Tangentialebenenpaare mit vorgegebenem Winkel an einen Kegel 2. Ordnung.

Von Dr. Fr. Drenckhahn in Bremen.

Mit 6 Figuren im Text.

Einleitung.

Der geometrische Ort der Achsen von Tangentialebenenpaaren mit vorgegebenem Winkel an einem Kegel 2. Ordnung wird durch einen Kegel 4. Ordnung dargestellt. Die Diskussion dieser Fläche in gewöhnlichen Koordinaten x, y, z erweist sich als außerordentlich schwierig, werden dagegen elliptische Koordinaten des Strahles im Bündel μ, ν eingeführt, so wird eine systematische Untersuchung ermöglicht, welche die geometrischen Zusammenhänge klar hervortreten läßt.

In historischer Hinsicht ist festzustellen, daß zuerst Magnus den geometrischen Ort der Scheitellinien rechtwinkliger Tangentialebenenpaare beim Kegel bestimmte[1]).

§ 1.

Die Hauptebenengleichung des Tangentialebenenpaares an eine Fläche des Systems konfokaler Kegel[2]).

Die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}=0, \quad \alpha>\beta>\gamma>0$$

[1]) Magnus, L. J., Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Bd. 2, 1837, S. 321.

[2]) Die Sätze und Formeln dieses Paragraphen sind entnommen aus: Staude, O., Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche 2. Ordnung (Teubner 1910), §§ 118, 119.

stellt bei festen α, β, γ und veränderlichem Parameter τ ein System konfokaler Kegel dar, für $\tau = \mu$ „aufrechte Kegel“, d. h. die aufrechte z-Achse ist die innere Achse des Kegels, für $\tau = \nu$ „liegende Kegel“ mit der wagerechten x-Achse als inneren Achse, wenn:

$$\gamma < \mu < \beta < \nu < \alpha.$$

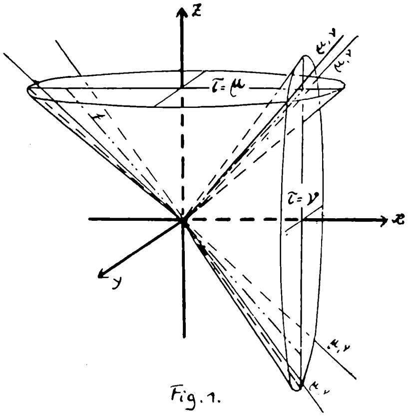


Fig. 1.

In Gleichung (1) können x, y, z statt als Punktkoordinaten im Raum als homogene Strahlenkoordinaten im Bündel des Punktes O = (0, 0, 0) betrachtet werden. Durch jeden Strahl des Bündels geht stets ein aufrechter und ein liegender Kegel des konfokalen Systems, die sich beide senkrecht schneiden. Die Parameter μ und ν der beiden durch den Strahl x, y, z des Bündels gehenden Kegel sind die elliptischen Koordinaten des Strahles im Bündel, sie bestimmen den Strahl x, y, z vierdeutig.

Die Hauptebenengleichung des durch einen Bündelstrahl μ, ν an einen Kegel τ des konfokalen Systems (1) gelegten Tangentialebenenpaares ist alsdann dargestellt durch:

$$\frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\zeta^2}{\tau - \nu} = 0, \tag{2}$$

wenn die Koordinatenachsen η und ζ die Normalen der beiden durch den Strahl gehenden Kegel μ und ν des Systems sind und die dritte, hierzu senkrechte Achse ξ mit dem Bündelstrahl zusammenfällt. Aus der Form der Gleichung folgt, daß die Winkel des Tangentialebenenpaares von den Tangentialebenen der beiden durch den Strahl gehenden Kegel μ, ν längs dieses Strahles halbiert werden.

Diese Darstellung des Tangentialebenenpaares gilt allgemein für alle Strahlen mit zwei verschiedenen elliptischen Koordinaten des Strahles im Bündel, da dann η und ζ durch zwei getrennte rechtwinklige Flächennormalen dargestellt werden.

Das Ebenenpaar (2) ist reell, wenn:

$$\nu > \tau > \mu. \tag{3}$$

Ist $\tau = \beta$, so ist es reell für alle Strahlen μ, ν, da Bedingung (3) dann stets erfüllt ist. In diesem Falle zerfällt der Kegel (1) in das Fokalstrahlenpaar f:

$$\frac{x^2}{\alpha - \beta} - \frac{z^2}{\beta - \gamma} = 0, \tag{4}$$

und das Tangentialebenenpaar:

$$(5) \qquad \frac{\eta^2}{\beta - \mu} - \frac{\zeta^2}{\nu - \beta} = 0$$

stellt die Verbindungsebenen des Strahles μ, ν mit den beiden Fokalstrahlen, die Fokalebenen des Strahles μ, ν, dar.

§ 2.

Der geometrische Ort der Scheitel aller Tangentialebenenpaare von gegebenem Winkel.

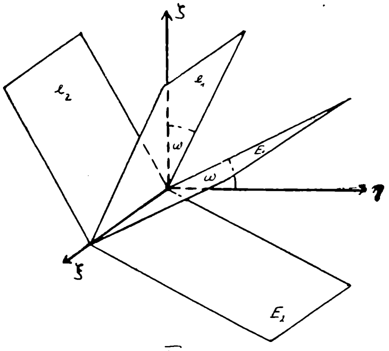


Fig. 2.

Die Gleichung der Ebene E_1, die durch die ξ-Achse (den Bündelstrahl) geht und mit der $\xi\eta$-Ebene (positiven η-Achse) den Winkel ω bildet, ist:

$$\frac{\zeta}{\eta} = \operatorname{tg} \omega,$$

oder:

$$\eta \cdot \sin \omega - \zeta \cdot \cos \omega = 0,$$

und die Gleichung des Ebenenpaares $E_1 E_2$:

$$(\eta \sin \omega - \zeta \cos \omega)\ (\eta \sin \omega + \zeta \cos \omega) = 0,$$

oder:

$$(1) \qquad \eta^2 \sin^2 \omega - \zeta^2 \cos^2 \omega = 0.$$

Das sind die beiden Ebenen, welche mit der η-Achse den Winkel ω oder den Winkel $-\omega$, $\pi + \omega$, $\pi - \omega$ bilden, sodaß jede Vorzeichenumkehr von $\sin \omega$ und $\cos \omega$, einzeln oder gleichzeitig, zulässig ist.

Dagegen würde für das Ebenenpaar $e_1 e_2$, welches mit der $\xi\zeta$-Ebene (positiven ζ-Achse) den Winkel ω bildet, bei Vertauschung von η und ζ oder von ω mit $\frac{\pi}{2} - \omega$ sich ergeben:

$$(2) \qquad \eta^2 \cos^2 \omega - \zeta^2 \sin^2 \omega = 0.$$

Die Gleichung:

$$(3) \qquad (\eta^2 \cos^2 \omega - \zeta^2 \sin^2 \omega)\ (\eta^2 \sin^2 \omega - \zeta^2 \cos^2 \omega) = 0$$

umfaßt daher unter allen gegen η und ζ symetrisch gelegenen Ebenenpaaren diejenigen, deren beide Ebenen mit der ζ-Achse [1. Faktor (3)] oder mit der η-Achse [2. Faktor (3)] den Winkel ω, also unter sich den Winkel $2\ \alpha$ oder $\pi - 2\,\omega = 2\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$ bilden.

Soll die Gleichung § 1 (2):

$$(4) \qquad (\tau - \nu)\,\eta^2 + (\tau - \mu)\,\zeta^2 = 0$$

mit:

$$(5)\ \cos^2 \omega \cdot \eta^2 - \sin^2 \omega \cdot \zeta^2 = 0 \quad \text{oder:} \quad (6)\ \sin^2 \omega \cdot \eta^2 - \cos^2 \omega \cdot \zeta^2 = 0$$

übereinkommen, muß:

$$\tau\text{-}\mu : \tau\text{-}\nu = \sin^2 \omega : - \cos^2 \omega \qquad \text{oder:} = \cos^2 \omega : - \sin^2 \omega$$

oder:

$\cos^2 \omega \cdot (\tau-\mu) + \sin^2 \omega \cdot (\tau-\nu) = 0$ oder: $\sin^2 \omega \cdot (\tau-\mu) + \cos^2 \omega \cdot (\tau-\nu) = 0$

sein, oder zusammengefaßt:

Der Ort der Strahlen μ, ν, von denen an den Kegel τ zwei Tangentialebenen mit dem Winkel 2ω oder $\pi - 2\omega$ gehen, ist:

$$\{(\tau-\mu)\cos^2\omega + (\tau-\nu)\sin^2\omega\}\{(\tau-\mu)\sin^2\omega + (\tau-\nu)\cos^2\omega\} = 0$$

oder:

$$(7) \quad (\mu\cos^2\omega + \nu\sin^2\omega - \tau)(\mu\sin^2\omega + \nu\cos^2\omega - \tau) = 0.$$

Wenn der 2. Faktor verschwindet, bilden die Tangentialebenen mit der η-Achse, wenn der 1. Faktor verschwindet mit der ζ-Achse den Winkel ω. Es genügt $0 < \omega < \frac{\pi}{4}$ zu nehmen, da dann 2ω das Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und $\pi - 2\omega$ das von π bis $\frac{\pi}{2}$ durchläuft, und somit alle möglichen Fälle eingeschlossen sind.

