Die Reciprocität zwischen Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben, und den confocalen Kegelschnitten.

Von

Dr. Otto Hesse.

Die Reciprocität zwischen Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben, und den confocalen Kegelschnitten.

Von

Dr. Otto Hesse.

Man hat in der Geometrie der Ebene zwei Sätze, welche, wenn man sie mit einander vergleicht, lebhaft an das Princip der Reciprocität erinnern:

„Die vier gemeinschaftlichen Tangenten an zwei Kreisen werden durch die gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise halbirt.“

„Die Tangenten in jedem der vier Schnittpunkte zweier confocalen Kegelschnitte stehen auf einander senkrecht.

Die Vermuthung, dass die genannten beiden Sätze nichts anderes seien, als reciproke Sätze, wird noch bestätiget, wenn man erwägt, dass zwei Kreise Kegelschnitte sind, welche sich in vier Punkten scheiden (von welchen allerdings zwei Schnittpunkte im Unendlichen liegen), während zwei confocale Kegelschnitte von denselben vier geraden Linien berührt werden (die freilich imaginär sind); und dass Kegelschnitte, welche sich in denselben vier Punkten schneiden, nach dem Gesetze der Reciprocität Kegelschnitten entsprechen, welche dieselben vier geraden Linien berühren.

Wenn die gehegte Vermuthung zur Wahrheit werden soll, so muss sich ein Kegelschnitt auffinden lassen, in Rücksicht auf welchen, als Direktrix genommen, Kreise mit gemeinschaftlicher Secante als reciproke Figuren confocalen Kegelschnitten entsprechen. Findet sich wirklich eine .solche Direktrix, so werden sich nicht allein die beiden hervorgehobenen Sätze als reciproke Sätze darstellen, sondern noch eine grosse Zahl anderer Sätze. Man wird sogar in der Lage sein, aus den bekannten Sätzen über Kreise mit gemeinschaftlicher Secante etwa noch unbekannte Sätze über confocale Kegelschnitte zu entdecken, wie umgekehrt.

Wir werden nachweisen, dass der Kreis die gesuchte Direktrix ist.

Da bei dieser Gelegenheit neben der Direktrix noch verschiedene andere Kreise auftreten, so wird es sich empfehlen, denjenigen Kreis mit beliebigem Radius, welcher als Direktrix gewählt werden soll, zum Unterschiede von anderen Kreisen immer nur mit dem Namen der Direktrix zu b·zeichnen und seinen Radius als die Längeneinheit zu nehmen. Wenn wir alsdann den Mittelpunkt e der Direktrix als den Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystemes wählen, auf welches sich unsere Gleichungen beziehen sollen, so haben wir die Gleichung der Direktrix in homogenen Punktcoordinaten:

1) ... $$x^2 + y^2 - z^2 = o,$$

und wenn wir die Coordinaten irgend eines Poles mit x, y, z und die Coordinaten seiner Polare mit u, v, w bezeichnen, so haben wir nach 20) der siebenzehnten Vorlesung*) zwischen ihnen die Relationen:

2) ... $$x = u\ ,\ x = v\ ,\ z = -w.$$

Die Gleichung irgend eines Kreises

3) ... $$x^2 + y^2 + (ax + by + cz)\ z = o$$

*) Die Citate beziehen sich auf meine „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene", Leipzig, Teubner 1873, und auf die Fortsetzung derselben betitelt: „Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte", Leipzig, Teubner 1874.

enthält drei willkührliche Constanten a, b, c, welche sowohl die Coordinaten des Mittelpunktes, als den Radius des Kreises bestimmen, wie umgekehrt.

Setzen wir für x, y, z die Ausdrücke 2) in 3), so erhalten wir

3*) ... $$u^2 + v^2 - (au + bv - cw)\, w = o,$$

die Gleichung der reciproken Polare des Kreises in Liniencoordinaten.

Diese Gleichung lässt sich aus zwei Gleichungen zusammensetzen:

$$(au + bv - cw)\, w = o \ , \ u^2 + v^2 = o.$$

Die erste Gleichung drückt ein Punktepaar aus, von dem ein Punkt w = o der Mittelpunkt e der Direktrix 1) ist. Mit diesem Punktpaare ist nach der einundzwanzigsten Vorlesung der Kegelschnitt 3*) confocal. Es ist mithin die reciproke Polare 3*) des Kreises 3) ein Kegelschnitt, von dem ein Brennpunkt mit dem Mittelpunkte e der Direktrix zusammenfällt. Was den zweiten Punkt é des Paares anbetrifft, so lassen sich seine Coordinaten α, β aus der Gleichung ablesen: $\alpha = -\frac{a}{c}$, $\beta = -\frac{b}{c}$. Mit diesem Punktepaare ist auf Grund der Zusammensetzung der Gleichung 3*) aus den darauf folgenden Gleichungen der Kegelschnitt 3*) confocal, und die Gleichung 3*) mit den willkürlichen Constanten a, b, c stellt alle möglichen Kegelschnitte dar, von welchen ein Brennpunkt e mit dem Mittelpunkte der Direktrix zusammenfällt.

Nennen wir nun focale Kegelschnitte solche, welche einen Brennpunkt gemein haben, so können wir sagen:

4) ... Die reciproken Polaren aller Kreise, bezogen auf einen beliebigen Kreis als Direktrix, sind focale Kegelschnitte, deren gemeinsamer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Direktrix zusammenfällt.

