

Zur Theorie
der Beleuchtung der grossen Planeten
insbesondere des Saturn.

Von

H. Seeliger.

Die Anwendung der Photometrie auf die Planeten hat bis jetzt nur in wenigen Fällen zu Resultaten geführt, die in unzweideutiger Weise interpretirt werden können. Solange man über das Gesetz, nach welchem sogenannte zerstreut reflectirende Substanzen das auffallende Licht zurückwerfen, eine ganz bestimmte Annahme macht und die aus dieser Annahme gezogenen Folgerungen mit den Beobachtungsergebnissen vergleicht, wird natürlich jedes auf diesem Wege erlangte Resultat denselben Zweifeln unterliegen, die gegen das angewandte photometrische Grundgesetz erhoben werden können. Seit Seidel's¹⁾ und Zöllner's²⁾ Arbeiten im Gebiete der Photometrie der Planeten hat man beinahe immer das Lambert'sche Gesetz als Grundlage angenommen und hieraus nicht nur Vorschriften zur Reduction von photometrischen Messungen abgeleitet, sondern auch die physikalischen Eigenschaften der Planeten, so ihre Albedo, zahlenmässig bestimmt und mit den analogen irdischer Substanzen verglichen. In den letzten Jahren ist man darauf aufmerksam geworden, dass die Lambert'sche Formel, deren theoretische Begründung bereits von Zöllner als unrichtig nachgewiesen worden ist, durch angestellte Experimente keineswegs in dem Umfange bestätigt worden ist, wie gefordert werden muss und es hat sich herausgestellt, dass man Substanzen angeben kann, welche sich der genannten Formel gewiss nicht fügen. Dass infolge dessen alle auf die allgemeine Gültigkeit des Lambert'schen Gesetzes gegründeten Folgerungen hinfällig werden, ist selbstverständlich. So sind, um nur eines zu erwähnen, die von Zöllner erhaltenen Albedowerthe von Planeten

1) Untersuchungen über die Lichtstärke der Planeten etc. Monumenta saecularia der k. bayer. Akademie der Wissenschaften 1859.

2) Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865.

und irdischen Substanzen durchaus unvergleichbare Zahlen, weil für beide das Lambert'sche Gesetz als gültig angenommen worden. Der Begriff der Albedo muss überhaupt, wie ich nachgewiesen habe,¹⁾ eine neue und erweiterte Definition erhalten, wenn man nicht unerlaubte Beschränkungen einführen will. Ich habe ausserdem a. a. O. einige Punkte näher erörtert, wo die namentlich von Zöllner erhaltenen Resultate durch die veränderte Auffassung der Sachlage nicht mehr als bewiesene Thatsachen angesehen werden können und man wird wohl zugeben müssen, dass nicht sehr viel übrig geblieben ist, was als gesichertes Forschungsergebniss gelten darf. Das gesteigerte Interesse, welches gegenwärtig der Himmelsphotometrie entgegengebracht wird und die ausgezeichnete Pflege, welche dieser Wissenszweig von vielen Seiten erfährt, lassen wohl hoffen, dass manches Ziel, das Zöllner anstrebte, wirklich erreicht werden wird. Soll dies geschehen, so wird man aber einen etwas andern Weg als bisher geschehen einschlagen müssen. Man darf nicht versuchen durch eine so einfache Formel, wie die Lambert'sche, alle Möglichkeiten zu umspannen, vielmehr wird man darnach streben müssen in jedem besonderen Falle durch physikalisch zulässige Annahmen den Eigenthümlichkeiten zu genügen, welche in den photometrischen Beobachtungsergebnissen zu Tage treten. Jeder solche Fall aber, in welchem es gelingt den Beobachtungen in der Hauptsache zu entsprechen, wird schon deshalb ein gesteigertes Interesse in Anspruch nehmen dürfen, weil es, wenigstens gegenwärtig noch, nur wenig solcher günstig erledigten Fälle giebt. Ein solcher soll nun im Folgenden (vergl. insbesondere Artikel 11) eingehend erörtert werden.

Die theoretischen Betrachtungen, welche die Photometrie des Planeten Saturn erfordert, bieten in mehrfacher Beziehung Interesse dar. Zunächst sind infolge der wechselnden Gestalt des Ringsystemes und der starken Abplattung des Saturnkörpers die sich darbietenden geometrischen Verhältnisse ziemlich verwickelt. Die scharfe Reduction von photometrischen Messungen auf einen bestimmten Zustand z. B. auf den, wo die Erde sich in der Ringebene befindet, ist deshalb stets als ein recht mühsames

1) Bemerkungen zu Zöllner's photometrischen Untersuchungen. Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 21. Jahrgang.

Geschäft betrachtet worden, wenn man nicht so weitgehende Vereinfachungen zulassen will, wie Zöllner¹⁾ vorgeschlagen hat. Im Folgenden wird nun gezeigt, wie mit Hülfe wenig umfangreicher Tabellen eine in jedem Falle genügend genaue Reduction fast ohne Mühe ausgeführt werden kann, wobei nöthigenfalls auch auf den Schattenwurf des Saturnkörpers auf den Ring und umgekehrt Rücksicht genommen werden kann. Die Resultate eines Theiles dieser Untersuchungen habe ich bereits in den *Astronom. Nachrichten* Nr. 2639 in Form einer Tabelle mitgetheilt. Hier werden die hierbei angewandten Entwicklungen vollständig gegeben werden.

Besonderes Interesse beanspruchen die Lichtverhältnisse, welche der Saturnring darbietet. Schon Zöllner machte darauf aufmerksam, dass diese sich durchaus nicht nach dem Lambert'schen Gesetze regeln, vielmehr der Ring stets sehr nahe gleich hell erscheint. Da sowohl die Sonne als auch die Erde, vom Mittelpunkt des Saturn aus gesehen, Höhen über der Ringebene (Elevationswinkel) haben, die nicht wesentlich von einander verschieden zwischen den weiten Grenzen von 0 bis etwa 30 Grad variiren, so erschien das photometrische Verhalten des Ringes ganz unerklärlich oder doch wenigstens sehr auffallend. Da indess die Thatsache zweifellos feststeht, so muss sie sich auch aus der Constitution des Ringes ableiten lassen. In der That habe ich schon vor einigen Jahren²⁾ nachgewiesen, dass alles Unerklärliche verschwindet, wenn man die von Maxwell und Hirn begründete Ansicht festhält, dass der Saturnring aus lauter discreten Massentheilen zusammengesetzt sei, welche Ansicht überdies durch mechanische Gründe mit grosser Sicherheit gestützt wird. In dem angeführten Aufsätze habe ich indess eine ganz bestimmte einfache Massenvertheilung annehmen müssen, weil ich damals noch die Art und Weise, wie Zöllner das Lambert'sche Gesetz plausibel machte, für richtig hielt und aus dieser Beweisführung gewisse sonst am wahrscheinlichsten erscheinende Annahmen als nicht haltbar hervorgingen. Seitdem ist mir nun eine, wie ich glaube, ganz einwurfsfreie Theorie der Beleuchtung des Saturnringes gelungen von einer Allgemeinheit, die

1) a. a. O. pag. 139 ff.

2) *Astron. Nachrichten* Nr. 2612.

nichts zu wünschen übrig lassen dürfte. Namentlich ist dieselbe frei von der immerhin willkürlichen Annahme über das photometrische Grundgesetz, welches jedes einzelne Theilchen des Ringes befolgt.

Eine solche Allgemeinheit ist bei der Betrachtung der Beleuchtung des Saturnsphäroides natürlich nicht möglich. Es wird sich aber herausstellen, dass eine etwaige Unsicherheit in dieser Beziehung ziemlich gleichgültig ist, weil sie sich nur in sehr verkleinertem Massstabe in den Beobachtungen aussprechen kann. Die Albedo des Planeten ist freilich unter diesen Umständen nicht einwurfsfrei zu bestimmen, sie wäre es nur dann, wenn man sich über das geltende photometrische Grundgesetz entschieden hätte. Es wäre demnach zu untersuchen, welche Annahme in dieser Beziehung zur Zeit die meiste Wahrscheinlichkeit für sich hat. Ich habe mich hierüber in der „Vierteljahrsschrift“ geäußert und will hier nur, in directem Anschluss an das Folgende, hervorheben, dass ich stets zwei Grundgesetze verfolgt habe, welche mir die Grenzen anzugeben scheinen, innerhalb welcher sich das unbekannte wahre Gesetz bei Saturn bewegen dürfte. Bezeichnet man die Winkel, welche die Normale eines beleuchteten Elementes ds mit der Richtung nach der Sonne resp. Erde bildet, mit i und ε , so ist die Lichtmenge, welche ds der Erde zusendet, zufolge der Lambert'schen Formel proportional mit

$$ds \cdot \cos i \cos \varepsilon$$

und nach dem a. a. O. für manche Zwecke empfohlenen Gesetze proportional mit

$$ds \cdot \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon}$$

Die erste Formel giebt eine allmähliche Abnahme des Lichtes auf der scheinbaren Planetenscheibe von der Mitte bis zum Rande, wo die Helligkeit 0 stattfindet. Die zweite Formel dagegen giebt, da für die von der Sonne entferneren Planeten Jupiter, Saturn etc. i und ε nicht wesentlich verschieden von einander sind, eine überall gleichmässig helle Scheibe. Ein Anblick der grossen Planeten durch ein besseres Fernrohr dürfte zu Gunsten der zweiten Annahme entscheiden. Ich habe aber trotzdem die Rechnungen auch für das Lambert'sche Gesetz durchgeführt und zwar aus dem oben angeführten Grunde und dann auch, um mit den älteren Arbeiten in dieser Richtung in Contact zu bleiben.

Zunächst war die Beleuchtung eines Rotationsellipsoides zu studiren, wobei die Rücksicht auf eine leichte practische Anwendung massgebend sein musste. Da diese bisher nicht behandelte Aufgabe zugleich die Hauptsache ist bei der Photometrie des Jupiter und Uranus, so habe ich die Rücksicht auf eine solche Anwendung nicht aus dem Auge gelassen.

Die folgenden Entwicklungen sind in zwei Hauptabschnitte getheilt. Der erste behandelt allgemein die Beleuchtung eines Rotationsellipsoides, während sich der zweite ausschliesslich mit dem Planeten Saturn beschäftigt. Schliesslich habe ich alle Zahlentabellen, welche bei der wirklichen Anwendung der abgeleiteten Formeln von wesentlichem Nutzen sein dürften, zusammengestellt. Noch möchte ich erwähnen, dass der Anhang eine Aufgabe bespricht, deren Lösung leicht und längst bekannt ist, die aber durch die Erleichterung, welche die dazu gehörenden Tabellen gewähren, vielleicht einiges Interesse darbieten wird.

1. Abschnitt.

Beleuchtung eines Rotationsellipsoides.

1.

Die grosse Halbaxe des Ellipsoides sei a , b die Rotationsaxe. In die letztere werde die z Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems gelegt, dessen Anfang im Mittelpunkt des Ellipsoides liegt. Es werde ferner angenommen, dass die Entfernung von Sonne und Erde von dem Planeten als sehr gross gegenüber den Dimensionen des letzteren angesehen werden kann; geometrisch heisst das: die der Sonne resp. der Erde entsprechenden Polarebenen des Ellipsoides gehen durch den Mittelpunkt des letzteren. Die Lichtmenge dQ , welche ein Oberflächenelement ds der Erde zusendet, wird sein:

$$dQ = I' \cdot ds \cdot f(i, \epsilon) \quad (1)$$

wenn I' eine Constante und $f(i, \epsilon)$ das photometrische Grundgesetz, welches eine Abhängigkeit des Incidenzwinkels i und des Emanationswinkels ϵ ausspricht, bedeutet. Um die Gesammtlichtmenge zu erhalten, welche der Planet der Erde zusendet, ist dQ über alle ds zu summiren, die zu gleicher Zeit von der Sonne beleuchtet und von der Erde aus gesehen werden. Die

dem entsprechenden Integrationsgrenzen lassen sich durch folgendes Verfahren leicht angeben.

Es werde concentrisch mit dem Ellipsoid eine Kugel mit dem Radius 1 gelegt. Der unendlich schmale Kegel, dessen Spitze im Coordinatenanfang liegt und welcher aus dem Ellipsoid das Element ds ausschneidet, möge auf der Kugel die Fläche $d\sigma$ begrenzen.

Bezeichnet dann ρ die Entfernung des Elementes ds vom Coordinatenanfang, so ist

$$ds = d\sigma \cdot \frac{\rho^2}{M}; \quad M = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}} \quad (2)$$

Die Polarebenen der Sonne und Erde schneiden die Kugel in zwei grössten Kreisen und es ist also dQ in Bezug auf alle Kugelelemente zu summiren, welche von diesen beiden Kreisen begrenzt werden.

Bezeichnet A, B, C resp. A', B', C' die Richtungswinkel der Geraden Planet-Erde und Planet-Sonne, so sind die Gleichungen der Polarebenen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x \cos A}{a^2} + \frac{y \cos B}{a^2} + \frac{z \cos C}{b^2} &= 0 \\ \frac{x \cos A'}{a^2} + \frac{y \cos B'}{a^2} + \frac{z \cos C'}{b^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

während die Ausdrücke für den Emanations- und Incidenzwinkel sich so stellen:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= M \cdot \left(\frac{x}{a^2} \cos A + \frac{y}{a^2} \cos B + \frac{z}{b^2} \cos C \right) \\ \cos i &= M \cdot \left(\frac{x}{a^2} \cos A' + \frac{y}{a^2} \cos B' + \frac{z}{b^2} \cos C' \right) \end{aligned}$$

Es sei gleich hier bemerkt, dass es später vortheilhaft sein wird, statt A', B', C' den Winkel l' einzuführen durch die Relationen:

$$\begin{aligned} \cos A' &= \sin C' \cos l' \\ \cos B' &= \sin C' \sin l' \end{aligned}$$

Die bisher ganz willkürlich gelassenen x und y Axen unseres Coordinatensystems legen wir nun so, dass die Richtung nach der Erde in die xz Ebene fällt. Es ist dann also $B = 90^\circ$ und $C = 90^\circ - A$. Aus

(3) ergeben sich die Richtungswinkel μ, ν, π und μ', ν', π' der Normalen der beiden Polarebenen:

$$\begin{aligned}\cos \mu &= \gamma \cdot \frac{\cos A}{a^2}; & \cos \mu' &= \gamma' \cdot \frac{\cos A'}{a'^2} \\ \cos \nu &= 0 & ; & \cos \nu' &= \gamma' \cdot \frac{\cos B'}{a'^2} \\ \cos \pi &= \gamma \cdot \frac{\sin A}{b^2}; & \cos \pi' &= \gamma' \cdot \frac{\cos C'}{b'^2}\end{aligned}$$

wo selbstverständlich:

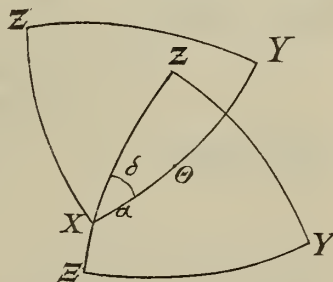
$$\begin{aligned}\gamma &= 1 : \sqrt{\frac{\cos^2 A}{a^4} + \frac{\sin^2 A}{b^4}} \\ \gamma' &= 1 : \sqrt{\frac{\sin^2 C'}{a'^4} + \frac{\cos^2 C'}{b'^4}}\end{aligned}$$

Es soll nun ein zweites Coordinatensystem X, Y, Z mit demselben Anfang wie das erste, eingeführt werden. Die X Axe desselben falle mit der Normalen der Polarebene der Erde zusammen. Die Normale der Polarebene der Sonne, welche mit der neuen X Axe den Winkel α bilde, liege in der XY Ebene des neuen Systems. Bezeichnet noch δ den Winkel zwischen den beiderseitigen xy Ebenen, so ergeben sich zunächst die Beziehungen zwischen den Coordinaten xyz des ersten in der nebenstehenden Figur mit $\bar{x}YZ$ bezeichneten und XYZ des zweiten Systemes:

$$\left. \begin{aligned}x &= \cos \mu \cdot X - \sin \mu \cos \delta \cdot Y - \sin \mu \sin \delta \cdot Z \\ y &= \quad \quad + \quad \sin \delta \cdot Y - \quad \cos \delta \cdot Z \\ z &= \sin \mu \cdot X + \cos \mu \cos \delta \cdot Y + \cos \mu \sin \delta \cdot Z\end{aligned} \right\} (4)$$

Führt man schliesslich die Winkel ϑ und ω ein:

$$\begin{aligned}X &= \rho \sin \vartheta \cos \omega \\ Y &= \rho \sin \vartheta \sin \omega \\ Z &= \rho \cos \vartheta\end{aligned}$$



so hat man die Summation von dQ auf dieselben Integrationsgrenzen in Bezug auf ϑ und ω zurückgeführt, die bei der gewöhnlichen Ableitung der Lambert'schen Beleuchtungsformel für Kugeln benutzt

werden. Die Grenzen der Integration sind aber für ϑ : 0 bis π und für ω : $\alpha - \frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$. Die Lichtmenge Q , welche das ganze Ellipsoid der Erde zusendet, ist also:

$$Q = I' \cdot \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \cdot f(i, \varepsilon) \cdot \frac{\varrho^3}{M} \quad (5)$$

Nach sehr einfachen Reductionen aber findet sich leicht:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon &= \frac{M}{\gamma} \cdot \varrho \sin \vartheta \cos \omega \\ \cos i &= \frac{M}{\gamma'} \cdot \varrho \sin \vartheta \cos(\omega - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Um schliesslich alle Grössen unter den Integralzeichen durch die Integrationsvariablen ausgedrückt zu erhalten bemerken wir, dass

$$1 = \frac{\varrho^2}{a^2} + z^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}, \quad \frac{1}{M^2} = \frac{\varrho^2}{a^4} + \frac{z^2(a^4 - b^4)}{a^4 b^4}$$

woraus folgt:

$$\varrho = \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{\varrho}\right)^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2}}}; \quad M\varrho = \frac{a^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{\varrho}\right)^2 \cdot \frac{a^4 - b^4}{b^4}}} \quad (7)$$

$\frac{z}{\varrho}$ wird mit Hülfe der letzten Gleichung (4) bestimmt. Danach hat man zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} p &= \sin \mu \cos \omega + \cos \mu \sin \omega \cos \delta \\ q &= \cos \mu \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

woraus folgt

$$\frac{z}{\varrho} = p \sin \vartheta + q \cos \vartheta$$

Die Gleichungen (5)—(8) führen die gestellte Aufgabe auf die Berechnung eines Doppelintegrals zurück, welche wir nun in den beiden in der Einleitung angegebenen Fällen wirklich durchführen wollen. Zuerst soll das Lambert'sche Gesetz verfolgt werden. Hier ist zu setzen:

$$f(i, \varepsilon) = \cos i \cos \varepsilon$$

Die zugehörige Lichtmenge Q_L wird dann:

$$Q_L = \frac{\Gamma \cdot a^6}{\gamma \gamma'} \cdot \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\omega \cdot \cos \omega \cos(\omega - \alpha) \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 \vartheta d\vartheta}{\left[1 + \frac{z^2}{\varrho^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2}\right]^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{z^2}{\varrho^2} \cdot \frac{a^4 - b^4}{b^4}}} \quad (\text{I})$$

Ferner soll, wie bereits erwähnt, in zweiter Linie als photometrisches Grundgesetz angenommen werden:

$$f(i, \varepsilon) = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon}$$

Dasselbe giebt für die zugehörige Lichtmenge Q_N :

$$Q_N = \Gamma \cdot a^4 \cdot \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega \cos \omega \cos(\omega - \alpha)}{\gamma' \cos \omega + \gamma \lambda \cos(\omega - \alpha)} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{\left[1 + \frac{z^2}{\varrho^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2}\right]^2} \quad (\text{II})$$

Es wird sich jetzt darum handeln die Integrale (I) und (II) für die numerische Rechnung herzurichten. Es wird hierbei die Rücksicht auf die im Planetensystem wirklich vorkommenden Fälle massgebend sein müssen. Bei den kleineren Planeten Mercur, Venus und Mars kann α zum Theil alle möglichen Werthe zwischen 0^0 und 180^0 annehmen; dagegen ist die Abplattung bei ihnen so klein, dass eine solche überhaupt noch nicht nachgewiesen ist. Man wird deshalb unbedenklich diese Planeten für alle Zwecke der Photometrie als kugelförmig betrachten dürfen. Wollte man indess auf die Abplattung Rücksicht nehmen, so hätte man nach Potenzen derselben zu entwickeln und etwa das erste Glied einer solchen Entwicklung mitzunehmen. Diese Rechnung bietet nicht die mindesten Schwierigkeiten dar, weshalb ich die hier auftretenden Ausdrücke unterdrücke. Anders verhält es sich mit den grossen Planeten. Hier haben die Abplattungen zum Theil sehr beträchtliche Grössen und eine Entwicklung nach Potenzen derselben wäre nicht am Platze. Dagegen tritt hier ein anderer Umstand ein. Der Winkel α ist bei allen diesen Planeten klein und die aus der Phase entstehende Verminderung von Q ist so unbedeutend, dass sie, ausser vielleicht bei Jupiter, unbedenklich vernachlässigt werden kann. Es soll indess im

Folgenden nur angenommen werden, dass die dritten Potenzen von α weggelassen werden können. Unter dieser Voraussetzung nun sollen die Formeln weiter entwickelt werden.

2.

Ich beginne damit in (I) $\alpha = 0$ zu setzen. Das Integral lässt sich dann in endlicher Form darstellen, welche Form der weiteren Entwicklungen wegen am besten auf folgendem Wege erreicht wird. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}; \quad k_1^2 = \frac{a^4 - b^4}{b^4}$$

Dann ist in dem Ausdrucke

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{(1 + k^2 \xi^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 \xi^2}} = \frac{1}{(1 + k^2)^2 (1 + k_1^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{k^2}{1 + k^2} (1 - \xi^2)\right]^2 \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{1 + k_1^2} (1 - \xi^2)}}$$

$\frac{k^2}{1 + k^2} (1 - \xi^2)$ und $\frac{k_1^2}{1 + k_1^2} (1 - \xi^2)$ jederzeit kleiner als 1 und man kann also die Potenzreihe ansetzen:

$$\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (1 - \xi^2)^n; \quad \xi = p \sin \vartheta + q \cos \vartheta$$

Die Formel (I) wird so:

$$Q_L^0 = \frac{\Gamma a^6}{\gamma^2} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\omega \cdot \cos^2 \omega \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta (1 - \xi^2)^n$$

was man auch schreiben kann:

$$Q_L^0 = \frac{\Gamma a^6}{\gamma^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \cdot \binom{n}{\nu} \mathfrak{R}_\nu; \quad \mathfrak{R}_\nu = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\omega \cos^2 \omega \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \cdot \xi^{2\nu} \cdot d\vartheta$$

Zufolge des Werthes von ξ erhält man weiter:

$$\xi^{2\nu} = \sum_{\mu=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{\mu} \cdot p^\mu q^{2\nu-\mu} \cdot \sin^\mu \vartheta \cos^{2\nu-\mu} \vartheta.$$

und da durch die Integration nach ϑ die Glieder mit ungeraden μ verschwinden, so wird:

$$\mathfrak{R}_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \binom{2\nu}{2\mu} p^{2\mu} q^{2\nu-2\mu} \cdot \cos^2 \omega \, d\omega \int_0^{\pi} \sin^{2\mu+2} \vartheta \cdot \cos^{2\nu-2\mu} \vartheta \cdot d\vartheta$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\sin \mu = r, \quad \cos \mu \cos \delta = s \tag{1a}$$

so dass also $p = r \cos \omega + s \sin \omega$ wird, und setzt den bekannten Werth des zweiten Integrales ein, so kann man schreiben:

$$\mathfrak{R}_\nu = 2 \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2\mu} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu - 2\mu - 1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu + 3)} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2\mu + 2) q^{2\nu-2\mu} \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \omega (r \cos \omega + s \sin \omega)^{2\mu} \, d\omega$$

Das hier noch auftretende Integral, das für den Augenblick I heissen möge, kann man leicht ausführen, wenn man

$$\begin{aligned} r &= m \cos \epsilon \\ s &= m \sin \epsilon \end{aligned}$$

setzt. Es wird dann

$$I = m^{2\mu} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \omega \cdot \cos^{2\mu} (\omega - \epsilon) \, d\omega$$

Die einfache Integration ausgeführt, indem man berücksichtigt, dass

$$I = m^{2\mu} \left\{ \sin^2 \epsilon \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2\mu} x \, dx + (\cos^2 \epsilon - \sin^2 \epsilon) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2\mu+2} x \, dx \right\}$$

ergibt

$$I = \pi \cdot m^{2\mu} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots 2\mu - 1}{2 \cdot 4 \cdots 2\mu + 2} \cdot \left\{ (2\mu + 1) \cos^2 \epsilon + \sin^2 \epsilon \right\}$$

oder in etwas anderer Form:

$$I = \pi \cdot m^{2\mu-2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots 2\mu - 1}{2 \cdot 4 \cdots 2\mu + 2} \cdot \left\{ (2\mu + 1) r^2 + s^2 \right\}$$

Substituiert man dies in dem obigen Ausdruck für \mathfrak{R}_ν so wird nach einfacher Rechnung:

$$\mathfrak{R}_\nu = 2\pi \cdot \frac{1}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \times \left\{ \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (r^2+s^2)^\mu \cdot q^{2\nu-2\mu} + 2r^2 \sum_{\mu=0}^{\nu} \mu \cdot \binom{\nu}{\mu} (r^2+s^2)^{\mu-1} \cdot q^{2\nu-2\mu} \right\}$$

Die erste Summe ist offenbar $= (r^2+s^2+q^2)^\nu$, die zweite ist $\frac{d}{d(r^2)} (r^2+s^2+q^2)^\nu = \nu \cdot (r^2+s^2+q^2)^{\nu-1}$ und da nach der Definition der betreffenden Grössen (1a) und (8) des vorigen Artikels $r^2+s^2+q^2=1$ ist, so wird

$$\mathfrak{R}_\nu = \frac{2\pi}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \cdot (1+2\nu r^2) \text{ und schliesslich}$$

$$Q_L^o = \frac{\Gamma a^6}{\gamma^2} \pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \cdot \frac{2+4\nu r^2}{(2\nu+1)(2\nu+3)}$$

Diese Doppelsumme kann aber sofort durch ein ausführbares Integral angegeben werden. Da nämlich:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \cdot \frac{1}{2\nu+1}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \cdot x^2 dx = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \cdot \frac{1}{2\nu+3}$$

so findet sich:

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \cdot \frac{2+4\nu r^2}{(2\nu+1)(2\nu+3)}$$

$$= (1-r^2) \int_0^1 (1-x^2)^n dx + (3r^2-1) \cdot \int_0^1 (1-x^2)^n x^2 dx$$

Hält man dann weiter an der Bedeutung des Entwicklungskoeffizienten γ_n fest so wird:

$$Q_L^o = \pi \cdot \frac{\Gamma a^6}{\gamma^2} \left\{ (1-r^2) M + (3r^2-1) N \right\}$$

wenn gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} M &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+k^2x^2)^2 \sqrt{1+k_1^2x^2}} \\ N &= \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+k^2x^2)^2 \sqrt{1+k_1^2x^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Nach den im Artikel 1) abgeleiteten Formeln ist aber:

$$r^2 = \sin^2 \mu = \gamma^2 \cdot \frac{\sin^2 A}{b^4}; \quad \cos^2 \mu = \gamma^2 \cdot \frac{\cos^2 A}{a^4}; \quad \gamma^2 = 1 : \left(\frac{\cos^2 A}{a^4} + \frac{\sin^2 A}{b^4} \right)$$

Hiermit kann man nun die Berechnung von Q_L^0 in folgender einfachen Weise zusammenfassen. Man setze:

$$\frac{M-N}{2} = P; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^4 N = R \quad (2)$$

dann ergibt sich

$$Q_L^0 = 2 \pi a^2 \cdot I' \cdot \{ P \cos^2 A + R \sin^2 A \} \quad (I)$$

Hieraus folgt für $A = 0$, also für die Lichtmenge in dem Falle, dass die Erde im Aequator des Planeten stände:

$$Q_L^0(0) = 2 \pi a^2 I' \cdot P \quad (Ia)$$

Die Integrale M und N hängen nur von der Abplattung ab; sie können deshalb ein für allemal berechnet werden. Es ist hierbei nicht unwichtig zu bemerken, dass sich dieselben nach allbekannten einfachen Methoden in geschlossener Form angeben lassen. Setzt man nämlich

$$\frac{b}{a} = \cos \varphi$$

so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{1}{2} \cos^2 \varphi \left\{ 1 - \frac{2 + \cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \\ N &= -\frac{1}{2} \frac{\cos^4 \varphi}{\sin^2 \varphi} \left\{ 1 - \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ich habe nun nach Formel (2) und (3) für einige Werthe von $\frac{a}{b}$, welche die bei den grossen Planeten vorkommenden Abplattungen umspannen, P und R berechnet. Man findet dieselben in Tafel I zusammengestellt. Es wird vielleicht nicht unnöthig sein zu bemerken, dass für $\frac{a}{b} = 1$, $\log P = \log R = 9.5229 - 10$ wird, wie man sich leicht überzeugt.