§ 3.

Allgemeine Sätze über lineare Gleichungen in elliptischen Koordinaten des Strahles im Bündel.

1. Identische Beziehungen zwischen gemeinen und elliptischen Koordinaten des Strahles im Bündel[1]).

Zwischen den Koordinaten x, y, z eines Strahles im Bündel und den Parametern μ, ν der beiden durch ihn gehenden Kegel besteht nach der Definition der elliptischen Koordinaten des Strahles im Bündel die in τ identische Gleichung:

$$(1) \quad (\beta-\tau)(\gamma-\tau)x^2 + (\gamma-\tau)(\alpha-\tau)y^2 + (\alpha-\tau)(\beta-\tau)z^2 = (x^2+y^2+z^2)(\tau-\mu)(\tau-\nu).$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $-\tau^1$ und τ^0 folgt:

$$(2) \quad \begin{cases} (\mu+\nu)(x^2+y^2+z^2) = (\beta+\gamma)x^2 + (\gamma+\alpha)y^2 + (\alpha+\beta)z^2 \\ \mu\nu(x^2+y^2+z^2) = \beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2, \end{cases}$$

oder in abgekürzter Bezeichnungsweise:

$$(3) \quad \begin{cases} q = \mu + \nu = \dfrac{(\beta+\gamma)x^2 + (\gamma+\alpha)y^2 + (\alpha+\beta)z^2}{x^2+y^2+z^2} \\ r = \mu \cdot \nu = \dfrac{\beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2}{x^2+y^2+z^2}. \end{cases}$$

2. Sätze über bilineare Gleichungen in elliptischen Koordinaten des Strahles im Bündel.

I. Jede der beiden Gleichungen:

$$(4) \qquad A\mu + B = 0 \qquad A\nu + B = 0$$

für sich genommen stellt die Gleichung eines Kegels des konfokalen Systems § 1 (1) dar, sofern:

$$\gamma < \mu < \beta, \quad \beta < \nu < \alpha$$

---

[1]) Staude, ebenda, § 118 (7).

II. Die Gleichung:

$$(5)\quad \begin{cases} (A\mu\nu + B\mu + C\nu + D)(A\mu\nu + B\nu + C\mu + D) = A^2\mu^2\nu^2 \\ + A(B+C)(\mu^2\nu + \mu\nu^2) + BC(\mu^2+\nu^2) + (B^2+C^2+2AD)\mu\nu \\ + (B + C)D(\mu + \nu) + D^2 = 0 \end{cases}$$

bleibt durch gleichzeitige additive und subtraktive Hinzufügung von $2BC\mu\nu$ umgeändert und lautet dann:

$$(6)\quad \begin{cases} A^2\mu^2\nu^2 + A(B+C)\mu\nu(\mu+\nu) + BC(\mu+\nu)^2 + \left\{2AD + (B-C)^2\right\}\mu\nu \\ + (B+C)D(\mu+\nu) + D^2 = 0, \end{cases}$$

oder nach Einführung von (3) zunächst:

$$A^2r^2 + A(B+C)qr + BCq^2 + \left\{2AD + (B-C)^2\right\}r + (B+C)Dq + D^2 = 0$$

und in den x, y, z nach Multiplikation mit $(x^2 + y^2 + z^2)^2$:

$$(7)\quad \begin{cases} A^2(\beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2)^2 + A(B+C)\left\{(\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2\right. \\ \left. + (\alpha + \beta)z^2\right\}(\beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2) + BC\left\{(\beta + \gamma)x^2 +\right. \\ \left.(\gamma + \alpha)y^2 + (\alpha + \beta)z^2\right\}^2 + \left\{2AD + (B - C)^2\right\}(\beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \\ \alpha\beta z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + (B + C)D\left\{(\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 +\right. \\ \left.(\alpha + \beta)z^2\right\}(x^2 + y^2 + z^2) + D^2(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0. \end{cases}$$

Das Produkt der beiden Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} A\mu\nu + B\mu + C\nu + D = 0 \\ A\mu\nu + B\nu + C\mu + D = 0 \end{cases}$$

stellt somit eine Fläche dar, die in x, y, z homogen und vom 4. Grade ist, mithin einen Kegel 4. Ordnung.

III. Die Gleichung:

$$A\mu\nu + B(\mu + \nu) + C = 0$$

ist von vornherein in den x, y, z rational und lautet nach Einführung von (3):

$$Ar + Bq + C = 0$$

oder:

$$A(\beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2) + B\left\{(\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 + (\alpha + \beta)z^2\right\} + C(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Die Gleichung:

$$(9)\qquad A\mu\nu + B(\mu + \nu) + C = 0$$

repräsentiert einen Kegel 2. Ordnung, der zu denen des konfokalen Systems § 1 (1) eine koachsiale Lage hat.

IV. Die Gleichung:

$$(A\mu + B\nu + C)(A\nu + B\mu + C) = AB(\mu + \nu)^2 + (A - B)^2\mu\nu + (A + B)C(\mu + \nu) + C^2 = 0$$

wird mit Substitution von (3), indem gleichzeitig mit $(x^2 + y^2 + z^2)^2$ multipliziert wird:

$$(10)\quad \begin{cases} AB\left\{(\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 + (\alpha + \beta)z^2\right\}^2 + (A - B)^2(\beta\gamma x^2 \\ + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + (A + B)C\left\{(\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2\right. \\ \left. + (\alpha + \beta)z^2\right\}(x^2 + y^2 + z^2) + C^2(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0. \end{cases}$$

Das Produkt der beiden Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{cases} A\mu + B\nu + C = 0 \\ A\nu + B\mu + C = 0 \end{cases}$$

stellt eine Fläche dar, die in x, y, z homogen und vom 4. Grade ist, also einen Kegel 4. Ordnung.

V. Die Gleichung:

$$(12)\quad A(\mu + \nu) + C = 0$$

repräsentiert nach (3) einen Kegel 2. Ordnung, der zu denen des konfokalen Systems § 1 (1) koachsial liegt.

Die Schnittkurven dieser Flächen mit den Koordinatenebenen (Hauptschnitte) werden gefunden, indem man die Koordinaten der Ebene in die Gleichung der Fläche einführt, und zwar ist für die yz-Ebene: $\nu = \alpha$, die zx-Ebene: $\nu = \beta$ oder $\mu = \beta$ und die xy-Ebene: $\mu = \gamma$.

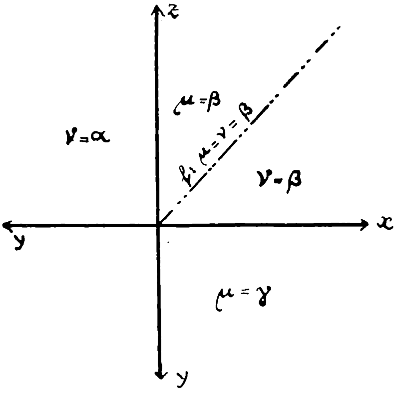


Fig. 3.