Die reciproken Polaren aller focalen Kegelschnitte, bezogen auf einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt der gemeinsame Brennpunkt ist, sind Kreise.

Die in dem Vorhergehenden betrachteten focalen Kegelschnitte 3*) werden im Speciellen confocale Kegelschnitte, wenn wir die Coordinaten α und β des zweiten Brennpunktes é als gegeben betrachten, dagegen die Constante c variiren lassen. Führen wir desshalb die gegebenen Coordinaten, indem wir setzen $a = -\alpha c$, $b = -\beta c$, in die Gleichungen der reciproken Polaren 3) und 3*) ein, so gehen dieselben über in:

5) ... $$x^2 + y^2 - c\,(\alpha x + \beta y - z)\,z = o.$$

5*) ... $$u^2 + v^2 + c\,(\alpha u + \beta v + w)\,w = o.$$

Die letzte Gleichung 5*) mit dem veränderlichen Parameter c drückt confocale Kegelschnitte aus, deren Brennpunkte e und é sind. Es erhebt sich nun die Frage, welche Eigenschaften ihre reciproken Polaren, die Kreise 5), haben werden.

Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir, dass für $z = 1$ sämmtliche Kreisgleichungen 5), die in der dreizehnten Vorlesung definirte Normalform haben. Fixirt man daher irgend zwei von diesen Kreisgleichungen und zieht die eine von der anderen ab, so erhält man auf Grund der vierzehnten Vorlesung die Gleichung der gemeinschaftlichen Secante S:

6) ... $$\alpha x + \beta y - 1 = o$$

der beiden fixirten Kreise und zugleich aller Kreise, deren analytischer Ausdruck die Gleichung 5) mit der willkührlichen Constante c ist. Es sind demnach die reciproken Polaren confocaler Kegelschnitte in Rücksicht auf die Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt in einem der gemeinschaftlichen Brennpunkte liegt, Kreise mit gemeinschaftlicher Secante.

Man wird sich nun fragen, welche Lage die genannte gemeinschaftliche Secante zu den Brennpunkten der confocalen Kegelschnitte hat? Aus ihrer Gleichung 6) wird ersichtlich, dass dieselbe nichts anderes ist, als die Polare des Brennpunktes é, dessen Coordinaten α und β sind, rücksichtlich der Direktrix 1).

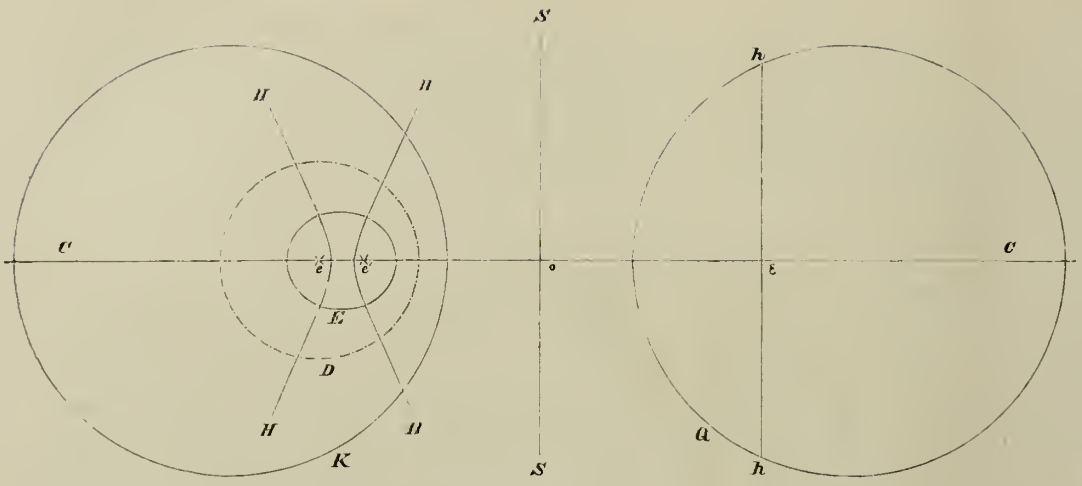
Die gemachten Bemerkungen fassen wir zusammen in dem einem Satze:

7) ... Die reciproken Polaren von confocalen Kegelschnitten rücksichtlich einer beliebigen Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt in einem der gemeinschaftlichen Brennpunkte liegt, sind Kreise mit gemeinschaftlicher Secante und letztere ist die Polare des andern Brennpunktes.