Für Jupiter ist $\frac{a}{b} = 1.0612$ zu setzen und hiermit ergibt die Tafel

$$\log P = 9.4918 - 10; \quad \log R = 9.5330 - 10$$

Für Saturn ist $\frac{a}{b} = 1.1222$. Wegen des Folgenden habe ich gleich

$$Z = P \cos^2 A + R \sin^2 A$$

für die eventuell in Frage kommenden Werthe von A , d. h. von $A = 0$ bis $A = 30^\circ$ berechnet. Die Logarithmen von Z finden sich ebenfalls in Tabelle I mit aufgeführt.

3.

Es soll nun der allgemeinere Fall behandelt werden, wo a nicht gleich 0 aber doch so klein ist, dass a^3 vernachlässigt werden kann. Es wurde schon oben bemerkt, dass diese Voraussetzung für alle Fälle der Praxis ausreichen wird. Wie eine flüchtige Betrachtung der Entwicklungen des letzten Artikels zeigt, kann man sofort ansetzen:

$$Q_L = \frac{\Gamma a^6}{\gamma \gamma'} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \mathfrak{R}_\nu$$

$$\mathfrak{R}_\nu = 2 \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2\mu} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu - 2\mu - 1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu + 3)} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2\mu + 2) q^{2\nu - 2\mu} \cdot I'$$

$$I' = \int_{-\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega \cos(\omega - \alpha) (r \cos \omega + s \sin \omega)^{2\mu} d\omega \quad (1)$$

Entwickelt man I' nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von α und bleibt bei α^2 stehen,¹⁾ so wird:

$$I' = I \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + \alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \omega \sin \omega (r \cos \omega + s \sin \omega)^{2\mu} d\omega$$

was man bis zu dem angegebenen Genauigkeitsgrad schreiben kann:

$$I' = I \cos \alpha + K \sin \alpha$$

$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \omega \sin \omega (r \cos \omega + s \sin \omega)^{2\mu} d\omega$$

Auf K lässt sich dieselbe Entwicklungsmethode anwenden, welche im vorigen Artikel benutzt worden ist. Behält man die dort gebrauchte Bezeichnung bei, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_\nu &= \frac{2\pi}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \left\{ \cos \alpha \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} m^{2\mu} q^{2\nu-2\mu} \right. \\ &\quad \left. + 2 m^2 \cos \varepsilon \cos(\varepsilon - \alpha) \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} \mu m^{2\mu-2} \cdot q^{2\nu-2\mu} \right\} \end{aligned}$$

oder, wenn man die Summation wie früher ausführt:

$$\mathfrak{R}_\nu = \frac{2\pi}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \left\{ \cos \alpha + 2 m^2 \cos \varepsilon \cos(\alpha - \varepsilon) \cdot \nu \right\}$$

Man kann diese Gleichung durch Einführung von σ besser schreiben:

$$\sigma^2 = r^2 + s \cdot r \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

$$\mathfrak{R}_\nu = \frac{2\pi}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \cos \alpha \left\{ 1 + 2 \sigma^2 \nu \right\}$$

Dieses \mathfrak{R}_ν unterscheidet sich von dem im vorigen Artikel benutzten \mathfrak{R}_ν nur durch den Factor $\cos \alpha$ und dadurch, dass an Stelle von r , σ tritt. Lässt man also die Bedeutung der früheren Ausdrücke M , N , P und R gelten, so kann gesetzt werden:

$$Q_L = \pi \cdot \frac{\Gamma \alpha^6}{\gamma \gamma'} \cos \alpha \left\{ (1 - \sigma^2) M + (3 \sigma^2 - 1) N \right\} \quad (3)$$

1) Die Mitnahme weiterer Glieder macht übrigens keine Schwierigkeit.

Für die numerische Berechnung lässt sich dieser Ausdruck noch wesentlich vereinfachen. Da nämlich war:

$$r = \sin \mu; \quad s = \cos \mu \cos \delta$$

so folgt aus (2)

$$\sigma^2 \cos \alpha = \sin \mu \{ \sin \mu \cos \alpha + \cos \mu \sin \alpha \cos \delta \}$$

Aus den in Artikel 1 eingeführten Grössen erhellt aber:

$$\cos \pi' = \sin \mu \cos \alpha + \cos \mu \sin \alpha \cos \delta$$

$$\cos \alpha = \cos \mu \cos \mu' + \sin \mu \cos \pi'$$

Hierdurch wird

$$(1 - \sigma^2) \cos \alpha = \cos \mu \cos \mu'; \quad \sigma^2 \cos \alpha = \sin \mu \cos \pi'$$

Ferner folgt aus Artikel 1:

$$\cos \mu \cos \mu' = \gamma \gamma' \cdot \frac{\cos A \cos A'}{a^4}$$

$$\sin \mu \cos \pi' = \gamma \gamma' \cdot \frac{\sin A \cos C'}{b^4}$$

und infolge dessen:

$$Q_L = 2 \pi I a^2 \left\{ \frac{M-N}{2} \cos A \cos A' + \frac{a^4 \sin A \cos C'}{b^4} N \right\}$$

und mit Benutzung der Gleichungen (2) des vorigen Artikels:

$$Q_L = 2 \pi I a^2 \{ P \cos A \cos A' + R \sin A \cos C' \} \quad (\text{I})$$

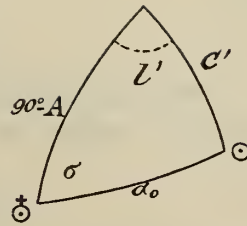
welche Formel an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt. Wenn auch ihre Berechnung so gut wie gar keine Arbeit macht, so wird die Rücksicht auf die wenig grosse Genauigkeit photometrischer Beobachtungen doch dazu auffordern noch einen Schritt weiter zu gehen und dadurch selbst die geringe erforderte Rechnung ganz zu vermeiden.

Betrachten wir das sphärische Dreieck, welches aus einer um den Koordinatenanfang als Mittelpunkt beschriebenen Kugel von den Richtungen nach Sonne, Erde und der Z-Axe des Koordinatensystems herausgeschnitten wird. Bezeichnet α_0 den sogenannten Phasenwinkel, also den Winkel am Planeten im Dreiecke Erde—Sonne—Planet und σ den Winkel, den die Ebene Planet—Erde—Sonne mit der XZ-Ebene bildet, so ist:

$$\begin{aligned} \cos A' &= \sin C' \cos l' = \cos \alpha_0 \cos A - \sin \alpha_0 \sin A \cos \sigma \\ \cos C' &= \cos \alpha_0 \sin A + \sin \alpha_0 \cos A \cos \sigma \end{aligned}$$

also auch:

$$\begin{aligned} \cos A \cos A' &= \cos \alpha_0 \cos^2 A - \sin \alpha_0 \sin A \cos A \cos \sigma \\ \sin A \cos C' &= \cos \alpha_0 \sin^2 A + \sin \alpha_0 \sin A \cos A \cos \sigma \end{aligned}$$



Demzufolge wird die Gleichung (I):

$$Q_L = 2\pi \Gamma a^2 \{ (P \cos^2 A + R \sin^2 A) \cos \alpha_0 + (R - P) \sin \alpha_0 \sin A \cos A \cos \sigma \}$$

Im Allgemeinen scheint nun diese Gleichung kein besonderes Interesse zu verdienen. Sie thut es aber in Anbetracht der Umstände, welche die grossen Planeten darbieten. Das zweite Glied nämlich kann hier unbedenklich vernachlässigt werden. Bei Jupiter und Uranus ist schon $\sin \alpha_0 \sin A$ ein verschwindend kleiner Bruch, aber auch bei Saturn macht das ganze zweite Glied in Folge der Kleinheit der Differenz $R - P$ nur einen Bruchtheil von 1⁰/₁₀ des ersten Gliedes aus. Man wird demnach wohl stets mit der Formel ausreichen:

$$Q_L = 2\pi \Gamma a^2 \cos \alpha_0 \{ P \cos^2 A + R \sin^2 A \} \quad \text{(II)}$$

Bezeichnet noch $Q_L^0(0)$ die Lichtmenge für den Fall $\alpha_0 = 0$ und $A = 0$, also für den Fall, dass Erde und Sonne vom Planeten gesehen genau in derselben Richtung und zwar in der Aequatorebene erscheinen, so ist:

$$Q_L^0(0) = 2\pi \Gamma a^2 \cdot P$$

und wenn man

$$Z(A) = \cos^2 A + \frac{R}{P} \sin^2 A$$

nennt, so kann man schliesslich schreiben:

$$Q_L = Q_L^0(0) \cos \alpha_0 \cdot Z(A) \quad \text{(IIa)}$$

Den Logarithmus von $Z(A)$ für Saturn habe ich ebenfalls in Tafel I aufgenommen.

4.

Ich gehe nun dazu über, die Formel (II) des Artikels 1 zu entwickeln. Ausser den bereits benutzten Bezeichnungen:

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}; \quad \frac{z}{\rho} = p \sin \vartheta + q \cos \vartheta$$

werde noch gesetzt

$$p = r \cos \eta; \quad q = r \sin \eta$$

Dann wird die zu behandelnde Gleichung:

$$Q_N = I' a^4 \cdot \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega \cdot \cos \omega \cos(\omega - \alpha)}{\gamma' \cos \omega + \gamma \lambda \cos(\omega - \alpha)} \cdot I; \quad I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{[1 + r^2 k^2 \sin^2(\vartheta + \eta)]^2}$$

Der Werth von I findet sich sofort:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(x - \eta) dx}{(1 + r^2 k^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 + k^2 q^2}{[1 + k^2(p^2 + q^2)]^{\frac{3}{2}}}$$

Setzt man noch, anschliessend an die Gleichungen (8) Art. 1, wobei eine Verwechslung des neu eingeführten ν mit dem früher gebrauchten Winkel wohl nicht zu befürchten ist:

$$\left. \begin{aligned} \rho \sin \nu &= \sin \mu \\ \rho \cos \nu &= \cos \mu \cos \delta \\ \sigma &= \lambda \frac{\gamma}{\gamma'} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

so kann man schreiben:

$$Q_N = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 + k^2 q^2}{\gamma'} \cdot I' a^4 \cdot \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega \cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega + \sigma \cos(\omega - \alpha)} \cdot \frac{d\omega}{[1 + k^2 q^2 + k^2 \rho^2 \sin^2(\nu + \omega)]^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

Setzt man hier zuerst wieder $\alpha = 0$, so hat man, da dann $\gamma' = \gamma$ und $\sigma = \lambda$ wird:

$$Q_N^0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1+k^2 q^2}{\gamma} \cdot \frac{\Gamma a^4}{(1+\lambda)} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega d\omega}{[1+k^2 q^2+k^2 \varrho^2 \sin^2(\nu+\omega)]^{\frac{3}{2}}}$$

und da sich das Integral sofort ausführen lässt:

$$Q_N^0 = \pi \cdot \frac{\Gamma a^4}{\gamma(1+\lambda)} \cdot \frac{\sqrt{1+k^2 q^2+k^2 \varrho^2 \cos^2 \nu}}{1+k^2(q^2+\varrho^2)}$$

Weil nun weiter $q^2 + \varrho^2 = 1$, $q^2 + \varrho^2 \cos^2 \nu = \cos^2 \mu$ und ferner nach Art. 1

$$\cos \mu = \gamma \cdot \frac{\cos A}{a^2}, \quad \gamma = \frac{a^2}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^4}{b^4} \sin^2 A}}$$

so erhält man sofort

$$Q_N^0 = \frac{\pi ab \Gamma}{1+\lambda} \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A}$$

Ist weiter $Q_N^0(0)$ die Lichtmenge für $A = 0$ so ist

$$Q_N^0(0) = \frac{\pi ab \Gamma}{1+\lambda} \quad (3a)$$

und also:

$$Q_N^0 = Q_N^0(0) \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A} \quad (3)$$

Die Ableitung dieser Formel ist nur zur Controlle geschehen. Denn da für $a = 0$ die Planetenscheibe sich als gleichmässig helle Ellipse mit den Halbaxen a und b' darstellt, so muss sein

$$Q_N^0 = \frac{\pi a b' \Gamma}{1+\lambda}$$

und nun ist in der That

$$b' = a \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 A} = b \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A}$$

Zur Behandlung des allgemeinen Falles, der ebenfalls auf geschlossene Formen führt, werde das Integral in (2) mit I bezeichnet, so dass:

$$Q_N = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+k^2 q^2) \Gamma a^4}{\gamma'} \cdot I \quad (4)$$

Durch Einführung der Hilfsgrössen:

$$\left. \begin{aligned} n \cos \varphi &= 1 + \sigma \cos \alpha \\ n \sin \varphi &= \sigma \sin \alpha \\ \varepsilon^2 &= \frac{k^2 q^2}{1 + k^2 q^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wird:

$$I = \frac{1}{n(1+k^2q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega \cos(\omega-\alpha) d\omega}{\cos(\varphi-\omega) \cdot [1+\varepsilon^2 \sin^2(\nu+\omega)]^{\frac{3}{2}}}$$

Führt man die neue Integrationsvariable $x = \nu + \omega$ ein, benutzt die Identität:

$$\frac{\cos(x-\nu) \cdot \cos(x-\nu-\alpha)}{\cos(x-\nu-\varphi)} = \cos(x-\nu+\varphi-\alpha) + \frac{\sin \varphi \sin(\varphi-\alpha)}{\cos(x-\nu-\varphi)}$$

und setzt zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} K &= \int_{-\frac{\pi}{2}+\nu+\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\nu} \frac{\cos(x-\nu+\varphi-\alpha) dx}{(1+\varepsilon^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \\ L &= \int_{-\frac{\pi}{2}+\nu+\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\nu} \frac{dx}{\cos(x-\nu-\varphi) (1+\varepsilon^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

so wird

$$I = \frac{1}{n(1+k^2q^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ K + \sin \varphi \sin(\varphi-\alpha) L \right\}$$

und schliesslich nach (4):

$$Q_N = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma a^4}{n \gamma' \sqrt{1+k^2q^2}} \left\{ K + \sin \varphi \sin(\varphi-\alpha) L \right\} \quad (7)$$

Das Integral K kann sofort ausgeführt werden. Nach bekannten Methoden und nach kurzer Zwischenrechnung findet sich:

$$\begin{aligned} K &= \cos(\nu+\alpha-\varphi) \left[\frac{\cos \nu}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos^2 \nu}} + \frac{\cos(\nu+\alpha)}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos^2(\nu+\alpha)}} \right] \\ &+ \frac{\sin(\nu+\alpha-\varphi)}{1+\varepsilon^2} \left[\frac{\sin \nu}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos^2 \nu}} + \frac{\sin(\nu+\alpha)}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos^2(\nu+\alpha)}} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

In gleicher Weise kann man L in geschlossener Form darstellen. Zur Erlangung dieser sind allgemein bekannte Reductionen vorzunehmen. Für unsere Zwecke wird es genügen das erhaltene Resultat zu verificiren. Jedenfalls ist es auf diese Weise möglich die Mittheilung etwas verwickelter Formeln zu vermeiden. Zu diesem Zwecke bilde ich also folgende Ausdrücke:

$$X_0 = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 x}}; \quad X_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 x}}$$

$$f = \frac{\cos(\nu + \varphi)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \varphi)}}; \quad f' = \frac{\sin(\nu + \varphi)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \varphi)}}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\varepsilon^2}{\cos(\nu + \varphi)} f^2 \cdot X_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{f}{\cos(\nu + \varphi)} \right)^3 \log \text{nat} \left(\frac{f + X_0}{f - X_0} \right)$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2) \sin(\nu + \varphi)} f'^2 X_1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f'}{\sin(\nu + \varphi)} \right)^3 \log \text{nat} \left(\frac{f' + X_1}{f' - X_1} \right)$$

Dann giebt die Differentiation nach x , die sich recht einfach ausführen lässt:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dx} = \frac{\cos(\nu + \varphi) \cos x}{[\cos^2(\nu + \varphi) - \sin^2 x] (1 + \varepsilon^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dx} = - \frac{\sin(\nu + \varphi) \sin x}{[\cos^2(\nu + \varphi) - \sin^2 x] (1 + \varepsilon^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

und hieraus:

$$\frac{d(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}{dx} = \frac{\cos(\nu + \varphi + x)}{[\cos^2(\nu + \varphi) - \sin^2 x] (1 + \varepsilon^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

und weil

$$\cos(x + \nu + \varphi) \cos(x - \nu - \varphi) = \cos^2(\nu + \varphi) - \sin^2 x$$

so ist man jetzt in der That auf die gewünschte Form gekommen, indem:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \int \frac{dx}{\cos(x - \nu - \varphi) (1 + \varepsilon^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Vorschriften zur Berechnung des bestimmten Integrales L gestalten sich jetzt so: Man setze:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\nu + \varphi)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \varphi)}} &= f; & \frac{\sin(\nu + \varphi)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \varphi)}} &= f' \\ \frac{\cos(\nu + \alpha)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \alpha)}} &= g; & \frac{\sin(\nu + \alpha)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \alpha)}} &= g' \\ \frac{\cos \nu}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 \nu}} &= h; & \frac{\sin \nu}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 \nu}} &= h' \end{aligned}$$

dann ergibt sich:

$$L = \left. \begin{aligned} &\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \varphi)}} f(g + h) - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2) \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \varphi)}} f'(g' + h') \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \varphi)}} \right)^3 \log \frac{(f + g)(f + g')(f + h)(f + h')}{(f - g)(f - g')(f - h)(f - h')} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Gleichungen (7) (8) und (9) enthalten die vollständige und strenge Lösung der gestellten Aufgabe. Es ist vielleicht nicht überflüssig noch hinzuzufügen, dass sich (8) mit Hülfe der eingeführten Grössen einfacher gestalten lässt, nämlich:

$$K = \cos(\nu + \alpha - \varphi)(g + h) + \frac{\sin(\nu + \alpha - \varphi)}{1 + \varepsilon^2} (g' + h') \quad (10)$$

Die gewonnenen Formeln sind, wenn sie auch in sehr übersichtlicher Gestalt erscheinen, doch für eine numerische Rechnung recht weitläufig. Man kann in dieser Beziehung selbstverständlich noch beträchtliche Vereinfachungen erreichen. Diese Absicht soll aber nicht weiter verfolgt werden, weil wir, wie oftmals erwähnt, nur den Fall kleiner α oder sehr kleiner ε zu berücksichtigen haben und hierbei für die Praxis sehr weitgehende Vernachlässigungen gestattet werden sollen. Die für diese Zwecke ausreichenden Formeln lassen sich nun aber in eine äusserst einfache Gestalt bringen.

Zuerst mag der Fall hervorgehoben werden, wo bereits ε^2 fortgelassen werden kann. Die Formeln geben dann die Beleuchtung einer Kugel. Für $\varepsilon^2 = 0$ wird aber:

$$L = \log \cotg \left(\frac{\alpha - \varphi}{2} \right) \cotg \frac{\varphi}{2}$$

$$K = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi \right)$$

$$Q_N = \frac{\pi}{2} \cdot \Gamma a^2 \left\{ \frac{2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi \right) \cos \frac{\alpha}{2}}{n} - \frac{\sin \varphi \sin (\alpha - \varphi)}{n} \log \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} \cotg \frac{\varphi}{2} \right\}$$

Für $\alpha = 0$, also volle Beleuchtung, wird hieraus:

$$Q_N^0 = \pi \cdot \frac{\Gamma a^2}{1 + \lambda}$$

und der Quotient beider Quantitäten wird:

$$\frac{Q_N}{Q_N^0} = \frac{1 + \lambda}{2} \cdot \left\{ \frac{2(1 + \lambda) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{n^2} - \frac{\lambda \sin^2 \alpha}{n^3} \log \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} \cdot \cotg \frac{\varphi}{2} \right\} \quad (11)$$

während nach (5), weil hier $\sigma = \lambda$ ist:

$$n^2 = 1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \alpha$$

Schliesslich verdient aus physikalischen Gründen die Annahme $\lambda = 1$ eine besondere Beachtung. Dann wird aber $n = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$ und $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ und für diesen speciellen Werth:

$$D = \frac{Q_N}{Q_N^0} = 1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \log \cotg \frac{\alpha}{4} \quad (11a)$$

Die zuletzt angeführten Formeln für die Beleuchtung einer Kugel habe ich bereits in dem oben citirten Aufsätze in der „Vierteljahrschrift“ abgeleitet. Es wird für manche Zwecke bequem sein, wenn man den Werth (11a) aus einer Tafel entnehmen kann. Eine solche Tabelle (II) ist am Schlusse dieser Abhandlung gegeben. Ich habe der leichteren Interpolation wegen die Zahlen, nicht die Logarithmen, angesetzt.

Wenn wir nun die Verhältnisse der einzelnen grossen Planeten näher betrachten, so ergeben sich für die Anwendung der im Vorstehenden enthaltenen Formeln folgende Vorschriften.

Bei Uranus und Neptun wäre es ganz überflüssig, auf die Phase Rücksicht zu nehmen. Es ist also nach Formel (3) zu rechnen.

Die Abplattung des Saturn ist so beträchtlich, dass es nothwendig wird, in dieser Beziehung keine Vernachlässigungen zuzulassen. Dagegen ist α sehr klein, im Maximum etwa $6\frac{1}{2}$ Grad. So kommt es, dass die vom Saturn der Erde zugesandte Lichtmenge niemals um mehr als etwa um 1% infolge der Phase variirt. Es wäre also bei diesem Planeten ohne Zweifel erlaubt, einfach die Formel (3) anzuwenden. Wesentlich genauer und beinahe ebenso wenig Mühe verursachend ist es jedoch, wenn man die Formel (11) benutzt, hierin aber für Q_N^0 den Werth aus (3) einsetzt. Bezeichnet man demgemäss die rechte Seite von (11) einfach mit D , so wird:

$$Q_N^0(0) = Q_N \cdot \frac{1}{D \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A}} \quad (12)$$

Hierin bedeutet also Q_N die vorhandene Lichtquantität, $Q_N^0(0)$ diejenige für volle Beleuchtung und für den Fall, dass $A = 0$ also die Erde und Sonne in der Aequatorebene des Planeten stände. Die Grösse D kann einfach genug berechnet werden. Bei dem minimalen Einfluss, den sie überhaupt ausübt, wird der specielle Werth von λ gar nicht in Frage kommen und da ausserdem die Annahme $\lambda = 1$ sehr viel für sich hat, soll gesetzt werden:

$$D = 1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \log \cotg \frac{\alpha}{4}$$

Im Folgenden ist Formel (12) durchaus zur Anwendung gekommen. Man findet den Logarithmus von $\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A}$ in Tabelle I mit aufgeführt, während D , wie schon erwähnt, in Tabelle II gegeben ist.

Für Jupiter wird die Reductionsformel noch einfacher. Bei diesem Planeten ist nämlich A in extremen Fällen etwa 3 Grad und $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$ ungefähr 0.1. Demzufolge wird es stets erlaubt sein zu setzen:

$$Q_N^0(0) = Q_N = \frac{\pi a b \Gamma}{1 + \lambda}$$

Das Glied, welches L enthält, ist wegen des kleinen Factors sehr klein und es wird deshalb ohne Zweifel gestattet sein in L , $\epsilon^2 = 0$

zu setzen. Um die Verhältnisse bei K vollständig zu übersehen, muss erst eine kleine Umformung mit diesem Ausdrucke vorgenommen werden.

