Ueber das

Pascal'sche Theorem.

Von

G. Bauer.

Ueber das Pascal'sche Theorem

von

G. Bauer.

Seit Steiner seine Sätze über das Pascal'sche Hexagramm veröffentlichte[1]), ist dasselbe Gegenstand zahlreicher und eingehender Arbeiten geworden. Demungeachtet ist es bisher noch nicht unter einem Gesichtspunkte betrachtet worden, welcher polare Beziehungen zwischen den Geraden und Punkten des Systems erkennen liess. Es stehen sich bekanntlich in der vollständigen Figur des Hexagramms 60 (Pascal'sche) Gerade und 60 (Kirkman'sche) Punkte gegenüber; ebenso 20 (Steiner'sche) Punkte, in welchen sich je drei Pascal'sche Gerade schneiden und 20 Gerade von Cayley und Salmon aufgefunden, in welchen je drei Kirkmann'sche Punkte liegen u. s. w. Herr Hesse hat noch besonders darauf hingewiesen, dass hier polare Verhältnisse obwalten möchten[2]); ist aber seitdem von dieser Ansicht zurückgekommen.[3]) Es soll nun aber hier gezeigt werden, dass das vollständige Hexagramm in Gruppen abgetheilt werden kann, deren jede in sich polar-reciprok ist in Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt. Jndem man diese Gruppen eine aus

---

1) Théorèmes sur l'Hexagrammum mysticum. Annales de Math. p. Gergonne T. XVIII (1827 und 1828.)

2) „Ueber die Reciprocität u. s. f.“ Crelle's Journal Bd LXVIII (1868) S. 193.

3) Vorlesungen über Anal. Geom. der Geraden, des Punkts und des Kreises in der Ebene 2. Aufl. 1873 S. 178. Anm.

der anderen hervorgehen lässt, gewinnt man zugleich den Vortheil des leichtern Ueberblicks über den Bau des ganzen Systems.

Nr. 1. Es sei S ein gegebener Kegelschnitt und demselben zwei Dreiecke eingeschrieben, deren Seiten ich durch 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 bezeichne. Die Ecken dieser Dreiecke durch 23 , 31 , 12 ; 56 , 64 , 45 bezeichnet, bilden die sechs Punkte auf S, auf welche das Pascal'sche Theorem angewandt werden soll.

Die Verbindungslinie irgend einer Ecke des einen Dreiecks mit einer Ecke des andern, z. B. von 12 mit 45, soll durch (12—45) bezeichnet werden. Solche Verbindungslinien gibt es 9.

Der Durchschnittspunkt zweier Geraden werde überhaupt durch Nebeneinanderstellung der Symbole der Geraden dargestellt. Dann bezeichnet z. B. (12—45)(23—56) den Durchschnitt der Verbindungslinien (12—45) und (23—56). Da jede dieser Verbindungslinien von den 8 andern geschnitten wird, aber von vieren in den Ecken der Dreiecke, so trägt jede dieser Verbindungslinien noch (ausser den Ecken) vier solche Durchschnittspunkte, welche ich als Puncte p bezeichne. Solche Punkte p gibt es $9.\frac{4}{2} = 18$.

Diese Verbindungslinien schneiden ferner jede der Dreiecksseiten, ausser in den Ecken noch in drei Puncten; so wird die Seite 3 von den von der Ecke 12 ausgehenden Verbindungslinien (12—45) , (12—56), (12—46) in den Puncten 3(12—45) , u. s. f. geschnitten. Punkte dieser Art gibt es ebenfalls 18; ich bezeichne sie als Punkte $\mathfrak{p}$.

Endlich schneiden sich die Seiten des einen Dreiecks (123) mit denen des andern Dreiecks (456) noch in 9 Punkten 15 , 24 , 36 , u. s. f., welche als Punkte π bezeichnet werden sollen.

Nr. 2. Sehen wir nun zunächst, wie die Seiten der zwei Dreiecke in die Pascal'schen Sechsecke eingehen. Die Gerade, auf welcher sich die gegenüberliegenden Seiten des Sechseckes schneiden, heisse eine Pascal'sche Gerade, und die drei Durchschnittspunkte der Seiten auf ihr, durch welche sie bestimmt wird, sollen Pascal'sche Punkte heissen.

Wir können zuerst Sechsecke bilden, welche zwei Seiten von jeden der beiden Dreiecke (123) , (456) enthalten, wie z. B.

1 , 2 , (23—56) , 5 , 4 , (46—13) (1.

Die Pascals'che Gerade des von diesen Geraden gebildeten Sechsecks ist durch die auf ihr liegenden Pascal'schen Punkte bestimmt

$$15 - 24 - (23-56)(46-13) \qquad (2.$$

Sie ist mithin die Gerade (15—24), Verbindungslinie von Durchschnittspunkten je einer Seite des einen Dreiecks mit einer Seite des andern Dreiecks, d. h. von zwei Punkten π. Diese Punkte π sind also Pascal'sche Punkte. Durch jeden derselben gehen vier solche Pascal'sche Gerade; so gehen durch 36 die vier Pascal'schen Geraden

$$(36-14)\ ,\ (36-24)\ ,\ (36-15)\ ,\ (36-25) \qquad (3.$$

Es gibt mithin $9.\frac{4}{2} = 18$ solche Pascal'sche Gerade; ich bezeichne sie als Gerade Π; jede derselben enthält ausser den zwei Punkten π noch einen der 18 Punkte p, welche mithin ebenfalls Pascal'sche Punkte sind, und es ist leicht ersichtlich, dass durch jeden dieser Punkte p nur eine der Geraden Π hindurchgeht.

Nr. 3. Man kann ferner Sechsecke bilden, in welche von jedem der beiden Dreiecke nur eine Seite eingeht, und zwar können wir mit denselben Seiten vier Sechsecke bilden. So lassen sich mit den Seiten 1 und 4 folgende vier Sechsecke bilden

$$\left.\begin{array}{llllll}
1 & (13-46) & 4 & (45-23) & (23-56) & (56-12) \\
1 & (13-45) & 4 & (46-23) & (23-56) & (56-12) \\
1 & (12-45) & 4 & (46-23) & (23-56) & (56-13) \\
1 & (12-46) & 4 & (45-23) & (23-56) & (56-13)
\end{array}\right\} (4.$$

von welchen das 1. und 3. und ebenso das 2. und 4. je drei Seiten nämlich die 1., 3. und 5. gemein haben, während die zwei ersten Sechsecke und ebenso die zwei letzten, ferner das 1. und 4. und das 2. und 3. je vier Seiten gemeinschaftlich haben.

Indem man je eine Seite des einen Dreiecks mit je einer des andern combinirt, erhält man 9.4 = 36 Sechsecke dieser Art. Die Pascal'schen Geraden dieser Sechsecke seien durch $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Für das erste obiger Sechsecke ist diese Gerade durch die drei Pascal'schen Punkte

$$1(45-23) - (13-46)(23-56) - 4(56-12) \qquad (5.$$

bestimmt. Sie enthält zwei Punkte 𝔭, welche mithin auch Pascal'sche Punkte sind und einen Punkt p. Die 9 Punkte π, die 18 Punkte 𝔭 und die 18 Punkte p geben die Gesammtzahl der Pascal'schen Punkte, nämlich 45.

Durch jeden der Punkte 𝔭 gehen vier der Geraden 𝔓 hindurch, so gehen durch den Punkt 1(45—23) ausser dem 𝔓 des ersten auch das 𝔓 des vierten obiger Sechsecke (4. hindurch, welches durch Vertauschung von 2 und 3 aus dem ersten hervorgeht; ferner gehen durch denselben Punkt die Pascal'schen Geraden 𝔓 derjenigen Sechsecke, welche aus demselben hervorgehen durch Vertauschung von 4 und 5 und auch durch gleichzeitige Vertauschung von 4 mit 5, und 2 mit 3.

Die Geraden 𝔓 gehen ferner paarweise durch die 18 Punkte p hindurch; so geht durch den Punkt (13—46)(23—56) ausser der Pascal'schen Geraden (5. auch die des Sechsecks, welches durch Vertauschung von 4 mit 5 und 1 mit 2 aus dem 1. der Sechsecke (4. hervorgeht.

Nr. 4. Es lässt sich, wie der Versuch sogleich zeigt, mit den 6 Punkten auf S kein Sechseck bilden, in welches zwei Seiten des einen Dreiecks und nur eine oder gar keine Seite des andern eingeht; ebensowenig lässt sich ein solches bilden, in welches nur eine Seite des einen Dreiecks und keine des andern eingeht.