Wir beschränken uns auf die durch (11) dargestellte Fläche 4. Ordnung, da die Gleichungen (11) mit:

$$(13)\qquad A = \sin^2\omega,\ B = \cos^2\omega,\ C = -\tau$$

vollständig mit der in § 2 (7) gefundenen Gleichung übereinstimmen:

$$A \cdot B = \cos^2\omega \cdot \sin^2\omega = \frac{(2\cos\omega \cdot \sin\omega)^2}{4} = \frac{\sin^2 2\omega}{4}$$

$$A - B = \cos^2\omega - \sin^2\omega = \cos 2\omega$$

$$A + B = \cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$$

$$C = -\tau.$$

Die Fläche:

$$(11)\quad \begin{cases} A\mu + B\nu + C = 0 \\ A\nu + B\mu + C = 0 \end{cases}$$

schneidet die zx-Ebene $\mu = \beta$ resp. $\nu = \beta$ in den Kurven:

$$(14)\quad \begin{cases} B\nu + (A\beta + C) = 0 \quad \text{resp.} \quad A\mu + (B\beta + C) = 0 \\ A\nu + (B\beta + C) = 0 \qquad\qquad B\mu + (A\beta + C) = 0. \end{cases}$$

Da nach I jede der vier Gleichungen (14) für sich genommen (ohne Rücksicht auf die vorliegende Frage nach den Hauptschnitten) im Raume einen Kegel der konfokalen Schar (α, β, γ) darstellt, so folgt sofort, daß die Kurven (14), die in der zx-Ebene liegen, die Scheitelerzeugenden dieser Kegel in der zx-Ebene sind, jede der Gleichungen (14) mithin ein symmetrisch zur z- und x-Achse gelegenes Linienpaar darstellt. Nur zwei Linienpaare sind für $\mu \neq \nu \neq \beta$ im Maximum reell, da von jedem Gleichungspaar nur eine erfüllt sein kann, das Linienpaar entweder in dem $\mu = \beta$- oder $\nu = \beta$-Teil der zx-Ebene liegt. Der beiden Linienpaaren gemeinsame Scheitel ist der Koordinatenanfang O ($x = 0,\ y = 0,\ z = 0$).

Die Verhältnisse in der zx-Ebene lassen sich leicht auf die beiden übrigen Hauptebenen übertragen.

Die Flächen des konfokalen Systems § 1 (1) schneiden die Hauptebenen in symmetrisch zu den Achsen gelegenen Linienpaaren, deren Scheitelpunkte im Koordinatenanfang liegen und zwar gehen

in der yz-Ebene alle Linienpaare aus den Kegeln $\tau = \mu$,

in der zx-Ebene $\begin{cases} (\nu = \beta) \text{ alle Linienpaare aus den Kegeln } \tau = \mu, \\ (\mu = \beta) \text{ alle Linienpaare aus den Kegeln } \tau = \nu, \end{cases}$

in der xy-Ebene alle Linienpaare aus den Kegeln $\tau = \nu$

hervor.

In Analogie zu der Behandlungsweise des geometrischen Ortes der Spitzen von Berührungskegeln in elliptischen und parabolischen Koordinaten[1]) betrachten wir jede der beiden Gleichungen:

$$(11') \quad \begin{cases} A\mu + B\nu = C \\ A\nu + B\mu = C \end{cases}$$

bei festen A, B, C als Repräsentant einer bestimmt abgegrenzten Schale der Kegelfläche 4. Ordnung. Beiden Schalen ist nur der Koordinatenanfangspunkt und keine Erzeugende gemeinsam, ausgenommen für $\mu = \nu = \beta$, in welchem Falle beide Schalen durch die Fokallinien hindurchgehen und für $A = B$, in welchem Falle beide Schalen zusammenfallen.

Bei konstanten A und B, aber veränderlichem C, stellt Gleichung (11') ein System von Kegeln 4. Ordnung dar.

Um die Realität der durch die Gleichungen:

$$(11') \quad \begin{cases} A\mu + B\nu = C \ \text{(1. Schale)} \\ A\nu + B\mu = C \ \text{(2. Schale)} \end{cases}$$

dargestellten Schalen zu bestimmen, bilden wir, da nach (13) $AB > 0$ vorausgesetzt werden darf, die Maximalwerte und Minimalwerte der linken Seiten, die durch die Ungleichungen des § 1 bestimmt sind und erhalten als Bedingungen für die Realität der beiden Schalen beziehungsweise:

$$(15) \qquad A\beta + B\alpha > C > A\gamma + B\beta \qquad A\alpha + B\beta > C > A\beta + B\gamma.$$

Für alle Parameterwerte C innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen sind die betreffenden Schalen reell. Setzen wir $B > A$ voraus,

[1]) Drenckhahn, Fr., Der geometrische Ort der Scheitel besonderer Tangentenpaare und Berührungskegel in elliptischen und parabolischen Koordinaten. Dissertation, (Rostock) 1917.

was durchaus keine Einschränkung bedeutet, so ist für C in dem Intervalle:

(16) $$A\beta + B\gamma < C < A\gamma + B\beta$$

nur die 2. Schale reell, für:

(16') $$A\gamma + B\beta < C < A\alpha + B\beta$$

sind beide, für:

(16'') $$A\alpha + B\beta < C < A\beta + B\alpha$$

ist nur die 1. Schale reell.

§ 4.

Diskussion der Gleichung § 2 (7) als geometrischer Ort.

1. Die beiden Schalen.

Gleichung § 2 (7) lautet:

$$(\mu \cdot \cos^2 \omega + \nu \sin^2 \omega - \tau)(\mu \cdot \sin^2 \omega + \nu \cos^2 \omega - \tau) = 0.$$

Jeder Klammerausdruck kann als Repräsentant einer Schale der Fläche 4. Ordnung betrachtet werden. Die beiden Schalen haben dann die Gleichungen:

(1) $$\begin{cases} \text{1. Schale: } \cos^2 \omega \cdot \nu + \sin^2 \omega \cdot \mu = \tau \\ \text{2. Schale: } \sin^2 \omega \cdot \nu + \cos^2 \omega \cdot \mu = \tau. \end{cases}$$

Wenn der Strahl μ, ν der 1. Schale angehört, bilden die von ihm an den Kegel τ gehenden Tangentialebenen je mit der Normale η des aufrechten Kegels μ den Winkel ω, wenn der Strahl μ, ν der 2. Schale angehört, mit der Normale ζ des liegenden Kegels ν.

Es kommt nun darauf an, das Verhalten der beiden Schalen zu untersuchen, wenn bei festem τ der Winkel ω von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ sich verändert, woraus denn auch die nachstehenden Ungleichungen resultieren:

(2) $$0 < \omega < \frac{\pi}{4}, \quad \cos^2 \omega \geqq \sin^2 \omega, \quad 1 > \cos^2 \omega > \frac{1}{2}, \quad 0 < \sin^2 \omega < \frac{1}{2}.$$

2. Der Fall $\tau = \mu_0$.

Wir nehmen mit:

(3) $$\tau = \mu_0$$

an, daß der Kegel ein „aufrechter" Kegel sei. Die beiden Schalen sind dann:

(4) $$\begin{cases} \text{1. Schale: } \cos^2 \omega \cdot \nu + \sin^2 \omega \cdot \mu = \mu_0 \\ \text{2. Schale: } \sin^2 \omega \cdot \nu + \cos^2 \omega \cdot \mu = \mu_0, \end{cases}$$

oder, wenn wir statt μ und ν $\mu_1 : \mu_2$ und $\nu_1 : \nu_2$ schreiben:

(5) $$\begin{cases} \text{1. Schale: } \cos^2 \omega \, \mu_2 \nu_1 + \sin^2 \omega \, \mu_1 \nu_2 = \mu_0 \mu_2 \nu_2 \\ \text{2. Schale: } \sin^2 \omega \, \mu_2 \nu_1 + \cos^2 \omega \, \mu_1 \nu_2 = \mu_0 \mu_2 \nu_2. \end{cases}$$

Die Grenzfälle.

Mit $\omega = 0$ wird die Gleichung der 1. Schale (5) zu:

$$\mu_2 \nu_1 = \mu_0 \mu_2 \nu_2,$$

die für $\nu_1 : \nu_2 = \mu_0$ und $\mu_2 = 0$ erfüllt ist.

Da der 1. Wert $\nu_1 : \nu_2 = \mu_0$ aber nach der Definition der elliptischen Koordinaten des Strahles im Bündel, nach der μ und ν durch die Ungleichungen $\gamma < \mu < \beta < \nu < \alpha$ auseinandergehalten werden, nicht zulässig ist, und außerdem $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_1}{0} = \infty$ dieser Bedingung ebenfalls nicht genügt, ist die 1. Schale nicht reell.

