac{m \pm b}{T}\right).$$

D. h. In einer Gleichung zwischen zwei Resten kann man die Zähler um gleiche Zahlen vermehren oder vermindern.
Oder: Man kann in einem Reste für jeden Summanden des Zählers eine gleichrestige Zahl setzen.

Da nach 1) $$a = qT + \left(\frac{a}{T}\right)$$

ist, so folgt $$a \pm m = qT + \left(\frac{a}{T}\right) \pm m,$$

woraus sich nach 6) ergibt:

$$\left(\frac{a \pm m}{T}\right) = \left(\frac{\left(\frac{a}{T}\right) \pm m}{T}\right).$$

Nun ist $$b = q_1 T + \left(\frac{b}{T}\right),$$

also $$b \pm m = q_1 T + \left(\frac{b}{T}\right) \pm m,$$

d. h. $$\left(\frac{b \pm m}{T}\right) = \left(\frac{\left(\frac{b}{T}\right) \pm m}{T}\right).$$

Da aber $\left(\frac{a}{T}\right) = \left(\frac{b}{T}\right)$, so ist

$$\left(\frac{\left(\frac{a}{T}\right) \pm m}{T}\right) = \left(\frac{\left(\frac{b}{T}\right) \pm m}{T}\right),$$

folglich $$\left(\frac{a \pm m}{T}\right) = \left(\frac{b \pm m}{T}\right).$$

Vermindert man nach dieser Regel in der Gleichung

$$\left(\frac{m+a}{T}\right)=\left(\frac{m+b}{T}\right)$$

die beiden Zähler um a + b, so erhält man

$$\left(\frac{m-b}{T}\right)=\left(\frac{m-a}{T}\right)$$

Beispiel. $\left(\frac{23+41}{7}\right)=\left(\frac{23+6}{7}\right)=\left(\frac{2+6}{7}\right)=1$

10. $\left(\frac{a}{T}\right)=\left(\frac{a\pm mT}{T}\right)$.

D. h. Man kann den Zähler eines Restes um ein Vielfaches des Teilers vermehren oder vermindern.

Da nach 7) $\left(\frac{mT}{T}\right)=0$ ist, so folgt nach 9):

$$\left(\frac{a\pm 0}{T}\right)=\left(\frac{a\pm mT}{T}\right).$$

Beispiel. $\left(\frac{2a-13}{7}\right)=\left(\frac{2a-13+14}{7}\right)=\left(\frac{2a+1}{7}\right)$

11. Produkt. Aus $\left(\frac{a}{T}\right)=m$ und $\left(\frac{b}{T}\right)=n$

folgt

$$\left(\frac{ab}{T}\right)=\left(\frac{mn}{T}\right).$$

Denn $a=qT+m$

und $b=q_1T+n$,

also $ab=(qq_1T+qn+q_1m)T+mn$;

d. h. es ist nach 6) $\left(\frac{ab}{T}\right)=\left(\frac{mn}{T}\right)$.

Beispiel. $\left(\frac{25\cdot 45}{7}\right)=\left(\frac{4\cdot 3}{7}\right)=5$

12. Erweiterung. Aus $\left(\frac{a}{T}\right)=\left(\frac{b}{T}\right)$ folgt

$$\left(\frac{ma}{T}\right)=\left(\frac{mb}{T}\right).$$

D. h. In einer Gleichung zwischen zwei Resten kann man die Zähler mit gleichen Zahlen multiplizieren.
Oder: Man kann in einem Reste für jeden Faktor des Zählers eine gleichrestige Zahl setzen.

Es ist $a=qT+\left(\frac{a}{T}\right)$,

also

$$ma=mqT+m\left(\frac{a}{T}\right),$$

daher nach 6)

$$\left(\frac{m\,a}{T}\right) = \left(\frac{m\left(\frac{a}{T}\right)}{T}\right).$$

Nun ist

$$b = q_1 T + \left(\frac{b}{T}\right),$$

also

$$m\,b = m\,q_1 T + m\left(\frac{b}{T}\right),$$

daher nach 6)

$$\left(\frac{m\,b}{T}\right) = \left(\frac{m\left(\frac{b}{T}\right)}{T}\right).$$

Da aber

$$\left(\frac{a}{T}\right) = \left(\frac{b}{T}\right)$$

ist, so folgt

$$\left(\frac{m\,a}{T}\right) = \left(\frac{m\,b}{T}\right).$$

Beispiel.

$$\left(\frac{3\,a}{7}\right) = 5$$

Also

$$\left(\frac{15\,a}{7}\right) = \left(\frac{25}{7}\right) = 4,$$

d. h.

$$\left(\frac{a}{7}\right) = 4.$$

13. Negative Zähler.

Nach 10) ist

$$\left(\frac{-a}{T}\right) = \left(\frac{m\,T - a}{T}\right).$$

Also sind $-a$ und $m\,T - a$ gleichrestig für den Teiler T.