Es bleiben somit nur die Sechsecke übrig, in welche gar keine Seite der beiden Dreiecke eingeht, und deren Seiten mithin nur Verbindungslinien einer Ecke des einen Dreiecks mit einer Ecke des andern sind. Sechsecke dieser Art gibt es sechs. Es sind folgende:

$$\left.\begin{array}{l}(12-46)\ (46-23)\ (23-45)\ (45-13)\ (13-56)\ (56-12)\\(12-56)\ (56-23)\ (23-46)\ (46-13)\ (13-45)\ (45-12)\\(12-46)\ (46-13)\ (13-56)\ (56-23)\ (23-45)\ (45-12)\end{array}\right\}6$$

$$\left.\begin{array}{l}(12-46)\ (46-23)\ (23-56)\ (56-13)\ (13-45)\ (45-12)\\(12-56)\ (56-13)\ (13-46)\ (46-23)\ (23-45)\ (45-12)\\(12-46)\ (46-13)\ (13-45)\ (45-23)\ (23-56)\ (56-12)\end{array}\right\}6'$$

Die Pascal'schen Geraden dieser sechs Sechsecke bezeichne ich als Gerade P. Wir haben nun die ganze Anzahl der 60 Sechsecke, welche mittelst der 6 Punkte gebildet werden können. Ihre Pascal'schen Geraden sind die 18 Geraden Π, die 36 Geraden $\mathfrak{P}$ und die 6 Geraden P.

Was die Pascal'schen Punkte betrifft, welche auf diesen 6 Geraden P liegen, so sind es, wie man sogleich ersieht, keine neuen Punkte, sondern die 18 Punkte p, von welchen je drei auf jeder Geraden P liegen.

Durch jeden dieser Punkte p geht mithin eine Gerade Π, zwei Gerade $\mathfrak{P}$ und eine Gerade P, während durch jeden Punkt π vier Gerade Π, durch jeden Punkt $\mathfrak{p}$ vier Gerade $\mathfrak{P}$ gehen; sonach gehen durch jeden Pascal'schen Punkt vier Pascal'sche Gerade.

Nr. 5. Dieses letzte partielle System der Geraden P mit ihren Punkten p ist nun von besonderer Wichtigkeit für die hier dargelegte Methode, indem aus ihm das gesammte System erzeugt wird.

Es ist bekannt, dass wenn zwei Dreiecke einem Kegelschnitt eingeschrieben sind, es einen Kegelschnitt gibt, für welchen die zwei Dreiecke Polardreiecke sind. Der Kegelschnitt, für welchen die zwei Dreiecke (123), (456), dem Kegelschnitt S eingeschrieben, Polardreiecke sind, sei mit Σ (123,456) oder kurz mit Σ bezeichnet. In Bezug auf diesen Kegelschnitt sind die Pole der sechs Seiten

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

die sechs Ecken der Dreiecke

$$23 \quad 31 \quad 12 \quad 56 \quad 64 \quad 45\,.$$

Die Pole der Verbindungslinien je einer Ecke des einen Dreiecks mit einer Ecke des andern (diese Verbindungslinien sollen als Linien V bezeichnet werden)

$$(12-45)\,,\ (23-56)\,,\ \ldots$$

sind die Punkte

$$36\,,\quad 14\,,\quad \ldots$$

Der Durchschnittspunkt zweier Linien V, z. B.

(12—45)(23—56)

hat mithin zur Polare die Gerade (36—14).

Also: In Bezug auf den Kegelschnitt Σ sind die 9 Punkte π die Pole der 9 Verbindungslinien V und die 18 Geraden Π die Polaren der 18 Durchschnittspunkte der Linien V, d. h. der 18 Punkte p.

Da auf einer Linie V je vier Punkte p liegen, so gehen je vier Gerade Π durch einen Punkt π. Da ferner je drei Punkte p in einer der sechs Pascal'schen Geraden P liegen, so schneiden sich die Geraden Π zu je dreien in einem Punkte; diese Punkte gehören zu den 60 von Kirkman aufgefundenen Punkten.

Die 18 Geraden Π schneiden sich also zu je dreien in sechs Kirkman'schen Punkten, welche die Pole sind von den sechs Pascal'schen Geraden P, in Bezug auf den Kegelschnitt Σ.

Nr. 6. Die Pascal'schen Geraden der drei Sechsecke 6.) durch ihre Pascal'schen Punkte bestimmt, sind

$$\left.\begin{array}{l}(23-45)(12-56) - (12-46)(13-45) - (13-56)(23-46)\\(13-46)(12-56) - (23-56)(13-45) - (12-45)(23-46)\\(23-45)(13-46) - (12-46)(23-56) - (13-56)(12-45)\end{array}\right|7$$

und die der drei Sechsecke 6'.)

$$\left.\begin{array}{l}(12-45)(23-56) - (13-56)(12-46) - (23-46)(13-45)\\(12-45)(13-46) - (13-56)(23-45) - (23-46)(12-56)\\(13-46)(23-56) - (23-45)(12-46) - (12-56)(13-45)\end{array}\right|7'$$

Die drei ersten Geraden schneiden sich in einem Steiner'schen Punkte g und ebenso die drei letztern in einem Steiner'schen Punkte g'. Diess ergibt sich sogleich, wenn wir die zwei Dreiecke betrachten, gebildet aus den Seiten

13—46 , 12—56 , 23—45

einerseits und

$$23-56\ ,\ 13-45\ ,\ 12-46$$

anderseits. Die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten liegen auf der dritten der Pascal'schen Geraden (7'. Folglich gehen die Geraden, welche entsprechende Ecken verbinden durch einen Punkt. Diese drei Geraden sind aber die drei Pascal'schen Geraden (7. Ebenso beweist man, dass die drei Geraden (7'. durch einen Punkt g' gehen. Die zwei Punkte sind Steiner'sche „Gegenpunkte."[1])

Wenden wir die Salmon'sche Bezeichnung an[2]) und nennen die sechs Ecken der Dreiecke

$$13 \quad 12 \quad 23 \quad 56 \quad 45 \quad 46$$

nach der Reihe

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f$$

so sind die Geraden (7.

$$\begin{vmatrix} bf & ad & ce \\ ea & fc & db \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} ea & fc & bd \\ dc & eb & fa \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} bf & ad & ce \\ dc & eb & fa \end{vmatrix}$$

und der Steiner'sche Punkt g, in dem sie sich schneiden

$$\begin{vmatrix} bf & ad & ce \\ ea & fc & db \\ dc & eb & fa \end{vmatrix} \tag{8}$$

Die drei Geraden (7'. aber sind

$$\begin{vmatrix} bf & fc & ad \\ da & ae & eb \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} bd & da & af \\ fc & ce & eb \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} bf & fa & ae \\ ec & cd & db \end{vmatrix}$$

und der Steiner'sche Punkt g', in dem sie sich schneiden

$$\begin{vmatrix} bf & ea & cd \\ ad & fc & eb \\ ce & db & fa \end{vmatrix} \tag{8'}$$

---

1) Steiner's Vorlesung über synth. Geom. bearb. v. Schröter. S. 132.
2) Salmon „Kegelschnitte" deutsch von Fiedler. Zus. II S. 580.

Man sieht dass bei dieser Bezeichnungsweise sich die beiden Punkte nur dadurch unterscheiden, dass die Horizontallinien des einen die Vertikallinien im Ausdruck des andern sind und umgekehrt.

Da die drei Geraden (7. und die drei Geraden (7'. sich in je einem Punkte g und g' schneiden, so liegen ihre Pole die obigen sechs Kirkman'schen Punkte zu je dreien in zwei Geraden G und G', den Polaren von g und g'.

Dass die 60 Kirkman'schen Punkte des ganzen Systems zu je dreien in 20 Geraden liegen, haben schon Cayley und Salmon gleichzeitig entdeckt[1]); zugleich fanden sie, dass jede dieser 20 Geraden noch durch einen der 20 Steiner'schen Punkte gehe. Die Geraden G und G' nun gehen, wie im nächsten Nr. gezeigt werden wird, durch die Steiner'schen Punkte g, g' und zwar geht G durch g' und G' durch g. Fassen wir diese Resultate zusammen, so folgt:

Die sechs Kirkman'schen Punkte, in welchen sich die 18 Pascal'schen Geraden Π zu je dreien schneiden, liegen zu dreien in zwei (Salmon-Cayley'schen) Geraden G, G', welche die Polaren sind der zwei Steiner'schen Punkte g, g' in Bezug auf den Kegelschnitt Σ. G geht durch g'; G' geht durch g. Es sind mithin g, g' conjugirte Punkte, G, G' conjugirte Gerade in Bezug auf ebendenselben Kegelschnitt Σ.