Unter der Voraussetzung $\omega = 0$ wird mithin aus (5):

$$(6) \quad \begin{cases} \text{1. Schale: } \mu_2\nu_1 = \mu_0\mu_2\nu_2;\ [\nu_1 : \nu_2 = \mu_0];\ [\mu_2 = 0 : \mu = \infty] \\ \text{2. Schale: } \mu_1\nu_2 = \mu_0\mu_2\nu_2;\ \mu_1 : \mu_2 = \mu_0 : \underline{\mu = \mu_0 :}\ [\nu_2 = 0 : \nu = \infty]. \end{cases}$$

Die 2. Schale stellt den Kegel μ_0 selbst dar, die 1. Schale ist nicht reell. In der Tat nimmt Gleichung § 3 (10) für $\omega = 0$, d. h. mit den Werten § 3 (13):

$$A = 0,\ B = 1,\ C = -\tau$$

die Form an:

$$(7) \quad (\beta - \tau)(\gamma - \tau) x^2 + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau) y^2 + (\alpha - \tau)(\beta - \tau) z^2 = 0,$$

d. i. die Gleichung des Kegels μ_0.

Die 1. Schale ist der Ort der Strahlen μ, ν von denen an den Kegel μ_0 zwei Tangentialebenen mit dem Winkel $\omega = 0$ gegen die η-Achse (parallele Tangentialebenen), die 2. Schale der Ort der Strahlen, von denen zwei Tangentialebenen mit dem Winkel $\omega = 0$ gegen die ζ-Achse (zusammenfallende Tangentialebenen) gehen. Parallele Tangentialebenen an einem Kegel gibt es demnach nicht.

Für $\omega = \frac{\pi}{4}$ fallen beide Schalen in dem Kegel $\mu + \nu = 2\mu_0$:

$$(8) \quad (\beta - \mu_0 + \gamma - \mu_0) x^2 + (\gamma - \mu_0 + \alpha - \mu_0) y^2 + (\alpha - \mu_0 + \beta - \mu_0) z^2 = 0$$

zusammen, der aber nur reell ist für:

$$\mu_0 > \frac{\gamma + \beta}{2}.$$

Die Fläche 4. Ordnung besteht für $\omega = 0$ nur aus dem Kegel μ_0 selbst als 2. Schale. Für $\omega = \frac{\pi}{4}$ fallen beide Schalen als Kegel $\mu + \nu = 2\mu_0$ zusammen, wenn $\mu_0 > \frac{\beta + \gamma}{2}$.

Die übrigen Fälle.

Die Schnittgeraden der beiden Schalen mit den Koordinatenebenen und die Bedingungen ihrer Realität mit Bezug auf die

Grenzwerte der Koeffizienten $\cos^2\omega$ und $\sin^2\omega$ für $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{4}$ sind:

(9)	yz-Ebene: $\nu = \alpha$	1. Schale: $\mu = \frac{\mu_0 - \cos^2\omega \cdot \alpha}{\sin^2\omega}$, $\nu = \alpha$	$-\infty < \mu < \frac{\mu_0 - \frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\mu_0 - \alpha$
		2. Schale: $\mu = \frac{\mu_0 - \sin^2\omega \cdot \alpha}{\cos^2\omega}$, $\nu = \alpha$	$\mu_0 > \mu > \frac{\mu_0 - \frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\mu_0 - \alpha$
	zx-Ebene: $\nu = \beta$	1. Schale: $\mu = \frac{\mu_0 - \cos^2\omega \cdot \beta}{\sin^2\omega}$, $\nu = \beta$	$-\infty < \mu < \frac{\mu_0 - \frac{\beta}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\mu_0 - \beta$
		2. Schale: $\mu = \frac{\mu_0 - \sin^2\omega \cdot \beta}{\cos^2\omega}$, $\nu = \beta$	$\mu_0 > \mu > \frac{\mu_0 - \frac{\beta}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\mu_0 - \beta$
	zx-Ebene: $\mu = \beta$	1. Schale: $\nu = \frac{\mu_0 - \sin^2\omega \cdot \beta}{\cos^2\omega}$, $\mu = \beta$	$\mu_0 > \nu > \frac{\mu_0 - \frac{\beta}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\mu_0 - \beta$
		2. Schale: $\nu = \frac{\mu_0 - \cos^2\omega \cdot \beta}{\sin^2\omega}$, $\mu = \beta$	$-\infty < \nu < \frac{\mu_0 - \frac{\beta}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\mu_0 - \beta$
	xy-Ebene: $\mu = \gamma$	1. Schale: $\nu = \frac{\mu_0 - \sin^2\omega\ \gamma}{\cos^2\omega}$, $\mu = \gamma$	$\mu_0 < \nu < \frac{\mu_0 - \frac{\gamma}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\mu_0 - \gamma$
		2. Schale: $\nu = \frac{\mu_0 - \cos^2\omega \cdot \gamma}{\sin^2\omega}$, $\mu = \gamma$	$+\infty > \nu > \frac{\mu_0 - \frac{\gamma}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\mu_0 - \gamma$

Aus Tabelle (9) folgt, daß für einen aufrechten Kegel $\tau = \mu_0$ die yz-Ebene, der Teil $\nu = \beta$ der zx-Ebene und die xy-Ebene von der Fläche (4) geschnitten werden können, da die Realitätsberechnungen allein hierfür mit den Ungleichungen des § 1 in Einklang stehen.

Die Kegel $2\mu_0-\alpha$, $2\mu_0-\beta$ und $2\mu_0-\gamma$, die in der yz-, zx- resp. xy-Ebene die Grenzen zwischen beiden Schalen bestimmen, sind:

$$(10)\quad\begin{cases}\dfrac{x^2}{2(\alpha-\mu_0)}+\dfrac{y^2}{\beta+\alpha-2\mu_0}+\dfrac{z^2}{\alpha+\gamma-2\mu_0}=0\\[2ex] \dfrac{x^2}{\alpha+\beta-2\mu_0}+\dfrac{y^2}{2(\beta-\mu_0)}+\dfrac{z^2}{\beta+\gamma-2\mu_0}=0\\[2ex] \dfrac{x^2}{\alpha+\gamma-2\mu_0}+\dfrac{y^2}{\beta+\gamma-2\mu_0}+\dfrac{z^2}{2(\gamma-\mu_0)}=0.\end{cases}$$

Ueber die Realitätsverhältnisse ist noch folgendes festzustellen. Handelt es sich darum, zu untersuchen, ob für einen gegebenen Winkel ω und für einen gegebenen Kegel τ der geometrische Ort reell ist, so sind die Ungleichungen § 3 (15) mit den Werten § 3 (13), aber $C=+\mu_0$, heranzuziehen:

$$(11)\quad\begin{cases}\sin^2\omega\,\beta+\cos^2\omega\,\alpha>\mu_0>\sin^2\omega\cdot\gamma+\cos^2\omega\cdot\beta \text{ für die 1. Schale,}\\ \sin^2\omega\,\alpha+\cos^2\omega\cdot\beta>\mu_0>\sin^2\omega\cdot\beta+\cos^2\omega\cdot\gamma \text{ für die 2. Schale,}\end{cases}$$

und es ist festzustellen, ob der Wert von μ_0 den Bedingungen (11) genügt. So gehen an den Kegel μ_0 nur Tangentialebenenpaare mit dem Winkel $2\omega=\frac{\pi}{2}$, wenn:

$$\mu_0>\frac{\beta+\gamma}{2}$$

ist, und nur solche mit dem Winkel $2\omega=\frac{\pi}{3}$, wenn:

$$\frac{1}{4}\beta+\frac{3}{4}\alpha>\mu_0>\frac{3}{4}\gamma+\frac{1}{4}\beta\quad\text{(1. Schale),}$$

$$\frac{1}{4}\alpha+\frac{3}{4}\beta>\mu_0>\frac{3}{4}\beta+\frac{1}{4}\gamma\quad\text{(2. Schale).}$$

Von Interesse sind nur die rechten Seiten dieser Ungleichungen, und da:

$$\gamma<\beta$$

so läßt sich umgekehrt stets ein Kegel μ_0 angeben, für den die obigen Bedingungen erfüllt und an den dann Tangentialebenenpaare mit dem Winkel $2\omega=\frac{\pi}{3}$ zu konstruieren möglich sind. Ist $\tau=\mu_0$ fest gegeben, so können die Bedingungsgleichungen (11) auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(12)\quad\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\sin^2\omega(\beta-\alpha)+\alpha>\mu_0>\cos^2\omega(\beta-\gamma)+\gamma\\ \text{oder: }\cos^2\omega(\alpha-\beta)+\beta>\mu_0>\sin^2\omega(\gamma-\beta)+\beta\end{array}\right\}\text{für die 1. Schale,}\\ \left.\begin{array}{l}\sin^2\omega(\alpha-\beta)+\beta>\mu_0>\cos^2\omega(\gamma-\beta)+\beta\\ \text{oder: }\cos^2\omega(\beta-\alpha)+\alpha>\mu_0>\sin^2\omega(\beta-\gamma)+\gamma\end{array}\right\}\text{für die 2. Schale.}\end{cases}$$