Mit Hülfe der Gleichungen (8) und (5) kann man K die Gestalt geben:

$$nK = [\cos(\nu + \alpha) + \sigma \cos \nu] \left[\frac{\cos \nu}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 \nu}} + \frac{\cos(\nu + \alpha)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \alpha)}} \right] \\ + \frac{1}{1 + \varepsilon^2} [\sin(\nu + \alpha) + \sigma \sin \nu] \left[\frac{\sin \nu}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 \nu}} + \frac{\sin(\nu + \alpha)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \alpha)}} \right]$$

was man auch so schreiben kann:

$$nK = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \left\{ (\sigma + \cos \alpha) \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 \nu} - \frac{\varepsilon^2 \sin \alpha \sin \nu \cos \nu}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 \nu}} \right\} \\ + \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \left\{ (1 + \sigma \cos \alpha) \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \alpha)} + \sigma \frac{\varepsilon^2 \sin \alpha \sin(\nu + \alpha) \cos(\nu + \alpha)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \alpha)}} \right\}$$

Die beiden mit $\varepsilon^2 \sin \alpha$ multiplicirten Glieder sind bei Jupiter deshalb zu vernachlässigen, weil auch noch $\sin \nu$ und $\sin(\nu + \alpha)$ kleine Brüche sind. Es wird dann:

$$nK = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \left\{ (\sigma + \cos \alpha) \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 \nu} + (1 + \sigma \cos \alpha) \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \alpha)} \right\}$$

Mit Hülfe von (1) und (5) und der in Art. 1 vorkommenden Figur findet sich aber ohne Mühe:

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 \nu} = \frac{\sqrt{1 + k^2 \cos^2 \mu}}{\sqrt{1 + k^2 q^2}}; \quad \frac{1}{1 + \varepsilon^2} = \frac{1 + k^2 q^2}{1 + k^2}$$

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2(\nu + \alpha)} = \frac{\sqrt{1 + k^2 \sin^2 \pi'}}{\sqrt{1 + k^2 q^2}}$$

und hiermit:

$$\frac{nK}{\sqrt{1 + k^2 q^2}} = \frac{1}{(1 + k^2)} \left\{ (\sigma + \cos \alpha) \sqrt{1 + k^2 \cos^2 \mu} + (1 + \sigma \cos \alpha) \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \pi'} \right\}$$

$\cos^2 \mu$ und $\sin^2 \pi'$ darf, dem obigen zufolge, = 1 gesetzt werden, ebenso ist genügend genau $\sigma = \lambda$ und demnach:

$$\frac{nK}{\sqrt{1 + k^2 q^2}} = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{1 + k^2}} (1 + \lambda) = \frac{2b}{a} \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \cdot (1 + \lambda)$$

Setzt man dies in (7) ein, so wird, da im zweiten Gliede die Abplattung vernachlässigt wird,

$$Q_N = \frac{\pi}{2} \cdot I a^2 \cdot \left\{ \frac{b(1+\lambda) \cdot 2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{n^2} - \frac{\sin(\alpha - \varphi) \sin \varphi}{n} \cdot \log \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} \cotg \frac{\varphi}{2} \right\}$$

Setzen wir schliesslich auch in dieser Formel $\lambda = 1$, so ist:

$$Q_N = \frac{\pi}{2} I a b \cdot D$$

Dem früheren analog werden wir $Q_N^0(0) = \frac{\pi}{2} I a b$ annehmen müssen, so dass

$$Q_N^0(0) = Q_N \cdot \frac{1}{D} \quad (13)$$

Die etwas umständliche Ableitung dieser höchst einfachen und leicht zu übersehenden Relation war nicht unnötig zur Erkenntniss dessen, was eigentlich in der obigen Formel vernachlässigt worden ist. Ausserdem dürften die angewandten Formeln andeuten, in welcher Weise auch im allgemeinen Falle eine Umgestaltung der in (7) vorkommenden Grössen erzielt werden kann.

5.

Es ist hier der Ort, über den Begriff der Albedo einige Worte zu sagen. Die gewöhnliche Definition dieses Begriffes ist in Rücksicht auf die Anwendung des Lambert'schen Gesetzes eingerichtet und muss durch eine andere ersetzt werden, wenn andere photometrische Gesetze benutzt werden. Einige Willkür ist natürlich hierbei nicht zu umgehen. Mir scheinen indessen die in dem Folgenden enthaltenen (bereits in meinem Aufsätze in der V.-S. vorkommenden) Vorschläge nicht unzweckmässig zu sein.

Ein Flächenelement $d\sigma$ möge bei senkrechter Beleuchtung von einem leuchtenden Punkte in der Entfernung 1 die Lichtmenge $L \cdot d\sigma$ erhalten. Dann erhält es bei dem Incidenzwinkel i die Lichtmenge $L \cos i \cdot d\sigma$. Denn das beliebige Beleuchtungsgesetz kann so aufgefasst werden, als ob nach demselben nur die Oberflächenelemente Licht empfangen und

wieder abgeben. In der That wurde im Früheren auch für die Lichtmenge dQ , welche von einem Elemente $d\sigma$ ausgesandt wird, der Werth:

$$dQ = \gamma L d\sigma \cdot f(i, \varepsilon) \quad (1)$$

angenommen, wenn man $I' = \gamma L$ setzt. Diese Lichtmenge (1) strahlt also das Element in der Richtung des Emanationswinkels ε aus und alle Elemente einer mit dem Radius 1 um $d\sigma$ beschriebenen Halbkugel erhalten Licht nach Massgabe dieser Formel. Die ganze Halbkugel erhält also die Lichtmenge:

$$2\pi d\sigma \cdot \gamma L \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(i, \varepsilon) \sin \varepsilon d\varepsilon$$

während dem obigen zufolge $d\sigma$ die Lichtmenge $L \cdot d\sigma \cdot \cos i$ empfangen hat. Das Verhältniss μ' der ausgestrahlten zur empfangenen Lichtmenge ist daher:

$$\mu' = 2\pi \gamma \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(i, \varepsilon)}{\cos i} \sin \varepsilon d\varepsilon \quad (2)$$

Dieses μ' entspricht der Grösse, welche Lambert Albedo genannt hat. Man sieht aber, dass im Allgemeinen μ' noch vom Incidenzwinkel i abhängt und die Albedo also keine der betreffenden Substanz eigenthümliche Zahl sondern eine gewisse Funktion von i ist. Nur in dem speciellen Falle, dass $f(i, \varepsilon) = \cos i f_1(\varepsilon)$, wo f_1 eine beliebige Funktion bedeutet, liefert demnach diese Definition der Albedo einen brauchbaren Ausdruck, was u. A. beim Lambert'schen Gesetze stattfindet, bei welchem $f_1(\varepsilon) = \cos \varepsilon$ ist.

Man kann nun selbstverständlich auf sehr verschiedene Weise durch eine neue und genügendere Definition einen dem früheren Begriff Albedo entsprechenden einführen.

Welche Entscheidung man in dieser Beziehung trifft, ist natürlich ziemlich gleichgültig. Es wird aber eine ganz bestimmte Convention dringend erwünscht sein, und ich möchte zu diesem Zwecke folgende Definition der Albedo vorschlagen, die mir aus vielen Gründen die annehmbarste scheint.

Auf den ersten Blick könnte es passend scheinen, unter der Albedo einer Substanz einfach den Werth von μ' für $i = 0$ zu verstehen. Diese Definition ist aber deshalb unpractisch, weil sie einem speciellen Werth von i eine Bevorzugung einräumt, zu welcher gar kein Grund vorliegt. Ich gehe deshalb auf die Mittheilung der aus dieser Definition folgenden Formeln, die sehr leicht hinzuschreiben sind, nicht ein. Vielmehr soll unter der Albedo μ der Mittelwerth sämmtlicher allen möglichen i entsprechenden μ' verstanden werden. Da die Lichtquelle jeden Ort auf einer um $d\sigma$ beschriebenen Halbkugel mit dem Radius 1 annehmen kann, so wird:

$$\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu' \sin i \, di = 2\pi\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} i \, di \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(i, \varepsilon) \sin \varepsilon \, d\varepsilon \quad (3)$$

Für das Lambert'sche Gesetz ist $f(i, \varepsilon) = \cos i \cos \varepsilon$ zu setzen und es wird:

$$\mu = \gamma\pi \quad (4a)$$

Für das zweite im Vorigen zur Anwendung gekommene Gesetz wird:

$$f(i, \varepsilon) = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon}$$

und demzufolge:

$$\mu = 2\pi\gamma \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin i \, di \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon} \, d\varepsilon$$

und nach Ausführung der einfachen Integration:

$$\mu = \frac{\pi\gamma}{\lambda} \cdot \left\{ 1 - \lambda \log \lambda + \frac{(\lambda^2 - 1)}{\lambda} \log(1 + \lambda) \right\} \quad (4)$$

wo die vorkommenden Logarithmen natürliche sind. Danach wird u. A. für $\lambda = 1$, $\mu = \pi\gamma$.

Bezeichnet also der Kürze wegen

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ 1 - \lambda \log \lambda + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \log(1 + \lambda) \right\}$$

und setzt man wieder $I' = \gamma L$ so werden die Gleichungen (4a) und (4):

$$I' = \frac{\mu L}{\pi}$$

$$I' = \frac{\mu L}{\pi} \cdot \frac{1}{\psi(\lambda)}$$

Wendet man dies auf die in den früheren Artikeln gewonnenen Formeln für die Beleuchtung eines Ellipsoides an und zwar Art. 2, (Ia) und Art. 4, (3a), so folgt:

$$\left. \begin{aligned} Q_L^0(0) &= 2 a^2 P \cdot \mu L \\ Q_N^0(0) &= \frac{ab}{1+\lambda} \cdot \frac{\mu L}{\psi(\lambda)} \end{aligned} \right\}$$

L ist die Lichtquantität, welche die Sonne einem Flächenelement des Planeten, welches senkrecht gegen die Sonnenstrahlung steht, zusendet. Hat man also die Lichtquantitäten gleich auf die Entfernung eins, sowohl für die Entfernung Planet – Sonne = r als auch Planet – Erde = A dadurch reducirt, dass man die beobachteten Lichtmengen mit $r^2 A^2$ multiplicirt hat, so ist L die durch photometrische Beobachtungen auf der Erde bestimmte Lichtquantität, welche die Sonne uns zusendet.

Als Beispiel mag der Planet Jupiter genommen werden. Ich benutze die von Zöllner „Photometr. Untersuchungen“ pg. 133 mitgetheilten Beobachtungen. Die dort unter der Rubrik „log reduc. Helligkeit“ angeführten Zahlen können direct als die obigen $Q(0)$ angenommen werden. Die Reduction wegen der Phase wird dem früheren zufolge genügend genau ausgeführt, wenn resp. mit $\frac{1}{\cos \alpha_0}$ und $\frac{1}{D}$ multiplicirt wird.

Auf diese Weise ergibt sich für das Helligkeitsverhältniss Jupiter zu Wega:

α_0	$Q_L^0(0)$	$Q_N^0(0)$
9.0	3.693	3.696
1.2	692	692
4.1	704	705
4.6	671	673
5.1	716	718
8.2	740	743

im Mittel also

$$\log Q_L^0(0) = 3.703 \quad \log Q_X^0(0) = 3.705$$

Nach Zöllner's Messungen ist $\log \frac{\text{Wega}}{\text{Sonne}} = 9.241 - 20$. Es ist also:

$$\log \frac{\text{Jupiter}}{\text{Sonne}} = 2.944 - 10 \text{ resp. } 2.946 - 10$$

und die obigen Gleichungen ergeben:

$$\log(2 a^2 P \mu) = 2.944 - 10; \quad \log\left(\frac{ab}{1+\lambda} \cdot \frac{\mu}{\psi(\lambda)}\right) = 2.946 - 10$$

Hier sind selbstverständlich a und b in der Einheit der Entfernung (also Sonne—Erde) angegeben, sodass:

$$\log a^2 = 3.354 - 10 \quad \log ab = 3.329 - 10$$

und nach Art. 2 $\log P = 9.4918 - 10$

Und hiermit nach Lambert's Gesetz

$$\mu = 0.627$$

während die zweite Formel

$$\frac{\mu}{(1+\lambda)\psi(\lambda)} = 0.415$$

ergiebt. Wird noch $\lambda = 1$ gesetzt, so ist $\psi(\lambda) = 1$ und

$$\mu = 0.830$$

Zöllner erhält mit dem ersten Werthe nahe übereinstimmend $\mu = 0.624$. Der zweite Werth zeigt auf das deutlichste, wie sehr die Albedobestimmungen der Planeten von dem zu Grunde gelegten photometrischen Grundgesetz abhängig sind und wie gewagt es ist, ohne vorherige genaue Untersuchungen rein experimenteller Natur die bei Planeten gefundenen Albedowerthe mit denen irdischer Substanzen zu vergleichen.

Zum Schlusse dieses Abschnittes möchte ich noch darauf aufmerksam machen, dass bei einem Planeten die Photometrie die messende Astronomie wesentlich unterstützen kann. Es ist das der Planet Uranus. Bekanntlich ist es immer noch nicht mit absoluter Sicherheit festgestellt,

ob derselbe eine Abplattung zeigt oder nicht. Während ein Theil der Astronomen behauptet, dass Uranus eine starke Abplattung im ungefähren Betrage von 0.1 habe und dass seine Rotationsaxe nahe in der Ecliptik liege, leugnet ein anderer Theil, wozu ich mich meinen Untersuchungen zufolge auch rechnen muss, diese Abplattung gänzlich, oder doch in der angegebenen Grösse¹⁾. Ist nun wirklich die Abplattung nahe 0.1 und liegt die Rotationsaxe in der Ecliptik, so geben die Formeln Art. 2, (I) und Art. 4, (3) nebst der Tabelle I für $\frac{a}{b} = 1.1111$:

$$\frac{Q_L^0(90)}{Q_L^0(0)} = 1.183; \quad \frac{Q_N^0(90)}{Q_N^0(0)} = 1.111$$

also Variationen in der Lichtquantität von 18 resp. 11 0/0, die sich durch zahlreiche Beobachtungen gewiss feststellen liessen. Freilich müssten sich die Beobachtungen auf die Zeit eines halben Umlaufes des Uranus ausdehnen; dies ist aber auch bei einer micrometrischen Ausmessung der Planetenscheibe erforderlich.

1) Wenn von einigen Seiten der Versuch gemacht worden ist, diese strittige Frage durch blosses Ansehen des Planeten zu lösen, so genügt es, auf die allerbekanntesten optischen Täuschungen hinzuweisen, welche bei der Beurtheilung von Figuren stets stattfinden, um solchen Versuchen, namentlich genauen Messungen gegenüber, jedwedes Gewicht abzusprechen.

2. Abschnitt.

Beleuchtung des Planeten Saturn.

6.

Es wird sich darum handeln, die photometrischen Beobachtungen, die bei beliebiger Stellung des Ringes gemacht sind, auf den Fall zu reduciren, wo die Erde und Sonne in der Ringebene stehen, der Ring also unsichtbar wird. Die Voraussetzungen, die dem Folgenden zu Grunde liegen, sollen sein: Der Ring habe eine äusserst geringe Dicke und liege in der Ebene des Saturnaequators. Hier werde er begrenzt von zwei mit dem Saturnaequator concentrischen Kreisen. Der Radius des äusseren sei a , der des inneren a' . Ferner werde angenommen, dass sowohl die Lichtmengen als auch die scheinbaren Dimensionen des Saturnsystems bereits auf bestimmte Entfernungen z. B. auf die mittlere Opposition reducirt seien.

Das Saturnsphäroid würde sich, wenn die Erde in seiner Aequatorebene stände, einem Beobachter als eine Ellipse mit den Halbachsen a und b zeigen. In Wirklichkeit werden, wenn A den Elevationswinkel der Erde über der Ringebene bedeutet, a und b' die Halbachsen der elliptischen Planetenscheibe sein, wo

$$b' = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 A}; \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (1)$$

Die Ringgrenzen werden sich als mit der Planetenscheibe concentrische Ellipsen projiciren, deren grosse Halbachsen α und α' und deren kleine:

$$\beta = \alpha \sin A; \quad \beta' = \alpha' \sin A$$

sind. Bezeichnet dann R den Flächeninhalt des Ringes (ebenso wie die ganze Figur gleich auf eine zum Visionsradius senkrechte Ebene projicirt gedacht) und Q_R die vom Ringe der Erde zugesandte Lichtmenge, so ist

$$Q_R = R \cdot \Phi(\sin A) \quad (2)$$

wo Φ eine vorerst ganz unbestimmt gelassene Function bedeutet. Nun werden gewisse Theile der Saturnscheibe vom Ringe und umgekehrt verdeckt. Es sei Q_s die Lichtmenge, welche die Saturnscheibe, wäre sie überall frei, uns zusenden würde, F der Flächeninhalt der Ringtheile, welche vom Saturn bedeckt werden und Q_F die Lichtmenge, welche die vom Ringe verdeckten Theile des Saturn für sich allein uns zusenden würden, schliesslich Q_B die Lichtmenge, die das ganze System uns wirklich zusendet. Dann ist offenbar:

$$Q_B = (R - F)\Phi(\sin A) + Q_s - Q_F \quad (3)$$

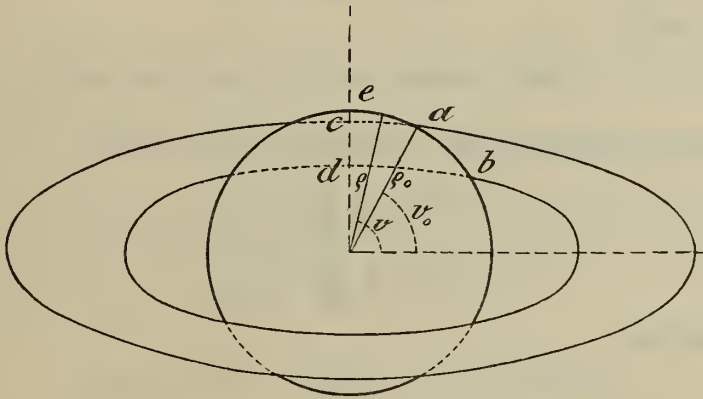
Vorläufig soll auf die Phase und den Schattenwurf keine Rücksicht genommen werden. Es wird also vorausgesetzt, dass Sonne und Erde genau in derselben Richtung stehen.

Zur Berechnung der einzelnen in (3) vorkommenden Grössen bemerken wir zunächst, dass

$$R = \pi(\alpha^2 - \alpha'^2)\sin A$$

Ferner ist (vergl. untenstehende Figur)

$$\frac{1}{2}F = (abcd) = (bde) - (ace)$$



Bezeichnet man mit ϱ und ϱ_1 die demselben Polarwinkel v zugehörigen Radien in der Ringellipse und in derjenigen, welche die Planetenscheibe darstellt, so ist:

$$2(ac e) = \int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}} \rho_1^2 dv - \int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 dv = a^2 b'^2 \int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{b'^2 \cos^2 v + a^2 \sin^2 v} - a^2 \beta^2 \int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\beta^2 \cos^2 v + a^2 \sin^2 v}$$

und zufolge der bekannten Formel:

$$m^2 n^2 \int \frac{dv}{n^2 \cos^2 v + m^2 \sin^2 v} = mn \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{m}{n} \operatorname{tg} v \right)$$

$$2(ac e) = a b' \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a}{b'} \operatorname{tg} v_0 \right) \right\} - a \beta \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a}{\beta} \operatorname{tg} v_0 \right) \right\}$$

Der Winkel v_0 ist ferner definiert durch die Gleichung:

$$\frac{\cos^2 v_0}{a^2} + \frac{\sin^2 v_0}{b'^2} = \frac{\cos^2 v_0}{a^2} + \frac{\sin^2 v_0}{\beta^2},$$

woraus

$$\operatorname{tg} v_0 = \frac{b' \beta}{a \alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 - a^2}{b'^2 - \beta^2}} \quad (4)$$

Setzt man also

$$\operatorname{tg} f = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2 - a^2}{b'^2 - \beta^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b'}{a} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2 - a^2}{b'^2 - \beta^2}}$$

so ergibt sich:

$$2(ac e) = (ab' - a\beta) \frac{\pi}{2} - ab' f + a\beta \varphi$$

In ganz derselben Weise wird man setzen müssen:

$$\operatorname{tg} f' = \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \sqrt{\frac{\alpha'^2 - a^2}{b'^2 - \beta'^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{b'}{a} \cdot \sqrt{\frac{\alpha'^2 - a^2}{b'^2 - \beta'^2}}$$

um zu erhalten

$$2(bde) = (ab' - a'\beta') \frac{\pi}{2} - ab' f' + a'\beta' \varphi'$$

und jetzt ergibt sich:

$$R - F = (a\beta - a'\beta') \frac{\pi}{2} + a\beta \varphi - a'\beta' \varphi' + ab'(f' - f)$$

Nimmt man die Gleichung (1) zu Hülfe, so kann man die Formeln zur Berechnung der im Vorstehenden enthaltenen Hülfsgrößen auch so aufstellen:

$$\mu = \frac{\sqrt{\alpha^2 - a^2}}{b \sqrt{1 + \frac{a^2 e^2 - \alpha^2}{b^2} \sin^2 A}}$$

$$\mu' = \frac{\sqrt{\alpha'^2 - a^2}}{b \sqrt{1 + \frac{a^2 e^2 - \alpha'^2}{b^2} \sin^2 A}}$$

$$\operatorname{tg} f = \mu \sin A \quad \operatorname{tg} \varphi = \mu \sqrt{1 - e^2 \cos^2 A}$$

$$\operatorname{tg} f' = \mu' \sin A \quad \operatorname{tg} \varphi' = \mu' \sqrt{1 - e^2 \cos^2 A}$$

$$R - F = (\alpha^2 - \alpha'^2) \frac{\pi}{2} \sin A + (\alpha^2 \varphi - \alpha'^2 \varphi') \sin A + a^2 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 A} \cdot (f' - f) \quad (5)$$

Nach diesen Formeln wurden die im Folgenden enthaltenen Zahlen berechnet. Ich führe gleich hier an, dass diesen Rechnungen folgende Werthe zu Grunde gelegt worden sind, welche Mittel aus Beobachtungen von Bessel, Kaiser etc. repräsentiren:

$$\log \frac{b}{a} = 9.94993 - 10$$

$$\log \alpha = 0.35853$$

$$\log \alpha' = 0.18242$$

Die letzteren beiden setzen $a=1$ voraus. Die α geben die Grenzen des hellen Ringes an; über den sogenannten dunklen Ring soll weiter unten einiges bemerkt werden.

Ich verfolge nun zuerst den Fall, dass die Saturnscheibe nahezu gleichförmig erleuchtet erscheint. Es soll also das zweite der beiden erwähnten photometrischen Grundgesetze zur Anwendung gelangen. Bezeichnet dann $Q(0)$ die Lichtmenge des Saturnsphäroids für $A=0$, so hat man nach Formel (12) pg. 428

$$Q_s = Q(0) \cdot D \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A}$$

oder wenn die Formel (3a) des Artikels 4 benutzt wird:

$$Q_s = \frac{\pi a b \Gamma}{1 + \lambda} \cdot D \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A}$$

Man überzeugt sich aber leicht, dass mit jedenfalls ausreichender Genauigkeit gesetzt werden darf¹⁾

$$Q_F = \frac{F}{ab'\pi} \cdot Q_S = \frac{\Gamma}{1+\lambda} \cdot F \cdot D$$

wodurch Formel (3) sich so gestaltet:

$$Q_B = (R-F) \Phi(\sin A) + \frac{\Gamma D}{1+\lambda} \left\{ ab\pi \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2-b^2}{b^2} \sin^2 A} - F \right\}$$

Setzt man also:

$$X' = \frac{R-F}{a^2}$$

$$Y' = \frac{b}{a} \pi \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2-b^2}{b^2} \sin^2 A} - \frac{F}{a^2}$$

so wird

$$Q_B = a^2 \left\{ X' \Phi(\sin A) + \frac{\Gamma D}{1+\lambda} Y' \right\} \quad (6)$$

Es wird ferner vortheilhaft sein zu setzen

$$\frac{X' a}{b\pi} = X; \quad \frac{Y' a}{b\pi} = Y; \quad \frac{(1+\lambda) \Phi(\sin A)}{\Gamma} = B$$

so dass also

$$Q_B = ab\pi \cdot \frac{\Gamma}{1+\lambda} \{ BX + DY \}$$

und da

$$Q(0) = \frac{ab\pi}{1+\lambda} \Gamma$$

war, so wird man haben:

$$Q_B = Q(0) \{ BX + DY \} \quad (7)$$

Diese Formel gestattet eine höchst einfache Reduction beobachteter Q_B auf verschwundenen Ring. Die Reduction wird namentlich dann einfach, wenn X , Y und D durch Tafeln ein für alle Mal gegeben sind. Solche findet man am Schlusse in Tabelle III. B selbst kann nicht, wie wir sehen werden, als constant gelten. Vielmehr variirt dasselbe in hohem Masse mit dem Phasenwinkel, welche Thatsache den Hauptstützpunkt der vorliegenden Theorie der Beleuchtung des Saturn bildet.

1) Strenge genommen müsste man auch den Umstand berücksichtigen, dass dem angewandten photometrischen Gesetze gemäss eine nicht vollkommen erleuchtete Planetenscheibe nicht in allen Theilen gleich hell erscheint. Dieser Umstand kann aber schon deshalb für die practische Anwendung kaum in Frage kommen, weil Q_F nur einen kleinen Bruchtheil der gesammten Lichtmenge ausmacht.

7.

Wenn es mir auch wahrscheinlich ist, dass die zuletzt gefundene Formel der Wahrheit sehr nahe entspricht, so wird es doch, namentlich auch weil die vorhandenen photometrischen Beobachtungen eine endgiltige Entscheidung noch nicht zulassen, in Anbetracht der in der Einleitung ausgesprochenen Ansichten nicht unnöthig sein, in zweiter Linie auch das Lambert'sche Gesetz auf das Saturnsphäroid anzuwenden.

Das zugehörige Q_s ist in Art. 1 abgeleitet worden. Es erübrigt also noch die Ableitung von Q_r . Ich werde aber zu diesem Zwecke nicht den völlig strengen Ausdruck des Lambert'schen Gesetzes zu Grunde legen, sondern einen genäherten, wodurch die Aufgabe nicht unwesentlich vereinfacht wird. Ich habe übrigens dieselbe Näherung bereits in den beiden oben citirten Aufsätzen über die Photometrie des Saturn in Anwendung gebracht. Betrachten wir zunächst eine voll beleuchtete Kugel mit dem Radius ϱ , welche dem in der sehr grossen Entfernung \mathcal{A} befindlichen Beobachter als Scheibe vom Radius r erscheint. Auf dieser Scheibe wird nach dem Lambert'schen Gesetze die Helligkeit h in der Mitte am grössten sein und von da bis zum Rande, wo sie $= 0$ wird, gleichmässig abnehmen. Bezeichnet x die scheinbare Winkelentfernung eines Punktes dieser Scheibe von ihrem Mittelpunkte, so wird h proportional sein mit

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\mathcal{A}}{\varrho}\right)^2 \sin^2 x}$$

Da nun für sehr grosse \mathcal{A} , $r = \frac{\varrho}{\mathcal{A}}$ und x ein sehr kleiner Winkel ist, so wird sehr nahe

$$h = \gamma \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad (1)$$

gesetzt werden können. Für das Ellipsoid soll die analoge Formel angewandt werden, nur soll hier r derjenige Halbmesser der scheinbaren Ellipse sein, auf welchem der durch x bestimmte Punkt liegt. Statt x schreibe ich ϱ , so dass die von einem Flächenelement $d\sigma$ der elliptischen Scheibe der Erde zugesandte Lichtmenge

$$dq = I' d\sigma \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2}} \quad (2)$$

wird. Um eine Uebersicht zu erlangen, wie weit sich die Folgerungen aus (2) unterscheiden von denen, welche aus einer strengen Anwendung des Lambert'schen Gesetzes fliessen, soll die Lichtmenge einer voll erleuchteten Planetenscheibe berechnet werden. Man findet für diese

$$Q' = I' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho d\rho \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}$$

und da $\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 v}{b'^2}$, wobei die frühere Bezeichnung beibehalten wird, so ergibt sich sofort

$$Q' = \frac{2}{3} \pi a b' I'$$

Dies ist aber dieselbe Formel, welche bekanntlich Seidel und Zöllner zur Reduction der an Jupiter und Saturn gemachten photometrischen Beobachtungen in Vorschlag gebracht haben. Die Abweichung dieser Formel von der strengen Art 2, (I) gegebenen:

$$Q_L = 2 \pi a^2 I' \{ P \cos^2 A + R \sin^2 A \}$$

kann leicht berechnet werden und man sieht dann, dass in der That der begangene Fehler innerhalb der Grösse der Beobachtungsfehler bleibt, indem er im Maximum bis auf etwa $2\frac{1}{2}\%$ der gesammten Lichtmenge des Saturnsphäroides steigt. Hier kommt indess nur ein kleiner Bruchtheil dieses Fehlers in Betracht, weil die angegebene Näherung nur zur Berechnung von Q_F dienen soll.