Es bilden mithin auch ein Steiner'scher Punkt g (g') und die drei Kirkman'schen Punkte, welche auf der durch ihn gehenden Geraden G' (G) liegen, dasselbe anharmonische Verhältniss, wie die drei Pascal-schen Geraden und die Gerade G (G') die im conjugirten Punkte g' (g) zusammentreffen.[2])

Nr. 7. Bezeichnen wir specieller die drei durch g gehenden Geraden P (7.) durch P_1, P_2, P_3 und die durch g' gehenden (7') mit

---

1) Cayley, „Note zur quelques théorèmes de la geom. de position.“ Crelle's Journ. Bd. XLI (1850). S. 66 und 84.

2) Dass zwei Steiner'sche Gegenpunkte auch conjugirte Punkte sind in Bezug auf den dem Sechseck umschriebenen Kegelschnitt S hat schon Herr Hesse gefunden. „Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid“. Crelle's Journ. Bd. XXIV. S. 40.

P'_1, P'_2, P'_3. Die Pascal'schen Punkte p, welche auf den drei ersten Geraden liegen, seien in der Ordnung wie sie in den Gleichungen (7.) auftreten, mit

$$\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{matrix} \tag{9.}$$

bezeichnet und ebenso die auf den drei Geraden P′ liegenden mit

$$\begin{matrix} p'_{11} & p'_{12} & p'_{13} \\ p'_{21} & p'_{22} & p'_{23} \\ p'_{31} & p'_{32} & p'_{33} \end{matrix} \tag{9'.}$$

Die in einer Horizontalen stehenden p liegen auf derselben Pascal-schen Geraden P; von den in einer Vertikalen stehenden sage ich, sie bilden ein Tripel.

Die Gerade Π, Polaren dieser Punkte, in Bezug auf Σ, sind in derselben Ordnung

$$\left.\begin{matrix} 16-34 & 35-26 & 24-15 \\ 25-34 & 14-26 & 36-15 \\ 16-25 & 35-14 & 24-36 \end{matrix}\right\} 10.$$

$$\left.\begin{matrix} 36-14 & 24-35 & 15-26 \\ 36-25 & 24-16 & 15-34 \\ 25-14 & 16-35 & 34-26 \end{matrix}\right\} 10.$$

Ich bezeichne sie analog den Punkten p mit

$$\left.\begin{matrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right\} 11.$$

$$\left.\begin{matrix} \Pi'_{11} & \Pi'_{12} & \Pi'_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right\} 11'.$$

Die in einer Horizontalen der 1. Gruppe (10. oder (11.) stehenden Geraden bilden die Kirkman'schen Punkte auf G, die ich nach der

Reihe mit $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, $k^{(3)}$ oder wo keine Unterscheidung nothwendig ist, einfach durch k bezeichne; ebenso bilden die in einer Horizontalen der zweiten Gruppe (10') oder (11') stehenden die Kirkman'schen Punkte auf G', die ich mit k' oder nach der Reihe mit $k^{(1)'}$ $k^{(2)'}$ $k^{(3)'}$ bezeichne. Die in einer Vertikalen der 1. oder der 2. Gruppe stehenden gehen einzeln durch die drei Punkte k oder k' und ich sage daher sie bilden ein Tripel.

Nun geht z. B. die Gerade 15—24 (2.) oder Π_{13}, Polare von p_{13}, durch (23—56)(46—13) d. i. p'_{31} und wie aus der Vertauschung von 4 und 5 in (2.) sogleich ersichtlich, 14—25 oder Π'_{31}, Polare von p'_{31} durch (23—46)(56—13) d. i. p_{13}. Also allgemein, wenn i,k irgend welche der Zahlen 1 , 2 , 3 sind:

Die Gerade Π_{ik}, Polare von p_{ik}, geht durch p'_{ki} und Π'_{ki} Polare von p'_{ki}, geht durch p_{ik}. Die 9 Pascal'schen p auf drei durch g gehenden Pascal'schen Geraden P gelegen sind einzeln conjugirt zu den 9 Pascal'schen Punkten p' auf den drei durch g' gehenden Pascal'schen Geraden P', in Bezug auf den Kegelschnitt Σ. Es sind nämlich p_{ik} und p'_{ki} conjugirte Punkte; den drei p auf einer Geraden P ist ein Tripel der p' auf den Geraden P' conjugirt und umgekehrt.

Ebenso sind die 9 Pascal'schen Geraden Π, welche durch die drei Kirkman'schen Punkte k auf G gehen einzeln conjugirt in Bezug auf Σ zu den 9 Geraden Π', welche durch die drei Kirkman'schen Punkte k' auf G' gehen. Es sind nämlich Π_{ik} und Π'_{ki} conjugirte Gerade. Drei Π (Π_{i1} , Π_{i2} , Π_{i3}) welche einen Kirkman'schen Punkt k bilden und durch ein Tripel der p' (p'_{1i} , p'_{2i} , p'_{3i}) gehen sind einem Tripel der Π' (Π'_{1i} , Π'_{2i} , Π'_{3i}) conjugirt, welche durch drei Punkte p (p_{i1} , p_{i2} , p_{i3}) auf einer Geraden P gehen und umgekehrt.

Man bemerke, dass irgend zwei Gerade Π, welche sich in ihrem Ausdruck nur dadurch unterscheiden, dass die zwei Seiten des 1. oder 2. Dreiecks, welche in ihn eingehen, vertauscht sind, wie

15—24 und 25—14
36—14 und 34—16 u. s. f.

conjugirte Gerade sind.[1])

Betrachten wir nun die Dreiecke gebildet aus den drei Tripeln der Punkte

$$\begin{array}{lccccc}
\text{I.} & 26 & , & 14 & , & 35 \\[2ex]
\text{II.} & \left.\begin{array}{l}13-56\\12-45\\26-34\end{array}\right\} p_{33} & , & \left.\begin{array}{l}13-56\\23-46\\14-25\end{array}\right\} p_{13} & , & \left.\begin{array}{l}12-45\\23-46\\16-35\end{array}\right\} p_{23} \\[4ex]
\text{III.} & \left.\begin{array}{l}23-45\\13-46\\15-26\end{array}\right\} p_{31} & , & \left.\begin{array}{l}12-56\\23-45\\14-36\end{array}\right\} p_{11} & , & \left.\begin{array}{l}12-56\\13-46\\24-35\end{array}\right\} p_{21}
\end{array}$$

wo bei jedem Punkte p ausser den zwei Linien V die sich in ihm schneiden, noch die Gerade *Π* beigesetzt ist, die durch ihn hindurchgeht.

Die entsprechenden Seiten dieser drei Dreiecke (in I. Gerade *Π*, in II und III Linien V) treffen in denselben Punkten zusammen, nämlich in den Punkten

$$\left.\begin{array}{l}12-45\\13-46\\26-35\end{array}\right\} p'_{23} \quad , \quad \left.\begin{array}{l}23-46\\12-56\\14-35\end{array}\right\} p'_{21} \quad \left.\begin{array}{l}13-56\\23-45\\14-26\end{array}\right\} p'_{22}$$

welche auf der Geraden P'_2 liegen.

Die Verbindungslinien entsprechender Ecken der Dreiecke I und II laufen in dem Punkte

$$\left.\begin{array}{l}26-34\\16-35\\14-25\end{array}\right\} k^{(3)'}$$

zusammen.

---

1) Sind von drei Geraden 10.) die durch einen Punkt gehen zwei gegeben, so gibt es eine einfache Regel um die dritte zu finden. Ist z. B. gegeben

14—26 , 15—36

so haben sie in ihren Symbolen zwei Zahlen gemein, hier 1 und 6. Man verbinde die Glieder beider Ausdrücke übers Kreuz und hebe sodann diese gemeinschaftliche Zahlen 16 weg, so erhält man die dritte Gerade 25—34.

Für die Dreiecke I und III gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch den Punkt

$$\left.\begin{array}{l} 26-15 \\ 14-36 \\ 35-24 \end{array}\right\} k^{1)'}$$

Für die Dreiecke II und III liegen die entsprechenden Ecken auf den Geraden P_1, P_2, P_3 die sich in dem Punkte g schneiden. Nach einem bekannten Satze liegen also die Punkte $k^{(3)'}$, $k^{(1)'}$, g auf einer Geraden. Hiemit ist der Nachweis für die in Nr. 6 gemachte Behauptung geliefert, dass die Gerade G′ durch g geht. Ebenso könnte man zeigen dass die Gerade G durch g′ geht.