Die oben aufgeworfene Frage kehren wir nur um, wenn wir uns folgende Aufgabe stellen: „Wenn ein System von Kreisen 5) gegeben ist mit gemeinschaftlicher Secante S, so soll die Kreis-Direktrix gefunden werden, in Rücksicht auf welche die reciproken Polaren der gegebenen Kreise confocale Kegelschnitte sind.“ Wir beantworten die aufgeworfene Frage mit dem Hinweis auf die vierzehnte Vorlesung, aus welcher ersichtlich ist, dass unter den Kreisen 5) mit gemeinschaftlicher Secante zwei Kreise sich auszeichnen, deren Radien verschwinden. Ihre Mittelpunkte wurden dort Grenzpunkte genannt, und es ergaben sich zwei Grenzpunkte, die gleiche Abstände von der gemeinschaftlichen Secante haben. Nun findet sich aber unter den Kreisen 5) mit der gemeinschaftlichen Secante S ein Kreis, dessen Radius verschwindet, wenn c verschwindet. Sein Mittelpunkt fällt, wie aus seiner Gleichung ersichtlich ist, mit dem Mittelpunkte e der Direktrix zusammen. Es ist mithin der Punkt e ein Grenzpunkt des Systemes 5) von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante. Daraus entspringt der umgekehrte Satz:

8) ... Die reciproken Polaren von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante rücksichtlich einer beliebigen Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt mit einem der Grenzpunkte zusammenfällt, sind confocale Kegelschnitte. Der eine gemeinsame Brennpunkt ist der Mittelpunkt der Direktrix, der andere ist der Pol der gemeinschaftlichen Secante.

Die folgende Figur ist dazu bestimmt, die reciproken Sätze 7) und 8) zu verdeutlichen:



Man erblickt in der Figur zwei Kreise, K und Q, welche absichtlich von gleicher Grösse angenommen sind. Die gerade Linie CC ist die Centrallinie, welche die Mittelpunkte der Kreise verbindet. Auf ihr steht in o die gemeinschaftliche Secante SS senkrecht und ist von jedem der beiden Kreise gleich weit entfernt. Die Punkte e und ε, welche auf der Centrallinie C von o ebenfalls gleich weit abstehen, stellen die Grenzpunkte des Systemes der Kreise mit gemeinschaftlicher Secante dar. Um den Grenzpunkt e als Mittelpunkt ist die Kreis-Direktrix D beschrieben mit einem beliebigen Radius, welcher aber als die Längeneinheit anzunehmen ist. Der Punkt é soll den Pol der geraden Linie SS rücksichtlich der Direktrix vorstellen. Die reciproke Polare des Kreises K ist durch die Ellipse E angedeutet und die reciproke Polare des Kreises Q soll die mit der Ellipse E confocale Hyperbel H vorstellen. Die in dem Punkte ε auf der Centrallinie CC errichtete Senkrechte schneidet den Kreis Q in den Punkten hh, deren Bedeutung dem Folgenden vorbehalten bleibt.

Obwohl die Gleichungen 5) und 5*) der reciproken Polaren einfach genug sind, so wollen wir sie doch, um Rechnungen zu ersparen, dadurch noch einfacher machen, dass wir den Brennpunkt é, dessen Coordinaten α und β sind, in die x-Axe des Coordinatensystems verlegen, indem wir $\beta = o$ setzen. Hierdurch gehen die genannten

Gleichungen, wenn wir zugleich an Stelle des Parameters c den Parameter λ durch die Relation $c\lambda + 1 = o$ einführen, über in:

9) ... $$x^2 + y^2 + \frac{1}{\lambda}(\alpha x - z)z = o$$

9*) ... $$u^2 + v^2 - \frac{1}{\lambda}(\alpha u + w)w = o$$

und es wird in der Figur $e\acute{e} = \alpha$, $eo = \frac{1}{\alpha}$, weil die Punkte é und o harmonische Pole der Direktrix sind, und $e\epsilon = \frac{2}{\alpha}$.

Um nun die Bedeutung der geraden Linien hh in der Figur festzustellen, bemerken wir, dass die Gleichung der Polare eines gegebenen Punktes, x_1, y_1, z_1, für den Kreis 9) ist:

$$x_1\left(x + \frac{\alpha}{2\lambda}z\right) + y_1\, y + \frac{z_1}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{2}x - z\right) = o$$

welche Gleichung übergeht in folgende von λ unabhangige Gleichung:

$$\frac{\alpha}{2}x - z = o$$

wenn der gegebene Punkt mit dem Punkte e zusammenfällt.

Dieses ist aber gerade die Gleichung der geraden Linie hh, welche von dem Punkte e um $\frac{2}{\alpha}$ absteht. Wir drücken dieses als Satz aus, wie folgt:

10) ... Die Polaren eines Grenzpunktes in einem Systeme von Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben, fallen mit derjenigen geraden Linie zusammen- welche in dem anderen Grenzpunkte auf der Centrallinie senkrecht steht.

Es sind daher der Grenzpunkt e und jeder beliebige Punkt auf der geraden Linie hh harmonische Pole für das ganze System von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante. Es folgt daraus aber noch, dass die Schnittpunkte h , h der gleich bezeichneten geraden Linie mit dem Kreise Q die Berührungspunkte der von dem Grenzpunkte e an den Kreis gezogenen Tangenten sind. Für die Direktrix wird diese gerade Linie hh die Polare des Halbirungspunktes M der geraden Linie eė, welcher Punkt zugleich Mittelpunkt aller confocalen Kegelschnittte 9*) ist, weil eM $= \frac{\alpha}{2}$ und eo $= \frac{2}{\alpha}$. Da nun die Polaren aller Punkte auf der geraden Linie hh, rücksichtlich der Direktrix D, durch den Punkt M gehen und die Polaren der Schnittpunkte h h Tangenten der Hyperbel H werden, so sieht man, dass die Polaren der Punkte h , h, rücksichtlich der Direktrix D, die Asymptoten der Hyperbel H sind. Es wird ferner der Kreis Q durch seine Polare h h des Punktes e in zwei Theile getheilt. Die Polaren aller Punkte des einen Theiles, rücksichtlich der Direktrix, werden Tangenten des einen Zweiges der Hyperbel HH, die den Punkten des andern Theiles entsprechenden Polaren berühren den andern Zweig der Hyperbel.

