Partielle Differentialgleichung der Flächen des zweiten Grades

von Prof. Scherk in Bremen.

Im zweiten Theile der correspondance sur l'école polytecnique pag. 51 hat Monge gezeigt. wenn man die allgemeine Gleichung der Linien des zweiten Grades

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + 1 = 0 \;\ldots\ldots\; (1)$$

fünfmal nach einander differentiirt, um aus derselben und aus den resultirenden Gleichungen die Constanten A, B, C, D, E zu eliminiren, das Resultat der Elimination in der Gleichung

$$9\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\}^2 \frac{d^5y}{dx^5} - 45\,\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left\{\frac{d^3y}{dx^3}\right\}^3 = 0 \;\ldots\ldots\; (2)$$

enthalten sei. Vermittelst dieser Gleichung lässt sich also entscheiden, ob eine andere Differentialgleichung von einem niedrigeren Grade als dem fünften einer Linie des zweiten Grades entspreche oder nicht. In dem angegebenen Falle konnte offenbar bloss dieser von Monge eingeschlagene Weg zum Ziele führen, da nur durch eine fünfmalige Differentiation in Beziehung auf eine der beiden veränderlichen Grössen die 5 Constanten aus der Rechnung verschwinden können. Nicht so verhält es sich wenn man sich vorsetzt, eine von allen Constanten befreite Differentialgleichung der Flächen des zweiten Grades zu erhalten. Um nämlich aus der allgemeinen Gleichung derselben $Ax^2+By^2+Cz^2+2ayz+2bxz+2cxy+2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+d^2 = 0$ ...... (3) die 9 Coffionaten zu eliminiren, würde man sich freilich im Allgemeinen noch 9 andere Gleichungen durch Differentiation verschaffen können. da uns aber gegenwärtig die Differentiation in Beziehung auf x und auf y frei steht, so wird man die verschiedensten partiellen Differentialgleichungen erhalten können, die alle von den Constanten der Gleichung (3) befreit sind. So sieht man z. B. augenblicklich, dass, wenn man diese Gleichung bloss in Beziehung auf die eine der veränderlichen Grössen differentiirt und die andere fortwährend constant setzt, das Resultat mit der Differentialgleichung (2) der Linien des zweiten Grades vollständig übereinstimmen muss, mit dem Unterschiede, dass wir gegenwärtig partielle Differentialgleichungen hätten, während wir vorher gewöhnliche hatten, so dass folglich jede der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 9\left\{\frac{d^2z}{dx^2}\right\}\left\{\frac{d^5z}{dx^5}\right\} - 45\left\{\frac{d^2z}{dx^2}\right\}\left\{\frac{d^3z}{dx^3}\right\}\left\{\frac{d^4z}{dx^4}\right\} + 40\left\{\frac{d^3z}{dx^3}\right\}^3 = 0 \\ 9\left\{\frac{d^2z}{dy^2}\right\}\left\{\frac{d^5z}{dy^5}\right\} - 45\left\{\frac{d^2z}{dy^2}\right\}\left\{\frac{d^3z}{dy^3}\right\}\left\{\frac{d^4z}{dy^4}\right\} + 40\left\{\frac{d^3z}{dy^3}\right\}^3 = 0 \end{array}\right\} (4)$$

eine Differentialgleichung der Flächen des 2. Grades ist. Sie sind aber nicht die einfachsten. Differtiirt man nämlich (3) in Beziehung auf x und auf y, und setzt, wie gewöhnlich

$$\left\{\frac{dz}{dx}\right\} = p, \quad \left\{\frac{dz}{dy}\right\} = q,$$

so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} Ax+bz+cy+\alpha+(Cz+ay+bx+\gamma)p = 0 \\ By+az+cx+\beta+(Cz+ay+bx+\gamma)q = 0 \end{array}\right\} (5)$$

Verfährt man mit diesen Gleichungen auf dieselbe Weise und setzt

$$\left\{\frac{d^2z}{dx^2}\right\} = r, \quad \left\{\frac{d^2z}{dxdy}\right\} = s, \quad \left\{\frac{d^2z}{dy^2}\right\} = t$$

so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} Ax+2bp+Cp^2+(Cz+ay+bx+\gamma)r = 0 \\ C+ap+bq+Cpq+(Cz+ay+bx+\gamma)s = 0 \\ B+2aq+Cq^2+(Cz+ay+bx+\gamma)t = 0 \end{array}\right\} (6)$$