Nr. 8. Die Tripel der Punkte p bilden Dreiecke, deren Seiten die 9 Verbindungslinien V sind; dasselbe gilt für die von den Punkten p gebildeten Tripel. Die einen sind durch die andern bestimmt. Die homologen Seiten nämlich je zweier von den Punkten p gebildeten Dreiecke schneiden sich auf einer Geraden P′; die drei Tripel zu je zwei combinirt, bestimmen so die drei Geraden P′, die sich in dem Punkte g′ schneiden. Drei homologe Seiten aber der drei Tripel bilden ein Dreieck den drei Geraden P′ eingeschrieben, dessen Ecken ein Tripel der Punkte p sind.

Die Tripel der Pascal'schen Geraden *Π* und *Π′* bilden die reciproke Figur. Nämlich jedes Tripel der *Π* durch die 3 Kirkman'schen Punkte k auf G gehend bildet ein Tripel von Punkten π. Diese Tripel der π sind in Horizontalreihen zusammengestellt

$$\left.\begin{array}{ccc} 34 & 16 & 25 \\ 26 & 35 & 14 \\ 15 & 24 & 36 \end{array}\right\} 12.$$

Ie zwei dieser Tripel liegen perspektivisch, da sich ihre homologen Seiten auf G schneiden.

Die Verbindungslinien homologer Punkte je zweier Tripel gehen mithin durch einen Punkt; diese Verbindungslinien sind die Geraden *Π′* und die Punkte, durch welche sie gehen, die Kirkman'schen Punkte k auf der Geraden G′ gelegen. Drei Verbindungslinien aber homologer

Ecken der drei Tripel der Punkte (12.) geben ein Tripel der Geraden Π', einzeln durch die drei Punkte k' hindurchgehend. Jedes solche Tripel der Π' bildet ein Tripel der Punkte π, die in (12. in einer Vertikalreihe stehen.[1])

Nr. 9. Man ersieht, dass das ganze partielle System, das in den Nr. 4—8 betrachtet wurde in sich reciprok ist in Bezug auf den Kegelschnitt Σ. Wenn wir dasselbe in Bezug auf diesen Kegelschnitt polarisiren, so gehen nur die π und V, die p und Π, die k und P in einander über und der den zwei Dreiecken (123),(456) umschriebene Kegelschnitt S, verwandelt sich in den diesen beiden Dreiecken zugleich eingeschriebenen Kegelschnitt S'; dieses partielle System gehört mithin zugleich dem den zwei Dreiecken umschriebenen Kegelschnitt S und dem diesen zwei Dreiecken eingeschriebene S' an.

Diese Polarität in Bezug auf Σ findet aber nicht mehr statt, wenn wir auf diejenigen Theile des vollständigen Hexagramm's übergehen, in welchen die Pascal'schen Punkte und Gerade $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ auftreten. Denn wenn wir von einen Punkte $\mathfrak{p}$ z. B. 3(12—45) die Polare in Bezug auf Σ bilden, so ist dieselbe (12—36), eine Gerade, welche in dem Hexagramme der gegebenen sechs Punkte nicht auftritt, sondern einem System angehört, das durch Vertauschung einer der Geraden 1 , 2 , 3 mit einer der Geraden 4 oder 5 aus dem gegebenen hervorgeht. Ebenso ist die Polare von 4(23—56) die Gerade (14—56), von welcher ähnliches gilt, u. s. f.

Nun lassen sich aus den sechs Geraden 1 . . . 6 auf 10 Arten Paare von Dreiecken bilden. Man erhält aus den Dreiecken (123,(456) die neun übrigen Paare indem man jede Seite des einen Dreiecks mit jeder Seite des andern vertauscht. In diesem vollständigen System der 10 Paare von Dreiecken treten alle Verbindungslinien irgend zweier Durchschnittspunkte der sechs Geraden auf. Ihr Ausdruck ist nach der

---

1) Es ist zu bemerken, dass die 9 Linien V ausser in den 18 Durchschnittspunkten p , p' sich noch zu je dreien in sechs Punkten schneiden, nämlich den 6 Ecken der Dreieke (123) , (456). Ebenso liegen die 9 Punkte π (12.) ausser in den 18 Linien Π noch zu dreien in den sechs Seiten dieser Dreiecke.

hier gebrauchten Bezeichnung allgemein von der Form (ik − lm), wo i , k , l , m irgend vier der Zahlen 1 . . . 6 sind. Ihre Anzahl ist 45 (die Geraden 1 , 2 , . . . 6 selbst nicht mitgezählt). Denn lässt man irgend eine der 15 Combinationen von je zwei Geraden weg, so lassen sich die vier übrigen noch auf drei Arten in Paare zusammenfassen. Die Pole dieser 45 Verbindungslinien in Bezug auf den Kegelschnitt Σ sind die 45 Pascal'schen Punkte des hier betrachteten von den zwei Dreiecken (123) , (456) gebildeten Hexagramms.

Zu diesen 45 Linien gehören die 9 Linien V, deren Pole die Punkte π sind, die 18 Geraden Π, deren Pole die Punkte p sind, und die 18 übrigen Verbindungslinien haben zu Polen die 18 Punkte $\mathfrak{p}$.

Es ist leicht nachzuweisen[1]), dass wenn sechs Gerade zwei Dreiecke bilden, die einem Kegelschnitt S eingeschrieben sind, jedes der 9 andern Paare von Dreiecke, welches diese Gerade bei anderer Zusammenfassung zu Gruppen von je dreien bilden, wieder einem Kegelschnitt S_i eingeschrieben ist, und dass es mithin auch für jedes Paar solcher Dreieke einen Kegelschnitt Σ_i gibt, in Bezug auf welchen die beiden Dreiecke Polardreiecke sind.

---

1) Sind nämlich die Gleichungen der sechs Geraden 1 , 2 . . . 6

$$u_1 = 0 , u_2 = 0 , \ldots u_6 = 0$$

so kann die Gleichung eines Kegelschnittes Σ, welcher die zwei Dreiecke (123) , (456) zu Polardreiecken hat, sowohl in der einen als in der andern folgender Formen geschrieben werden

$$\left.\begin{array}{l} k_1 u_1^2 + k_2 u_2^2 + k_3 u_3^2 = 0 \\ k_4 u_4^2 + k_5 u_5^2 + k_6 u_6^2 = 0 \end{array}\right\} a$$

Es muss dann folglich zwischen den Funktionen u eine identische Gleichung der Form

$$k_1 u_1^2 + k_2 u_2^2 + k_3 u_3^2 + k_4 u_4^2 + k_5 u_5^2 + k_6 u_6^2 = 0$$

bestehen. Diese Gleichung lässt sich aber auf 10 Arten in zwei Gleichungen der Form a.) zerlegen, welche zugleich erfüllt sein müssen, sowie eine von ihnen es ist, und man ersieht hieraus, dass es für jedes der 9 anderen Paare von Dreiecken, welche die 6 Geraden bilden können, ebenfalls einen Kegelschnitt Σi gibt, der das Paar von Dreiecken zu Polardreiecken hat.

Zwei Dreiecke können aber nur dann zugleich Polardreiecke eines und desselben Kegelschnitts Σ sein, wenn um die zwei Dreiecke ein Kegelschnitt beschrieben werden kann und ist diess der Fall, so besimmen sie Σ eindeutig.

Hiemit ist obiger Satz erwiesen.

Da jedes der 10 Paare von Dreiecken gebildet von den sechs Geraden einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so bestimmt jedes solche Paar ein Pascal'sches Hexagramm.

Polarisirt man das vollständige System obiger 45 Verbindungslinien der Durchschnittspunkte der sechs Geraden in Bezug auf irgend einen der 10 Kegelschnitte Σ_i, so erhält man die 45 Pascal'schen Punkte des Hexagramms, das zu dem betreffenden Paar von Dreiecken gehört.