Die Lichtmenge q , welche die Fläche (ace) (s. Figur auf pag. 437) der Erde zusendet, wird demnach:

$$q = \frac{\Gamma}{3} \int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}} d v \cdot r^2 \left(1 - \frac{r_0'^2}{r^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Es ist hierin r_0 der zu dem Winkel v gehörige Halbmesser der äusseren Ringellipse; v_0 hat dieselbe Bedeutung wie in Art. 6. Desgleichen wird, wenn $r_0' v_0'$ die analogen Grössen für den inneren Ringrand bedeuten, die von der Fläche (bde) zugesandte Lichtmenge:

$$q' = \frac{\Gamma}{3} \cdot \int_{v_0'}^{\frac{\pi}{2}} dv \cdot r^2 \left(1 - \frac{r_0'^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Und schliesslich ist

$$Q_F = 2(q' - q) \quad (3)$$

Die Integrale für q und q' lassen sich leicht auf mechanischem Wege berechnen. Ich habe diesen Weg bei der Berechnung der bereits erwähnten Tafel in den A. N. eingeschlagen. Da indessen die zu berechnenden Integrale elliptische sind, ist eine mechanische Berechnung vielleicht nicht practisch, denn in diesem Falle zeigt selbst die bekannte höchst ausgezeichnete Gauss'sche Methode zur näherungsweise Berechnung von Integralen nur geringe Convergenz. Es wird sich deshalb empfehlen, die Ausdrücke für q und q' auf die üblichen Normalformen elliptischer Integrale zurückzuführen und dann die sehr nützlichen Legendre'schen Tafeln in Anwendung zu bringen.

Nach Art. 6, (4) kann man setzen:

$$m^2 \sin^2 v_0 = \frac{\alpha^2 - a^2}{a^2 \alpha^2}$$

$$m^2 \cos^2 v_0 = \frac{b'^2 - \beta^2}{b'^2 \beta^2}$$

und weil

$$\frac{1}{r_0'^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2 \alpha^2} \cos^2 v = \frac{1}{\beta^2} [1 - \cos^2 A \cos^2 v]$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{b'^2} + \frac{b'^2 - a^2}{b'^2 \alpha^2} \cos^2 v = \frac{1}{b'^2} [1 - e^2 \cos^2 A \cos^2 v]$$

$$\frac{1}{r_0'^2} - \frac{1}{r^2} = m^2 (\cos^2 v_0 - \cos^2 v)$$

so lässt sich q so darstellen:

$$q = \frac{\Gamma}{3} m^3 \beta^3 b'^2 \int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 v_0 - \cos^2 v)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e^2 \cos^2 A \cos^2 v) (1 - \cos^2 A \cos^2 v)^{\frac{3}{2}}} dv$$

Man erreicht nun die Legendre'schen Normalformen sofort durch die Substitutionen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos^2 v_0 - \cos^2 v}{1 - \cos^2 A \cos^2 v} &= \cos^2 v_0 \cos^2 \varphi \\ n &= \frac{\cos^2 v_0 \cos^2 A (1 - e^2)}{1 - \cos^2 A \cos^2 v_0}; \quad k^2 = \frac{\cos^2 v_0 \sin^2 A}{1 - \cos^2 A \cos^2 v_0} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

denn nach einfacher Rechnung ergibt sich

$$q = \frac{\Gamma}{3} \cdot \frac{m^3 \beta^3 b'^2 \cos^4 v_0}{\sqrt{1 - \cos^2 A \cos^2 v_0}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 \varphi d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Man kann diese Formel auch schreiben:

$$q = \frac{\Gamma}{3} \cdot \frac{m^3 \beta^3 b'^2 \cos^4 v_0}{\sqrt{1 - \cos^2 A \cos^2 v_0}} \left\{ n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\left(1 - \frac{n}{1+n} \cos^2 \varphi\right) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{1 - k^2}{n k^2} K - \frac{1}{n k^2} E \right\} \quad (5)$$

wenn K und E die vollständigen elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung mit dem Modulus k bedeuten. Man kann nun sofort die allgemein bekannte Legendre'sche Formel:

$$\begin{aligned} \sin \gamma \cos \gamma \cdot \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi}{(1 - \cos^2 \gamma \cos^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ = \frac{\pi}{2} - \{ K E(\gamma, k') + (E - K) F(\gamma, k') \} \end{aligned}$$

in welcher die gebräuchliche Bezeichnungsweise in Anwendung gebracht ist, benutzen, wenn man in (5) setzt

$$\cos^2 \gamma = \frac{n}{1+n} = \frac{\cos^2 v_0 \cos^2 A (1 - e^2)}{1 - e^2 \cos^2 v_0 \cos^2 A}$$

Hierdurch ist die Berechnung von (5) auf elliptische Integrale der 1. und 2. Gattung zurückgeführt und die Benutzung der von Legendre für diese gegebenen Tafeln kann sofort eintreten. Für die im Folgenden ausgeführten Rechnungen war indessen eine weitere Reduction nicht un- wichtig, die vorerst noch gegeben werden soll.

Mit Hilfe des in Art. 6 eingeführten Winkels φ wird:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} v_0 &= \sin A \operatorname{tg} \varphi; & k' &= \sqrt{1 - k^2} = \sin \varphi; & k &= \cos \varphi \\ n &= k^2 (1 - e^2) \cotg^2 A; & \operatorname{tg} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned} \right\} (6)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$X = \frac{\pi}{2} - \{KE(\gamma, k') + (E - K)F(\gamma, k')\}$$

so wird mit Benutzung der in Art. 6 vorkommenden Relationen:

$$q = \frac{\Gamma}{3} \cdot \frac{(b'^2 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{b'^2} \cdot a \cdot \left\{ \frac{1}{\cos^3 \gamma} X + \frac{b'}{n a k \sin A} (k'^2 K - E) \right\}$$

Es lässt sich nun in höchst einfacher Weise die Berechnung sämtlicher Hilfsgrößen, wenigstens in den Coefficienten von X , K und E vermeiden, wenn man folgende leicht abzuleitende Relationen im Auge behält:

$$\cos \gamma = \frac{(b'^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}{b'}; \quad \sin \gamma = \frac{\beta}{b'}; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{b'^2 - \beta^2}}{\alpha \cos A \sqrt{1 - e^2}}; \quad n = \frac{b'^2 - \beta^2}{\beta^2}$$

Hierdurch wird schliesslich:

$$q = \frac{\Gamma}{3} \cdot a^2 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 A} \left\{ X + \left(\frac{\alpha}{a}\right)^3 \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin A \cos A}{1 - e^2 \cos^2 A} [\sin^2 \varphi K - E] \right\}$$

und für q' folgt natürlich durch blosse Buchstabenvertauschung der entsprechende Ausdruck.

Alles, was für die numerische Rechnung nöthig ist, wird man jetzt so zusammenstellen können.

Die Winkel φ und φ' sind schon früher berechnet worden. Ferner hat man

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} A}{\cos \varphi \sqrt{1 - e^2}} \quad M = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^3 \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin A \cos A}{1 - e^2 \cos^2 A}$$

$$\operatorname{tg} \gamma' = \frac{\operatorname{tg} A}{\cos \varphi' \sqrt{1 - e^2}}$$

$$k = \cos \varphi \quad k' = \sin \varphi$$

$$k_1 = \cos \varphi' \quad k_1' = \sin \varphi'$$

$$Z = K E(\gamma, k') + (E - K) F(\gamma, k') \quad (\text{mod. } k)$$

$$Z' = K_1' E(\gamma, k_1') + (E_1 - K_1) F(\gamma, k_1') \quad (\text{mod. } k_1)$$

$$Z = \sin^2 \varphi K - E; \quad Z' = \sin^2 \varphi' K_1 - E_1$$

und schliesslich

$$Q_F = \frac{2}{3} I' a^2 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 A} \{Z - Z' + M(Z' - Z)\} \quad (7)$$

Nach dieser Formel ist in der That die gleich zu erwähnende Tabelle berechnet worden.

Um nun wieder die Gesamtlichtmenge Q_B des ganzen Saturnsystems mit der des Saturnkörpers allein für den Werth 0 des Phasenwinkels α und für $A=0$, welche $Q(0)$ heissen möge, in Verbindung zu setzen, haben wir einfach die Formeln der Art. 3 und Art. 6, (3) zu berücksichtigen.

Zuerst ist das in letzterer Gleichung vorkommende Q_S : (Art. 3, (IIa))

$$Q_S = Q(0) \cos \alpha \cdot Z(A); \quad Z(A) = 1 + \frac{R-P}{P} \sin^2 A^1)$$

$$Q(0) = 2 \pi a^2 I' \cdot P$$

und demzufolge darf nach Art. 6, (3) und früheren Bemerkungen gesetzt werden:

$$Q_B = Q(0) \left\{ \frac{R-F}{Q(0)} \cdot \Phi(\sin A) + \left(Z(A) - \frac{Q_F}{Q(0)} \right) \cos \alpha \right\}$$

Setzt man nun

$$\left. \begin{aligned} X_L &= I' \frac{R-F}{Q(0)} = \frac{R-F}{2 \pi a^2 P} \\ Y_L &= Z(A) - \frac{Q_F}{Q(0)} \\ \frac{\Phi(\sin A)}{I'} &= B_L \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

so ist schliesslich:

$$Q_B = Q(0) \cdot \{B_L X_L + Y_L \cos \alpha\} \quad (\text{II})$$

Die Grössen X_L und Y_L können ein für alle Mal berechnet werden. Dies ist geschehen und man findet das Resultat dieser Rechnung in Tabelle IV zusammengestellt.

1) Es ist wohl keine Verwechslung zwischen den beiden mit R bezeichneten Grössen möglich.

Ich habe diese Tafel, wie schon erwähnt, bereits in No. 2639 der A. N. mitgetheilt. Dieselbe stimmt mit der hier gegebenen bis auf ganz geringfügige Abweichungen völlig überein, obwohl beide mit Hülfe ganz verschiedener Methoden berechnet worden sind. Ich habe indessen a. a. O. in der allgemeinen Formel das Albedoverhältniss $\frac{u'}{u}$ des Ringes und des Saturnkörpers eingeführt, was aus der Annahme eines ganz bestimmten photometrischen Grundgesetzes folgte. Diese Specialisirung habe ich hier nicht ausgeführt, da hierdurch das nähere Eingehen auf die physikalische Constitution des Ringes erforderlich gewesen wäre und von einem Albedowerth desselben, welcher mit dem fester Substanzen direct vergleichbar ist, insofern nicht mehr die Rede sein kann, als ein solcher Vergleich nur zu Missverständnissen Anlass geben kann. Ausserdem wurde auch, physikalischen Vorstellungen mehr Rechnung tragend, die gleichförmige Beleuchtung nicht mehr aus einer nur dieses Verhalten ausdrückenden Formel gefolgert, sondern aus einem gewissen photometrischen Grundgesetze, welches jedenfalls tiefer begründet erscheint.

8.

Es erübrigt noch den Schattenwurf des Saturn auf den Ring und umgekehrt in Rechnung zu ziehen. Es ist kaum zweifelhaft, dass es der Genauigkeit, mit welcher gegenwärtig derartige photometrische Beobachtungen angestellt werden können, vollständig entsprechend ist, wenn man auf diese Umstände keine Rücksicht nimmt. Wenn trotzdem auf diesen Punkt näher eingegangen werden soll, so geschieht dies nicht sowohl in der Absicht, hierdurch etwa einige Vollständigkeit in der Theorie der Beleuchtung des Saturns zu erreichen, vielmehr deshalb, weil sich, wie ich zeigen werde, im Grossen und Ganzen der Schattenwurf ziemlich einfach berechnen lässt, wenn die im Folgenden enthaltenen Hilfsmittel vorliegen. Ueberdies beträgt doch der hier zu besprechende Einfluss einige Procente der Gesamtlichtmenge und es wäre nicht unmöglich, dass bei weiteren Fortschritten in der practischen Photometrie diese in Frage kämen. Es wird übrigens ohne Zweifel gestattet sein, bei der Behandlung der Aufgabe ziemlich weitgehende Vereinfachungen einzuführen und es soll von dieser Erleichterung in gewissem Sinne Gebrauch gemacht

werden. Vor Allem werde ich nur die Annahme in Betracht ziehen, dass die Saturnscheibe überall gleich hell erscheint, weil dann die Formeln etwas einfacher werden und diese Annahme voraussichtlich der Wahrheit näher liegt, als die Folgerungen aus dem Lambert'schen Gesetze. Ferner werde ich auf die Abplattung des Saturn bei der Ableitung der Schattengrenze nicht durchgehends Rücksicht nehmen, was gewiss vollständig hinreichen wird.

Zuerst soll der Schattenwurf des Ringes auf den Saturnkörper berechnet werden. Der in Betracht zu ziehende Rand des Ringes ist ein Kreis mit dem Radius α . Man lege nun ein Coordinatensystem zu Grunde, wie es schon früher benutzt worden ist, dessen Anfang mit dem Saturncentrum, dessen $x'y'$ Ebene mit der Ringebene zusammenfällt und in dessen $x'z'$ Ebene sich die Erde befindet. A sei wie früher der Elevationswinkel der Erde, $A'B'C'$ die Richtungswinkel nach der Sonne, so ist die Gleichung des von der Sonne erzeugten Schattencylinders:

$$\left(x' - z' \frac{\cos A'}{\cos C'}\right)^2 + \left(y' - z' \frac{\cos B'}{\cos C'}\right)^2 = \alpha^2$$

Dreht man das Coordinatensystem, so dass die Erde in der neuen X Axe sich befindet und bezeichnet die neuen Coördinaten mit xyz , so ist:

$$x' = x \cos A - z \sin A$$

$$z' = x \sin A + z \cos A$$

$$y' = y$$

Die Gleichung des genannten Cylinders wird dadurch:

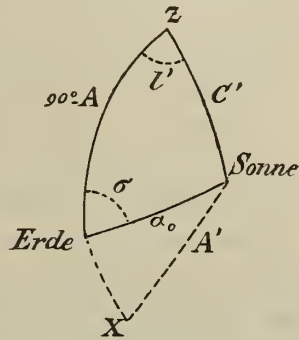
$$\left. \begin{aligned} & \left\{ x \left[\cos A - \sin A \cdot \frac{\cos A'}{\cos C'} \right] - z \left[\sin A + \cos A \cdot \frac{\cos A'}{\cos C'} \right] \right\}^2 \\ & + \left[y - \frac{\cos B'}{\cos C'} (x \sin A + z \cos A) \right]^2 = \alpha^2 \end{aligned} \right\} (1)$$

Der Durchschnitt dieses Cylinders mit dem Saturnsphäroide:

$$\frac{y^2}{a^2} + \left(\frac{x \cos A - z \sin A}{a} \right)^2 + \left(\frac{x \sin A + z \cos A}{b} \right)^2 = 1$$

ist die Schattengrenze des Ringes auf dem Saturn. Wird aus beiden Gleichungen x eliminirt, so erhält man die Gleichung der Projection

dieser Curve in der *YZ*Ebene, also derjenigen Curve, welche der Erde als Schattengrenze erscheint. Bei Ausführung dieser Elimination soll nun angenommen werden, dass der Winkel α_0 (Winkel am Saturn im Dreiecke Sonne—Erde—Saturn) so klein ist, dass seine zweite Potenz fortgelassen werden kann und ferner soll für den Planeten eine Kugel mit dem Radius a substituiert werden. Gebraucht man dann die Bezeichnungen, wie sie aus der nebenstehenden Figur ersichtlich sind, so ergibt sich



$$\sin \alpha_0 \cos \sigma = \cos C' \cos A - \sin A \cos A'$$

$$\cos \alpha_0 = \cos C' \sin A + \cos A \cos A'$$

und (1) kann geschrieben werden:

$$(x \sin \alpha_0 \cos \sigma - z \cos \alpha_0)^2 + [y \cos C' - \cos B' (x \sin A + z \cos A)]^2 = a^2 \cos^2 C' \quad (2)$$

Wegen des Folgenden scheint es bequemer $-z$ statt z zu setzen d. h. die *Z*Axe des Coordinatensystems auf der südlichen Seite der Ringebene anzunehmen, wenn A den Elevationswinkel der Erde nach der positiven Seite gerechnet bedeutet. Es ist weiter klar, dass wir, ohne die Allgemeinheit zu gefährden, A stets als positiv annehmen können.

Zunächst soll aber die etwas verwickelte Elimination nicht ausgeführt werden, vielmehr setzen wir aus Gründen, die weiter unten besprochen werden, an Stelle der Projection der eigentlichen Schattengrenze die Durchschnittscurve zwischen dem Cylinder (1) und der *YZ*Ebene. Wird also in (2) $x = 0$ gesetzt und lässt man die höheren Potenzen von α_0 fort, so wird

$$z^2 + y^2 \cos^2 C' + 2yz \cos A \sin C' \cos C' \sin l' = a^2 \cos^2 C' \quad (3)$$

und diese Curve soll vorläufig als die genannte Schattengrenze gelten.

Es ist das zugleich die Gleichung der Schattengrenze in der scheinbaren Figur, wenn a den Ringradius in dem entsprechenden Masse ausgedrückt bedeutet. Die *Y*Axe des in dieser Weise aufgefassten Coordinatensystemes liegt also im Aequator der Saturnscheibe, die *Z*Axe nach Süden zu. In Bezug auf dasselbe System ist aber nach den im Früheren durchweg festgehaltenen Bezeichnungen die Gleichung der Begrenzung der Planetenscheibe:

$$z^2 + b'^2 \cdot \frac{y^2}{a^2} = b'^2 \quad (4)$$

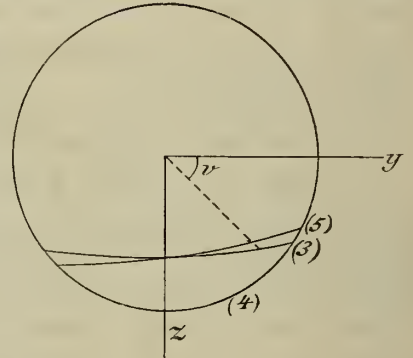
und diejenige der Ellipse, welche die Ringbegrenzung darstellt:

$$z^2 + y^2 \sin^2 A = a^2 \sin^2 A \quad (5)$$

Das vom Ringe beschattete Flächenstück der Saturnscheibe, welches in Abzug gebracht werden muss, ist demnach begrenzt von den 3 Ellipsen (3), (4) und (5).

Sind r und r' die zu dem Winkel v gehörenden Radii-vectores der beiden Curven (5) und (3), so handelt es sich um die Fläche S , welche von (3) (4) und (5) begrenzt ist und welche von der Erde aus gesehen als beschattet erscheint. Letztere Bedingung lässt sich (wenn man nur den Fall der Figur, welche einem positiven A entspricht, als typisch gelten lässt) ausdrücken durch

$$r' \gtrless r$$



Das obere Zeichen gilt, wenn auf der Seite des äusseren Ringrandes der Schatten erscheint, das untere wenn dies auf der Seite des inneren Ringrandes geschieht. Im Uebrigen wird es in jedem Falle erlaubt sein, auf den inneren Ringrand keine Rücksicht zu nehmen. Denn hier werden durch den dunklen Ring die Verhältnisse so modificirt, dass der ganze Einfluss dieses Theiles des Schattenwurfes vollständig verdeckt wird. Bezeichnet man nun mit v_0 und v_1 die Werthe von v welche die gesuchte Fläche begrenzen, so wird, weil die beschattete Fläche sehr schmal sein wird, äusserst nahe sein:

$$2S = \int_{v_0}^{v_1} dv (r'^2 - r^2)$$

Die Berechnung dieses Integrales soll wiederum mit Benutzung der erlaubten Vernachlässigungen ausgeführt werden. Da

$$z = r \sin v$$

$$y = r \cos v$$

so ergibt sich aus den obigen Gleichungen sofort:

$$r'^2 = \frac{\alpha^2 \cos^2 C'}{\sin^2 v + \cos^2 v \cos^2 C' + 2 l' \sin v \cos v \sin C' \cos C' \cos A}$$

$$r^2 = \frac{\alpha^2 \sin^2 A}{\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A}$$

Der Winkel $90^\circ - C'$ ist offenbar nur wenig von A verschieden. Setzt man demgemäss

$$90^\circ - C' = A + \delta A$$

so wird mit Vernachlässigung höherer Potenzen von δA und l' :

$$2S = 2\alpha^2 \sin A \cos A \times \left\{ \delta A \int_{v_0}^{v_1} \frac{\sin^2 v dv}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} - l' \sin^2 A \cos A \int_{v_0}^{v_1} \frac{\sin v \cos v dv}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} \right\} \quad (6a)$$

und da bekanntlich

$$\int \frac{\sin^2 v dv}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} = -\frac{\sin v \cos v}{2(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)} + \frac{1}{2 \sin A} \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} v}{\sin A} \right) = \mathfrak{A}(v)$$

$$-\cos^2 A \int \frac{\sin v \cos v dv}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} = +\frac{1}{2(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)} = \mathfrak{B}(v)$$

so wird

$$S = \alpha^2 \sin A \cos A \cdot [\mathfrak{A}(v_1) - \mathfrak{A}(v_0)] \delta A + \alpha^2 l' \sin^3 A \cdot [\mathfrak{B}(v_1) - \mathfrak{B}(v_0)]$$

Um hierin die richtigen Werthe für v_1 und v_0 einsetzen zu können, müssen die verschiedenen möglichen Fälle auseinander gehalten werden.

1. Fall: die Curven (3) und (5) schneiden sich auf der Planetenscheibe nicht. Hier ist den Entwicklungen des Art. 6 zufolge:

$$\operatorname{tg} v_0 = \sin A \operatorname{tg} \varphi; \quad v_1 = \pi - v_0$$

und man sieht sofort, dass $\mathfrak{B}(v_1) = \mathfrak{B}(v_0)$. Ferner ist

$$\mathfrak{A}(v_1) = +\frac{\sin 2\varphi}{4 \sin A} + \frac{\pi - \varphi}{2 \sin A}$$

$$\mathfrak{A}(v_0) = -\frac{\sin 2\varphi}{4 \sin A} + \frac{\varphi}{2 \sin A}$$

$$\mathfrak{B}(v_1) = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 A}{2 \sin^2 A}$$

wodurch wird:

$$\mathfrak{A}(v_1) - \mathfrak{A}(v_0) = \frac{\sin 2\varphi + \pi - 2\varphi}{2 \sin A}$$

Führt man also folgende Hilfsgrössen ein:

$$\Sigma_0 = \frac{\alpha^2}{2} \cos A \cdot (\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi)$$

$$\Sigma_1 = \frac{\alpha^2}{2} \cos A \cdot [\pi - (\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi)]$$

$$\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_0$$

so wird schliesslich:

$$S = \Sigma \cdot \delta A \quad (6)$$

Aus dieser Formel folgt sofort auch, welcher der beiden Ringränder den Schatten wirft; denn der Ausdruck für S muss positiv sein.

2. Fall: Die Ellipsen (3) und (5) schneiden sich auf der Planetenscheibe. Zur Erledigung dieses Falles muss der Durchschnittspunkt aufgesucht werden. Derselbe ist aber durch die Bedingung $r' = r$ gegeben. Es gilt also für ihn:

$$\operatorname{tg} v = \frac{l' \sin^2 A \cos A}{\delta A} \quad (7)$$

wie eine Betrachtung der rechten Seite der Gleichung (6a) ergibt.

Man sieht übrigens aus derselben Gleichung, dass die geforderte Bedingung $r' > r$ erfüllt ist wenn:

$$\delta A \operatorname{tg} v > l' \sin^2 A \cos A$$

Setzt man diesen Bemerkungen gemäss:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l' \sin A \cos A}{\delta A} &= \operatorname{tg} \psi \quad (v < \psi < 180^\circ) \\ \operatorname{tg} v_2 &= \operatorname{tg} \psi \sin A \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

so wird man sofort ersehen können, ob Fall 1 oder 2 stattfindet. Liegt v_2 nicht zwischen v_0 und v_1 , wo v_0 und v_1 die bei Fall 1 berechneten Winkel sind, so ist Formel (6) anzuwenden. Ist aber $v_0 < v_2 < v_1$, so kann auf folgende Weise verfahren werden.

Bezeichnet man mit $2S(v_0)$, $2S(v_1)$ und $2S(v_2)$ die Werthe der rechten Seite von (6a), wenn für v resp. v_0 , v_1 oder v_2 in die Integralwerthe eingesetzt werden, so ist:

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} S &= S(v_1) - S(v_2) \\ S &= S(v_2) - S(v_0) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

je nachdem der erste oder zweite Werth positiv wird¹⁾. Man kann nun, wenn man ausser den zur Formirung von (6) gebrauchten Grössen Σ noch einführt:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{\alpha^2}{2} \sin A [\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 A] = \frac{\alpha^2}{2} \sin A \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{\cos v_0} \right)^2 \\ \text{sofort schreiben:} \\ S(v_1) &= \Sigma_1 \cdot \delta A + l' V \\ S(v_0) &= \Sigma_0 \cdot \delta A + l' V \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass nach leichter Rechnung sich ergibt

$$S(v_2) = \frac{\alpha^2}{2} \cos A \cdot \delta A \cdot \{ \psi + \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg} \psi \} \quad (9a)$$

Durch die Formeln (6) bis (9a) ist die Aufgabe in einer höchst einfachen Form gelöst, wenn für die vorkommenden Grössen, so weit dies angeht, Tabellen berechnet werden. Man findet solche am Schlusse unter Va und Vb. Dort sind alle Winkel φ , v , ferner die Grössen Σ_0 , Σ_1 und Σ gegeben und zwar auch für den inneren Rand; alle auf diesen sich beziehenden Buchstaben sind mit einem Strich versehen. Ich habe in Tabelle Va noch einige andere Grössen mit angeführt, welche in den früheren Entwicklungen vorgekommen sind.