Differentiirt man endlich die erste dieser 3 Gleichungen in Beziehung auf x, die zweite in Beziehung auf x und auf y, und die dritte auf y, und setzt

$$\left\{\frac{d^3z}{dx^3}\right\} = u, \quad \left\{\frac{d^3z}{dx^2dy}\right\} = v, \quad \left\{\frac{d^3z}{dxdy^2}\right\} = v^1, \quad \left\{\frac{d^3z}{dy^3}\right\} = w,$$

so erhält man

$$\begin{array}{l} 3(b+Cp)v+(Cz+ay+bx+\gamma)\ u = 0 \\ (a+Cq)r+2(b+Cp)s+(Cz+ay+bx+\gamma)\ v = 0 \\ (a+Cq)s+2(b+Cp)t+(Cz+aq+bx+\gamma)\ v^1 = 0 \\ 3(a+Cq)t+(Cz+ay+bx+\gamma)\ w = 0. \end{array}$$

Aus je dreien dieser 4 Gleichungen lassen sich nun die beiden Quotienten

$$\frac{a+Cq}{Cz+ay+bx+\gamma}, \quad \frac{b+Cp}{Cz+ay+bx+\gamma}$$

eliminiren und so erhält man die neuen *Differentialgleichungen der Flächen des zweiten Grades*

$$\left.\begin{array}{l} 2stu-3rtv+r^2w = 0 \\ 2rsw-3rtv+t^2u = 0 \end{array}\right\} (7)$$

welche, da sie vom 3. Grade, die Gleichung (4) aber vom fünften Grade sind, diesen im Allgemeinen vorgezogen werden müssen, und da man leicht übersieht, dass eine Differentialgleichung von einem niedrigeren Grade als dem dritten die gegenwärtige Frage nicht auflösen kann, so sind sie die einfachsten, welche in diesem Falle zu erhalten sind.

Um zwei leichte Beispiele von der Anwendung dieser Formeln zu geben, wollen wir zuerst untersuchen, ob es abwickelbare

Flächen des zweiten Grades gebe? Differentiirt man aber die allgemeine Gleichung dieser Flächen

$$s^2 = rt \; \ldots\ldots \; (8)$$

nach x und nach y, so erhält man

$$2sv = tu + rv^1$$
$$2sv^1 = tv + rw$$

und, wenn man die Werthe von u und w, die sich hieraus ergeben, in die Gleichung (7) setzt, so zeigen die Resultate

$$4(s^2 - rt)v = 0$$
$$4(s^2 - rt)v^1 = 0$$

sogleich, dass unter den Flächen des zweiten Grades abwickelbare enthalten sind, wie bekannt.

Zweitens wollen wir untersuchen, ob unter den Flächen des zweiten Grades auch solche enthalten seien, die durch Bewegung einer geraden Linie entstanden sind?

Die allgemeine Gleichung dieser Art von Flächen ist aber bekanntlich

$$u + 3vm + 3v^1m^2 + wm^3 = 0, \qquad (9)$$

aus welcher vermittelst der Gleichung

$$r + 2sm + tm^2 = 0 \qquad (10)$$

elimirt werden muss. Nun erhält man aber aus (7)

$$(rt - 4s^2)u = 3r(rv^1 - 2sv)$$
$$(rt - 4s^2)w = 3t(tv - 2sv)$$

Eliminirt man u und v aus (9), so erhält man

$$[r - 2smv + (tm - 2s)v]$$
$$[r + 2sm + tm^2] = 0$$

welche Gleichung, in Folge der Gleichung (10) identisch $= 0$ wird. also giebt es wie bekannt, unter den Flächen des zweiten Grades auch solche, die durch Bewegung einer geraden Linie entstanden sind.

Endlich wird es für die wenigsten Leser dieses Journals einer Erwähnung bedürfen, dass das Verhältniss der Differentialgleichung der Flächen zur endlichen Gleichung derselben ein wesentlich anderes ist, als das der Differentialgleichung einer krummen Linie zu ihrer endlichen Gleichung. Leistet nämlich die Differentialgleichung einer krummen Linie der Gleichung (2) Genüge, so ist, wie bekannt, die Linie nothwendig vom zweiten Grade. Leistet hingegen die Differentialgleichung einer krummen Fläche der Gleichung (7) Genüge, so ist noch nicht nothwendig diese Fläche vom zweiten Grade, weil die Integrale der Gleichung (7) willkührliche Functionen enthalten, für welche in (3) Constante gesetzt sind. Man kann also bloss behaupten, dass, wenn eine partielle Differentialgleichung einer krummen Fläche der Gleichung (7) nicht Genüge leistet, diese Fläche nicht vom zweiten Grade sein könne, leistet sie ihr aber Genüge, so können in der Gattung von Flächen, welche durch die gegebene partielle Differentialgleichung dargestellt werden auch eine oder mehrere oder eine ganze Classe von Flächen des zweiten Grades mit enthalten sein.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Bremen

Jahr/Year: 1882-1883

Band/Volume: 8

Autor(en)/Author(s): Scherk Heinrich Ferdinand

Artikel/Article: Partielle Differentialgleichung der Flächen des zweiten Grades 366-368