Nr. 10. Um nun das vollständige Hexagramm das durch die zwei Dreiecke (123)(456) erzeugt wird, zu erhalten, kann man auf folgende Art verfahren. Man bilde das in den Nr. 4—8 dargelegte partielle System mit seinen sechs Pascal'schen Geraden P und seinen sechs Kirkman'schen Punkten k nicht nur für diese zwei Dreiecke, sondern auch für die neun andern Paare von Dreiecken, welche durch die sechs Geraden bei anderer Zusammenfassung zu je dreien besimmt werden, und polarisire diese neun Hülfssysteme in Bezug auf den Kegelschnitt Σ. Alle diese polarisirten partiellen Systeme gehören sodann dem Hexagramm an und bilden das vollständige System. Bei der Polarisation verwandeln sich die P und k der Hülfssysteme in k und P des zu bestimmenden Systems und wir haben sodann

$10 \times 6 = 60$ Pascal'sche Gerade
$10 \times 6 = 60$ Kirkman'sche Punkte
10 Paare Steiner'sche Punkte g, g'
10 Paare Salmon-Cayley'scher Geraden G, G'.

Zugleich verwandeln sich die p der Hülfssysteme in Pascal'sche Gerade, welche durch die Kirkman'schen Punkte hindurchgehen, die Π der Hülfs-Systeme in Pascal'schen Punkte. Wir erhalten so $10.18 = 3.60$ Pascal'sche Gerade, welche durch die 60 Kirkman'schen Punkte gehen (jede dieser Geraden kommt dreimal vor) und $10.18 = 4.45$ Pascal'sche Punkte; jeder Pascal'sche Punkt tritt viermal auf, weil durch jeden vier Pascal'sche Gerade gehen.

Da die polaren Verhältnisse erhalten bleiben, wenn man auf die reciproke Figur übergeht, so enthält das vollständige Hexagramm mithin 10 partielle Systeme, welche in sich vollkommen polar reciprok sind, jedes derselben in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt Σ_i' als Direktrix, welcher aus dem Σ_i des betreffenden Hülfssystems bei der Polarisation in Bezug auf Σ hervorgeht.

Nr. 11. Bilden wir nun das partielle System das aus dem ersten durch Vertauschung der Geraden 3 und 6 hervorgeht und mithin zu den Dreiecken (126) , (345) gehört.

Die Pascal'schen Geraden P , P' des Systems sind, durch die auf ihnen liegenden Pascal'schen Punkte p betimmt, nach Nr. 6

$$\left.\begin{array}{l} (26-45)(12-35) - (12-34)(16-45) - (16-35)(26-34) \\ (16-34)(12-35) - (26-53)(16-45) - (12-45)(26-34) \\ (26-45)(16-34) - (12-34)(26-53) - (16-35)(12-45) \end{array}\right\} 13.$$

$$\left.\begin{array}{l} (12-45)(26-53) - (16-35)(12-34) - (26-34)(16-45) \\ (12-45)(16-34) - (16-35)(26-45) - (26-34)(12-35) \\ (16-34)(26-53) - (26-45)(12-34) - (12-35)(16-45) \end{array}\right\} 13'.$$

Die drei ersten, wie die drei letzteren schneiden sich in einem Steiner'schen Punkt des Systems.

Die Geraden *II* dieses Systems sind nach (10. und (10'.

$$\left.\begin{array}{lll} 13-46 & 56-23 & 24-15 \\ 25-46 & 14-23 & 36-15 \\ 13-25 & 56-14 & 24-36 \end{array}\right\} 14.$$

$$\left.\begin{array}{lll} 36-14 & 24-56 & 15-23 \\ 36-25 & 24-13 & 15-46 \\ 25-14 & 13-56 & 46-23 \end{array}\right\} 14'.$$

Es sind die Polaren der 18 in (13. und (13'. enthaltenen Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt Σ_2 oder $\Sigma(126,345)$, für welchen die zwei Dreiecke (126) , (345) Polardreiecke sind.

Die drei Geraden in einer Horizontallinie bestimmen einen Kirkman'schen Punkt des Systems. Die drei durch (14. bestimmten Kirkman'schen Punkte liegen in einer Geraden, Polare des Steiner'schen Punkts (13., welche durch den Steiner'schen Punkt (13'. geht. Ebenso liegen die drei

Kirkman'schen Punkte (14'. in einer Geraden, welche Polare des Punkts (13'. ist und durch den Punkt (13. hindurchgeht.

Dieses System ist dem ursprünglich betrachteten Hexagramm fremd. Polarisiren wir nun aber dasselbe in Bezug auf Σ, d. i. $\Sigma(123{,}456)$, so gibt das System der Geraden (14.

$$\left.\begin{array}{ccccc} 25 & - & 14 & - & (13-56)(23-46) \\ 5\,(13-46) & - & 1\,(23-56) & - & (12-45)(23-46) \\ 2\,(13-46) & - & 4\,(23-56) & - & (13-56)(12-45) \end{array}\right\} 15.$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} (12-45)(23-56) & - & 4\,(13-56) & - & 1\,(23-46) \\ (12-45)(13-46) & - & 2\,(13-56) & - & 5\,(23-46) \\ (13-46)(23-56) & - & 24 & - & 15 \end{array}\right\} 15'.$$

Das System der 18 Pascal'schen Punkte (13. , (13' geben polarisirt folgendes System von Geraden:

$$\left.\begin{array}{lll} 6(13-45)-3(12-46)\,, & 3(12-56)-6(23-45)\,, & (23-45)(12-46)-(13-45)(12-56) \\ (23-45)(12-56)-3(12-46)\,, & (13-45)(12-46)-6(23-45)\,, & 36-(13-45)(12-56) \\ 6(13-45)-(23-45)(12-56)\,, & 3(12-56)-(13-45)(12-46)\,, & 36-(23-45)(12-46) \end{array}\right\} 16.$$

$$\left.\begin{array}{lll} 36-(13-45)(12-46)\,, & (23-45)(12-46)-3(12-56)\,, & (13-45)(12-56)-6(23-45) \\ 36-(23-45)(12-56)\,, & (23-45)(12-46)-6(13-45)\,, & (13-45)(12-56)-3(12-46) \\ (23-45)(12-56)-(13-45)(12-46)\,, & 6(13-45)-3(12-56)\,, & 3(12-46)-6(23-45) \end{array}\right\} 16'.$$

Die Punkte (15. (15'. sind Pascal'sche Punkte, die sechs Geraden auf denen sie liegen sechs neue Pascal'sche Gerade des ursprünglichen Hexagramms. Die drei Geraden (15. und ebenso die Geraden (15'. schneiden sich in zwei neuen Steiner'schen Punkten g_2 und g_2'.

Die Geraden in (16. und (16'. sind Pascal'sche Gerade; je drei in einer Horizontalen gehen durch einen Punkt; diese sechs Punkte sind neue Kirkman'sche Punkte des ursprünglichen Hexagramms. Die drei Punkte (16. und ebenso die drei Punkte (16'. liegen auf zwei neuen Cayley-Salmon'schen Geraden G_2 , G_2'; die letztere geht durch g_2, die erstere durch g_2'.

Alle die descriptiven Eigenschaften, welche dem ersten partiellen System (Nr. 4—8) zukommen, kommen auch diesem zweiten partiellen System zu. Ferner ist dieses zweite partielle System, wie das erste, in sich polar-reciprok in Bezug auf den Kegelschnitt Σ_2', Polarkegelschnitt von Σ_2 oder Σ (126,345) in Bezug auf Σ oder Σ(123,456) als Direktrix. Da die Dreiecke (126), (345) durch Polarisation in Bezug auf Σ übergehen in die Dreiecke, deren Seiten

$$\begin{matrix} (13-45)\ , & (23-45)\ , & 3 \\ (12-46)\ , & (12-56)\ , & 6 \end{matrix}$$

sind, oder wenn wir die in Nr. 6 benützte Bezeichnung der Ecken beibehalten, in die Dreiecke

$$(cdf)\ ,\ (ace)$$

so ist Σ_2' derjenige Kegelschnitt, für welche diese beiden Dreiecke Polardreiecke sind.

Und in der That, vertauscht man in den Pascal'schen Geraden (7. (7'. und Kirkman'schen Punkten (10., (10'. des ersten partiellen Systems die Geraden

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \text{mit} & (13-45) & (23-45) & (12-46) & (12-56) \end{matrix}$$

wechselseitig, so gehen sie in die des 2^{ten} Systems (15. (15'. und (16. (16'. über.

Man kann noch bemerken, dass der Punkt 36 und die Linie (12—45) zugleich Pol und Polare sind für die beiden Kegelschnitte Σ und Σ_2'.