Es erübrigt nun noch, zu zeigen, wie die strenge Lösung der gestellten Aufgabe mit der soeben durchgeführten zusammenhängt. Zu diesem Zwecke werde ich jetzt die erstere vollständig mittheilen, wenngleich das Bedürfniss nach diesen strengeren, aber auch complicirteren Formeln in der Praxis wohl nur äusserst selten auftreten wird. Die Projection der wirklichen Schattencurve ergibt sich, wie oben erwähnt, durch Elimination von x aus der Gleichung (2), nachdem in ihr $-z$ statt $+z$ geschrieben worden ist, und der Gleichung der Saturnkugel, die im vorliegenden Falle

$$x = + \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$$

1) Für den inneren Ringrand findet das umgekehrte statt d. h. es ist dasjenige S zu wählen, welches negativ wird, diesem aber natürlich am Schlusse das positive Vorzeichen zu ertheilen.

heisst. Beachtet man, dass α_0 , $90 - B'$, l' kleine Grössen der ersten Ordnung sind und lässt man die Glieder zweiter Ordnung fort, so ergibt die genannte Elimination für die Gleichung der Schattencurve:

$$y^2 \cos^2 C' + z^2 + 2 y z \cos A \sin C' \cos C' \sin l' \\ - 2 \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \{y \sin A \cos B' \cos C' - z \sin \alpha_0 \cos \sigma\} = a^2 \cos^2 C'$$

Führt man δA ein und vernachlässigt immer die zweiten Potenzen von l' und δA , so kann die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$y^2 \cos^2 C' + z^2 + 2 y z \sin A \cos^2 A \cdot l' \\ = a^2 \cos^2 C' - 2 \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \{z \cdot \delta A - y \sin^2 A \cos A \cdot l'\} \quad (10)$$

Wird für den Augenblick

$$m = \cos^2 v \cos^2 C' + \sin^2 v + 2 \sin v \cos v \sin A \cos^2 A \cdot l'$$

gesetzt und der früher gebrauchten Bezeichnung zufolge

$$y = r' \cos v$$

$$z = r' \sin v$$

so wird

$$m r'^2 = a^2 \cos^2 C' - 2 r' \sqrt{a^2 - r'^2} [\delta A \cdot \sin v - l' \sin^2 A \cos A \cos v]$$

Eine leichte Entwicklung giebt:

$$r'^2 = \frac{a^2 \cos^2 C'}{m} - \frac{2 \alpha \sin A \sqrt{a^2 \sin^2 v \cos^2 A - (\alpha^2 - a^2) \sin^2 A}}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} \times \\ \{\delta A \cdot \sin v - l' \sin^2 A \cos A \cos v\}$$

und hieraus

$$r'^2 - r^2 = \frac{2 \alpha^2 \sin A [\cos A \sin v - \frac{1}{\alpha} \sqrt{a^2 \sin^2 v \cos^2 A - (\alpha^2 - a^2) \sin^2 A}]}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} \times \\ (\sin v \cdot \delta A - \sin^2 A \cos A \cos v \cdot l')$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer kann nur für $\alpha = a$ verschwinden. Daraus folgt, dass $r = r'$ wenn $v = v_2$ wobei

$$\operatorname{tg} v_2 = \frac{l' \sin^2 A \cos A}{\delta A}$$

Vergleicht man hiermit (8a), so sieht man, dass v_2 dieselbe Bedeutung hat wie früher. Der strenge Ausdruck für die vom Ringe beschattete und zugleich sichtbare Fläche S der Saturnkugel ist also

$$S = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} (r'^2 - r^2) dv \quad (11)$$

wo u_0 und u_1 dieselben Grenzen sind, wie sie bei der früheren Aufgabe ausführlich bestimmt wurden. Durch die dort entwickelten Vorschriften dürfen also in jedem Falle u_0 und u_1 als bekannt vorausgesetzt werden.

Setzt man nun

$$s(v) = \int \frac{\sin v \cdot dv \sqrt{a^2 \sin^2 v \cos^2 A - (\alpha^2 - a^2) \sin^2 A}}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2}$$

$$c(v) = \int \frac{\cos v \cdot dv \sqrt{a^2 \sin^2 v \cos^2 A - (\alpha^2 - a^2) \sin^2 A}}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2}$$

und behält im übrigen die auf pag. 451 eingeführte Bezeichnung bei, so wird

$$S = \alpha^2 \delta A \left[\sin A \cos A \mathfrak{A}(v) - \frac{1}{\alpha} \sin A \cdot s(v) \right]_{u_0}^{u_1} + \alpha^2 \ell' \left[\sin^3 A \mathfrak{B}(v) + \sin^3 A \frac{\cos A}{\alpha} c(v) \right]_{u_0}^{u_1} \quad (12)$$

Dieses ist die strenge Auflösung der gestellten Aufgabe. Die Winkel u_0 und u_1 liegen naturgemäss zwischen 0 und 180° . Bezeichnet nun ε einen positiven echten Bruch, so ist:

$$[s(v)]_{u_0}^{u_1} = \varepsilon \sqrt{a^2 - \alpha^2 \sin^2 A} \cdot [\mathfrak{A}(v)]_{u_0}^{u_1}$$

und ebenso ist leicht ersichtlich, dass obwohl $\cos v$ innerhalb der Integrationsgrenzen sein Zeichen wechseln kann, sich die Gleichung aufstellen lässt:

$$[c(v)]_{u_0}^{u_1} = -\varepsilon_1 \frac{\sqrt{a^2 - \alpha^2 \sin^2 A}}{\cos^2 A} \cdot [\mathfrak{B}(v)]_{u_0}^{u_1}$$

wo ε_1 ebenfalls ein positiver echter Bruch ist. Man hat also:

$$S = \alpha^2 \sin A \cos A \cdot \delta A \left[\mathfrak{A}(u_1) - \mathfrak{A}(u_0) \right] \left[1 - \varepsilon \frac{\sqrt{a^2 - \alpha^2 \sin^2 A}}{\alpha \cos A} \right] + \alpha^2 \sin^3 A \cdot \ell' \left[\mathfrak{B}(u_1) - \mathfrak{B}(u_0) \right] \left[1 - \varepsilon_1 \frac{\sqrt{a^2 - \alpha^2 \sin^2 A}}{\alpha \cos A} \right] \quad (13)$$

Aus dieser Gleichung für S folgt, dass die einfacheren Formen (6) und (8) für dieselbe Grösse zu Ueberschlagsrechnungen recht tauglich sind, denn die Factoren der beiden Grössen δA und l' erscheinen in den letzteren grösser als sie in Wirklichkeit sind. Aus diesem Grunde genügen (6) und (8), um sich davon zu überzeugen, dass es bei dem gegenwärtigen Stande der practischen Photometrie nicht nöthig sein wird, die strengen Formeln (12) anzuwenden. Sollte dies aber wünschenswerth sein, so ist eine Rechnung nach ihnen unschwer auszuführen. Man könnte auch hier Hülftafeln construiren, ähnlich denen, welche bereits Verwendung gefunden haben. Ich habe aber aus den erwähnten Gründen davon abgesehen. Für alle Fälle wird es nicht unnöthig sein, zu erwähnen, dass die allgemeinen Integrale $s(v)$ und $c(v)$ in geschlossener Form ausführbar sind.

Das Integral $s(v)$ wird durch die Substitution:

$$\cos \psi = \frac{a \cos v \cos A}{\sqrt{a^2 - \alpha^2 \sin^2 A}}$$

auf ein bekannte Form zurückgeführt. Man erhält so:

$$s(v) = \frac{a^2 - \alpha^2 \sin^2 A}{2 \cos A} \left\{ -\frac{a \sin \psi \cos \psi}{\alpha^2 \sin^2 A + \sin^2 \psi (a^2 - \alpha^2 \sin^2 A)} + \frac{1}{\alpha \sin A} \operatorname{arctg} \left(\frac{a \operatorname{tg} \psi}{\alpha \sin A} \right) \right\} \quad (14)$$

Setzt man weiter ganz ähnlich:

$$\xi = \frac{\sin v \cos A}{\sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A}}$$

so erhält man leicht:

$$c(v) = \frac{\alpha}{2 \sin^2 A \cos A} \left\{ \xi \sqrt{\xi^2 - \frac{\alpha^2 - a^2}{\alpha^2}} - \frac{\alpha^2 - a^2}{\alpha^2} \operatorname{lognat} \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - \frac{\alpha^2 - a^2}{\alpha^2}} \right) \right\} \quad (15)$$

9.

In ganz ähnlicher Weise kann man auch den Schattenwurf des Saturnkörpers auf den Ring in Betracht ziehen.

Das beschattete Stück σ des Ringes, welches von dem sichtbaren Ringtheile in Abzug zu bringen ist, wird begrenzt von 4 Curvenstücken, welche mit I, II, III und IV bezeichnet werden mögen. I sei die Curve, als welche sich die Begrenzung des Saturnkörpers projicirt, II die Schattengrenze auf dem Ringe, III der äussere und IV der innere Ringrand. Ich lege wieder

das am Anfange des vorigen Art. eingeführte Coordinatensystem zu Grunde, nur mit der Aenderung, dass als negative Seite der X Axe diejenige genommen ist, welche in der Richtung vom Planeten nach der Erde hinzeigt, und behalte alle übrigen Bezeichnungen bei. Dann geben die Regeln der analytischen Geometrie für die Gleichungen dieser Curven:

$$\text{I} \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} - 1 \right) \left(\frac{\cos^2 A}{a^2} + \frac{\sin^2 A}{b^2} \right) - \left(\frac{x \cos A}{a^2} \right)^2 = 0$$

$$\text{II} \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} - 1 \right) \left(\frac{\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C'}{a^2} + \frac{\cos^2 C'}{b^2} \right) - \left(\frac{x \cos A' - y \cos B'}{a^2} \right)^2 = 0$$

$$\text{III} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

$$\text{IV} \quad x^2 + y^2 = a'^2$$

Führt man hierin folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

$$c = \frac{\cos A}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A}}; \quad c_1 = \frac{\cos A'}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 C'}}; \quad d_1 = \frac{\cos B'}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 C'}} \quad (1)$$

so kann man die obigen Gleichungen einfacher so schreiben:

$$\text{I} \quad x^2 + y^2 - a^2 - c^2 x^2 = 0$$

$$\text{II} \quad x^2 + y^2 - a^2 - (c_1 x - d_1 y)^2 = 0$$

$$\text{III} \quad x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

$$\text{IV} \quad x^2 + y^2 - a'^2 = 0$$

Führt man Polarcoordinaten ein und bezeichnet die zu demselben Winkel v zugehörigen Radii-vectores in I und II mit ρ_1 und ρ_2 , so gehen die beiden ersten Gleichungen, da in der ersten

$$x = \rho_1 \sin v$$

$$y = \rho_1 \cos v$$

und in der zweiten

$$x = \rho_2 \sin v$$

$$y = \rho_2 \cos v$$

gesetzt werden muss, über in:

$$\rho_1^2 - a^2 - c^2 \rho_1^2 \sin^2 v = 0$$

$$\rho_2^2 - a^2 - \rho_2^2 (c_1 \sin v - d_1 \cos v)^2 = 0$$

Setzt man weiter, wie bereits früher geschehen,

$$\cos A' = \sin C' \cos l'$$

$$\cos B' = \sin C' \sin l'$$

und ausserdem:

$$\frac{\sin C'}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 C'}} = m \quad (2)$$

so erhält man

$$q_1^2 = \frac{a^2}{1 - c^2 \sin^2 v}$$

$$q_2^2 = \frac{a^2}{1 - m^2 \sin^2 (v - l')}$$

Die gesuchte Fläche wird nun:

$$2\sigma = \int (q_2^2 - q_1^2) dv$$

wo die Integration über alle beschatteten und zugleich sichtbaren Theile des Ringes auszudehnen ist. Letztere Bedingung heisst offenbar $q_2 > q_1$.

Es soll zunächst die allgemeine Integration unter den früher benutzten vereinfachenden Umständen ausgeführt werden, während die Einführung der Grenzen später erfolgen soll. Wie im vorigen Artikel werde also wieder

$$90 - C' = A + \delta A$$

gesetzt und sowohl δA als auch l' als äusserst klein betrachtet.

Zufolge (1) und (2) hat man

$$1 + m^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 C'} = \frac{a^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 A} \left(1 - \frac{2(a^2 - b^2) \sin A \cos A \cdot \delta A}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 A} \right)$$

$$1 + c^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 A}$$

d. h. also:

$$m^2 = c^2 - 2 \frac{a^2 \sin A}{b^2 \cos^3 A} \cdot \delta A \cdot c^4$$

Substituirt man dies im Ausdruck für ϱ_2^2 und entwickelt, so erhält man nach einfacher Rechnung:

$$\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = -2 a^2 c^2 \cdot \left\{ \frac{\sin v \cos v}{(1 - c^2 \sin^2 v)^2} l' + \frac{a^2 c^2 \sin A}{b^2 \cos^3 A} \cdot \delta A \cdot \frac{\sin^2 v}{(1 - c^2 \sin^2 v)^2} \right\} \quad (3)$$

Bezeichnet man also:

$$\mathfrak{A}(v) = -2 c^2 \int \frac{\sin v \cos v \, dv}{(1 - c^2 \sin^2 v)^2} = -\frac{1}{(1 - c^2 \sin^2 v)}$$

$$\mathfrak{B}(v) = -2 \int \frac{\sin^2 v \, dv}{(1 - c^2 \sin^2 v)^2} = \frac{\sin v \cos v}{(1 - c^2)(1 - c^2 \sin^2 v)} - \frac{1}{(1 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \arctg(\operatorname{tg} v \sqrt{1 - c^2})$$

so wird

$$2 \sigma = 2 \sigma(v_1) - 2 \sigma(v_0) = a^2 l' [\mathfrak{A}(v_1) - \mathfrak{A}(v_0)] + \frac{a^4 c^4 \sin A}{b^2 \cos^3 A} \delta A \cdot [\mathfrak{B}(v_1) - \mathfrak{B}(v_0)] \quad (4)$$

wo v_0 und v_1 die beiden Integrationsgrenzen sind, deren Bestimmung später erfolgen soll. Die beiden Ellipsen (I) und (II) schneiden sich im Allgemeinen in 4 Punkten. Bezeichnet man mit v^* das einem solchen Durchschnittspunkte zugehörige v , so ist dasselbe aus der Bedingung $\varrho_2 = \varrho_1$ abzuleiten. Aus (3) ergibt sich nun zunächst, dass jedenfalls die Werthe $v^* = 0$ und $v^* = 180^\circ$ den gestellten Bedingungen genügen d. h. also dass die beiden Ellipsen denselben in der Y -Axe gelegenen Durchmesser haben. Die andern zwei Werthe von v^* ergeben sich durch Nullsetzen von (3):

$$\operatorname{tg} v^* = -\frac{b^2 \cos^3 A \cdot l'}{a^2 c^2 \sin A \cdot \delta A}$$

Es wird sich empfehlen, diese Gleichung durch Einführung eines Winkels f^*

$$\operatorname{tg} f^* = -\frac{b}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A} \cdot \frac{\cos A \cdot l'}{\delta A} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\cos^2 A}{c} \cdot \frac{l'}{\delta A}$$

umzuformen, indem man dann hat

$$\operatorname{tg} v^* = +\frac{b}{ac} \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \cdot \operatorname{tg} f^*$$

Man kann noch den in Art (6) gebrauchten scheinbaren polaren Halbmesser des Saturn einführen. Es war

$$b' = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 A} = b \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A} = \frac{b \cos A}{c}$$

wodurch nun wird:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} f^* &= -\frac{b'}{a} \cdot \cos A \cdot \frac{l'}{\delta A} \\ \operatorname{tg} v^* &= +\frac{b'}{a \sin A} \cdot \operatorname{tg} f^* \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Bedingung $\varrho_2 > \varrho_1$ gestaltet sich zufolge (3) so:

$$\sin v \cos v \cdot l' + \frac{a^2}{b'^2} \operatorname{tg} A \sin^2 v \cdot \delta A < 0 \quad (6)$$

Schliesslich brauchen wir noch die Werthe des Winkels v für die Durchschnittspunkte der Ellipsen III und IV mit I, welche mit v_{III} und v_{IV} bezeichnet werden sollen. Man findet sofort, wenn noch

$$\beta = \alpha \sin A, \quad \beta' = \alpha' \sin A$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} v_{III} &= \frac{b'}{a} \cdot \sqrt{\frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{b'^2 - \beta^2}} \\ \operatorname{tg} v_{IV} &= \frac{b'}{a} \cdot \sqrt{\frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{b'^2 - \beta^2}} \end{aligned}$$

In Artikel (6) kamen diese Ausdrücke bereits vor und wurden zur Berechnung von Formel (5) benutzt. Danach ist:

$$\operatorname{tg} v_{III} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \operatorname{tg} v_{IV} = \operatorname{tg} \varphi' \quad (7)$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man nun sofort in jedem Falle entscheiden, ob v^* zwischen $v_{III} = \varphi$ und $v_{IV} = \varphi'$ liegt oder nicht. Die rechte Seite von (4) bezeichnen wir für die unbestimmt gelassenen Integrationsgrenzen mit $2\sigma(v)$ so dass also:

$$2\sigma(v) = a^2 l' \cdot \mathfrak{A}(v) + \frac{a^4 c^4}{b^2} \cdot \frac{\sin A}{\cos^3 A} \cdot \delta A \cdot \mathfrak{B}(v)$$

Wenn man hierin den Werth von c einsetzt, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \sigma(v) &= -l' \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{b'^2}{\cos^2 v \{b'^2 + a^2 \sin^2 A \operatorname{tg}^2 v\}} \\ &+ \frac{\delta A}{2} \cdot \frac{a^3 b^2}{b'^3} \cos A \left\{ \frac{b'}{a \sin A} \cdot \frac{b'^2 \operatorname{tg} v}{b'^2 + a^2 \sin^2 A \operatorname{tg}^2 v} - \frac{b'^2}{a^2 \sin^2 A} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a \sin A}{b'} \operatorname{tg} v \right) \right\} \end{aligned}$$

Um alle in der folgenden Zusammenstellung gebrauchten Grössen beisammen zu haben, sei an die Relationen des Art. 6 erinnert:

$$\operatorname{tg} f = \frac{a \sin A}{b'} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\operatorname{tg} f' = \frac{a \sin A}{b'} \operatorname{tg} \varphi'$$

woraus folgt:

$$b'^2 + a^2 \sin^2 A \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{b'^2}{\cos^2 f}$$

$$b'^2 + a^2 \sin^2 A \operatorname{tg}^2 \varphi' = \frac{b'^2}{\cos^2 f'}$$

Ebenso leicht leitet man ab:

$$\frac{\cos^2 f}{\cos^2 \varphi} = \frac{a^2}{a'^2}; \quad \frac{\cos^2 f'}{\cos^2 \varphi'} = \frac{a'^2}{a^2}$$

Schliesslich werde zur Abkürzung eingeführt:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b'} \right)^2 b^2 \cotg A \operatorname{tg} \varphi \cos^2 f \quad \lambda_1' = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b'} \right)^2 b^2 \cotg A \operatorname{tg} \varphi' \cos^2 f'$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{a b^2 \cos A}{b' \sin^2 A} \cdot f' \quad \lambda_2' = \frac{1}{2} \frac{a b^2 \cos A}{b' \sin^2 A} \cdot f'$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{a b^2 \cos A}{b' \sin^2 A} \cdot \pi$$

Mit Hülfe dieser Bezeichnungen kann man schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(v_{III}) = \sigma(\varphi) &= -l' \frac{\alpha^2}{2} + \delta A (\lambda_1 - \lambda_2) \\ \sigma(180^\circ - v_{III}) = \sigma(180^\circ - \varphi) &= -l' \frac{\alpha^2}{2} - \delta A (\lambda_1 - \lambda_2 + \mu) \\ \sigma(v_{IV}) = \sigma(\varphi') &= -l' \frac{\alpha'^2}{2} + \delta A (\lambda_1' - \lambda_2') \\ \sigma(180^\circ - v_{IV}) = \sigma(180^\circ - \varphi') &= -l' \frac{\alpha'^2}{2} - \delta A (\lambda_1' - \lambda_2' + \mu) \end{aligned} \right\} (8)$$

Zur Berechnung von $\sigma(v^*)$ bemerken wir, dass nach Gleichung (5):

$$\operatorname{tg} f^* = -\frac{b' l' \cos A}{a \delta A}$$

$$\operatorname{tg} v^* = \frac{b'}{a \sin A} \operatorname{tg} f^*$$

Setzt man also

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b'} \right)^2 b^2 \cotg A \operatorname{tg} v^* \cos^2 f^*$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b'} \right) \frac{b^2 \cos A}{\sin^2 A} \cdot f^*$$

$$A_1 - A_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b'} \right) \frac{b^2 \cos A}{\sin^2 A} \left\{ \sin f^* \cos f^* - f^* \right\}$$

so hat man:

$$\sigma(v^*) = -l' \frac{a^2}{2} \frac{\cos^2 f^*}{\cos^2 v^*} + \delta A (A_1 - A_2) \quad (9)$$

Durch diese formalen Entwicklungen sind wir nun in die Lage versetzt, die verschiedenen Fälle, welche beim Schattenwurf des Saturnkörpers auf den Ring stattfinden, einzeln zu discutiren und die betreffenden Formeln für σ anzuschreiben.

Wegen der Symmetrie, welche in der ganzen Erscheinung stattfindet, können wir l' und A mit beliebigen Zeichen nehmen, nur müssen für diese die Integrationsgrenzen bestimmt werden.

Ich nehme nun in den folgenden Skizzen, welche die verschiedenen Fälle veranschaulichen sollen,

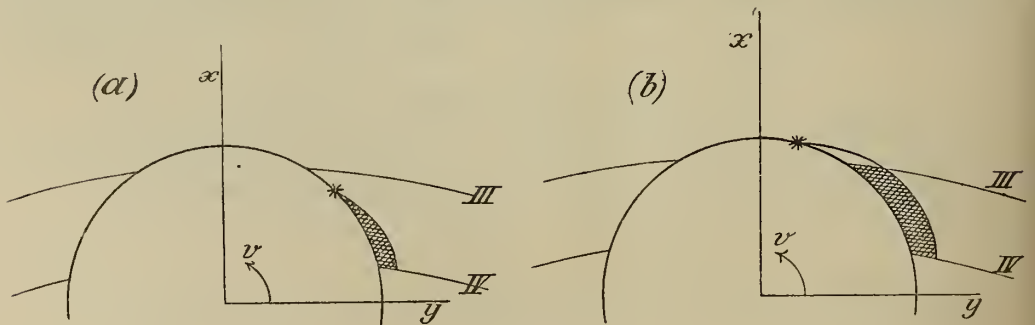
l' negativ und A positiv

an. Alle vorkommenden Winkel v , f und φ liegen dann in den ersten beiden Quadranten und wachsen in der Figur von der positiven Y Axe in der Richtung des Pfeiles.

Unter diesen Umständen sind nun offenbar 4 Fälle zu unterscheiden, welche durch die untenstehenden Figuren (a), (b), (c) und (d) illustriert werden sollen.

a) v^* liegt zwischen v_{IV} und v_{III} . In diesem Falle wird

$$\sigma = \sigma(v^*) - \sigma(v_{IV})$$

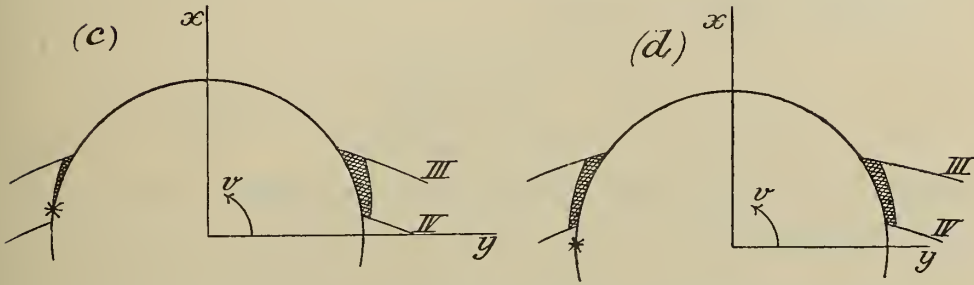


b) v^* liegt zwischen v_{III} und $180^\circ - v_{III}$. Dann wird:

$$\sigma = \sigma(v_{III}) - \sigma(v_{IV})$$

c) v^* liegt zwischen $180^\circ - v_{III}$ und $180^\circ - v_{IV}$. Hier ist

$$\sigma = \sigma(v_{III}) - \sigma(v_{IV}) + \sigma(v^*) - \sigma(180^\circ - v_{III})$$



d) v^* ist $> 180^\circ - v_{IV}$. Die zugehörige Figur (d) lässt in diesem Falle sofort ersehen, dass:

$$\sigma = \sigma(v_{III}) - \sigma(v_{IV}) + \sigma(180^\circ - v_{IV}) - \sigma(180^\circ - v_{III})$$

Es wäre noch hinzuzufügen, dass die Ringbegrenzung III die Curve I ganz umschliessen kann. Dann wird es stets ausreichend sein, $v_{III} = 90^\circ$ zu setzen. Mit Hülfe der oben gefundenen Werthe von $\sigma(v_{III})$ etc. kann man nun schreiben: (l' stets negativ genommen)

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \sigma &= +l' \frac{\alpha'^2}{2} + \sigma(v^*) - \delta A(\lambda'_1 - \lambda'_2) \\ \text{b) } \sigma &= -l' \left(\frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{2} \right) + \delta A[\lambda_1 - \lambda_2 - (\lambda'_1 - \lambda'_2)] \\ \text{c) } \sigma &= \sigma(v^*) + l' \frac{\alpha'^2}{2} + \delta A[2(\lambda_1 - \lambda_2) + \mu - (\lambda'_1 - \lambda'_2)] \\ \text{d) } \sigma &= 2 \delta A[\lambda_1 - \lambda_2 - (\lambda'_1 - \lambda'_2)] \end{aligned} \right\} (10)$$

Mit diesen Formeln ist die ganze Aufgabe absolvirt.

Der grösseren Deutlichkeit wegen sollen nun die in den beiden letzten Artikeln gewonnen Formeln in gebrauchsfertiger Gestalt zusammengestellt und die Anwendung der hierauf sich beziehenden Tabellen erklärt werden.

Der Schattenwurf verursacht, dass den Grössen

$$X, Y, X_L, Y_L$$

der Artikel (6) und (7) die Correctionen

$$-\Delta X, -\Delta Y, -\Delta X_L, -\Delta Y_L$$

zuzufügen sind.