Beispiel. $$\left(\frac{-23}{7}\right) = \left(\frac{28 - 23}{7}\right) = 5$$

14. $$\left(\frac{-a}{T}\right) = \left(\frac{-\left(\frac{a}{T}\right)}{T}\right)$$

Nach 13) ist

$$\left(\frac{-a}{T}\right) = \left(\frac{m\,T - a}{T}\right).$$

Nun ist nach 8)

$$\left(\frac{m\,T - a}{T}\right) = \left(\frac{\left(\frac{m\,T}{T}\right) - \left(\frac{a}{T}\right)}{T}\right).$$

Da aber nach 7) $\left(\frac{m\,T}{T}\right) = 0$ ist, so folgt

$$\left(\frac{m\,T - a}{T}\right) = \left(\frac{-\left(\frac{a}{T}\right)}{T}\right)$$

und daher

$$\left(\frac{-a}{T}\right)=\left(\frac{-\left(\frac{a}{T}\right)}{T}\right).$$

Beispiel. $\left(\frac{-23}{7}\right)=\left(\frac{-2}{7}\right)$

Nach 13) ist $\left(\frac{-2}{7}\right)=\left(\frac{7-2}{7}\right)=5.$

15. Erweiterung mit —1.

Ist $\left(\frac{-a}{T}\right)=\left(\frac{b}{T}\right)$, so ist $\left(\frac{a}{T}\right)=\left(\frac{-b}{T}\right)$.

Nach 9) folgt

$$\left(\frac{-a+a-b}{T}\right)=\left(\frac{b+a-b}{T}\right),$$

d. h.

$$\left(\frac{-b}{T}\right)=\left(\frac{a}{T}\right).$$

Beispiel. $\left(\frac{-23}{7}\right)=\left(\frac{-2}{7}\right)=5$ und $\left(\frac{19}{7}\right)=5$

$$\left(\frac{23}{7}\right)=2 \text{ und } \left(\frac{-19}{7}\right)=\left(\frac{-5}{7}\right)=2$$

16. Zähler zusammengesetzt. Beispiel eines oft vorkommenden Falles: Welchen Wert hat

$$\left(\frac{4a-18b}{7}\right)?$$

Es ist

$$\left(\frac{-18}{7}\right)=\left(\frac{3}{7}\right) \text{ nach 13),}$$

also

$$\left(\frac{-18b}{7}\right)=\left(\frac{3b}{7}\right) \text{ nach 12)}$$

und

$$\left(\frac{4a-18b}{7}\right)=\left(\frac{4a+3b}{7}\right) \text{ nach 9).}$$

17. Zusatz. Das Rechnen mit 19 ist manchen unbequem (Vergl. Jacobsthal, S. 44). Zur Erleichterung diene folgendes:

1) $\left(\frac{19a}{30}\right)=\left(\frac{-11a}{30}\right)$

Beispiel. $\left(\frac{19\cdot 17}{30}\right)=\left(\frac{-11\cdot 17}{30}\right)=\left(\frac{-187}{30}\right)=\left(\frac{-7}{30}\right)=23$

2) Berechnung von $\left(\frac{N}{19}\right)$. Entwickelt man N nach Potenzen

von 20, so erhält man:

$$N = 400\,q_1 + 20\,q_2 + r$$

und

$$\left(\frac{N}{19}\right) = \left(\frac{q_1 + q_2 + r}{19}\right).$$

Um $\left(\frac{N}{19}\right)$ zu finden, dividiert man also — wenn man das Einmaleins für 19 scheut — N durch 400 und den Rest durch 20. Dann ist die Summe aus dem dabei verbleibenden Rest und den beiden Quotienten mit der Jahreszahl N gleichrestig für 19.

Beispiel. $N = 1871$.

$$1871 : 400 = 4, \text{ Rest } 271$$

$$271 : 20 = 13, \text{ Rest } 11$$

Also $$\left(\frac{1871}{19}\right) = \left(\frac{4+13+11}{19}\right) = \left(\frac{28}{19}\right) = 9$$

Inhalt.

Berichtigungen: S. 144, Z. 16: 11 (Z — 5)
S. 164, Z. 6: 4) statt 5) usw.
S. 171, Z. 27: gewonnen statt genommen.