Nr. 12. Unter den Geraden (15. und (15'. kommt je eine Gerade Π und zwei Gerade $\mathfrak{P}$ vor, so dass in den neun abgeleiteten Systemen jede Gerade Π und jede Gerade $\mathfrak{P}$ je einmal unter den Geraden vorkommt, welche durch einen Steiner'schen Punkt gehen.

Unter den Geraden (16., (16' besteht die letzte Vertikalreihe in (16. und die erste in (16'. aus je einer Geraden P und zwei Geraden Π; die übrigen sechs sind Gerade $\mathfrak{P}$, so dass in den neun abgeleiteten

Systemen unter den durch Kirkman'sche Punkte hindurchgehenden Geraden jede der sechs P und ebenso jede der 36 Geraden $\mathfrak{P}$ je dreimal; jede Gerade Π noch zweimal vorkommt. Auf jeder Pascal'schen Geraden liegen also drei Kirkman'sche Punkte.

Man wird ferner bemerken, dass die Punkte, welche in (15. in der letzten Vertikalreihe stehen, und ebenso diejenigen, welche in (15'. in der ersten stehen, die Punkte

$$p_{13} \quad p_{23} \quad p_{33}$$

und

$$p'_{11} \quad p'_{21} \quad p'_{31}$$

sind, welche je ein Tripel von Punkten p und p' bilden (Nr. 7). Beim Uebergang vom 1^ten System auf das 2^te abgeleitete, haben sich die Pascal'schen Geraden, welche einen Steiner'schen Punkt bilden, um eines der auf ihnen liegenden Tripel von Pascal'schen Punkten gedreht.

Für jedes der neun abgeleiteten Systeme gehen die drei Pascal'schen Geraden, welche einen Steiner'schen Punkt bilden durch eines der auf den Geraden P (P') liegenden Tripel von Punkten p (p').

Nr. 13. Man ersieht, dass die Bildung der 9 übrigen partiellen Systeme darauf hinauskommt, an die Stelle der ursprünglichen Dreiecke (123), (456) mit den Ecken a,b,c; d,e,f nach und nach die 9 andern Paare von Dreiecken zu substituiren, welche aus den sechs Punkten gebildet werden können. Aber es gewährt Vortheile, dieselben, wie hier bei der Bildung des zweiten Systems geschehen, nur durch Vertauschung von zwei Zahlen und nachherige Polarisation hervorgehen zu lassen. Nachdem dieses zweite System gebildet, können nun die acht übrigen auch allein durch cyclische Vertauschungen der Zahlen 123 oder 456 aus diesem abgeleitet werden.

Wir bilden so das

> 3^te System aus dem 2^ten durch cyclische Vertauschung von 123. Geht aus dem 1^ten System hervor durch Vertauschung der Zahlen 1 und 6 und Polarisation, oder also, indem man die Geraden

	2	3	4	5
mit	(12—45)	(13—45)	(23—46)	(23—56)

vertauscht. Es gehört zu den Dreiecken

(abe) , (cdf).

4tes System aus dem 2ten durch zweimalige cyclische Vertauschung von 123. Geht auch aus dem ersten hervor durch Vertauschung der Zahlen 2 und 6 und Polarisation, oder durch Vertauschung der Geraden

	1	3	4	5
und	(12—45)	(23—45)	(13—46)	(13—56)

Es gehört zu den Dreiecken

(bce) , (adf).

5tes System aus dem 2ten durch cyclische Vertauschung von 456. Geht auch aus dem 1ten hervor durch Vertauschung der Zahlen 3 , 4 und Polarisation, oder Vertauschung der Geraden

	1	2	5	6
mit	(13—56)	(23—56)	(12—45)	(12—46)

Es gehört zu den Dreiecken

(acd) , (bef).

6tes System aus dem 2ten durch zweimalige cyclische Vertauschung von 456. Geht aus dem 1ten hervor durch Vertauschung der Zahlen 3 , 5 und Polarisation; es gehört zu den Dreiecken

(bde) , (acf).

7tes System aus dem 2ten durch cyclische Vertauschung von 123 und von 456. Geht aus dem 1ten System hervor durch Vertauschung der Zahlen 1 , 4 und Polarisation. Es gehört zu den Dreiecken

(abd) , (cef).

8tes System aus dem 2ten durch einmalige cyclische Vertauschung von 123 und zweimalige von 456. Geht aus dem 1ten hervor durch Vertauschung der Zahlen 1 , 5 und Polarisation. Es gehört zu den Dreiecken

(abf) , (cde).

9tes System aus dem 2ten durch zweimalige cyclische Vertauschung von 123 und einmalige von 456. Geht aus dem 1ten System hervor durch Vertauschung der Zahlen 2 , 4 und Polarisation. Es gehört zu den Dreiecken

(bcd) , (aef).

10tes System aus dem 2ten durch zweimalige cyclische Vertauschung von 123 sowohl als von 456. Geht aus dem 1ten System hervor durch Vertauschung der Zahlen 2 , 5 und Polarisation. Es gehört zu den Dreiecken

(bcf) , (ade).

Jedes dieser Systeme ist in sich polar-reciprok in Bezug auf den Kegelschnitt Σ_i', für welchen die zwei Dreiecke des Systems Polardreiecke sind.

Nr. 14. Wir haben gesehen, dass beim Uebergang vom ersten partiellen System auf eines der neun abgeleiteten, die aus den P und P′ hervorgehenden Pascal'schen Geraden des neuen Systems sich um ein Tripel von Punkten p, resp. p′ drehen. Durch cyclische Vertauschung von 123 oder von 456 gehen die Geraden P ineinander über, ebenso die P′, so dass mithin die Steiner'schen Punkte g , g′ durch diese Vertauschungen nicht geändert werden. Wohl aber gehen die Tripel der p und p′ bei diesen Vertauschungen ineinander über, indem sie sich zugleich drehen.

Fassen wir die Geraden P zunächst in's Auge. Dieselben bleiben fest, wenn wir zugleich eine cyclische Vertauschung von 123 und von 456 machen. Es gehen mithin auch in diesem Falle die auf ihnen liegenden Tripel der p nur in einander über, ohne sich zu drehen. Die abgeleiteten Systeme, welche durch solche Vertauschungen aus einander hervorgehen, haben ihre Steiner'schen Punkte g_i[1]) auf einer der drei Plücker'schen Geraden $\mathfrak{J}$[2]), welche von dem Steiner'schen Punkt g (oder g_1) des 1^{ten} Systems, in welchem sich die Geraden Γ schneiden, ausgehen. In diesem Falle sind das 2^{te} System, dessen Gerade (15. durch das Tripel p_{13}, p_{23}, p_{33} hindurchgehen, das 7^{te} System dessen Gerade durch das Tripel p_{12}, p_{22}, p_{32} und das 10^{te}, dessen Gerade durch das Tripel p_{11}, p_{21}, p_{31} hindurchgehen (wie sogleich aus (15. und dem System der p (7.) zu ersehen). Ebenso das 4^{te}, 5^{te} und 8^{te} System und das 3^{te}, 6^{te} und 9^{te} System.

Wenn wir aber die Geraden P (7. einer zweimaligen cyclischen Vertauschung von 123 und einer einmaligen von 456 oder umgekehrt, einer zweimaligen von 456 und einer einmaligen von 123 unterwerfen, vertauschen sich die Geraden P, aber die auf ihnen liegenden Tripel von Punkten p drehen sich in sich selbst, ohne in einander überzugehen. In den Systemen, welche durch Vertauschungen dieser Art aus einander hervorgehen, gehen mithin die Pascal'schen Geraden, welche den Steiner'schen Punkt g_i des Systems bilden, durch dasselbe Tripel der p. So gehen sie im 3^{ten}, 5^{ten}, 10^{ten} System durch das 1^{te} Tripel p_{11}, p_{21}, p_{31}; im 4^{ten}, 6^{ten}, 7^{ten} System durch das 2^{te} Tripel p_{12}, p_{22}, p_{32}; im 2^{ten}, 8^{ten}, 9^{ten} System durch das 3^{te} Tripel p_{13}, p_{23}, p_{33} und die Steiner'schen Punkte g_i je dreier dieser Systeme bilden ein Tripel von Steiner'schen Punkten auf den drei durch g_1 gehenden Plücker'schen Geraden $\mathfrak{J}$ gelegen.