Die reciproke Polare des Kreises K auf der linken Seite der gemeinschaftlichen Secante SS wurde in der Figur als die Ellipse E aufgeführt, die dem Kreise Q auf der andern Seite der gemeinschaftlichen Secante entsprechende reciproke Polare wurde als die Hyperbel HH bezeichnet. Dieses wird seine Rechtfertigung finden, wenn wir auf die Natur der Kreise 9) und ihrer reciproken Polaren 9*) näher eingehen.

Wir entnehmen aus der Gleichung 9) den Abstand A des Mittelpunktes des durch die Gleichung ausgedrückten Kreises und seinen Radius R:

$$11) \ldots \qquad A = -\frac{\alpha}{2\lambda}\,,\ R^2 = \left(\frac{\alpha}{2\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda}.$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass mit wachsendem Werthe von λ von o bis $+\infty$ sowohl die Entfernungen A der Mittelpunkte der Kreise 9) von dem Grenzpunkte e als auch die Radien R von ∞ bis o abnehmen. Die Kreise selbst füllen den Theil der Ebene aus, welcher auf der linken Seite der gemeinschaftlichen Secante SS liegt.

Lässt man λ weiter von o bis $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ abnehmen, so liegen die Kreise 9) auf der rechten Seite der gemeinschaftlichen Secante und ihre Radien sowohl als die Entfernungen der Mittelpunkte von dem Grenzpunkte ε nehmen von ∞ bis o ab Diese Kreise erfüllen wieder den rechts von der gemeinschaftlichen Secante gelegenen Theil der Ebene, so dass die ganze Ebene ausgefüllt wird durch die Kreise 9), welchen alle Werthe entsprechen zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$. Die erste Grenze entspricht dem Grenzpunkte e, die andere dem Grenzpunkte ε. Man kann daraus schliessen, dass alle Kreise, für welche λ zwischen den Grenzen $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ und $-\infty$ liegt, imaginäre Kreise sein müssen. Und in der That weiset die letzte Gleichung 11) in den angegebenen Fällen auf imaginäre Radien hin.

Die angegebenen Grenzen für die Kreise 9) und ihre Zwischenstadien müssen auch ihre Bedeutung haben für die reciproken Polaren 9*) der Kreise. Diese zu erforschen soll unsere nächste Aufgabe sein.

Zu diesem Zwecke übersetzen wir die in Liniencoordinaten gegebene Gleichung 9*) der reciproken Polare des Kreises 9) nach bekannter Regel in eine durch Punktcoordinaten ausgedrückte Gleichung, indem wir die Relation aufstellen:

$$u - \frac{\alpha}{2\lambda}w = x\,,\ v = y\,,\ -\frac{\alpha}{2\lambda}u - \frac{1}{\lambda}w = z.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt, wenn wir z = 1 setzen:

$$\frac{\frac{1}{\lambda}x - \frac{\alpha}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{\alpha}{2\lambda}\right)^2} = u\,,\ y = v\,,\ \frac{-\frac{\alpha}{2\lambda}x - 1}{\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{\alpha}{2\lambda}\right)^2} = w.$$

Setzen wir diese Werthe von u, v, w in die Gleichung 9*) ein, so erhalten wir die Gleichung der reciproken Polaren 9*), ausgedrückt durch Punktcoordinaten:

$$12) \ldots \qquad \frac{\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} - 1 = 0.$$

Für alle positiven Werthe von λ, welche den Kreisen 9) links von der gemeinschaftlichen Secante entsprechen, werden die confocalen Kegelschnitte 12) Ellipsen, welche die ganze Ebene ausfüllen. Für die negativen Werthe von λ von o bis $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$, welche den Kreisen 9) rechts von der gemeinschaftlichen Secante entsprechen, liegen confocale Hyperbeln vor, welche ebenfalls die ganze Ebene ausfüllen. Nimmt endlich λ noch weiter ab von $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ bis $-\infty$, so entsprechen den imaginären Kreisen auch imaginäre reciproke Ellipsen 12).

Damit nun Kreise des Systemes 9) leicht aufgefunden werden können, welche gleiche Radien haben, so wollen wir an Stelle des Parameters λ den Parameter k einführen durch die Gleichung

$$13) \ldots \qquad \frac{1}{\lambda} = k \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2.$$

Hierdurch geht die Kreis-Gleichung 9) über in:

$$14) \ldots \quad x^2 + y^2 + \left(k - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2\right)\left(\alpha x - z\right) = 0$$

und die Gleichung 12) der reciproken Polare geht über in:

$$14^*) \ldots \frac{\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 k + \frac{1}{2}} + y^2 - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 k - \frac{1}{2}} = 0$$

Positive Werthe von k entsprechen dann den Kreisen links von der gemeinschaftlichen Secante und gleich grosse negative Werthe von k entsprechen gleich grossen Kreisen auf der rechten Seite. Für k zwischen den Grenzen $k = \pm \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2$ giebt es weder reelle Kreise 14) noch reelle, ihnen entsprechende, reciproke Polaren 14*).