Bezeichnen wir den Winkel der Scheitelerzeugenden des Kegel μ_0:

$$(13)\quad\frac{x^2}{\alpha-\mu_0}+\frac{y^2}{\beta-\mu_0}+\frac{z^2}{\gamma-\mu_0}=0$$

in der yz-Ebene:

$$\frac{y^2}{\beta-\mu_0}-\frac{z^2}{\mu_0-\gamma}=0 \tag{14}$$

gegen die positiv gerichtete z-Achse mit φ, so ist:

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{\beta-\mu_0}{\mu_0-\gamma}.$$

Da wir die rechten Seiten der Werte (12) für die 1. Schale auch schreiben können:

$$\mu_0-\gamma>(\beta-\gamma)\cos^2\omega,\quad \mu_0-\beta>-(\beta-\gamma)\sin^2\omega$$

oder:

$$\cos^2\omega<\frac{\mu_0-\gamma}{\beta-\gamma},\quad \sin^2\omega>\frac{\beta-\mu_0}{\beta-\gamma}$$

oder schließlich:

$$\operatorname{tg}^2\omega>\frac{\beta-\mu_0}{\mu_0-\gamma}=\operatorname{tg}^2\varphi,$$

so folgt, daß die 1. Schale nur reell ist für:

$$\underline{\omega>\varphi.} \tag{15}$$

Analog folgt für die 2. Schale:

$$\mu_0-\beta>-(\beta-\gamma)\cos^2\omega,\quad \mu_0-\gamma>(\beta-\gamma)\sin^2\omega$$

oder:

$$\cos^2\omega>\frac{\beta-\mu_0}{\beta-\gamma},\quad \sin^2\omega<\frac{\mu_0-\gamma}{\beta-\gamma}$$

und:

$$\operatorname{tg}^2\omega<\frac{\mu_0-\gamma}{\beta-\mu_0}=\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}=\operatorname{ctg}\varphi=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

somit:

$$\omega<\frac{\pi}{2}-\varphi.$$

Die 2. Schale ist reell, solange:

$$\underline{\omega<\frac{\pi}{2}-\varphi.} \tag{16}$$

Aus (15) und (16) resultiert:

Die 1. Schale ist nur reell, wenn der von den Tangentialebenenpaaren gebildete Winkel größer ist als der Winkel der Scheitelerzeugenden des Kegels μ_0 in der Ebene der kleinsten Oeffnung, die 2. Schale hingegen nur, solange dieser Winkel kleiner ist als der Komplementwinkel der Scheitelerzeugenden in dieser Ebene.

Für $\omega=0$ ist stets nur die 2. Schale reell. Ist $\varphi<\frac{\pi}{4}$, so ist bei wachsendem ω zunächst die 2. Schale allein vorhanden, für $\omega=\varphi$

erscheint auch die 1. Schale. In dem Intervalle $\varphi < \omega < \frac{\pi}{4}$ bestehen beide Schalen nebeneinander und für $\omega = \frac{\pi}{4}$ fallen beide in dem Kegel $\mu + \nu = 2\mu_0$ zusammen. Wenn $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist, so ist für $\omega < \frac{\pi}{4}$ die 2. Schale reell, in der Grenze für $\omega = \frac{\pi}{4}$ sind beide vorhanden und zwar reduziert der Kegel $\mu + \nu = 2\mu_0$ sich dann auf eine Koordinatenachse. Ist $\varphi > \frac{\pi}{4}$, so ist die 2. Schale reell solange $\omega < \frac{\pi}{2} - \varphi$, die 1. Schale bleibt außer Betracht, da einerseits nach (15):

$$\omega > \varphi,$$

andererseits nach (2):

$$\omega < \frac{\pi}{4}$$

sein muß.

Ueber die räumliche Anordnung der Schalen ist bei festem μ_0 zu bemerken, daß, während ω von 0 bis $\frac{\pi}{2} - \varphi$ wächst, die 2. Schale von μ_0 her gegen den Kegel $\mu + \nu = 2\mu_0$ geht, den sie aber nur erreicht, wenn $\varphi \leqq \frac{\pi}{4}$ ist und die 1. Schale von $\omega > \varphi$ ab gegen diesen Kegel sich bewegt, den sie auch nur erreichen kann, wenn $\varphi \leqq \frac{\pi}{4}$ ist. Im Innern des Kegels μ_0 liegen keine Erzeugenden der Fläche (4), der Teil des Raumes zwischen dem Kegel μ_0 und dem Kegel $\mu + \nu = 2\mu_0$ liefert nur Erzeugende der 2. Schale, der noch übrige nur solche der 1. Schale.

Einige spezielle Fälle.

Für den speziellen Wert:

$$\mu_0 = \gamma \tag{17}$$

fallen oberer und unterer Mantel des aufrechten Kegels in der xy-Ebene zusammen.

Die 1. Schale ist dauernd imaginär, die 2. Schale liefert nur für $\omega = 0$ den brauchbaren Wert $\mu = \mu_0$, d. i. die xy-Ebene selbst (zusammenfallende Tangentialebenen).

Ist:

$$\mu_0 = \frac{\beta + \gamma}{2}, \tag{18}$$

so lautet die Gleichung des Kegels im System der Konfokalen:

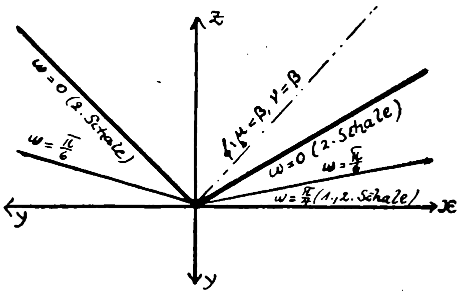
$$\frac{x^2}{\alpha - \frac{\beta + \gamma}{2}} + \frac{y^2}{\frac{\beta - \gamma}{2}} - \frac{z^2}{\frac{\beta - \gamma}{2}} = 0,$$

aus der leicht zu ersehen ist, daß die Scheitelerzeugenden des Kegels in der yz-Ebene senkrecht aufeinanderstehen, somit $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist. Die Gleichungen der beiden Schalen lauten:

$$(19)\quad \begin{cases} \text{1. Schale: } \cos^2\omega \cdot \nu + \sin^2\omega \cdot \mu = \dfrac{\beta+\gamma}{2} \\[2ex] \text{2. Schale: } \sin^2\omega \cdot \nu + \cos^2\omega \cdot \mu = \dfrac{\beta+\gamma}{2} \end{cases}$$

und in den x, y, z für $\omega = 0$:

$$(\beta-\gamma)(\gamma-\beta)x^2 + (\gamma-\beta)(2\alpha-\beta-\gamma)y^2 + (2\alpha-\beta-\gamma)(\beta-\gamma)z^2 = 0,$$



Kegel r. 1. Schale. 2. Schale.

$\mu_0 = \frac{\beta+\gamma}{2}$.

Fig. 4.

d. i. die Gleichung des Kegels μ_0 selbst (2. Schale), und für $\omega = \frac{\pi}{4}$:

$$(\alpha-\beta)y^2 + (\alpha-\gamma)z^2 = 0,$$

die aber nur, da $\alpha-\beta>0$ und $\alpha-\gamma>0$, erfüllt ist, wenn:

$$y = 0,\ z = 0.$$

Der Kegel $\mu+\nu = 2\mu_0$ reduziert sich somit auf die x-Achse. Und in der Tat berührt das Tangentialebenenpaar durch die x-Achse den Kegel μ_0 in seinen rechtwinkligen Erzeugenden in der yz-Ebene. Nur die 2. Schale ist reell, während ω von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ geht. Sie bewegt sich stetig von dem Kegel her gegen die x-Achse (Kegel $\mu+\nu = 2\mu_0$), für $\omega = \frac{\pi}{4}$ fällt sie in die x-Achse, die gleichzeitig auch als Grenzform der 1. Schale aufgefaßt werden muß. Letztere ist in dem Intervalle $\gamma<\mu_0<\frac{\beta+\gamma}{2}$ stets imaginär.

Für den Parameterwert:

$$(20)\qquad \mu_0 = \beta$$

bildet die die z-Achse enthaltende Winkelfläche der Fokallinien in der zx-Ebene den Kegel μ_0 im System der Konfokalen.