Zunächst ergibt sich sofort:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y &= + \frac{S}{a b \pi} \\ \Delta X &= + \frac{\sin A}{a b \pi} \sigma \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

während man wohl niemals Veranlassung finden dürfte, ΔX_L und ΔY_L berechnen zu müssen. Im Uebrigen findet man leicht:

$$\Delta X_L = \Delta X \cdot \frac{b}{2aP}$$

Die Tabelle (Va) giebt nun die Numeri und Logarithmen folgender Grössen:

$$\lambda(a) = (\lambda_1' - \lambda_2') c$$

$$\lambda(b) = (\lambda_1 - \lambda_2) c - (\lambda_1' - \lambda_2') c$$

$$\lambda(c) = 2(\lambda_1 - \lambda_2) c - (\lambda_1' - \lambda_2') c + \mu c$$

wo

$$c = \frac{\sin A}{ab \cdot 180}$$

Dann ist nach (10) und (11)

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \Delta X &= + l' \frac{\alpha'^2 c}{2} - \delta A \cdot \lambda(a) + c \sigma (v^*) \\ \text{b) } \Delta X &= - l' \frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{2} \cdot c + \delta A \cdot \lambda(b) \\ \text{c) } \Delta X &= + l' \frac{\alpha'^2 c}{2} + \delta A \cdot \lambda(c) + c \sigma (v^*) \\ \text{d) } \Delta X &= + 2 \delta A \cdot \lambda(b) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die Tabellen sind so eingerichtet, dass l' und δA in Graden und deren Bruchtheilen und ersteres immer negativ angenommen werden muss.

Hierzu tritt noch Gleichung (9), deren Berechnung nicht erspart werden kann ohne Tabellen, die unverhältnissmässig ausgedehnt sein müssten.

Als Beispiel für die Anwendung vorstehender Formeln mögen folgende Zahlen dienen.

Während der Opposition 1884—85 stand Saturn so, dass A nach der gewöhnlichen Art der Zählung negativ war. Wir müssen es hier aber positiv ansetzen und l' negativ, weil die Formeln unter diesen Voraussetzungen gelten. Es ist nun

	A	$90^\circ - C'$	l'	δA
1884 Dec. 14.	26 ^o 65	26 ^o 81	-0 ^o 96	+0 ^o 16
1885 Jan. 3.	26.72	26.81	-2.88	+0.09
	23. 26.79	26.81	-5.02	+0.02
Febr. 12.	26.86	26.81	-6.46	-0.05

Ich finde nun für v^* 84^o3, 88^o9, 89^o9, 90^o3 und man sieht sofort, dass nach Belieben Fall (a) oder (c) genommen werden kann, da $v_{III} = 90^\circ$. Dass in der That beide Fälle genau dieselben Zahlen geben, sieht man sofort. Mit Hülfe der Tabelle Vc ergeben sich nun für die genannten Zeiten die 4 zugehörigen ΔX :

$$\begin{aligned}
 &+ 0.002 \\
 &+ 0.007 \\
 &+ 0.013 \\
 &+ 0.017
 \end{aligned}$$

Da für $A = 26^\circ 75$, welches der Mittelwerth der obigen A ist, nach Tabelle III $X = +1.376$, so sieht man, dass die Correction ΔX nicht merklich sein wird, weil sie im Maximum nur wenig mehr als 1 Procent der Lichtmenge des Ringes allein ausmacht.

Was den Schattenwurf des Ringes auf den Saturnkörper betrifft, so kommt derselbe im Vorliegenden nicht in Frage. Für die 3 ersten Zeiten ist der Schatten der inneren Ringbegrenzung verdeckt und der des äusseren fällt ausserhalb des Saturnkörpers. Im letzten Zeitpunkt würde allerdings die innere Ringbegrenzung einen Schatten erzeugen. Dieser ist aber im vorliegenden Falle gewiss unmerklich. Auch wurde schon erwähnt, dass es wohl stets unnütze Mühe wäre, den Schattenwurf der inneren Ringbegrenzung in Rechnung zu ziehen und zwar wegen des sogenannten dunklen Ringes.

10.

Es dürfte nicht unangemessen sein, über den Einfluss des dunklen Ringes, der zuletzt zur Sprache gekommen ist, einige Bemerkungen zu machen. Auf dieses Gebilde wurde man in weiteren Kreisen durch die Beschreibungen, welche Bond Ende der vierziger Jahre davon machte, aufmerksam, obwohl kaum bezweifelt werden kann, dass dieses selbst in kleineren Fernröhren leicht sichtbare Object schon weit früher gesehen worden ist. Die ersten Messungen an dem dunklen Ringe scheint Galle gemacht zu haben. Dieselben datiren aus den Jahren 1838 und 1839¹⁾.

Bezeichnet α'' den Radius der inneren Begrenzung des dunklen Ringes, so ergibt sich, wenn der Aequatoreal-Halbmesser des Saturn $= 1$ gesetzt wird, im Mittel aus Galle's Messungen:

$$\log \alpha'' = 0.0916$$

Bond giebt als Resultat seiner Bestimmungen²⁾

$$\log \alpha'' = 0.1010$$

so dass man der Wahrheit sehr nahe kommen wird, wenn man

$$\log \alpha'' = 0.0963$$

annimmt.

Der dunkle Ring verdeckt nun einen Theil F der Saturnscheibe, der nach Formel (5) des Art. (6) leicht berechnet werden kann. Man hat dort nur zu setzen:

$$\log \alpha = 0.1824, \log \alpha' = 0.0963$$

Hier kommt es nur darauf an, überschlagsweise den ungefähren Einfluss des dunklen Ringes kennen zu lernen. Ich habe, da F mit $\sin \mathcal{A}$ wächst, für den grössten Werth von \mathcal{A} , nämlich 30° , die Rechnung durchgeführt und finde

$$f' = 28^\circ 95; \quad \varphi' = 45^\circ 49$$

während nach Tabelle Va

$$f = 48^\circ 02 \quad \varphi = 63^\circ 93$$

ist. Hieraus ergibt sich

$$\log F = 9.368 - 10$$

1) Astron. Nachr. No. 756.

2) Annals of the Observatory of the Harvard College II part 1, pag. 107.

Der Logarithmus der ganzen scheinbaren Fläche, welche die Saturnscheibe und der helle Ring einnehmen, ist ($a=1$ gesetzt) 0.854. Es beträgt also F nur 0.033 der ganzen Fläche und wenn man, was beiläufig der Wirklichkeit entsprechen dürfte, annimmt, dass alle Theile der ganzen Figur nahezu gleich hell sind, so würde sich die Lichtmenge um circa 3⁰/₁₀ im Maximum durch den dunklen Ring verkleinern. Von diesen 3⁰/₁₀ kommt nur ein Bruchtheil in Betracht. Zuerst ist es sicher, dass der dunkle Ring durchscheinend ist und einen nicht unmerklichen Theil der von der dahinter liegenden Saturnoberfläche ausgehenden Lichtmenge durchgehen lässt. Sodann strahlt der ganze sogenannte dunkle Ring, eben weil er sichtbar ist, eine gewisse Lichtmenge selbst aus. Beide Umstände zusammen werden nur einen kleinen Theil der genannten 3 Procennte wirksam sein lassen. Ja es ist recht gut möglich, dass die Wirkung des ersten Umstandes durch den zweiten mehr als compensirt wird, so dass der dunkle Ring eine kleine Vermehrung der gesammten Lichtmenge verursacht. In jedem Falle scheint es nicht nöthig, bei einer Photometrie des Saturn auf diesen Umstand Rücksicht zu nehmen. Sollte dies aber wünschenswerth erscheinen, so sind im Vorhergehenden alle Mittel enthalten, welche eine dahinzielende Rechnung ermöglichen. Auch für das vom dunklen Ringe durchgelassene Licht des Saturnkörpers wird man Berechnungen anstellen können, die sich sehr leicht mit Hülfe der im Folgenden enthaltenen Betrachtungen ergeben. Ich gehe aber, weil die Praxis vorderhand dazu noch nicht auffordert, auf diesen Gegenstand nicht weiter ein.

11.

Ich gehe nun zur Betrachtung des photometrischen Verhaltens des Ringes über, insofern hierbei die physische Beschaffenheit desselben in Frage kommt. Es wird sich also darum handeln, die in Art. 6 eingeführte Function Φ näher zu bestimmen. Die Grundlage dieser Untersuchung ist bereits in der Einleitung erörtert worden. Es erübrigt nur noch die Vorstellungen, auf welchen die folgenden Entwicklungen beruhen, näher zu präcisiren. Es sollen also folgende Annahmen gemacht werden:

Der Saturnring besteht aus einem Schwarm kleiner Kugeln, die in sehr grosser Anzahl den cylindrischen Raum des Ringes einnehmen.

Ueber das Gesetz, nach welchem jede dieser Kugeln das Licht zurückwirft, braucht man so lange keine Annahme zu machen, als man voraussetzt, dass die Kugeln der Erde immer voll erleuchtet erscheinen. In diesem letzteren Umstande dürfte indess kaum eine Beschränkung erblickt werden, denn Erde und Sonne erscheinen vom Saturn aus in einer gegenseitigen Entfernung von höchstens $6\frac{1}{2}$ Grad und die Phase wird demgemäss in keinem Falle einen merklichen Einfluss ausüben können.

Es sei nun dq' die Lichtmenge, welche ein unendlich kleines Element $d\varepsilon$ einer der den Ring bildenden und im Innern desselben gelegenen Kugeln, der Erde zusenden würde, wenn es von einer der anderen Kugeln weder beschattet noch verdeckt wäre. Nun kann aber beides eintreten und es fragt sich, wie gross im Mittel die Lichtmenge dq eines solchen Elementes ist, wenn sehr viele solcher Elemente in Betracht gezogen werden. Der Radius einer der kleinen Kugeln sei ρ , H die Höhe des cylindrischen Ringes, N die Anzahl der Kugeln, welche den Ring bilden, schliesslich h die Tiefe des Elementes $d\varepsilon$ von der oberen Ringebene an gerechnet.

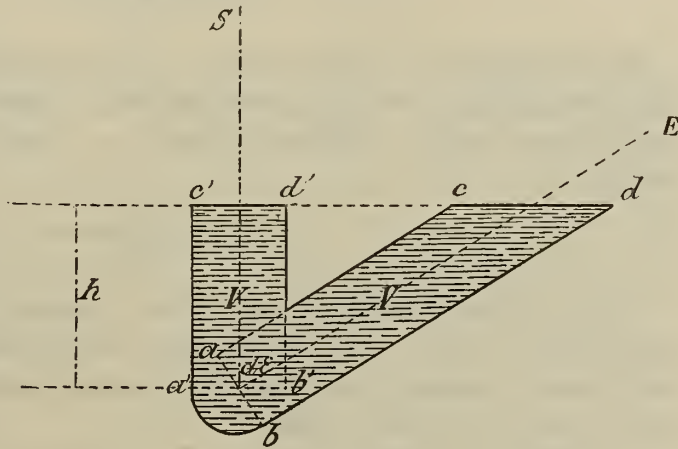
Legt man durch $d\varepsilon$ zwei Grade ($d\varepsilon, E$) und ($d\varepsilon, S$), von denen die erste nach der Erde, die zweite nach der Sonne gerichtet ist, so wird jede Kugel, deren Mittelpunkt von jeder der beiden Geraden weiter absteht als um die Strecke ρ^1 , das Element $d\varepsilon$ weder beschatten noch verdecken, und jede Kugel, welche diesen Bedingungen nicht genügt, wird verursachen, dass $d\varepsilon$ der Erde gar kein Licht zusendet. Bezeichnet p die Anzahl der Fälle, in welchen die zuerst erwähnte Möglichkeit stattfindet und p' die Anzahl der Fälle des Gegentheils, so sendet das Element $d\varepsilon$ in p Fällen die Lichtmenge dq' , in p' Fällen die Lichtmenge 0 der Erde zu. Der Mittelwerth aller dieser Lichtmengen ist also:

$$dq = dq' \cdot \frac{p}{p+p'} = w \cdot dq' \quad (1)$$

Wird nun, was geschehen soll, angenommen, dass die Kugeln durch Zufall innerhalb des Ringes vertheilt sind, so ist w die Wahrscheinlichkeit dafür, dass N Kugeln innerhalb des Volumens R so liegen, dass der

1) Dies gilt strenge, wenn man die beiden Geraden in $d\varepsilon$ endigen lässt und nicht darüber hinaus verlängert.

Mittelpunct jeder derselben um mehr, als die Strecke ρ beträgt, von den genannten beiden Graden absteht. Mit andern Worten heisst das: die Mittelpuncte sämmtlicher Kugeln müssen innerhalb eines gewissen Raumes V liegen. Dieser Raum wird begrenzt 1) durch die obere Ringebene, 2) durch einen geraden Kreiscylinder mit dem Radius ρ , dessen Axe die Gerade $(d\varepsilon, E)$ ist, 3) durch einen ebensolchen Cylinder mit der Axe $(d\varepsilon, S)$, 4) durch eine Kugelfläche mit dem Radius ρ und dem Mittelpuncte in $d\varepsilon$. Diese 4 Flächen durchsetzen sich gegenseitig; es ist aber ohne weiteres klar, von welcher Fläche in jedem Punkte das Volumen V begrenzt werden soll (vergl. nebenstehende Figur).



Da nun ρ , wenn von den der Oberfläche des Ringes äusserst nahen Theilen abgesehen wird, gegen h sehr klein sein soll, so wird w offenbar für alle Elemente einer kleinen Kugel äusserst nahe denselben Werth haben und die Lichtmenge q , welche eine solche Kugel der Erde zusetzt, wird sein

$$q = w \cdot q',$$

wenn q' die Lichtmenge ist, welche dieselbe Kugel zusetzen würde, falls sie ganz frei läge.

w ist offenbar eine Funktion von h . Die Anzahl aller Kugeln, die einer Schicht angehören, welche in einer Tiefe h , von der oberen Ringfläche gerechnet, liegt und die Dicke dh besitzt, wird, da bei zufälliger Vertheilung einer grossen Zahl von Kugeln innerhalb des Ringes eine nahe gleichförmige Vertheilung mit überaus grosser Wahrscheinlichkeit folgt, sein

$$\frac{N}{H} \cdot dh$$

Eine solche Schicht wird also die Lichtmenge

$$w q' \frac{N}{H} \cdot dh$$

der Erde zusenden und der ganze Ring die Lichtquantität:

$$Q = q' \frac{N}{H} \int_0^H w \cdot dh \quad (2)$$

q' ist so lange nicht bekannt, als es nicht das Gesetz ist, nach welchem jede einzelne Kugel das Licht zurückstrahlt. Jedenfalls wird es aber nur vom Phasenwinkel α abhängen können, so dass $q' = I'f(\alpha)$ und demzufolge

$$Q = I'f(\alpha) \frac{N}{H} \int_0^H w \cdot dh \quad (3)$$

Diese Formel enthält allgemein die Grundlage für eine Photometrie staubförmiger Massen. Die Modification dieser Formel für den Fall einer nicht gleichförmigen Dichtigkeit der einzelnen Schichten übergehe ich, da dieselbe sich von selbst ergibt.

Im Falle des Saturnringes ist, wie schon öfters erwähnt, $f(\alpha)$ als constant zu betrachten, wodurch alles Hypothetische in der Formel (3) verschwindet.

Die erste Aufgabe, die sich nun darbietet, ist die Bestimmung von w als Funktion von h . Es sind $N-1$ Kugeln in dem Raume R zufällig vertheilt und w ist die Wahrscheinlichkeit, mit welcher die Mittelpunkte aller ausserhalb des Raumes V oder also innerhalb des Raumes $R-V$ liegen. Nach bekannten Sätzen ist

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdots w_{N-1}$$

wo w_1 die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass eine Kugel die gestellte Bedingung erfüllt, w_2 die Wahrscheinlichkeit, dass dies für eine zweite Kugel geschieht, nachdem bereits der Mittelpunkt einer Kugel im Raume $R-V$ sich befindet u. s. f. Nun ist offenbar

$$w_1 = 1 - \frac{V}{R}$$

Liegt aber der Mittelpunkt einer Kugel bereits im Raume $R-V$, so ist für den Mittelpunkt einer zweiten Kugel nur noch der Raum $R-k$, wo

$$k = \frac{32}{3} \cdot \rho^3 \pi$$

verfügbar. Die erste Kugel kann aber theilweise im Raume V liegen. Ist demnach ε_1' ein positiver echter Bruch, der übrigens ausserordentlich klein sein wird, so wird demnach

$$w_2 = \frac{R - k - V + \varepsilon_1' k}{R - k} = 1 - \frac{V - \varepsilon_1' k}{R - k}$$

Nehmen wir nun allgemein an, dass bereits $m - 1$ Kugelcentren im Raume $R - V$ sich befinden, so werden diese Kugeln zum Theil einander so nahe liegen können, dass zwischen diese keine neue Kugel treten kann. Man findet dann, da sich die Räume k zum Theil decken können, dass für den Mittelpunkt einer m ten Kugel nur noch der Raum $R - (m - 1) \varepsilon_{m-1} \cdot k$ verfügbar ist, wo ε_m einen echten Bruch bedeutet. Ein Theil dieser Kugeln k liegt nun weiter so, dass sie in den Raum V hineinragen und hieraus ergibt sich, dass

$$w_m = \frac{R - (m - 1) \varepsilon_{m-1} k - V + (m - 1) \varepsilon_{m-1}' k}{R - (m - 1) \varepsilon_{m-1} k}$$

wo ε_{m-1}' ebenfalls einen echten Bruch und zwar einen äusserst kleinen wenn $\frac{V}{R}$ es ist, bedeutet. Auf diese Weise findet man:

$$w = \left(1 - \frac{V}{R}\right) \left(1 - \frac{V - \varepsilon_1' k}{R - k}\right) \left(1 - \frac{V - 2 \varepsilon_2' k}{R - 2 \varepsilon_2 k}\right) \left(1 - \frac{V - (N-2) \varepsilon_{N-2}' k}{R - (N-2) \varepsilon_{N-2} k}\right) \quad (4)$$

Man weiss also, dass die $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots$ sehr kleine Brüche sind, dagegen die $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ für kleine Indices sich nur äusserst wenig von der Einheit unterscheiden, welche Differenz aber für grössere Indices zunimmt. Die ersteren Grössen sind ferner noch abhängig von $\frac{V}{R}$, während die letzteren als constant betrachtet werden dürfen.

So leicht sich die Formel (4) aufstellen liess, so schwierig dürfte es sein, den expliciten Ausdruck für w , in welchem die einzelnen ε bestimmt erscheinen, zu erlangen¹⁾. Dies wäre aber nothwendig, wenn das be-

1) Diese Aufgabe hat viel Aehnlichkeit mit der Beantwortung der bisher noch völlig offenen Frage nach dem Vorkommen einer bestimmten Anzahl von optischen Doppelsternen bei einer gegebenen Anzahl zufällig am Himmel vertheilter Sterne. Die bisher in dieser Richtung gemachten Versuche dürften nicht geeignet sein, die Beantwortung dieser Frage anzubahnen.

trachtete System discreter Massen sehr dicht wäre. Diese Annahme scheint indess nicht wahrscheinlich und daraus ergibt sich die Möglichkeit, wenigstens einen Näherungsausdruck für w abzuleiten. Bei sehr dünn vertheilter Materie ist offenbar nahezu:

$$w = \left(1 - \frac{V}{R}\right)^{N-1}$$

und es wird hier, wenn die zweite Potenz von $\frac{V}{R}$ gegen die erste vernachlässigt wird

$$w = e^{-(N-1) \cdot \frac{V}{R}} \quad (5)$$

Will man so weit gehende Vernachlässigungen nicht machen, so wird es nicht möglich, ohne die strenge Lösung der obigen Aufgabe zu besitzen, eine völlig einwurfsfreie Formel aufzustellen. Man kann indessen zeigen, dass man auch im allgemeinen Falle unter gewissen Annahmen wieder auf eine ganz ähnliche Formel wie (5) geführt wird.

Die einzelnen ϵ'_m sind, wie leicht zu sehen, noch von $\frac{V}{R}$ abhängig, ferner verschwinden sie, wenn $\frac{V}{R} = 0$ wird. Sind also diese Grössen nach Potenzen von $\frac{V}{R}$ entwickelbar, so wird

$$\epsilon'_m = \gamma_m^1 \frac{V}{R} + \gamma_m^2 \left(\frac{V}{R}\right)^2 + \dots$$

Es wird nun offenbar für gewisse nicht zu dichte Massenvertheilungen diese Reihe näherungsweise durch ihr erstes Glied dargestellt werden können. Wird diese, allerdings nicht streng bewiesene, Annahme zugelassen, so wird man schreiben können:

$$V - m \epsilon'_m k = V \cdot \epsilon_m^0$$

wo ϵ_m^0 ein positiver echter Bruch ist, der nicht näher bestimmbar ist, der aber für nicht dichte Massenanhäufungen innerhalb des Saturnringes nicht wesentlich von der Einheit verschieden sein kann.

Hiernach wird, wenn wir nun noch für $N-2$, N schreiben, welche Substitution für grosse N ganz gleichgültig ist:

$$w = \prod_{m=0}^N \left(1 - \frac{V \epsilon_m^0}{R - m \epsilon_m k}\right)$$

Unter denselben Voraussetzungen ist aber jedes Glied des erwähnten Productes wenig von Eins verschieden und man wird durch Mitnahme nur des grössten Gliedes der betreffenden Reihenentwicklung sofort erhalten:

$$\log w = -V \sum_{m=1}^N \left(\frac{\varepsilon_m^0}{R - m \varepsilon_m k} \right)$$

Die einzelnen Glieder dieser Summe sind alle positiv. Ist demnach η ein positiver echter Bruch, so wird, da angenommen werden soll, dass $R > m k$:

$$\log w = -\frac{V}{R} \eta \sum_{m=0}^N \left(\frac{1}{1 - m \frac{k}{R}} \right)$$

worin $\frac{k}{R} = \delta$ äusserst klein ist. Es folgt daraus, dass die rechts stehende Summe näherungsweise dargestellt wird durch

$$-\frac{1}{\delta} \int_0^{N\delta} \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{\delta} \cdot \log(1 - N\delta)$$

Bezeichnet man demnach

$$-\frac{\log(1 - N\delta)}{\delta} \cdot \eta = n N$$

so wird

$$w = e^{-n N \cdot \frac{V}{R}} \quad (6)$$

und man wird für kleine Werthe von $N\delta$ hinzufügen dürfen, dass n nicht viel grösser als η sein wird.

Das auseinandergesetzte Verfahren giebt für die Dichtigkeit der Massenvertheilung im Saturnringe eine untere Grenze. Wird nämlich durch die Beobachtungen

$$n N = N_0$$

bestimmt, so kann daraus geschlossen werden, dass

$$-\frac{\log(1 - N\delta)}{\delta} > N_0$$

oder was unter selbstverständlichen Voraussetzungen auf dasselbe hinauskommt:

$$N > N_0$$

Diese Unsicherheit wird sich in der Praxis nicht sehr geltend machen; es wird sich nämlich in der Folge zeigen, dass kaum daran gedacht werden kann, aus den bisherigen photometrischen Beobachtungen des Saturn auch nur einen beiläufigen Werth von nN abzuleiten.

Setzt man (6) in die Formel (3) ein, so ergibt sich endlich:

$$Q = \Gamma f(\alpha) \frac{N}{H} \int_0^H e^{-\frac{v}{R} n N} \cdot dh \quad (7)$$

Ehe ich diese allgemeine Formel vornehme, will ich den Fall der genauen Opposition des Saturn behandeln. Es soll darunter der Fall verstanden werden, in welchem Sonne und Erde vom Saturn aus gesehen genau in derselben Richtung stehen. Incidenz- und Emanationswinkel sind hier beide gleich und zwar $=i$ und ferner ist $\alpha=0$. Es wird dann, mit Vernachlässigung der äusserst kleinen Halbkugel, welche sich an den Kreiscylinder, der hier den Raum V begrenzt, ansetzt

$$V = \varrho^2 \pi \cdot \frac{h}{\cos i}$$

Setzt man also

$$\mu^2 = nN \cdot \frac{H}{R} \varrho^2 \pi$$

so ist

$$Q = \Gamma f(0) \frac{N}{H} \int_0^H e^{-\frac{\mu^2}{\cos i} \cdot \frac{h}{H}} \cdot dh$$

also:

$$Q = \frac{\Gamma f(0) N}{\mu^2} \cdot \cos i \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{\cos i}} \right)$$

Bezeichnet man ferner mit K das Volumen aller den Saturnring bildenden Kugeln zusammengenommen, so ist ($n=1$ gesetzt)

$$\mu^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{K}{R} \cdot \frac{H}{\varrho}$$

wodurch μ^2 eine leicht verständliche Bedeutung erhält. Der helle Theil des Saturnringes scheint nun für diejenigen Werthe von i welche in Frage kommen, undurchsichtig zu sein, d. h. es ist für ihn

$$e^{-\frac{\mu^2}{\cos i}}$$

eine verschwindend kleine Grösse; danach stellt sich jetzt Q so dar:

$$Q = \gamma \cdot \cos i$$

wo γ eine Constante ist. Diese Formel habe ich bereits in dem oben citirten Aufsätze in der V. S. annoncirt.

Noch ein zweiter Fall lässt sich sehr einfach erledigen, nämlich der, dass der Phasenwinkel α nicht klein ist. Es ist klar, dass dann der den beiden Cylindern gemeinschaftliche Theil von V gegenüber dem Inhalte dieser Cylinder verschwindet und dass dann also, wieder den kleinen von der Kugel begrenzten Theil vernachlässigt, sehr nahe ist

$$V = \rho^2 \pi h \left(\frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon \cos i} \right)$$

wo i und ε Incidenz- und Emanationswinkel bedeuten. Jetzt ergibt sich

$$Q = \frac{\Gamma N f(\alpha)}{\mu^2} \cdot \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \left[1 - e^{-\mu^2 \cdot \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}} \right]$$

und da das zweite Glied als verschwindend klein gelten darf:

$$Q = \frac{\Gamma N}{\mu^2} \cdot f(\alpha) \cdot \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \quad (8)$$

eine Formel, deren Einfachheit und Aehnlichkeit mit dem im ersten Abschnitte zur Anwendung gelangten photometrischen Grundgesetze bemerkenswerth sein dürfte.

12.

Um den Fall, der beim Saturnringe der wichtigste ist, wo nämlich α stets einen kleinen zwischen 0 und $6\frac{1}{2}$ Grad liegenden Winkel bedeutet, zu verfolgen, muss nun V berechnet werden. Es bezeichne V_0 den Inhalt des nach der Erde gerichteten Cylinders (a, b, c, d) (vergl. die Figur auf pag. 469), V_1 den des nach der Sonne gerichteten (a', b', c', d).