Schreibt man die 9 abgeleiteten Systeme in der Weise

$$\left.\begin{matrix} 2^{tes}, & 10^{tes}, & 7^{tes} \\ 8^{tes}, & 5^{tes}, & 4^{tes} \\ 9^{tes}, & 3^{tes}, & 6^{tes} \end{matrix}\right\} \quad (16.$$

so liegen die g_i von je drei Systemen, die in einer Horizontalen stehen,

1) Die aus (15. und (15'. abgeleiteten Steiner'schen Punkte des 1^{ten} Systems sollen durch g_i, g_i' bezeichnet werden. Es sind „Steiner'sche Gegenpunkte"; jedes dieser Paare hat die Eigenschaft, dass sie in der Form (8. (8'. Nr. 4 dargestellt, sich nur durch Vertauschung der Horizontal- und Vertikalreihen unterscheiden.

2) Dass die 20 Steiner'schen Punkte zu vieren auf 15 Geraden liegen, von welchen je drei durch einen Steiner'schen Punkt gehen, ist zuerst von Plücker nachgewiesen worden 1829. Crelle's Journ. Bd. V. „Ueber ein neues Princip der Geometrie" S. 268.

in einer der durch g_1 gehenden Plücker'schen Geraden $\mathfrak{J}$, und die Pascal'schen Geraden, welche die drei Punkte g_i bilden, gehen durch verschiedene Tripel der p; hingegen die g_i von je drei Systemen in einer Vertikalreihe bilden ein Tripel auf den drei durch g_1 gehenden Plücker'schen Geraden gelegen, und die Pascal'schen Geraden, welche die drei Punkte g_i bilden, gehen durch dasselbe Tripel der p.

Wenn wir auf die Geraden P′ übergehen und die conjugirten Steiner'schen Punkte g'_i, so findet gerade das Entgegengesetzte statt. Es vertauscht sich die Bedeutung der Horizontal- und Vertikalreihen in der Anordnung (16. Diejenigen Systeme, welche in einer Vertikalreihe stehen, haben ihre g'_i auf einer der drei durch g'_1 gehenden Plücker'schen Geraden; und in drei Systemen, die in (16. in einer Horizontalreihe stehen, bilden die g'_i ein Tripel auf den drei durch g'_1 gehenden Geraden $\mathfrak{J}$ gelegen und die Pascal'schen Geraden, welche diese Punkte g'_i bilden, gehen durch dasselbe Tripel der p′.

Die drei Tripel der g_i auf den Geraden $\mathfrak{J}$, welche von g_1 ausgehen und die drei Tripel der g'_i auf den Geraden $\mathfrak{J}$, welche von g'_1 ausgehen stehen in ganz ähnlicher Beziehung zu einander, wie die Tripel der p und der p′ (Nr. 8). Nämlich die Seiten der Dreiecke gebildet von den Tripeln der g_i sind zugleich die Seiten der von den g'_i gebildeten Tripel. Die neun Seiten dieser Tripel sind mithin selbst Plücker'sche Gerade $\mathfrak{J}$, auf welchen je vier Steiner'sche Punkte liegen und vervollständigen ihre Anzahl zu 15.[1]) Aus der Anordnung (16. ist sogleich zu entnehmen, welche 4 Steiner'sche Punkte auf jeder dieser 9 Geraden $\mathfrak{J}$, Seiten der Tripel, liegen; nämlich die g_i von irgend zwei Systemen in einer Vertikalreihe liegen in einer Geraden mit den g'_i der zwei Systeme, die in verschiedenen Horizontal- und Vertikalreihen stehen, also:

---

1) Auf die besondere Anordnung, welche die Plücker'schen Geraden zeigen und die Steiner'schen Punkte, ist schon von Herrn Hesse hingewiesen worden („Eine Bemerkung zum Pascal'schen Theorem." Crelles's Journ. Bd. XLI. 1850. Seite 269).

$$g_2 \, , \, g_8 \text{ mit } g'_3 \, , \, g'_6$$
$$g_2 \, , \, g_9 \text{ mit } g'_4 \, , \, g'_5$$
$$g_8 \, , \, g_9 \text{ mit } g'_{10} \, , \, g'_7$$
$$g_3 \, , \, g_5 \text{ mit } g'_2 \, , \, g'_7$$
$$g_3 \, , \, g_{10} \text{ mit } g'_8 \, , \, g'_4$$
u. s. f.

Nr. 15. Es erübrigt noch den Beweis für die Behauptung beizubringen, dass die Steiner'schen Punkte der Systeme, welche in der Anordnung (16. in einer Horizontalreihe stehen, also z. B. g_2 , g_7 , g_{10} in einer Geraden liegen mit g_1. Der Beweis lässt sich kurz auf folgende Weise führen.

Auf den drei durch $k_1^{(3)}$ gehenden Geraden

$$25-16 \, , \, 36-24 \, , \, 14-35$$

liegen die drei Punkte

$$25 \quad , \quad 36 \quad , \quad 14$$

dann die drei Punkte

$$16 \quad , \quad 24 \quad , \quad 35$$

und ausserdem, wie aus dem Bildungsgesetz der einzelnen Systeme sogleich zu entnehmen ist, je ein Kirkman'scher Punkt k des 3^{ten}, 9^{ten} und 6^{ten} Systems (die 3^{ten} in dem Schema), die mit

$$k_3 \quad , \quad k_9 \quad , \quad k_6$$

bezeichnet werden mögen. Betrachten wir die drei perspektivisch liegenden Dreiecke gebildet aus diesen Punkten.

Die homologen Seiten des 1^{ten} und 2^{ten} Dreiecks schneiden sich in den drei Punkten k' des ersten Systems, also auf der Geraden G'_1. Die Seiten des dritten Dreiecks sind die Geraden

$$k_9k_6 \quad \text{d. i.} \quad 3(12-45)-4(23-56)-p_{21}$$
$$k_6k_3 \quad \text{d. i.} \quad 5(13-46)-1(23-56)-p_{23}$$
$$k_3k_9 \quad \text{d. i.} \quad 2(13-46)-6(12-45)-p_{22}$$

Sie schneiden sich mit den homologen Seiten des zweiten Dreiecks in den Punkten p_{21} , p_{23} , p_{22} , also auf P_2. Dieselben Geraden schneiden sich aber mit den homologen Seiten des ersten Dreiecks in den Punkten g_{10}, g_2, g_7; folglich liegen diese drei Punkte in einer Geraden $\mathfrak{Z}$, und diese Gerade geht mit P_2 und G'_1 durch denselben Punkt, enthält mithin auch den Punkt g_1.

Nr. 16. Da drei Pascal'sche Gerade, welche einen Steiner'schen Punkt bilden, immer durch eines der sechs Tripel der Punkte p oder p' hindurchgehen und was vom 1ten System gilt von jedem der neun übrigen gilt, so haben wir in den 10 partiellen Systemen 60 solche Tripel Pascal'scher Punkte, von welchen jedoch jedes viermal gezählt ist. Es können folglich die 45 Pascal'schen Punkte des Hexagramms in 15 Tripel derart zusammengefasst werden, dass die 4.3 Pascal'schen Geraden, welche durch jedes Tripel hindurchgehen, vier Steiner'sche Punkte bilden. Die sechs Gerade, welche diese vier Punkte verbinden, sind Plücker'sche Gerade.

So bilden, wie sich aus dem Ausdruck für die Pascal'schen Geraden im 2ten partiellen System und den daraus abgeleiteten sogleich entnehmen lässt, die Geraden, welche durch das Tripel

14 , 1(23—56) , 4(23—56)	gehen	die	Punkte	g_2 , g_{10} , g'_4 , g'_6
25 , 2(13—46) , 5(13—46)	„	„	„	g_2 , g_7 , g'_3 , g'_5
36 , 6(12—45) , 3(12—45)	„	„	„	g_7 , g_{10} , g'_8 , g'_9

u. s. f.

Nr. 17. Betrachten wir noch die Kirkman'schen Punkte, welche in den verschiedenen Systemen auf die Geraden P , P' zu liegen kommen. In jedem der neun abgeleiteten Systeme fällt ein k' auf eine Gerade P, so im 2ten, 7ten und 10ten System auf P_1; im 4ten, 5ten, 8ten auf P_3, im 3ten, 6ten, 9ten auf P_2; und ebenso fällt in jedem dieser Systeme ein k auf eine Gerade P', so im 3ten, 5ten, 10ten System auf P'_1, im 2ten, 8ten, 9ten auf P'_3, im 4ten, 6ten, 7ten auf P'_2.

Schreibt man also die Systeme in der Ordnung (16., so haben je drei in einer Horizontalreihe einen Kirkman'schen Punkt k' auf derselben Geraden P, und je drei in einer Vertikalreihe haben ein Tripel solcher Punkte auf den drei Geraden P. Das Umgekehrte findet statt für die Kirkman'schen Punkte, welche auf die Geraden P' fallen.