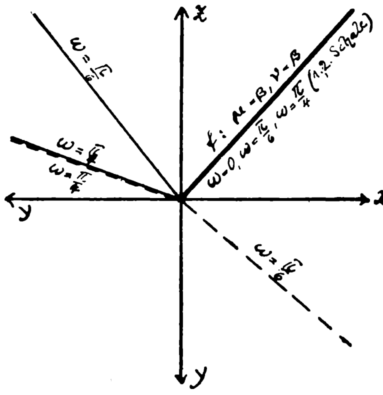
Die Gleichungen der beiden Schalen sind in homogener Schreibweise:

$$(21)\quad \begin{cases} \text{1. Schale: } \cos^2\omega \cdot \mu_2 \cdot \nu_1 + \sin^2\omega \cdot \mu_1 \cdot \nu_2 = \beta\mu_2\nu_2 \\ \text{2. Schale: } \sin^2\omega \cdot \mu_2 \cdot \nu_1 + \cos^2\omega \cdot \mu_1 \cdot \nu_2 = \beta\mu_2\nu_2, \end{cases}$$

sie lauten für $\omega = 0$:

$$(22)\quad \begin{cases} \text{1. Schale: } \mu_2\nu_1 = \beta\,\mu_2\nu_2;\ \nu_1:\nu_2 = \beta : \underline{\underline{\nu = \beta}}\ \ [\mu_2 = 0 : \mu = \infty] \\ \text{2. Schale: } \mu_1\nu_2 = \beta\,\mu_2\nu_2;\ \mu_1:\mu_2 = \beta : \underline{\underline{\mu = \beta}}\ \ [\nu_2 = 0 : \nu = \infty]. \end{cases}$$

Die 1. Schale ist die die x-Achse enthaltende Winkelfläche der Fokallinien in der zx-Ebene, sie liefert parallele Tangentialebenen (Winkel $\omega = 0$ gegen die η-Achse), die 2. Schale ist wieder der Kegel $\mu_0 = \beta$ selbst und der Ort von zusammenfallenden Tangentialebenen (Winkel $\omega = 0$ gegen die ζ-Achse). Für $\omega = \frac{\pi}{4}$ lautet Gleichung (21):



Kegel T. 1. Schale. 2. Schale.

$\mu_0 = \beta$.

Fig. 5.

$$(23) \quad \mu + \nu = 2\beta,$$

oder in den x, y, z:

$$(\gamma - \beta)x^2 + (\gamma + \alpha - 2\beta)y^2 + (\alpha - \beta)z^2 = 0.$$

Der hierdurch dargestellte Kegel hat zur inneren Achse die x- oder z-Achse, je nachdem:

$$\gamma + \alpha - 2\beta > 0 \text{ oder } \gamma + \alpha - 2\beta < 0.$$

Der geometrische Ort der Scheitellinien senkrechter Fokalebenenpaare ist somit der Kegel (23).

Für $\mu = \beta$ oder $\nu = \beta$ sind die Gleichungen beider Schalen:

$$\mu = \beta: \begin{cases} \text{1. Schale: } \cos^2\omega \cdot \nu + \sin^2\omega \cdot \beta = \beta \\ \text{2. Schale: } \sin^2\omega \cdot \nu + \cos^2\omega \cdot \beta = \beta \end{cases} \text{oder} \quad \begin{matrix} \cos^2\omega \cdot \nu = \beta(1 - \sin^2\omega) \\ \sin^2\omega \cdot \nu = \beta(1 - \cos^2\omega) \end{matrix}$$

$$\nu = \beta: \begin{cases} \text{1. Schale: } \cos^2\omega \cdot \beta + \sin^2\omega \cdot \nu = \beta \\ \text{2. Schale: } \sin^2\omega \cdot \beta + \cos^2\omega \cdot \nu = \beta \end{cases} \text{oder} \quad \begin{matrix} \sin^2\omega \cdot \nu = \beta(1 - \cos^2\omega) \\ \cos^2\omega \cdot \nu = \beta(1 - \sin^2\omega) \end{matrix}$$

mit den Werten $\nu = \beta$ oder $\mu = \beta$ identisch erfüllt, sodaß jede Schale für jeden Wert von ω durch die Fokallinien hindurchgeht, denn da stets:

$$\varphi = 0,$$

also:

$$\omega > \varphi \text{ und } \omega < \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

so ist für sämtliche Winkel sowohl die 1. Schale als auch die 2. Schale reell[1]).

[1]) Der Fall $\mu = \beta$ gibt den entsprechenden Satz auf der Kugel zu dem Peripheriewinkelsatz in der Ebene. — Uebrigens lassen sich sämtliche Resultate dieser Arbeit auf sphaerische Kegelschnitte übertragen, die durch Schnitt der konfokalen Kegel mit der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ entstehen.

3. Der Fall $\tau = \nu_0$.

Wir nehmen mit:

$$(24) \qquad \tau = \nu_0$$

an, daß der Kegel τ ein „liegender“ Kegel sei. Die beiden Schalen sind dann:

$$(25) \quad \begin{cases} 1.\ \text{Schale:}\ \cos^2\omega \cdot \nu + \sin^2\omega \cdot \mu = \nu_0 \\ 2.\ \text{Schale:}\ \sin^2\omega \cdot \nu + \cos^2\omega \cdot \mu = \nu_0, \end{cases}$$

oder, wenn wir statt μ und ν $\mu_2 : \mu_2$ und $\nu_1 : \nu_2$ schreiben:

$$(26) \quad \begin{cases} 1.\ \text{Schale:}\ \cos^2\omega \cdot \mu_2\nu_1 + \sin^2\omega \cdot \mu_1\nu_2 = \nu_0\mu_2\nu_2 \\ 2.\ \text{Schale:}\ \sin^2\omega \cdot \mu_2\nu_1 + \cos^2\omega \cdot \mu_1\nu_2 = \nu_0\mu_2\nu_2. \end{cases}$$

Die Grenzfälle.

Mit $\omega = 0$ werden die Gleichungen (26) zu:

$$(27) \quad \begin{cases} 1.\ \text{Schale:}\ \mu_2\nu_1 = \nu_0\mu_2\nu_2;\ \nu_1 : \nu_2 = \nu_0 : \underline{\nu = \nu_0}\ [\mu_2 = 0 : \mu = \infty] \\ 2.\ \text{Schale:}\ \mu_1\nu_2 = \nu_0\mu_2\nu_2 :\ [\mu_1 : \mu_2 = \nu_0]\ [\nu_2 = 0 : \nu = \infty] \end{cases}$$

Die 1. Schale stellt den Kegel ν_0 selbst dar, die 2. Schale ist nicht reell.

Die 1. Schale ist der Ort der Strahlen μ, ν, von denen an den Kegel ν_0 zwei Tangentialebenen mit dem Winkel $\omega = 0$ gegen die η-Achse (zusammenfallende Tangentialebenen) gehen. Da die 2. Schale imaginär ist, so gibt es keine parallele Tangentialebenen.

Für $\omega = \frac{\pi}{4}$ fallen beide Schalen in dem Kegel $\mu + \nu = 2\nu_0$:

$$(\beta - \nu_0 + \gamma - \nu_0)\, x^2 + (\gamma - \nu_0 + \alpha - \nu_0)\, y + (\alpha - \nu_0 + \beta - \nu_0)\, z^2 = 0$$

zusammen, der reell ist, wenn:

$$\nu_0 < \frac{\alpha + \beta}{2},$$

und dessen innere Achse die x- oder z-Achse ist, je nachdem:

$$\gamma + \alpha - 2\nu_0 > 0 \ \text{ oder } \ \gamma + \alpha - 2\nu_0 < 0.$$

Die Fläche 4. Ordnung besteht für $\omega = 0$ nur aus dem Kegel ν_0 selbst als 1. Schale. Für $\omega = \frac{\pi}{4}$ fallen beide Schalen als Kegel $\mu + \nu = 2\nu_0$ zusammen, wenn $\nu_0 < \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Die übrigen Fälle.