In dieser Weise werden die reciproke Polare 14*) und die reciproke Polare:

$$15) \ldots \qquad \frac{\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2}{-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 k + \frac{1}{2}} + y^2 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 k + \frac{1}{2}} = o$$

irgend zwei gleich grossen Kreisen 14) auf der einen und der andern Seite der gemeinschaftlichen Secante entsprechen. Ziehen wir nun eine von diesen Gleichungen von der anderen ab, so erhalten wir die sehr einfache Gleichung:

$$16) \ldots \qquad x\,(x - \alpha) = o$$

welche im Zusammenhange mit dem Vorhergehenden folgende geometrische Interpretation gestattet.

17) ... Die reciproken Polaren von zwei gleich grossen Kreisen 14) sind confocale Kegelschnitte verschiedener Gattung, welche sich in vier Punkten schneiden, die auf denjenigen beiden geraden Linien liegen, welche auf der Verbindungslinie der Brennpunkte in den Brennpunkten senkrecht stehen.

Nachdem wir in dem Vorhergehenden die vorstehende Figur in allen ihren Theilen gerechtfertigt haben, so unterbrechen wir unsere Untersuchung, um einige Sätze vorzuführen, die in dem Folgenden gute Dienste leisten werden. Der erste von diesen Sätzen lautet also:

18) ... Wenn irgend ein Kegelschnitt als Direktrix gegeben ist und in Beziehung auf denselben zwei andere Kegelschnitte als reciproke Polaren vorliegen, so sind die Polaren von zwei harmonischen Polen des einen Kegelschnittes, rücksichtlich der Direktrix, für den anderen Kegelschnitt harmonische Polaren, und umgekehrt sind die Pole von zwei harmonischen Polaren des einen Kegelschnittes, rücksichtlich der Direktrix, harmonische Pole des anderen Kegelschnittes.

Stellen wir uns, um den Satz zu beweisen, zwei Kegelschnitte vor, welche reciproke Polaren sein sollen, und für den einen Kegelschnitt liege ein harmonisches Polepaar a , á vor. Alsdann schneidet die Verbindungslinie der Pole den betreffenden Kegelschnitt in einem Punktepaare b , b', welches harmonisch mit dem Polepaar ist. Diese beiden Punktepaare entsprechen in der Direktrix Polarenpaaren A , A' und B , B', welche nach dem Satze 18) der neunzehnten Vorlesung harmonisch zu einander sind. Da nun B und B' Tangenten des reciproken Kegelschnittes und A und A' harmonisch zu ihnen sind, so sind B und B' nach der Definition harmonische Polaren des reciproken Kegelschnittes.

Auf Grund von 13) der sechszehnten Vorlesung stellt die Gleichung $f - \lambda\varphi = o$ jeden beliebigen Kegelschnitt dar, welcher durch die Schnittpunkte irgend zweier gegebenen Kegelschnitte $f = o$ und $\varphi = o$ geht. Die Bedingung, dass zwei durch ihre Coordinaten x_0 , y_0 , z_0 und x_1 , y_1 , z_1 gegebenen Punkte harmonische Pole des beliebigen Kegelschnittes seien, wird nach 5) und 9) der siebenzehnten Vorlesung durch die Gleichung $f_{10} - \lambda\varphi_{01} = o$ ausgedrückt. Da diese Gleichung aber erfüllt wird, wenn $f_{01} = o$ und $\varphi_{01} = o$ ist, so können wir, indem wir uns die geometrische Bedeutung der beiden letzten Gleichungen vergegenwärtigen, die reciproken Sätze aussprechen:

19) ... Wenn zwei Punkte harmonische Pole sind für irgend zwei gegebene Kegelschnitte, so sind sie auch harmonische Pole für jeden Kegelschnitt, der durch die vier Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte geht.

20) ... Wenn zwei gerade Linien harmonische Polaren sind für irgend zwei gegebene Kegelschnitte, so sind sie auch harmonische Polaren für jeden Kegelschnitt, welcher die vier gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Kegelschnitte berührt.

Aus dem ersten dieser beiden Sätze ergiebt sich, dass jeder beliebig gegebene Punkt seinen harmonischen Pol aufzuweisen hat in dem Systeme von Kegelschnitten, welche durch dieselben vier Punkte gehen. Denn construirt man die Polaren des gegebenen Punktes für zwei dieser Kegelschnitte, so wird der Schnittpunkt derselben der gesuchte harmonische Pol sein. Ebenso hat eine jede gerade Linie ihre harmonische Polare in dem Systeme Kegelschnitte, welche vier gerade Linien berühren. Sie ist die Verbindungslinie der Pole der geraden Linie für irgend zwei der genannten Kegelschnitte.

Die vorstehenden allgemeinen Sätze wollen wir nun verwerthen an dem durch die Gleichung 9) ausgedrückten Systeme von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante und dem Systeme der reciproken Polaren 9*).