Diese Tripel der Kirkman'schen Punkte k' auf den Geraden P haben eine bemerkenswerthe Lage in Beziehung auf die Tripel der Punkte p auf denselben Geraden und den zugehörigen Steiner'schen Punkten g. Betrachten wir z. B. das Tripel der Punkte k', welche im 2ten, 8ten und 9ten System auf die Geraden P fallen und durch k'_2, k'_8, k'_9 bezeichnet sein sollen, und das Tripel p_{13}, p_{23}, p_{33}. Die durch letztere Punkte hindurch gehenden Pascal'schen Geraden bilden ausser g_1 noch die Punkte g_2, g_8, g_9. Aber die Gerade $p_{33}g_9$ d. i. 3(12—46)—6(23—45) und die Gerade $p_{23}g_8$ d. i. 3(12—56)—6(13—45) schneiden sich in dem Punkte k'_2 auf P_1. Die Geraden $p_{23}g_2$ und $p_{13}g_9$ d. i. 1(23—56)—5(13—46) und 1(23—45)—5(12—46) schneiden sich in k'_8 auf P_3; endlich die Geraden $p_{33}g_2$ und $p_{13}g_8$, d. i. 2(13—46)—4(23—56) und 2(13—45)—4(12—56) schneiden sich in k'_9 anf P_2.

Die neun Punkte dieser drei Tripel der p, k', und g liegen also zu dreien auf sechs Pascal'schen Geraden. Diese Geraden bilden ein Brianchon'sches Sechsseit; denn das aus diesen Geraden gebildete Sechseck

$$k'_9 \quad p_{33} \quad k'_2 \quad p_{23} \quad k'_8 \quad p_{13}$$

hat zu Hauptdiagonalen die drei Geraden P, die sich in g_1 schneiden.

Das mit denselben Geraden gebildete Sechseck

$$g_9 \quad p_{33} \quad g_2 \quad p_{23} \quad g_8 \quad p_{13}$$

hat zu Hauptdiagonalen die drei dritten durch g_2, g_8, g_9 gehenden Geraden $p_{13}g_2$, $p_{23}g_9$, $p_{33}g_8$, d. h. die Geraden (14—25), (16—35), (26—34), welche sich in einem Kirkman'schen Punkt k' des ersten Systems, auf der durch g_1 gehenden Salmon'schen Geraden G'_1 gelegen, schneiden.

Nimmt man endlich zu Ecken die Punkte

$$k'_9 \quad g_2 \quad k'_8 \quad g_9 \quad k'_2 \quad g_8$$

so sind die drei Hauptdiagonalen die Geraden $g_2k'_2$, $g_8k'_8$, $g_9k'_9$, d. h. die drei Salmon'schen Geraden G'_2, G'_8, G'_9, die sich mithin ebenfalls in einem Punkte h treffen.

Ebenso könnte man nachweisen, dass G'_1, G'_8, G'_9 sich in einem Punkte schneiden und mithin die vier Geraden G'_1, G'_2, G'_8, G'_9 durch denselben Punkt h gehen.

Man kann daher den Satz im vorigen Nr. zu folgendem vervollständigen:

Die 4.3 Pascal'sche Gerade, welche durch ein Tripel Pascal'scher Punkte gehen, schneiden sich nicht nur zu dreien in vier Steiner'schen Punkten, sondern auch noch zu dreien in vier Kirkman'schen Punkten. Die vier Steiner'schen Punkte und die vier Kirkman'schen (z. B. $g_1g_2g_8g_9$ und $k'_1k'_2k'_8k'_9$) gehören denselben vier partiellen Systemen an. Die sechs Geraden, welche die vier Steiner'schen Punkte verbinden, sind Plücker'sche Gerade; die vier Geraden, welche die Steiner'schen Punkte mit den Kirkman'schen desselben Systems verbinden ($g_1k'_1$, $g_2k'_2$, $g_8k'_8$, $g_9k'_9$) sind Salmon'sche Gerade G (G'), welche sich in einem Punkte h schneiden.

Entsprechend den 15 Tripeln Pascal'scher Punkte gibt es 15 solche Punkte h, in denen sich je vier der Geraden G , G' schneiden, wie bekannt. Auf jeder dieser Geraden liegen drei solche Punkte. So liegen auf G'_1 drei Punkte h entsprechend den drei Tripeln der Punkte p auf den Geraden P; ebenso liegen drei Punkte h auf der Geraden G_1 , welche von g'_1 ausgeht. Die 18 Salmon'schen Geraden, welche von diesen 6 Punkten auf G'_1 und G_1 ausgehen, schneiden sich noch zu vieren in 9 andern Punkten h und bilden mithin eine ganz ähnliche Figur wie die 18 Geraden Π, welche durch die sechs Kirkman'schen Punkte des ersten Systems, auf eben diesen Geraden G'_1 , G_1 gelegen, gehen (Nr. 8).

Nr. 18. Anschliessend an Nr. 9 sei noch bemerkt, dass, wenn wir die sechs Sechsecke des 1ten partiellen Systems (6. (6'. in Bezug auf Σ polarisiren, wir den Satz erhalten:

Sind zwei Dreiecke (123), (456) einen Kegelschnitt S eingeschrieben, so können mit den sechs Seiten 1,2 . . 6 sechs Sechsecke gebildet werden, einem und demselben Kegelschnitt S' umschrieben, deren Ecken Pascal'sche Punkte und deren Hauptdiagonalen Pascal'sche Gerade des von den zwei Dreiecken (123) , (456) gebildeten Sechsecks sind, welche sich in einem Kirkman'schen Punkt dieses Sechsecks schneiden. Die sechs Kirkman'schen Punkte der sechs Sechsecke liegen zu dreien in einer Geraden. Die Ecken dieser sechs Sechsecke sind die 18 Punkte π; ihre Hauptdiagonalen die Geraden Π.

Polarisirt man aber auch die Sechsecke der 9 andern partiellen Systeme, welche aus dem 1^{ten} durch Vertauschung je einer der Geraden 1,2,3 mit je einer der Geraden 4,5,6 hervorgehen und bemerkt, dass die Seiten dieser Sechsecke sämmtlich Linien V sind, deren Pole in Bezug auf Σ Pascal'sche Punkte sind, so erhält man folgenden allgemeinen Satz:

Ist ein Sechseck abcdef einem Kegelschnitt S eingeschrieben, so können mit den 45 Pascal'schen Punkten desselben 60 Sechsecke gebildet werden, welche einem Kegelschnitt umschrieben sind, und für welche die drei Hauptdiagonalen Pascal'sche Gerade und die Brianchon'schen Punkte Kirkman'sche Punkte des Sechsecks abcdef sind. Ie sechs dieser Sechsecke sind ein und demselben Kegelschnitt S_i' umschrieben; dieselben haben ihre Brianchon'schen Punkte zu je dreien in zwei Geraden. Jede der 60 Pascal'schen Geraden gehört als Diagonale dreien der 60 Sechsecke an, entsprechend den drei Combinationen zu zweien der drei Pascal'schen Punkte, die sie trägt, oder auch entsprechend den drei Kirkman'schen Punkten, durch die sie geht. Die Seiten dieser Sechsecke sind Diagonale oder auch Seiten des Sechsecks abcdef; die 10 Kegelschnitte S_i' sind die Reciproken der Kegelschnitte S_i in Bezug auf Σ als Direktrix, also diejenigen Kegelschnitte, welche je einem der 10 Paare von Dreiecken eingeschrieben werden können, welche mit den sechs Punkten a,b . . . f gebildet werden können.

So gehört z. B. zur Combination (126), (345) das Sechseck gebildet aus den Linien

(12—35), (35—26), (26—54), (54—16), (16—34), (34—12)

welches einem Kegelschnitt S_2 eingeschrieben ist. Polarisirt in Bezug auf Σ gibt dasselbe das Sechseck, dessen Ecken die Pascal'schen Punkte (Nr. 11)

$$3(12-46),(12-46)(13-45),6(13-45),6(23-45),(23-45)(12-56),3(12-56)$$

des ursprünglich gegebenen Sechsecks abcdef sind. Seine Seiten sind die der Dreiecke (bdf), (ace), welchen ein Kegelschnitt S_2', eingeschrieben werden kann; seine drei Hauptdiagonalen sind die drei Pascal'schen Gerade, welche den letzten der Kirkman'schen Punkte (16'. bilden.

München, März 1874.