Die Schnittgeraden der beiden Schalen mit den Koordinatenebenen und die Bedingungen ihrer Realität mit Bezug auf die Grenzwerte der Koeffizienten $\cos^2\omega$ und $\sin^2\omega$ für $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{4}$ sind:

$$
(28)\left\{
\begin{array}{ll|l}
\begin{array}{c}\text{yz-Ebene:}\\ \nu=\alpha\end{array} &
\left\{\begin{array}{l}
\text{1 Schale: } \mu = \dfrac{\nu_0 - \cos^2\omega \,.\, \alpha}{\sin^2\omega},\ \nu = \alpha \\[3ex]
\text{2. Schale: } \mu = \dfrac{\nu_0 - \sin^2\omega \,.\, \alpha}{\cos^2\omega},\ \nu = \alpha
\end{array}\right. &
\begin{array}{l}
-\infty < \mu < \dfrac{\nu_0 - \dfrac{\alpha}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2\nu_0 - \alpha \\[3ex]
\nu_0 > \mu > \dfrac{\nu_0 - \dfrac{\alpha}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2\nu_0 - \alpha
\end{array} \\[8ex]
\begin{array}{c}\text{zx-}\\ \text{Ebene:}\\ \nu=\beta\end{array} &
\left\{\begin{array}{l}
\text{1. Schale: } \mu = \dfrac{\nu_0 - \cos^2\omega \,.\, \beta}{\sin^2\omega},\ \nu = \beta \\[3ex]
\text{2. Schale: } \mu = \dfrac{\nu_0 - \sin^2\omega \,.\, \beta}{\cos^2\omega},\ \nu = \beta
\end{array}\right. &
\begin{array}{l}
+\infty > \mu > \dfrac{\nu_0 - \dfrac{\beta}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2\nu_0 - \beta \\[3ex]
\nu_0 < \mu < \dfrac{\nu_0 - \dfrac{\beta}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2\nu_0 - \beta
\end{array} \\[8ex]
\begin{array}{c}\text{zx-}\\ \text{Ebene:}\\ \mu=\beta\end{array} &
\left\{\begin{array}{l}
\text{1. Schale: } \nu = \dfrac{\nu_0 - \sin^2\omega \,.\, \beta}{\cos^2\omega},\ \mu = \beta \\[3ex]
\text{2. Schale: } \nu = \dfrac{\nu_0 - \cos^2\omega \,.\, \beta}{\sin^2\omega},\ \mu = \beta
\end{array}\right. &
\begin{array}{l}
\nu_0 < \nu < \dfrac{\nu_0 - \dfrac{\beta}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2\nu_0 - \beta \\[3ex]
+\infty < \nu < \dfrac{\nu_0 - \dfrac{\beta}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2\nu_0 - \beta
\end{array} \\[8ex]
\begin{array}{c}\text{xy-Ebene:}\\ \mu=\gamma\end{array} &
\left\{\begin{array}{l}
\text{1. Schale: } \nu = \dfrac{\nu_0 - \sin^2\omega \,.\, \gamma}{\cos^2\omega},\ \mu = \gamma \\[3ex]
\text{2. Schale: } \nu = \dfrac{\nu_0 - \cos^2\omega \,.\, \gamma}{\sin^2\omega},\ \mu = \gamma
\end{array}\right. &
\begin{array}{l}
\nu_0 < \nu < \dfrac{\nu_0 - \dfrac{\gamma}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2\nu_0 - \gamma \\[3ex]
+\infty > \nu > \dfrac{\nu_0 - \dfrac{\gamma}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2\nu_0 - \gamma
\end{array}
\end{array}\right.
$$

Aus Tabelle (28) folgt, daß für einen liegenden Kegel $\tau = \nu_0$ die yz-Ebene, der Teil $\mu = \beta$ der zx-Ebene und die xy-Ebene von der Fläche (25) geschnitten werden können, da die Realitätsbedingungen allein hierfür mit den Ungleichungen des § 1 in Einklang stehen. Die Kegel $2\nu_0 - \alpha$, $2\nu_0 - \beta$ und $2\nu_0 - \gamma$, die in der yz-, zx- resp. xy-Ebene die Grenzen zwischen den beiden Schalen bestimmen, sind:

$$(29) \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2(\alpha - \nu_0)} + \dfrac{y^2}{\beta + \alpha - 2\nu_0} + \dfrac{z^2}{\alpha + \gamma - 2\nu_0} = 0 \\ \dfrac{x^2}{\alpha + \beta - 2\nu_0} + \dfrac{y^2}{2(\beta - \nu_0)} + \dfrac{z^2}{\beta + \gamma - 2\nu_0} = 0 \\ \dfrac{x^2}{\alpha + \gamma - 2\nu_0} + \dfrac{y^2}{\beta + \gamma - 2\nu_0} + \dfrac{z^2}{2(\gamma - \nu_0)} = 0. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichungen (12) können ohne jede Aenderung übernommen werden, wenn wir für μ_0 den Wert ν_0 setzen:

$$(30) \quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \sin^2\omega(\beta - \alpha) + \alpha > \nu_0 > \cos^2\omega(\beta - \gamma) + \gamma \\ \text{oder: } \cos^2\omega(\alpha - \beta) + \beta > \nu_0 > \sin^2\omega(\gamma - \beta) + \beta \end{array}\right\} \text{für die 1. Schale,} \\ \left.\begin{array}{l} \sin^2\omega(\alpha - \beta) + \beta > \nu_0 > \cos^2\omega(\gamma - \beta) + \beta \\ \text{oder: } \cos^2\omega(\beta - \alpha) + \alpha > \nu_0 > \sin^2\omega(\beta - \gamma) + \gamma \end{array}\right\} \text{für die 2. Schale.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir den Winkel der Scheitelerzeugenden des Kegels ν_0:

$$(31) \quad \frac{x^2}{\alpha - \nu_0} + \frac{y^2}{\beta - \nu_0} + \frac{z^2}{\gamma - \nu_0} = 0$$

in der xy-Ebene:

$$(32) \quad \frac{x^2}{\alpha - \nu_0} - \frac{y^2}{\nu_0 - \beta} = 0$$

gegen die positive Richtung der x-Achse mit ψ, so ist:

$$\operatorname{tg}^2\psi = \frac{\nu_0 - \beta}{\alpha - \nu_0}.$$

Da wir die linken Seiten der Werte (30) auch schreiben können:

$$-(\alpha - \beta)\sin^2\omega > \nu_0 - \alpha, \quad (\alpha - \beta)\cos^2\omega > \nu_0 - \beta,$$

oder:

$$\sin^2\omega < \frac{\alpha - \nu_0}{\alpha - \beta}, \quad \cos^2\omega > \frac{\nu_0 - \beta}{\alpha - \beta},$$

oder schließlich:

$$\operatorname{tg}^2\omega < \frac{\alpha - \nu_0}{\nu_0 - \beta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\psi} = \operatorname{ctg}\psi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right),$$

so folgt, daß die 1. Schale immer reell ist für:

$$(33) \quad \omega < \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Analog folgt für die 2. Schale:

$$(\alpha - \beta)\sin^2\omega > \nu_0 - \beta, \quad -(\alpha - \beta)\cos^2\omega > \nu_0 - \alpha,$$

oder:

$$\sin^2\omega > \frac{\nu_0 - \beta}{\alpha - \beta}, \quad \cos^2\omega < \frac{\alpha - \nu_0}{\alpha - \beta}$$

und:

$$\mathrm{tg}^2\omega > \frac{\nu_0 - \beta}{\alpha - \nu_0} = \mathrm{tg}\,\phi,$$

somit:

$$\omega > \phi.$$

Die 2. Schale ist nur reell, wenn:

(34) $$\underline{\omega > \phi.}$$

Aus (33) une (34) resultiert:

Die 1. Schale ist reell, wenn der von den Tangentialebenenpaaren gebildete Winkel kleiner ist als der Komplementwinkel der Scheitelerzeugenden des Kegels ν_0 in der Ebene der kleinsten Oeffnung des Kegels, die 2. Schale nur, solange dieser Winkel größer ist als der Winkel der Scheitelerzeugenden in dieser Ebene.

Für $\omega = 0$ ist nur die 1. Schale reell. Ist $\phi < \frac{\pi}{4}$, so ist bei wachsendem ω zunächst die 1. Schale allein vorhanden, für $\omega = \phi$ erscheint auch die 2. Schale. In dem Intervalle $\phi < \omega < \frac{\pi}{4}$ bestehen beide Schalen nebeneinander, für $\omega = \frac{\pi}{4}$ fallen beide in dem Kegel $\mu + \nu = 2\nu_0$ zusammen. Wenn $\phi = \frac{\pi}{4}$ ist, so ist für $\omega < \frac{\pi}{4}$ nur die 1. Schale reell, in der Grenze für $\omega = \frac{\pi}{4}$ sind beide vorhanden und zwar reduziert der Kegel $\mu + \nu = 2\nu_0$ sich dann auf eine Koordinatenachse. Ist $\phi > \frac{\pi}{4}$, so ist die 1. Schale reell solange $\omega < \frac{\pi}{2} - \phi$, die 2. Schale bleibt außer Betracht, da einerseits nach (34):

$$\omega > \phi,$$

andererseits nach (2):

$$\omega < \frac{\pi}{4}$$

sein muß.