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, es sei ein harmonisches Polepaar des Systemes 9) durch seine Coordinaten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 gegeben. Die Coordinaten ihrer Polaren rücksichtlich der Direktrix werden alsdann auf Grund von 2):

$$x_0 = u_0 \;,\; y_0 = v_0 \;,\; z_0 = -w_0$$

$$x_1 = u_1 \;,\; y_1 = v_1 \;,\; z_1 = -w_1$$

und diese Polaren bilden nach 18) ein Polarenpaar des Systemes 9*). Da nun das genannte Polepaar auch ein Polepaar des Kreises 9) für $\lambda = \infty$ sein muss, so haben wir die Relation:

$$x_0 x_1 + y_0 y_1 = o$$

welche unter Vermittelung der angegebenen sechs Gleichungen übergeht in:

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 = o.$$

Diese Gleichung sagt aber nichts anderes aus, als dass das in Rede stehende Polarenpaar des Systemes 9*), einen rechten Winkel bildet.

Auf diese Weise entspricht einem jeden Polepaare des Systemes 9), durch die Direktrix, ein Paar Polaren des Systemes 9*), welche auf einander senkrecht stehen. Ebenso entspricht einem jeden Paare Polaren des Systemes 9*) ein Polepaar des Systemes 9). Denn dass ein jedes Paar Polaren des Systemes 9*) einen rechten Winkel bilden muss, folgt daraus, dass dasselbe auch dem Kegelschnitte 9*) für $\lambda = \infty$ angehört, wofür die zuletzt aufgestellte Gleichung die Bedingung ist.

Erinnern wir uns nun des in der vierzehnten Vorlesung doppelt ausgedrückten Satzes von jedem Polepaare des Systemes von Kreisen, welche sich in denselben beiden Punkten schneiden, so können wir folgende beiden Sätze als reciproke Sätze proklamiren:

21) ... Die Verbindungslinie eines jeden Paares harmonischer Pole für ein System von Kreisen, welche durch zwei Punkte gehen, wird durch die gemeinschaftliche Tangente der Kreise halbirt.

Ein jedes Paar harmonischer Polaren für ein System von confocalen Kegelschnitten bildet einen rechten Winkel.

Die Berührungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise bilden ein Polepaar für jeden der beiden Kreise, weil die Polare des einen Berührungspunktes immer durch den anderen geht. Ebenso sind die Tangenten in dem Schnittpunkte zweier Kegelschnitte ein Paar Polaren für jeden der beiden Kegelschnitte. Halten wir nun diese Bemerkungen zusammen mit den eben ausgesprochenen reciproken Sätzen, so ergiebt sich daraus die am Anfange unserer Untersuchung vermuthete Reciprocität der Sätze:

22) ... Die vier gemeinschaftlichen Tangenten an zwei Kreisen werden durch die gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise halbirt.

Die Tangenten in jedem der vier Schnittpunkte zweier confocalen Kegelschnitte stehen aufeinander senkrecht.

Den letzten Satz haben wir schon in der einundzwanzigsten Vorlesung unter 25) mit anderen Worten ausgedrückt. Dieser Satz war an der angeführten Stelle nur ein Corollar des allgemeinen Satzes 24) über confocale Kegelschnitte: „Wenn man von einem beliebigen Punkte an confocale Kegelschnitte Tangentenpaare legt, so werden die Winkel, welche ein jedes Tangentenpaar bildet, von einem und demselben Linienpaare halbirt."

Es erhebt sich nun die Frage, welcher reciproke Satz diesem allgemeineren Satze entsprechen wird. Die aufgeworfene Frage beantworten wir aus dem Vorhergehenden damit, dass wir das von dem beliebigen Punkte ausgehende Linienpaar, welches die von den Tangentenpaaren gebildeten Winkel halbirt, als Polarenpaare der confocalen Kegelschnitte auffassen. Denn in dieser Auffassung drückt sich die gesuchte Reprocität schon in den Sätzen 21) aus. Will man jedoch den Wortlaut des angeführten Satzes nicht ändern, so würde sein reciproker Satz so auszusprechen sein: „Wenn man zwei Kreise durch eine gerade Linie schneidet und auf ihr dasjenige Punktepaar fixirt, welches harmonisch ist mit jedem Schnittpunktepaare, so wird die Verbindungslinie des fixirten Punktepaares durch die gemeinschaftliche Secante der Kreise halbirt."

In dieser Weise sind auch folgende Sätze von minderer Bedeutung reciproke Sätze:

„Wenn zwei Kreise und eine gerade Linie gegeben sind, so giebt es zwei Kreise, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise gehen und zugleich die

„Wenn zwei confocale Kegelschnitte und ein Punkt gegeben sind, so giebt es zwei mit den gegebenen Kegelschnitten confocale Kegelschnitte, welche durch gegebene gerade Linie berühren. Die Berührungspunkte bilden ein harmonisches Polepaar der Kreise."

den gegebenen Punkt gehen. Die Tangenten der letzteren in dem gegebenen Punkte bilden ein harmonisches Polarenpaar der confocalen Kegelschnitte."

Wir führen diese Sätze nur auf, weil sie lehren erstens dasjenige harmonische Polepaar von Kreisen, die sich in denselben beiden Punkten schneiden, zu bestimmen, welches auf einer gegebenen geraden Linie liegt; und zweitens dasjenige harmonische Polarenpaar confocaler Kegelschnitte zu bestimmen, welches sich in einem gegebenen Punkte schneidet. Freilich lässt sich durch einfachere Hülfsmittel dasselbe erreichen.