K das von der Kugel begrenzte Stück ($a', b, d\varepsilon$) und schliesslich G das beiden Cylindern gemeinschaftliche Stück ($a, d\varepsilon, b'$), so ist

$$V = V_0 + V_1 + K - G$$

Sofort ergibt sich, dass

$$K = \frac{2}{3} \rho^3 (\pi - \alpha)$$

welche Grösse gegenüber V_0 und V_1 zu vernachlässigen ist, und jedenfalls genügend nahe:

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= \rho^2 \pi \cdot \frac{h}{\cos \varepsilon} \\ V_1 &= \rho^2 \pi \cdot \frac{h}{\cos i} \end{aligned} \right\}$$

so dass nur noch die Bestimmung von G erübrigt.

A und A' sollen die Elevationswinkel der Erde und Sonne über der Ringebene bedeuten. Es werde ferner ein Coordinatensystem so gelegt: der Anfang desselben liege im Elemente $d\varepsilon$, die ΞY Ebene parallel zur Ringebene, die Z Axe senkrecht darauf und in der ΞZ Ebene die Richtung nach der Erde. In Bezug auf dieses System ist die Gleichung der oberen Ringebene

$$\zeta = h$$

Es werde ein zweites Coordinatensystem XYZ mit demselben Anfang eingeführt, dessen positive X Axe nach der Erde zeigt und in dessen XY Ebene die Sonne liegt; dann ist, wenn die Bezeichnungen nach der nebenstehenden Figur gewählt werden:

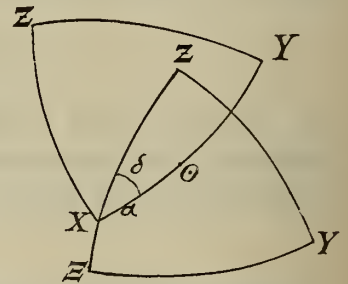
$$\zeta = x \sin A + y \cos A \cos \delta + z \cos A \sin \delta$$

und die Gleichung der Ringebene wird, auf dieses System bezogen:

$$h = x \sin A + y \cos A \cos \delta + z \cos A \sin \delta \quad (1)$$

während die Gleichungen der beiden nach der Erde resp. Sonne gerichteten Kreiscylinder sind:

$$\left. \begin{aligned} y^2 + z^2 &= \rho^2 \\ (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 + z^2 &= \rho^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Lässt man nun die ganze räumliche Figur durch eine Ebene $Z = \zeta$ schneiden, so wird aus G das Viereck (vgl. die nebenstehende Figur, in welcher c die Projection des Koordinatenanfanges) $abcd$ herausgeschnitten und es ist

$$G = 2 \int_0^{\rho} \overline{ab} \cdot \overline{acd} \zeta$$

Man hat aber

$$\overline{ac} = +\sqrt{\rho^2 - \zeta^2}$$

während der Punkt b der Durchschnittspunkt der beiden Geraden:

$$y = +\sqrt{\rho^2 - \zeta^2} \text{ und } x \sin \alpha = y \cos \alpha + \sqrt{\rho^2 - \zeta^2}$$

ist. Dadurch ergibt sich sofort:

$$\overline{ab} \cdot \sin \alpha = (1 + \cos \alpha) \sqrt{\rho^2 - \zeta^2}$$

und daher

$$G = 2 \frac{(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} \int_0^{\rho} (\rho^2 - \zeta^2) d\zeta = \frac{4}{3} \cdot \frac{(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} \rho^3 \quad (3)$$

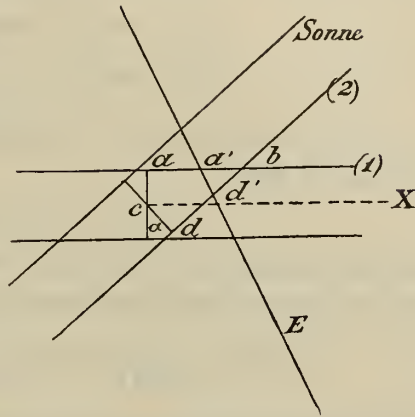
Diese Gleichung gilt nun offenbar nur so lange, als G nicht von der Ebene, deren Gleichung durch (1) gegeben ist, geschnitten wird, denn es kommen nur die innerhalb des Ringes gelegenen Theile in Frage. Geschieht dies, so muss man statt G

$$G - \Sigma$$

nehmen, wo G durch (3) definiert ist und Σ das Volumen des Körpers bedeutet, dessen Durchschnitt mit der Ebene $z = \zeta$ das Dreieck $a'b'd'$ ist. Nennt man σ den Flächeninhalt des Dreiecks $a'b'd'$, so ist:

$$\Sigma = \int \sigma \cdot d\zeta$$

wo die Integration auf alle Theile für welche σ reell und positiv bleibt, auszudehnen ist. Das genannte Dreieck wird eingeschlossen von den Geraden 1), 2) und E) deren Gleichungen:



$$1) \quad y = +\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2}$$

$$2) \quad x \sin \alpha - y \cos \alpha = +\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2}$$

$$E) \quad x \sin A + y \cos A \cos \delta = h - \zeta \cos A \sin \delta$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Durchschnittspunktes d' mit x_1 und y_1 so wird:

$$2\sigma = (\overline{ab} - \overline{aa'}) (\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} - y_1)$$

\overline{ab} ist bereits oben berechnet worden, während $\overline{aa'}$ nichts anderes als die x Coordinate des Durchschnittspunktes von 1) und E) ist. Man findet so:

$$\overline{aa'} = \frac{1}{\sin A} \left\{ h - \cos A \cos \delta \sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} - \zeta \cos A \sin \delta \right\}$$

und ebenso leicht ergibt sich für y_1 :

$$y_1 \{ \cos \alpha \sin A + \sin \alpha \cos A \cos \delta \} = h \sin \alpha - \zeta \sin \alpha \cos A \sin \delta - \sin A \sqrt{\varrho^2 - \zeta^2}$$

Der Klammerausdruck links ist aber $= \sin A'$. Setzt man dies alles in die Formel für 2σ ein, so findet man schliesslich:

$$2\sigma = \frac{1}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \left[(\sin A + \sin A') \sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} - (h - \zeta \cos A \sin \delta) \sin \alpha \right]^2$$

Die Integration ist dem Obigen zufolge auf alle Werthe von ζ auszu-dehnen, für welche 2σ positiv bleibt. Die Grenzen ζ_1 sind demnach durch die beiden Wurzeln der Gleichung gegeben, welche entsteht, wenn man die letzte Klammergrösse Null setzt. Es soll übrigens, zur Vermeidung von Verwickelungen, gleich hier eine sich von selbst darbietende Vereinfachung eintreten¹⁾. Es ist klar, dass ζ stets $< \varrho$ sein muss, während h gegen ϱ auch schon im früheren als sehr gross betrachtet worden ist. Es wird also $h - \zeta \cos A \sin \delta$ immer sehr nahe $= h$ sein und es wird jetzt einfacher:

$$2\sigma = \frac{1}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \left[(\sin A + \sin A') \sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} - h \sin \alpha \right]^2$$

Die Integrationsgrenzen sind die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$\zeta_1^2 = \varrho^2 - \frac{h^2 \sin^2 \alpha}{(\sin A + \sin A')^2} \quad (4)$$

1) Vergleiche über diesen Punkt den Nachtrag.

und zur weiteren Reduction soll, was stets erlaubt ist, gesetzt werden:

$$\frac{h \sin \alpha}{\sin A + \sin A'} = \varrho \sin \varphi$$

woraus folgt:

$$\zeta_1^2 = \varrho^2 \cos^2 \varphi$$

Führt man nun das Integral

$$\Sigma = \int_{-\zeta_1}^{+\zeta_1} \sigma d\zeta$$

aus, so findet sich:

$$\Sigma = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \varrho^3 \left[\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sin \varphi \right] \quad (5)$$

und nach den obigen Auseinandersetzungen:

$$V = V_0 + V_1 + \Sigma - G$$

worin G aus (3) zu nehmen ist. Es war weiter

$$V_0 + V_1 = \varrho^2 \pi h \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}$$

und weil $i = 90^\circ - A'$, $\varepsilon = 90^\circ - A$ zu setzen ist:

$$V_0 + V_1 = \varrho^2 \pi \cdot \frac{h (\sin A + \sin A')}{\sin A \sin A'} = \varrho^2 \pi \cdot \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \sin \varphi$$

Hiermit ergibt sich schliesslich:

$$V = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \varrho^3 \left\{ \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi \right\} - \frac{4}{3} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \cdot \varrho^3 \quad (6)$$

Dies ist der Ausdruck für V , so lange das Volumen G durch die Ebene E geschnitten wird oder so lange:

$$h \leq \frac{\varrho (\sin A + \sin A')}{\sin \alpha} = h_1$$

Für grössere h ist, wie erwähnt, $\Sigma = 0$ zu setzen und es wird dann:

$$V = V_2 = \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A \sin A'} \varrho^2 \pi h - \frac{4}{3} \frac{\varrho^3 (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha}$$

Die Formel (7) des vorigen Artikels angewandt, ergibt also:

$$Q = I'f(\alpha) \cdot \frac{N}{H} \left\{ \varrho \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n \frac{N}{R} V} \cdot \cos \varphi d\varphi + \int_{h_1}^H e^{-n \frac{N}{R} V_2} d h \right\} \quad (7)$$

Das zweite Integral kann sofort ausgeführt werden. Man findet für dasselbe

$$\frac{\sin A \sin A'}{n \frac{N}{R} \varrho^2 \pi (\sin A + \sin A')} e^{+\frac{4}{3} n \frac{N \varrho^3 (1 + \cos \alpha)}{R \sin \alpha}} \cdot \left\{ e^{-m h_1} - e^{-m H} \right\}$$

wenn für den Augenblick zur Abkürzung

$$m = n \frac{N}{R} \varrho^2 \pi \frac{(\sin A + \sin A')}{\sin A \sin A'}$$

gesetzt wird. Man wird, aus den oben angeführten Gründen, voraussichtlich wieder $e^{-m H}$ wegen verschwindender Kleinheit unterdrücken dürfen, so dass der letzte Ausdruck wird:

$$\frac{\sin A \sin A'}{n \frac{N}{R} \varrho^2 \pi (\sin A + \sin A')} e^{-n \frac{N \varrho^3 \pi}{R \sin \alpha} \left[\frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin A \sin A'} - \frac{4}{3} \frac{(1 + \cos \alpha)}{\pi} \right]} \quad (7a)$$

Die Gleichung (7) löst die gestellte Aufgabe streng. Für eine practische Anwendung sind indessen noch sehr wesentliche Vereinfachungen am Platze. Der Winkel α ist, wie wir wissen, klein. Wir wollen die zweite Potenz von α bereits als unmerklich fortlassen. Dann ist

$$1 + \cos \alpha = 2$$

Setzt man dann $A' = A + \delta A$, so ist offenbar δA von demselben Range wie α , da es nur einen Bruchtheil von ihm ausmacht. Lässt man aber die zweite Potenz von δA fort, so wird

$$(\sin A + \sin A')^2 = 4 \sin A [\sin A + \cos A \cdot \delta A]$$

und

$$\sin A \sin A' = \sin A [\sin A + \cos A \cdot \delta A]$$

das heisst:

$$\frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin A \sin A'} = 4$$

Die Gleichung (6) wird also:

$$V = \frac{\varrho^3}{\sin \alpha} \left\{ 4 \cos \varphi - \frac{4}{3} \cos^3 \varphi + (2\pi + 4\varphi) \sin \varphi - \frac{8}{3} \right\}$$

Es wurde bereits im letzten Artikel die Bezeichnung

$$k = \frac{3}{2} \cdot \rho^3 \pi$$

eingeführt. Setzt man nun noch:

$$\Phi = \frac{3}{8\pi} \left\{ \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi - \frac{2}{3} \right\} \quad (8)$$

so wird:

$$V = \frac{k}{\sin \alpha} \cdot \Phi$$

Ferner gebrauchen wir die bereits benutzte Bezeichnung:

$$\frac{k}{R} = \delta$$

Setzt man dann für den auftretenden constanten Factor

$$\rho f(\alpha) \frac{N}{H} I'$$

einfach I' , weil $f(\alpha)$ nur äusserst wenig variirt, so wird nach (7)

$$Q = I' \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nN\delta}{\sin \alpha} \cdot \varphi} \cdot \cos \varphi d\varphi + \frac{8}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{nN\delta} \cdot e^{-\frac{nN\delta}{8\pi \sin \alpha} (3\pi - 2)} \right\}$$

Zur numerischen Rechnung wird es vielleicht bequemer sein, dieses Resultat so zu schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{nN\delta}{\sin \alpha} &= x; & I' &= \frac{\Gamma}{nN\delta} \\ \mathfrak{A} &= x \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\varphi} \cdot \cos \varphi d\varphi \\ \mathfrak{B} &= \frac{8}{3} \cdot e^{-x \frac{3\pi - 2}{8\pi}}; & \mathfrak{C} &= \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \\ Q &= I' (\sin A + \sin A') \cdot \mathfrak{C} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Aus diesen Formeln ergibt sich, dass die gemachten Annahmen über die Constitution des Saturnringes zu dem Resultate führen, dass seine Lichtintensität mit dem Winkel α variirt. Wir werden finden, dass nach der Theorie diese Variation sehr bedeutend sein muss und dass dem durch

die Beobachtungen nicht widersprochen wird. Herr Dr. Müller in Potsdam ist zuerst durch seine photometrischen Beobachtungen auf diese Lichtvariation aufmerksam geworden. Dieselbe dürfte eine äusserst gewichtige Stütze für die Richtigkeit der Maxwell-Hirn'schen Ansicht abgeben.

13.

Ehe man zur Anwendung der gewonnenen Formeln schreiten kann, muss gezeigt werden, wie das Integral

$$\mathfrak{A} = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \phi} \cos \varphi \cdot d \varphi$$

für beliebige positive Werthe von x numerisch berechnet werden kann. Für nicht zu grosse Werthe von x wird man die Rechnung am besten auf mechanischem Wege, etwa nach der ausgezeichneten von Gauss gegebenen Methode, ausführen. Ich habe dies in der That für $x = 0$ bis $x = 100$ gethan und es erschien hier, da der Werth von \mathfrak{A} doch nur auf 3 höchstens 4 Stellen genau gefordert wird, ausreichend folgendes Verfahren einzuschlagen. Bis $x = 30$ wurden nach der Gauss'schen Methode zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ 6 Ordinaten eingeschaltet. Von da bis $x = 100$ wurde das ganze Integral in die beiden Integrale mit den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{4}$ resp. $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ zerlegt und jedes mit Hülfe von 6 Ordinaten berechnet. Von da ab würde eine mechanische Berechnung deshalb auf Schwierigkeiten stossen, weil nur diejenigen Werthe der Funktion unter dem Integralzeichen merkliche Beiträge liefern, welche kleinen Werthen von φ entsprechen. Es ist deshalb vortheilhafter, für grosse Werthe von x eine Reihenentwicklung für \mathfrak{A} aufzusuchen, die nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitet. Diese Entwicklung ist im Folgenden soweit ausgeführt, dass durch sie \mathfrak{A} für $x > 100$ auf etwa 4 Stellen genau gefunden wird.

Für $x = \infty$ erreicht \mathfrak{A} den Grenzwert $\frac{16}{3}$. Diesem Grenzwert strebt es aber sehr langsam zu, so dass selbst für $x = 10\,000$ noch das erste Glied der nachfolgenden Reihe nicht völlig unmerklich ist.

Da Φ mit zunehmendem φ fortwährend wächst, so ist

$$x \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \Phi} \cos \varphi d \varphi < x e^{-x \Phi_1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

wenn Φ_1 der Werth von Φ für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist, also $\Phi_1 = 0.1896$. Die rechte Seite dieser Ungleichung ist aber $= 0.0000002$ für $x = 100$ und kann also unbedenklich vernachlässigt werden. Mithin kann man für so grosse Werthe von x setzen:

$$\mathfrak{A} = x \int_0^{\sigma} e^{-x \Phi} \cos \varphi d \varphi; \quad \sigma < \frac{\pi}{4}$$

Dadurch ist aber erreicht, dass in den folgenden Entwicklungen sonst auftretende Unendlichkeiten ausgeschlossen bleiben. Differentiirt man die Gleichung (8) des vorigen Artikels nach φ und setzt

$$y = \frac{\pi}{2} + \varphi + \sin \varphi \cos \varphi = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{1}{X} \tag{1}$$

so wird:

$$\cos \varphi d \varphi = X d \Phi$$

und demzufolge

$$\mathfrak{A} = x \int_0^{\Sigma} e^{-x \Phi} X d \Phi,$$

wo Σ der Werth von Φ für $\varphi = \sigma$ ist.

Durch wiederholte Integration nach Theilen findet man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = & \left\{ e^{-x \Phi} \left[X + \frac{1}{x} \cdot \frac{dX}{d\Phi} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2 X}{d\Phi^2} + \dots + \frac{1}{x^n} \cdot \frac{d^n X}{d\Phi^n} \right] \right\}_{\varphi=0}^{\varphi=\sigma} \\ & + \frac{1}{x^n} \int_0^{\Sigma} e^{-x \Phi} \cdot \frac{d^{n+1} X}{d\Phi^{n+1}} \cdot d\Phi \end{aligned}$$

Das letzte Glied hat aber nach einem bekannten Satze den Werth:

$$R_n = -\frac{1}{x^n} \left[\left(\frac{d^n X}{d\Phi^n} \right)_{\varphi=0} - \left(\frac{d^n X}{d\Phi^n} \right)_{\varphi=\sigma} \right]$$

wo ϑ einen nicht näher angebbaren positiven echten Bruch bedeutet.

Da nun weiter σ so gewählt worden ist, dass für diesen Werth $e^{-x\varphi}$ als verschwindend klein zu betrachten ist, so wird also:

$$\mathfrak{U} = (X)_0 + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{dX}{d\varphi}\right)_0 + \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{d^2X}{d\varphi^2}\right)_0 + \cdots + \frac{1}{x^n} \cdot \left(\frac{d^n X}{d\varphi^n}\right)_0 + R_n \quad (2)$$

Es erübrigt nur noch die Coefficienten in (2) wirklich zu bestimmen. Hierbei soll bis zu $n=5$ gegangen werden, was für $x \geq 120$, auf welche diese Formel wirklich angewandt worden ist, genügt, um im ungünstigsten Falle \mathfrak{U} bis auf etwa eine Einheit der 4. Stelle genau zu erhalten.

Man findet nun leicht:

$$\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{1}{y \cos \varphi}; \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{16\pi \cos \varphi}{3y}$$

und hiermit:

$$\frac{dX}{d\varphi} = -2 \left(\frac{8\pi}{3}\right)^2 \frac{\cos \varphi}{y^3}$$

$$\frac{d^2X}{d\varphi^2} = 2 \left(\frac{8\pi}{3}\right)^3 \left\{ \frac{1}{y^4} \operatorname{tg} \varphi + \frac{6 \cos^2 \varphi}{y^5} \right\}$$

$$\frac{d^3X}{d\varphi^3} = 2 \left(\frac{8\pi}{3}\right)^4 \left\{ \frac{1}{y^5 \cos^3 \varphi} - \frac{20 \sin \varphi}{y^6} - \frac{60 \cos^3 \varphi}{y^7} \right\}$$

$$\frac{d^4X}{d\varphi^4} = 2 \left(\frac{8\pi}{3}\right)^5 \left\{ \frac{3 \sin \varphi}{y^6 \cos^5 \varphi} - \frac{(10 + 20 \cos^2 \varphi)}{y^7 \cos^2 \varphi} + \frac{420 \sin \varphi \cos \varphi}{y^8} + \frac{840 \cos^4 \varphi}{y^9} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^5X}{d\varphi^5} = 2 \left(\frac{8\pi}{3}\right)^6 & \left\{ \frac{1}{y^7} \left[\frac{3}{\cos^5 \varphi} + \frac{15 \sin^2 \varphi}{\cos^7 \varphi} \right] - \frac{1}{y^8} \cdot \frac{56 \sin \varphi}{\cos^4 \varphi} + \frac{1}{y^9} \cdot \frac{280 (4 \cos^2 \varphi - 1)}{\cos \varphi} \right. \\ & \left. - \frac{1}{y^{10}} 10080 \sin \varphi \cos^2 \varphi - \frac{1}{y^{11}} 15120 \cos^5 \varphi \right\} \end{aligned}$$

für $\varphi = 0$ wird $y = \frac{\pi}{2}$ und die Werthe der Differentialquotienten sind:

$$\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)_0 = -\frac{16}{3} \left(\frac{64}{3\pi}\right); \quad \left(\frac{d^3X}{d\varphi^3}\right)_0 = -\left(80 - \frac{\pi^2}{3}\right) \left(\frac{64}{3\pi}\right)^3$$

$$\left(\frac{d^2X}{d\varphi^2}\right)_0 = +16 \left(\frac{64}{3\pi}\right)^2; \quad \left(\frac{d^4X}{d\varphi^4}\right)_0 = +(560 - 5\pi^2) \left(\frac{64}{3\pi}\right)^4$$

$$\left(\frac{d^5X}{d\varphi^5}\right)_0 = -\left(\frac{64}{3\pi}\right)^5 \left\{ 5040 - 70\pi^2 - \frac{\pi^4}{16} \right\}$$

Setzt man nun noch

$$x = 100 \xi$$

so erhält man nach Berechnung der numerischen Werthe der Coefficienten:

$$\mathfrak{A} = 5.3333 - \frac{1}{\xi} (0.36217) + \frac{1}{\xi^2} (0.07378) - \frac{1}{\xi^3} (0.02402) + \frac{1}{\xi^4} (0.01086) - \frac{1}{\xi^5} (0.00627) \quad \left. \vphantom{\mathfrak{A}} \right\} (3)$$

Diese Reihe giebt z. B. für $x = 100$ also $\xi = 1$, $\mathfrak{A} = 5.0255$ und man weiss, dass der wahre Werth grösser ist, während die mechanische Quadratur $\mathfrak{A} = 5.0283$ ergab. Was das Restglied betrifft, so lässt sich leicht zeigen, dass dasselbe kleiner als das letzte mitgenommene Glied ist und das entgegengesetzte Zeichen hat. Man sieht dies auch sofort ein, wenn man den Verlauf von $-\frac{d^5 X}{d\varphi^5}$ für verschiedene φ in Betracht zieht. So ist der Logarithmus dieses Ausdruckes für $\varphi = 0^0, 10^0, 20^0, 30^0, 40^0$ und 45^0 resp.:

$$7.797, 6.887, 6.137, 5.515, 4.985, 4.641$$

und es folgt hieraus, dass innerhalb der in Betracht gezogenen Grenzen $\varphi = 0^0$ und $\varphi = 45^0$, $-\frac{d^5 X}{d\varphi^5}$ stets positiv ist und im Allgemeinen abnimmt.

Mit Hülfe der Reihe (3) wurde nun das Integral \mathfrak{A} in angemessenen Intervallen von $x = 120$ bis $x = 10000$ berechnet. Das Resultat dieser Berechnung findet man in Tabelle VI zusammengestellt. Ich habe in derselben gleich $\log \left(\frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(x)} \right)$ angesetzt (vergl. Formel (9) des vorigen Art.). Mit Hülfe dieser Tabelle kann sehr leicht die folgende Tabelle VII gebildet werden. Dieselbe giebt den Logarithmus der Grösse $M = \frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(\alpha)}$. Es war nach dem vorigen Artikel

$$x = \frac{n N \delta}{\sin \alpha}$$

Nimmt man nun für $n N \delta$ die Werthe 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 und 0.5 und für α die bei Saturn vorkommenden $\alpha = 0$ bis $\alpha = 6^0.5$, so kann man für jedes α und einen angenommenen Werth von $n N \delta$ sofort aus Tabelle VII $\log M$ entnehmen.

Schon aus den Werthen dieser Tafel ersieht man, welche bedeutende Schwankungen in der Helligkeit des Saturnringes eintreten und dass diese Schwankungen, welche die Helligkeit des Ringes beinahe verdoppeln, so gross sind, dass man sich wundern muss, dass sie nicht schon früher beobachtet worden sind. Wir werden sehen, dass die neueren Beobachtungen der Theorie durchaus nicht widersprechen. Zugleich aber ergibt eine Betrachtung der Tabelle VII, dass es gegenwärtig schwerlich gelingen wird die Grösse $nN\delta$ auch nur näherungsweise zu bestimmen. Die Zahlenwerthe zeigen für alle $nN\delta$ nahezu dasselbe Verhalten für die Werthe von $\alpha > 1^{\circ}0$ und nur für kleinere α ist eine grössere Verschiedenheit im Wachsthum des M bemerkbar. Es wird also, wenn überhaupt die Genauigkeit der Beobachtungen für diese Zwecke ausreichend sein sollte, was gegenwärtig noch zweifelhaft ist, nothwendig werden, darauf zu achten den Saturn möglichst oft bei kleinen α zu beobachten.

14.

Es musste für mich von der grössten Wichtigkeit sein, die vorstehende Theorie der Beleuchtung des Saturn an den Resultaten photometrischer Beobachtungen zu prüfen. Namentlich erschien es wichtig, nachzusehen, ob sich in den letzteren wirklich der sehr erhebliche Einfluss, den die Phase auf die Beleuchtung des Ringes nach der auseinandergesetzten Theorie ausübt in dem geforderten Grade zeigt. Herr Dr. G. Müller hat schon früher (A. N. Nr. 2631) bemerkt, dass seine Beobachtungen mit einiger Sicherheit anzeigen, dass die Helligkeit des Saturnsystems „60 Tage vor der Opposition 81 Procent und 60 Tage nach der Opposition 87 Procent von der Oppositionshelligkeit beträgt.“ Um nun der Frage rücksichtlich meiner Theorie etwas näher zu treten, habe ich Herrn Dr. Müller ersucht, mir aus dem reichen Schatz seiner Saturnbeobachtungen eine passende Auswahl mitzutheilen und dieser Bitte hat derselbe in der freundlichsten Weise, für die ich ihm aufrichtig dankbar bin, entsprochen.

Meine Absicht konnte es und kann es nicht sein, die Saturnbeobachtungen des Herrn Dr. Müller vollständig zu bearbeiten. Hierzu halte ich mich nicht für berechtigt und ich habe dieselben deshalb nur dazu

benutzt zu zeigen, dass sich schon bei ungefährender Rechnung nach meiner Theorie eine Vereinigung der Beobachtungsergebnisse erzielen lässt, die wenig grössere Abweichungen, als die Beobachtungsfehler in diesem Falle betragen, übrig lassen.