Setzen wir $\phi < \frac{\pi}{4}$ voraus, so ist über die räumliche Anordnung der Schalen bei festem ν_0 zu bemerken, daß, während ω von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ wächst, die 1. Schale von ν_0 her gegen den Kegel $\mu + \nu = 2\nu_0$ geht, für $\omega = \phi$ die 2. Schale erscheint und sich bei weiterem Anwachsen von ω gegen diesen Kegel bewegt, in dem für $\omega = \frac{\pi}{4}$ beide

Schalen zusammenfallen. Im Innern des Kegels liegen keine Erzeugenden der Fläche (25), der Teil des Raumes zwischen dem Kegel ν_0 und Kegel $\mu + \nu = 2\nu_0$ liefert nur Erzeugende der 1. Schale, der noch übrige nur Erzeugende der 2. Schale.

Einige spezielle Fälle.

Ist:

(35) $$\nu_0 = \frac{\alpha + \gamma}{2},$$ [1]

so lautet die Gleichung des Kegels im System der Konfokalen:

$$\frac{x^2}{\frac{\alpha - \gamma}{2}} + \frac{y^2}{\beta - \frac{\alpha + \gamma}{2}} + \frac{z^2}{\frac{\gamma - \alpha}{2}} = 0,$$

aus der leicht zu ersehen ist, daß die Scheitelerzeugenden des Kegels in der Ebene der größten Oeffnung (zx) senkrecht aufeinanderstehen.

Die Gleichungen der beiden Schalen sind:

$$(36) \quad \begin{cases} \text{1. Schale: } \cos^2\omega \cdot \nu + \sin^2\omega \cdot \mu = \frac{\alpha + \gamma}{2} \\ \text{2. Schale: } \sin^2\omega \cdot \nu + \cos^2\omega \cdot \mu = \frac{\alpha + \gamma}{2} \end{cases}$$

und in den x, y, z für $\omega = 0$:

$$(2\beta - \alpha - \gamma)(\gamma - \alpha)\,x^2 + (\gamma - \alpha)(\alpha - \gamma)\,y^2 + (\alpha - \gamma)(2\beta - \alpha - \gamma)\,z^2 = 0,$$

d. i. die Gleichung des Kegels ν_0 selbst (1. Schale) und für $\omega = \frac{\pi}{4}$:

$$(\beta - \alpha)\,x^2 + (\beta - \gamma)\,z^2 = 0.$$

Der Kegel $\mu + \nu = 2\nu_0$ reduziert sich somit auf die y-Achse. Das Tangentialebenenpaar durch die y-Achse berührt den Kegel ν_0 in den rechtwinkligen Erzeugenden des Kegels in der zx-Ebene.

Die 1. Schale ist bei anwachsendem ω stets reell, weil $\frac{\pi}{2} - \phi$ sicher größer als $\frac{\pi}{4}$ ist, da der Winkel in der größten Oeffnung des Kegels $\frac{\pi}{2}$ beträgt. Sie bewegt sich stetig vom Kegel μ_0 her gegen die y-Achse (Grenzfall des Kegels $\mu + \nu = \frac{\alpha + \gamma}{2}$) Die 2. Schale ist reell für alle Winkel $\omega > \phi$ und bewegt sich bei ansteigendem ω gegen den Kegel $\mu + \nu = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

---

[1] Der Kegel $\tau = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ zählt zu den „liegenden" oder „aufrechten" Kegeln, je nachdem $\frac{\alpha + \gamma}{2} \gtrless \beta$. Hier ist $\frac{\alpha + \gamma}{2} > \beta$ angenommen.

Für den Parameterwert:

$$\nu_0 = \frac{\alpha + \beta}{2} \tag{36}$$

hat der Kegel im System der Konfokalen:

$$\frac{x^2}{\frac{\alpha - \beta}{2}} + \frac{y^2}{\frac{\beta - \alpha}{2}} + \frac{z^2}{\gamma - \frac{(\alpha + \beta)}{2}} = 0$$

zueinander rechtwinklige Erzeugende in der Ebene der kleinsten Oeffnung (xy). Die Gleichungen der beiden Schalen lauten:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{1. Schale: } \cos^2\omega \cdot \nu + \sin^2\omega \cdot \mu = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \text{2. Schale: } \sin^2\omega \cdot \nu + \cos^2\omega \cdot \mu = \frac{\alpha + \beta}{2} \end{array}\right. \tag{37}$$

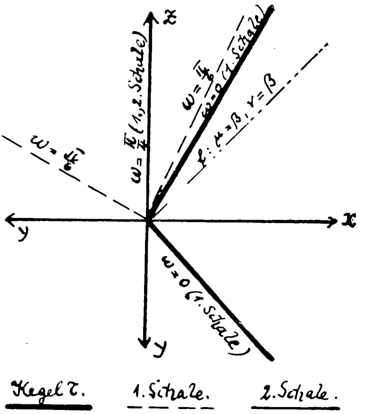
und in den x, y, z für $\omega = 0$:

$$(\beta - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta)x^2 + (2\gamma - \alpha - \beta)(\alpha - \beta)y^2 + (\alpha - \beta)(\beta - \alpha)z^2 = 0,$$

d. i. die Gleichung des Kegels ν_0 selbst (1. Schale) und für $\omega = \frac{\pi}{4}$:

$$(\gamma - \alpha)x^2 + (\gamma - \beta)y^2 = 0.$$

Der Kegel $\mu + \nu = 2\nu_0$ reduziert sich somit auf die z-Achse. Das Tangentialebenenpaar durch die z-Achse berührt den Kegel $\nu_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ in den rechtwinkligen Erzeugenden des Kegels in der xy-Ebene.



$\nu_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$.
Fig. 6.

Da $\psi = \frac{\pi}{4}$, so ist die 2. Schale imaginär, mit Ausnahme für $\omega = \frac{\pi}{4}$. Die 1. Schale ist reell, weil die Bedingung $\omega < \frac{\pi}{2} - \psi$ immer erfüllt ist.

Für alle Werte $\nu_0 > \frac{\alpha + \beta}{2}$ ist nur die 1. Schale reell und zwar für alle diejenigen Werte von ω, für die $\omega < \frac{\pi}{2} - \psi$. Die 2. Schale ist stets imaginär, dasselbe gilt auch von dem Kegel $\mu + \nu = 2\nu_0$.

4. Zusammenfassung der Resultate.

Die Frage, ob an einen „aufrechten" Kegel Tangentialebenenpaare von vorgegebenen Winkel 2ω konstruierbar sind, kann dahin beantwortet werden, daß dieses nur möglich ist, wenn der gegebene Winkel größer als der Winkel der Scheitellinien des Kegels in der Ebene der kleinsten Oeffnung ist oder kleiner als der Komplementwinkel dieser Scheitelerzeugenden. Beide Fälle können auch gleichzeitig eintreten. Im ersteren Falle ist die Normale η des aufrechten Kegels μ die innere Achse des Tangentialebenenpaares, der „Innenwinkel" des Tangentialebenenpaares ist dann dem vorgeschriebenen Winkel gleich (1. Schale), im letzteren Falle ist die ζ-Achse, die Normale des liegenden Kegels ν, die innere Achse und der „Außenwinkel" ist gleich dem vorgegebenen Winkel (2. Schale). Hier ist auch der Grund dafür gegeben, daß die 2. Schale stets näher an den Kegel herangerückt ist als die 1. Schale, weil der vorgegebene Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen soll und der „Innenwinkel" somit für erstere stets $> \frac{\pi}{2}$, für letztere stets $< \frac{\pi}{2}$ ist.

Für einen „liegenden" Kegel gelten analoge Verhältnisse. Wiederum gilt als Bedingung für die Konstruierbarkeit eines Tangentialebenenpaares von vorgegebenem Winkel, daß dieser entweder kleiner als der Komplementwinkel der Scheitelerzeugenden des Kegels in der Ebene der kleinsten Oeffnung sein muß oder größer als der Winkel der Scheitelerzeugenden. Beide Fälle können auch nebeneinander auftreten. Im ersteren Falle ist die Normale η des aufrechten Kegels μ die innere Achse des Tangentialebenenpaares und der „Außenwinkel" des Tangentialebenenpaares ist dann dem vorgegebenen Winkel gleich (1. Schale), im letzteren Falle ist die ζ-Achse, die Normale des liegenden Kegels ν, die innere Achse und der „Innenwinkel" erfüllt diese Bedingung (2. Schale). Dadurch ist auch begründet, daß die 1. Schale stets näher an den Kegel ν_0 herangerückt ist als die 2. Schale.