„Wenn zwei Kreise und ein Punkt gegeben sind, und man construirt einen Kreis, der durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise und den gegebenen Punkt geht, so verbindet die Tangente desselben in dem gegebenen Punkte diesen Punkt mit seinem harmonischen Pole der Kreise."

„Wenn zwei confocale Kegelschnitte und eine gerade Linie gegeben sind, und man construirt denjenigen confocalen Kegelschnitt, welcher die gegebene gerade Linie berührt, so bildet die gerade Linie und die in dem Berührungspunkte auf ihr senkrecht stehende gerade Linie ein harmonisches Polarenpaar der confocalen Kegelschnitte."

Aus diesen Sätzen ergiebt sich nun erstens eine Construktion des, einem gegebenen Punkte entsprechenden harmonischen Poles für das System von Kreisen, welche sich in zwei gegebenen Punkten schneiden, und zweitens eine Construktion der, einer gegebenen geraden Linie entsprechenden, harmonischen Polare in einem Systeme confocaler Kegelschnitte.

Wir haben am Anfange unserer Untersuchung die allgemeinen reciproken Sätze 4) abgelesen aus den Gleichungen 3) und 3*) reciproker Kegelschnitte, rücksichtlich der Kreis-Direktrix 1). Es lag dort irgend ein Kreis 3) und eine beliebige Kreis-Direktrix 1) vor. Wir specialisiren nun unsere im Vorhergehenden durchgeführte Untersuchung, wenn wir in dem Folgenden annehmen, dass der Mittelpunkt der Kreis-Direktrix 1) in der Peripherie des Kreises 3) liegt. In diesem Falle haben wir für den Kreis 3) und seine reciproke Polare 3*) die Gleichungen:

23) ... $$x^2 + y^2 + (ax + by)z = o$$

23*) ... $$u^2 + v^2 - (au + bv)w = o.$$

Da in der letzten Gleichung das mit w^2 multiplicirte Glied fehlt, so können wir auf Grund von 14) der neunzehnten Vorlesung die reciproken Sätze aussprechen:

24) ... Die reciproke Polare eines beliebig gegebenen Kreises rücksichtlich einer Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt auf der Peripherie des Kreises liegt, ist eine Parabel, deren Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Direktrix zusammenfällt.

Die reciproke Polare einer beliebig gegebenen Parabel rücksichtlich einer Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt in dem Brennpunkte der Parabel liegt, ist ein Kreis.

Verlegen wir nun den Mittelpunkt des Kreises 23) in die x-Axe des Coordinatensystemes, indem wir setzen $b = o$ und führen an Stelle des Parameters a den Parameter k ein durch die Gleichung $ak = 2$, so gehen die Gleichungen 23) und 23*) der reciproken Polaren über in:

24) ... $$x^2 + y^2 + \frac{2}{k}xz = o$$

24*) ... $$u^2 + v^2 - \frac{2}{k}uw = o$$

und die letzte Gleichung, wenn man die Liniencoordinaten ersetzt durch Punktcoordinaten, wie folgt:

$$u - \frac{1}{k}w = x\ ,\ v = y\ ,\ -\frac{1}{k}u = z$$

nimmt die Gestalt an:

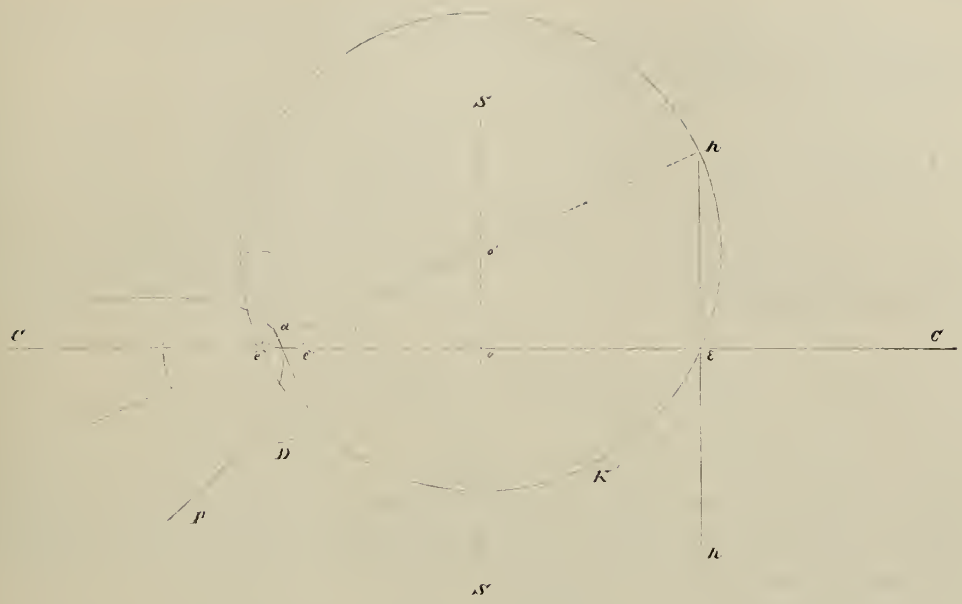
25) ... $$y^2 - 2k\left(x + \frac{k}{2}\right) = o.$$

Dieselbe Gleichung ist am Ende der zweiundzwanzigsten Vorlesung unter 16) als der analytische Ausdruck confocaler Parabeln aufgeführt. Wir schliessen daraus:

26) ... Die reciproken Polaren aller Kreise, welche sich in einem gegebenen Punkte berühren, rücksichtlich einer Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt der gegebene Berührungspunkt ist, sind confocale Parabeln; und umgekehrt sind die reciproken Polaren aller confocalen Parabeln Kreise, die sich in dem Brennpunkte der Parabeln berühren, wenn der Brennpunkt Mittelpunkt der Kreis-Direktrix ist.

Wenn ein Kreis K' und eine Kreis-Direktrix D, deren Mittelpunkt e auf dem Kreise liegt, gegeben sind, so sieht man ohne Weiteres, dass die Centrallinie eó der beiden Kreise Durchmesser der dem gegebenen Kreise reciproke Parabel P ist. Die Verlängerung der Centrallinie schneidet den gegebenen Kreis in einem Punkte h, dessen Polare, rücksichtlich der Direktrix, Tangente der Parabel P in ihrem Scheitel a ist. Der Scheitel a der Parabel und der Punkt h des gegebenen Kreises sind daher harmonische Punkte zu den Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie und der Direktrix. Da nun jeder dieser Punkte den anderen bestimmt, so braucht man von der Parabel nur den Scheitel a zu kennen, um umgekehrt den Punkt h des der Parabel reciproken Kreises und damit den Kreis selbst zu bestimmen. Von der angegebenen Construktion der Tangente der reciproken Parabel in ihrem Scheitel werden wir in dem Folgenden Gebrauch machen.

Die beschriebene Figur liegt hier zur Ansicht vor. Sie ist zugleich bestimmt als Ergänzung der ersten Figur in Folgendem zu dienen. Es sind darum gleiche Figuren-Theile mit gleichen Buchstaben bezeichnet.



Die vorstehenden Entwickelungen beabsichtigten vorzugsweise die in der dreizehnten und vierzehnten Vorlesung über Kreise dargelegten Eigenschaften durch das in der zwanzigsten Vorlesung beschriebene Gesetz der Reprocität für Kegelschnitte nutzbar zu machen. Das Thema ist keineswegs erschöpft. So sehen wir zum Beispiele, dass in der vierzehnten Vorlesung Kreise auftreten, welche das System Kreise mit gemeinschaftlicher Secante senkrecht schneiden, von welchen noch gar nicht die Rede gewesen ist. Nehmen wir deshalb zum Schlusse unserer Untersuchung die beregten Kreise auf.

Es lagen die Kreise 9) vor mit gemeinschaftlicher Secante. Die Entfernungen e und ε der Grenzpunkt dieser Kreise von dem Mittelpunkte e der Direktrix D auf der angenommenen x-Axe waren o und $\frac{2}{\alpha}$. Es ist darum die Gleichung des Kreises, der durch die Grenzpunkte geht und seinen Mittelpunkt in der x-Axe hat:

$$\left(x - \frac{1}{\alpha}z\right)^2 + y^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 z^2 = o.$$

Hieraus ergiebt sich nun die Gleichung aller Kreise K', welche das System 9) senkrecht schneiden:

$$27) \ldots \quad \left(x - \frac{1}{\alpha}z\right)^2 + y^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 z^2 + \mu yz = o \,,$$

und unter Vermittelung von 2) erhalten wir die Gleichung ihrer reciproken Parabeln:

$$27^*) \ldots \quad \left(u + \frac{1}{\alpha}w\right)^2 + v^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 w^2 - \mu vw = o$$

von welchen in der Figur nur die Parabel P vorliegt, deren reciproke Polare der Kreis K' ist mit dem Mittelpunkte ó auf der gemeinschaftlichen Secante SS der Kreise 9).

Die Tangente der Parabel P in ihrem Scheitel a ist die gerade Linie, welche die Schnittpunkte der Kreise D und K' verbindet, denn sie ist die Polare des Punktes h, rücksichtlich der Kreis-Direktrix D. Sie geht also durch den Pol M der geraden Linie hh, den wir als den Mittelpunkt der geraden Linie eé bezeichnet haben. Es liegen demnach die Scheitel der Parabeln 27*) auf einem Kreise, der die gerade Linie eM zum Durchmesser hat. Die in M auf dem Durchmesser senkrecht stehende gerade Linie ist Tangente für sämmtliche Parabeln 27*), weil ihre reciproken Kreise 27) durch den Punkt ε gehen. Diese vorgeführten Thatsachen lassen sich kurz durch folgende Sätze ausdrücken:

28) ... Die reciproken Polaren aller Kreise, welche durch zwei beliebig gegebene Punkte gehen, rücksichtlich einer Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt in einem der gegebenen Punkte liegt, sind focale Parabeln, deren gemeinsamer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Direktrix zusammenfällt und deren Scheitel auf einem Kreise liegen, der durch den gemeinsamen Brennpunkt geht.

29) ... Die reciproken Polaren aller focalen Parabeln, deren Scheitel auf einem durch den gemeinsamen Brennpunkt gehenden Kreise liegen, rücksichtlich einer um den Brennpunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreis-Direktrix, sind Kreise, welche sämmtlich durch den Brennpunkt und einen anderen ganz bestimmten Punkt gehen.

München im Februar 1874.