Aus den mir von Herrn Dr. Müller mitgetheilten Zahlen habe ich Mittelwerthe gebildet, welche in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Es bedeutet hierin Q_B die gemessene Lichtquantität des Saturnsystems dividirt durch die Lichtquantität, welche Capella uns zusendet, bereits reducirt auf die mittlere Opposition. Ich füge gleich die zugehörigen A , A' und α bei, welche übrigens möglicherweise in einer endgiltigen Reduction um Kleinigkeiten sich ändern werden.

1878.							
Nr.	Anzahl	$\log Q_B$	A	A'	α	$\log Q(0)$	$\log Q_L(0)$
1	3	9.728	4 ^o .89	2 ^o .48	5 ^o .43	9.692	9.698
2	4	9.802	3 .20	3 .40	0 .33	9.737	9.744
3	2	9.768	2 .02	3 .98	3 .87	9.731	9.735
4	3	9.701	1 .78	4 .22	4 .99	9.662	9.666
1879.							
5	2	9.831	10.47	7.91	6.05	9.732	9.742
6	2	9.818	10.44	8.08	5.65	717	727
7	2	9.844	9.96	8.50	3.83	733	745
8	3	9.886	8.87	9.01	0.54	734	747
9	3	9.851	8.00	9.42	2.83	737	748
10	2	9.791	7.51	10.14	5.87	690	700
1881 — 1882.							
11	2	9.934	20.00	18.52	5.09	9.715	9.720
12	2	9.992	19.66	18.93	3.04	756	763
13	3	0.018	18.71	19.40	1.45	758	767
14	3	9.945	18.34	20.25	6.08	735	741
1883 — 1884.							
15	3	0.118	25.61	25.77	0.66	9.730	9.739
16	2	0.049	25.39	25.95	3.69	733	738
17	3	0.013	25.67	26.23	6.00	712	716
18	2	0.026	26.00	26.33	5.02	714	719
1884 — 1885.							
19	4	0.009	26.53	26.79	4.61	9.688	9.693
20	4	0.047	26.55	26.80	3.69	716	721
21	5	0.079	26.63	26.82	1.03	692	701
22	4	0.045	26.77	26.83	3.72	712	718
23	4	0.029	26.97	26.81	5.66	710	715

1885 — 1886.

Nr.	Anzahl	$\log Q_B$	A	A'	α	$\log Q(0)$	$\log Q_L(0)$
24	2	0.102	25 ^o .78	26 ^o .17	1 ^o .94	9.753	9.761
25	4	0.113	26 .01	26 .10	0 .48	709	719
26	3	0.109	26 .24	26 .04	1 .93	756	764
27	3	0.031	26 .48	25 .94	4 .23	710	715
28	3	0.022	26 .60	25 .85	5 .44	709	714
29	3	0.044	26 .64	25 .81	5 .87	734	739
30	3	0.036	26 .67	25 .77	6 .14	728	732
31	3	9.996	26 .60	25 .66	6 .01	688	693

1886 — 1887.

32	2	9.977	23.01	23.95	3.41	9.694	9.696
33	2	0.087	23.66	23.73	0.12	696	706
34	2	0.069	24.04	23.58	1.85	750	755
35	2	0.031	24.54	23.33	4.66	745	748
36	3	9.992	24.67	23.19	5.70	713	715

Nach Formel (9) Art. 12, kann man die vom Ringe ausgehende Lichtmenge proportional mit

$$\frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \sin A' \frac{\mathfrak{S}(\alpha)}{\mathfrak{S}(\infty)}$$

oder, was nach der in Tabelle VI und VII angewandten Bezeichnung dasselbe ist, proportional mit

$$\frac{\sin A (\sin A + \sin A')}{M \sin A}$$

setzen. Nun erscheint nur ein Theil des Ringes unverdeckt, dessen scheinbare Fläche in den Art. 6 und 7 mit X proportional gesetzt worden ist. Die vom Ringe ausgehende Lichtmenge ist demzufolge proportional mit

$$\frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \frac{X}{M}$$

Im Sinne der Formel (7) Art. 6 ist also

$$B = I' \frac{(\sin A + \sin A')}{\sin A} \cdot \frac{1}{M}$$

zu setzen und ganz ähnlich wenn für den Saturnkörper das Lambert'sche Gesetz angenommen wird nach Formel (II) des Art. (7)

$$B_\lambda = I'_\lambda \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \frac{1}{M}$$

wo I' und I'_λ Constanten sind, deren Zusammensetzung sich leicht angeben liesse, worauf einzugehen indessen vorläufig keine Veranlassung vorliegt. Die beiden citirten Formeln der Art. (6) und (7) wären nun auf die mitgetheilten Zahlen anzuwenden. Hierzu wäre es nothwendig, auch $nN\delta$ als Unbekannte einzuführen und aus der Gesamtheit der gegebenen Q_B mit zu bestimmen. Ich habe indessen eine solche Bestimmung nicht ausgeführt, weil mir dieselbe aus dem vorliegenden Material, wie schon erwähnt, kaum erreichbar erschien. Sollte dies bei einer genaueren Bearbeitung der Beobachtungen ausführbar erscheinen, so wird man am besten für zwei verschiedene Werthe von $nN\delta$ die Rechnung durchführen und auf diese Weise die Differential-Quotienten in den aufzustellenden Bedingungsgleichungen numerisch ableiten. Im Uebrigen wird es wohl kaum nöthig sein, auf die Art und Weise, wie ein strengeres Ausgleichungsverfahren, als das hier eingeschlagene, in Anwendung zu kommen hat, näher einzugehen, weil Vorschriften für die Lösung solcher Aufgaben allgemein bekannt sind. Ich habe mich durch einige Versuche davon überzeugt, dass der Werth

$$nN\delta = 0.3$$

recht gut den benutzten Beobachtungen entspricht, wenigstens so gut, als sich bei einer ersten und provisorischen Anwendung der entwickelten Formeln nur erwarten lässt. Es ist also die folgende Rechnung mit diesem Werthe ausgeführt worden. Ich habe noch zu erwähnen, dass auf den Schattenwurf keine Rücksicht genommen worden ist, weil sein Einfluss ohne Frage gegenüber andern Umständen ganz zu vernachlässigen sein dürfte.

Rechnet man zunächst nach der Formel 7 Art. 6 (gleichförmige Beleuchtung) so giebt jedes beobachtete Q_B eine Bedingungsgleichung von der Form

$$Q_B = ax + by \quad (1)$$

wenn $x = I' Q(0)$; $y = Q(0)$; $a = \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \frac{X}{M}$; $b = D \cdot Y$

gesetzt wird. Man kann also $Q(0)$ d. i. die auf verschwindenden Ring reducirte Lichtmenge des Saturn und die Constante I' daraus berechnen. Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate hätte sich freilich nicht auf die Aufstellung der Bedingungsgleichungen (1), vielmehr einem in der Photometrie allgemein üblichen und auch nicht unbegründeten Gebrauche gemäss auf

$$\log Q_B = \log(ax + by)$$

zu beziehen. Es ist leicht die erforderlichen linearen Differentialgleichungen durch Differentiation aufzustellen, sobald Näherungswerte von x und y bekannt sind. Ich habe bei dem provisorischen Character der folgenden Rechnung davon abgesehen und die Unbekannten x und y aus allen vorliegenden 36 Mitteln, alle mit gleichem Gewichte, genauer bestimmt. Die Coefficienten a und b ergeben sich mit Hülfe der Tabellen III und VII fast ohne alle Rechnung. Die 36 Bedingungsgleichungen waren, wenn die Logarithmen der Coefficienten angesetzt werden und hierbei stets die Charakteristik -10 fortgelassen wird:

[9.011]	$x +$	[9.975]	$y =$	[9.728]
9.143		9.986		9.802
8.949		9.985		9.768
8.931		9.989		9.701
9.421		9.953		9.831
9.417		9.954		9.818
9.441		9.957		9.844
9.558		9.963		9.886
9.435		9.965		9.851
9.391		9.964		9.791
9.756		9.938		9.934
9.789		9.940		9.992
9.837		9.940		0.018
9.740		9.936		9.945
0.041		9.965		0.118
9.921		9.962		0.049
9.895		9.961		0.013
9.911		9.965		0.026
9.926		9.968		0.009
9.943		9.969		0.047
0.035		9.972		0.079
9.944		9.971		0.045
9.920		9.970		0.029
9.974		9.966		0.102
0.065		9.968		0.113
9.980		9.968		0.109
9.925		9.968		0.031
9.910		9.968		0.022
9.905		9.968		0.044
9.903		9.967		0.036
9.902		9.967		9.996
9.876		9.947		9.977
0.053		9.952		0.082
9.933		9.954		0.069
9.872		9.955		0.031
9.859		9.955		9.992

Hieraus die Normalgleichungen

$$19.396 x + 21.865 y = 25.587$$

$$21.865 x + 30.353 y = 31.843$$

woraus

$$\log x = 9.8616 \quad \log Q(0) = 9.7206$$

$$\log y = 9.7206 \quad \log I' = 0.1411$$

Mit diesem I' wurde nun aus jedem beobachteten Q_B das zugehörige $Q(0)$ berechnet. Man findet diese Werthe in der Zusammenstellung pag. 487 und 488 eingetragen.

Der mittlere Fehler einer Beobachtung ergibt sich im Logarithmus von Q zu ± 0.038 resp. ± 0.039 wenn die Quadrate resp. die ersten Potenzen der Fehler zu Grunde gelegt werden. Nimmt man ferner aus den einzelnen $Q(0)$, welche derselben Opposition zugehören, die Mittel, so entsprechen den Mittelwerthen der einzelnen A folgende $\log Q(0)$:

A	$\log Q(0)$
3^0	9.706
9	724
19	741
25	722
26	703
26	723
24	720

Ein offenkundiger Gang in diesen Zahlen scheint nicht vorhanden zu sein. Was den m. F. betrifft, so ist derselbe freilich nicht sehr klein. Zum Theil fällt diese Erscheinung der Ausgleichung zur Last und wird der m. Fehler gewiss verkleinert werden können, wenn die Logarithmen der Q_B , nicht sie selbst, nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden und $nN\delta$ in die Ausgleichung einbezogen wird. Dadurch wird indessen nur eine kleine Verminderung der Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler herbeigeführt werden können, wie eine nähere Ansicht der obigen Zahlen ergeben dürfte. Es scheinen mir aber verschiedene Umstände vorhanden zu sein, welche eine vielleicht sonst erzielbare Uebereinstimmung zwischen den einzelnen photometrischen Beobachtungen gerade bei Saturn nicht herbeizuführen erlauben werden.

Zunächst wird die von der Oberfläche des Planeten ausgesandte Lichtmenge nicht unmerkliche Variationen zeigen, infolge der Rotation in Verbindung mit der Thatsache, dass nicht alle Theile der Planetenscheibe dieselbe Albedo haben und ausserdem kleine Veränderungen in ihrer Leuchtkraft aufweisen. Dann aber ist die Dichtigkeitsvertheilung innerhalb des Ringes möglicherweise Veränderungen unterworfen, die ohne Frage Einfluss auf seine Leuchtkraft ausüben können. Diese Variationen brauchen gar nicht unbedeutend zu sein und können gewiss innerhalb weniger Tage vorsich gehen.

Auf ganz dieselbe Weise habe ich noch die Voraussetzung verfolgt, dass für den Saturnkörper das Lambert'sche Gesetz gültig ist. Man kann dann für Q_B wieder die Form (1) aufstellen, nur tritt überall der Index L auf, so dass:

$$x = I'_L Q_L(0); \quad y = Q_L(0); \quad a = \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \frac{X_L}{M}; \quad b = Y_L \cos \alpha$$

wird und die Tafel IV in Anwendung tritt. Da im Uebrigen die Rechnung ganz analog der vorhin auseinandergesetzten war, so wird es genügen, das Resultat der provisorischen Ausgleichung anzuführen. Es ergab sich:

$$\log I'_L = 0.1108; \quad \log Q_L(0) = 9.7271$$

Mit diesen Constanten erhält man denn aus jeder einzelnen Beobachtung ein zugehöriges $Q^u(0)$, welches bereits in der Zusammenstellung auf pag. 487 und 488 steht. Ordnet man die erhaltenen Werthe (zu Mitteln zusammengezogen) in derselben Weise wie früher, so ergibt sich

A	$\log Q_L(0)$
3^0	9.711
9	735
19	748
25	728
26	710
26	730
24	724

und der mittlere Fehler einer Beobachtung zu ± 0.039 resp. ± 0.041 , je nachdem mit den Quadraten oder ersten Potenzen der übrigbleibenden Fehler gerechnet wird.

In der That folgt aus der Gegenüberstellung der beiden Zahlenreihen, dass gegenwärtig mit einiger Sicherheit nicht entschieden werden kann, welches der beiden photometrischen Grundgesetze für die Saturnscheibe sich den Beobachtungen mehr anschmiegt. Der verschwindend kleine Vortheil, den das neue Gesetz zu bieten scheint, dürfte wohl kaum in's Gewicht fallen. Im Uebrigen war dieses Resultat wohl vorauszusehen. Dagegen genügt auch hier ein Blick auf die benutzte Beobachtungsreihe um zu erkennen, dass die vorliegende Theorie der Beleuchtung des Saturnringes im Wesentlichen den Beobachtungen entspricht, dass ohne Rücksichtnahme auf sie ganz unerlaubte Schwankungen in der Lichtstärke des Saturnsystemes auftreten und dass die noch übrigbleibenden Abweichungen zum Theil wenigstens nicht durch eine bessere Bestimmung der auftretenden Constanten weggeschafft werden kann.

Fasst man Alles zusammen, so darf man behaupten, dass die Maxwell-Hirn'sche Hypothese über die Constitution des Saturnringes in den vorhandenen photometrischen Beobachtungen eine neue und nicht unwichtige Stütze erhalten hat und dieser Umstand dürfte den photometrischen Saturnbeobachtungen eine ganz besondere Wichtigkeit verschaffen.

Nachtrag.

Die Ableitung der Formel (9) Art. 12 beruht auf einer Vernachlässigung (vergl. pag. 478) deren Einfluss nun noch untersucht werden soll. Es ist von vorneherein klar, dass dieser, wenn überhaupt, nur dann in Betracht kommen kann, wenn zu gleicher Zeit der Winkel α verhältnissmässig gross und der Elevationswinkel A klein ist. Der letztere Umstand verursacht aber, dass Variationen in der vom Saturnring ausgesandten Lichtmenge in sehr verkleinertem Massstabe auf die Gesamtlichtmenge des ganzen Systems einwirken, ganz abgesehen davon, dass man für sehr kleine A der Formel (9) ohnehin nur eine bedingte Gültigkeit wird zusprechen dürfen. Infolge dieser Ueberlegungen erscheint die abgeleitete Formel völlig legitim und es würde kaum Veranlassung gegeben sein, eine strengere abzuleiten. Indessen zeigt sich merkwürdiger Weise, dass die auf pag. 478 eingeführte Vereinfachung das

Resultat nicht wesentlich vereinfacht und dass man ohne sie zu einer Formel gelangt, die bis auf einen äusserst einfachen Factor mit (9) identisch ist. Da diese Formel, wenn sie sich auch im Sinne der Praxis von (9) gar nicht unterscheidet, doch ohne Frage den Vorzug verdient, weil sie auf Grund der allgemeinen Annahmen völlig streng abgeleitet ist, so soll dieselbe mitgetheilt werden. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{h \sin \alpha}{\sin A + \sin A'} = h_0; \quad \frac{\cos A \sin \delta}{\sin A + \sin A'} \sin \alpha = \gamma$$

so kann der strenge Ausdruck für 2σ (pag. 478) geschrieben werden:

$$2\sigma = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \left[\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} - (h_0 - \gamma \zeta) \right]^2 \quad (1)$$

Das zu berechnende Volumen Σ wird dann:

$$\Sigma = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sigma d\zeta \quad (2)$$

wo ζ_1 und ζ_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^2 - \zeta^2 = (h_0 - \gamma \zeta)^2$$

Solange diese Gleichung reelle Wurzeln hat, darf

$$h_0 = \varrho \sin \varphi \sqrt{1 + \gamma^2}$$

gesetzt werden und es ergibt sich sofort:

$$\zeta_1 = \frac{\varrho}{\sqrt{1 + \gamma^2}} (\gamma \sin \varphi - \cos \varphi)$$

$$\zeta_2 = \frac{\varrho}{\sqrt{1 + \gamma^2}} (\gamma \sin \varphi + \cos \varphi)$$

Führt man mit Hülfe von (1) in (2) die unbestimmte Integration aus, so findet man leicht:

$$\int \sigma d\zeta = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \left\{ \frac{1}{2} \zeta (\varrho^2 + h_0^2) - \frac{1}{6} (1 - \gamma^2) \zeta^3 - \frac{1}{2} h_0 \gamma \zeta^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{8} \gamma (\varrho^2 - \zeta^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{h_0}{2} \varrho^2 \arcsin \frac{\zeta}{\varrho} - \frac{h_0 \zeta}{2} \sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} \right\}$$

Es werde nun gesetzt

$$\gamma = \operatorname{tg} \mu \quad (3)$$

wodurch sich die einfachen Gleichungen ergeben:

$$\zeta_1 = -\varrho \cos(\varphi + \mu)$$

$$\zeta_2 = \varrho \cos(\varphi - \mu)$$

$$h_0 = \frac{\varrho}{\cos \mu} \sin \varphi$$

Dies in den Werth des unbestimmten Integrales eingesetzt giebt nach einiger Zwischenrechnung:

$$\Sigma = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \cdot \frac{\varrho^3}{\cos \mu} \left\{ \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sin \varphi \right\} \quad (4)$$

Diese Formel ist der strenge Ausdruck der Näherungsformel (5) pag. 479. Werden die dort gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, so ist jetzt:

$$V_0 + V_1 = \varrho^2 \pi h \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A \sin A'} = \frac{\varrho^3 \pi (\sin A + \sin A')^2 \sin \varphi}{\sin \alpha \sin A \sin A' \cos \mu}$$

und

$$V = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \cdot \frac{\varrho^3}{\cos \mu} \left\{ \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi \right\} \\ - \frac{4}{3} \varrho^3 \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Dieser Werth von V ist anzuwenden, solange $h < h_1$, wo h_1 dasjenige h ist, für welches $\zeta_1 = \zeta_2$ wird. Für grössere h tritt an die Stelle von V dasselbe V_2 , welches pag. 479 angegeben ist. Nun wird $\zeta_1 = \zeta_2$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und also:

$$h_1 = \varrho \frac{(\sin A + \sin A')}{\sin \alpha \cos \mu}$$

und die Formel (7) pag. 480 wird jetzt:

$$Q = I'f(\alpha) \frac{N}{H} \left\{ \varrho \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha \cos \mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nN}{R} V} \cos \varphi d\varphi + \int_{h_1}^H e^{-\frac{nN}{R} V_2} dh \right\}$$

Das zweite Integral in diesem Ausdrücke findet man ganz ebenso wie früher gleich

$$\frac{\sin A \sin A'}{n \frac{N}{R} \varrho^2 \pi (\sin A + \sin A')} e^{-n \frac{N \varrho^2 \pi}{R \sin \alpha} \cdot \left\{ \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin A \sin A' \cos \mu} - \frac{4(1 + \cos \alpha)}{3\pi} \right\}}$$

Wird wieder die zweite Potenz von $A' - A$ gegenüber der Einheit vernachlässigt, so wird:

$$V = \frac{4 \varrho^3}{\sin \alpha \cos \mu} \left\{ \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi - \frac{2}{3} \cos \mu \right\}$$

und wenn die frühere Bezeichnung:

$$\frac{32 \varrho^3 \pi}{3 R} = \delta$$

benutzt und ausserdem gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{3}{8 \pi \cos \mu} \left\{ \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi - \frac{2}{3} \cos \mu \right\} \\ &= \left(\Phi + \frac{1}{2\pi} \sin^2 \frac{\mu}{2} \right) \frac{1}{\cos \mu} \end{aligned}$$

so erhält man:

$$Q = I' \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha} \left\{ \frac{1}{\cos \mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{n N \delta \Phi_1}{\sin \alpha} \cos \varphi} d \varphi + \frac{8 \sin \alpha}{3 n N \delta} e^{-\frac{n N \delta (3\pi - 2 \cos \mu)}{8 \pi \sin \alpha \cos \mu}} \right\}$$

Wird jetzt x eingeführt durch die Gleichung

$$x = \frac{n N \delta}{\sin \alpha \cos \mu} \quad (5)$$

und behält man im Uebrigen die Bedeutung der Buchstaben \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , welche in Formel (9) pag. 481 vorkommen, bei, setzt also:

$$\mathfrak{A} = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \Phi_1} \cos \varphi d \varphi$$

$$\mathfrak{B} = \frac{8}{3} e^{-x \frac{3\pi - 2}{8\pi}}; \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

so wird schliesslich

$$Q = I' (\sin A + \sin A') \mathfrak{C} \cdot e^{-\frac{x}{2\pi} \sin^2 \frac{\mu}{2}} \quad (6)$$

Dies ist also der strenge Ausdruck, welcher beinahe ebenso leicht zu berechnen ist, wie (9) pag. 481. Derselbe unterscheidet sich von dem letzteren nur durch den Factor

$$e^{-\frac{x}{2\pi} \sin^2 \frac{\mu}{2}}$$

welcher, wie schon erwähnt, in allen Fällen der Praxis sich von der Einheit so wenig unterscheidet, dass diese Differenz unbedenklich vernachlässigt werden kann. Aus diesem Grunde habe ich auch den genannten Factor bei der Berechnung der oben mitgetheilten Beobachtungen nicht angebracht. Dass man aber bei einer scharfen Reduction dies trotzdem nicht versäumen wird, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

A n h a n g.

In den vorstehenden Entwicklungen kommen die Polarcoordinaten der Sonne und Erde in Bezug auf den Aequator eines Planeten vor. Da diese Winkel beinahe überall auftreten, wo es sich um die physische Eigenschaft der Planeten handelt, so wird es vielleicht nicht überflüssig sein, zu zeigen, wie mit Hülfe gewisser Tabellen die Kenntniss dieser Polarcoordinaten leicht erlangt werden kann. Auch in diesem Punkte soll insofern bloss auf die Planeten Jupiter und Saturn Rücksicht genommen werden, als für sie allein die nothwendigen Tafeln mitgetheilt werden. Ein augenblickliches Bedürfniss hat allerdings nicht zur Aufstellung derselben aufgefordert, weil sich seit einiger Zeit Herr Dr. Marth der dankenswerthen Mühe unterzieht, alljährlich in den „Monthly Notices“ nebst anderen Angaben auch die genannten Polarcoordinaten im Voraus zu berechnen. Es wird indessen doch die Mittheilung der beifolgenden Tafeln nicht ganz nutzlos sein, weil sie dort, wo die Vorausberechnungen des Herrn Marth nicht zur Hand sind, wesentliche Dienste leisten können.

Die Aufgabe, die sich für die vorliegenden Zwecke darbietet, ist so einfach, dass sie an sich wohl kaum einer weiteren Auseinandersetzung bedürftig ist. Ich muss aber mittheilen, wie die Berechnung der Hilfstafeln erfolgt ist.

Es bezeichnen i und Ω Neigung und Knotenlänge des betreffenden Planetenaequators auf der Ecliptik, β und λ heliocentrische Breite und Länge des Planeten (welche die astronomischen Ephemeriden, so u. A. das Berliner Jahrbuch, geben). Legt man nun durch den Mittelpunkt des Planeten eine zur Ecliptik parallele Ebene, so wird in Bezug auf diese $-\beta$ und $180^\circ + \lambda$ Breite und Länge der Sonne, vom Planeten aus gesehen, sein. Ist dann weiter A die Breite der Sonne über dem Planetenaequator und l die Länge der Sonne gezählt auf dem Aequator und zwar vom aufsteigenden Knoten desselben auf der Ecliptik, so hat man sofort:

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= -\cos i \sin \beta + \sin i \cos \beta \sin(\lambda - \Omega) \\ \cos A \cos l &= -\cos \beta \cos(\lambda - \Omega) \\ \cos A \sin l &= -\sin i \sin \beta - \cos i \cos \beta \sin(\lambda - \Omega) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Diese einfachen Gleichungen können nun in der Form geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= \text{(I)} + (1) \\ \cos A \cos l &= \text{(II)} + (2) \\ \cos A \sin l &= \text{(III)} + (3) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

worin

$$\begin{aligned} \text{(I)} &= \sin i \sin(\lambda - \Omega); & (1) &= -2 \sin \frac{\beta}{2} \left\{ \cos \frac{\beta}{2} \cos i + \sin \frac{\beta}{2} \sin i \sin(\lambda - \Omega) \right\} \\ \text{(II)} &= -\cos(\lambda - \Omega); & (2) &= 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos(\lambda - \Omega) \\ \text{(III)} &= -\cos i \sin(\lambda - \Omega); & (3) &= -2 \sin \frac{\beta}{2} \left\{ \cos \frac{\beta}{2} \cos i - \sin \frac{\beta}{2} \cos i \sin(\lambda - \Omega) \right\} \end{aligned}$$

Der Vortheil dieser Zerlegung besteht darin, dass die Symbole (1), (2) und (3), welche von den 2 Argumenten β und λ abhängen, bei Jupiter und Saturn sehr kleine Grössen sind und ihre Berechnung demzufolge in weiteren Intervallen ausgeführt werden darf, als dies mit den ursprünglichen Gleichungen der Fall gewesen wäre.

Die Tafeln VIII und IX für Saturn wurden direct nach Formeln (2) berechnet, während für Jupiter, in Folge des sehr kleinen Werthes, den i bei diesem Planeten hat, weitgehende und leicht ersichtliche Vereinfachungen möglich waren. Die diesbezüglichen Tafeln X und XI werden wohl keiner weiteren Erklärung bedürfen. Ich habe nur zu erwähnen, dass den grössten Theil der Rechnungen für die Tafeln VIII und IX Herr E. Anding und für die Tabellen X und XI Herr List ausgeführt hat. Ausserdem hat mich Herr List bei der Berechnung der übrigen Tabellen wesentlich unterstützt, während Herr Anding die Freundlichkeit hatte mir bei dem Correcturlesen der vorliegenden Abhandlung behülflich zu sein und bei dieser Gelegenheit die grosse Mühe nicht scheute, die vorkommenden Formeln durchzurechnen und zu revidiren.

Offenbar ist es ausreichend, für das Argument $\lambda - \Omega$ sich auf das Intervall 0° bis 90° zu beschränken. Denn bezeichnet man die Werthe von A und l , welche von den Argumenten $x = \lambda - \Omega$ und β abhängen, mit $A(x, \beta)$ und $l(x, \beta)$ so giebt die Formel (1) sofort:

$$\left. \begin{aligned} A(180^\circ + x, \beta) &= -A(x, -\beta) \\ l(180^\circ + x, \beta) &= 180^\circ + l(x, -\beta) \\ A(180^\circ - x, \beta) &= A(x, \beta) \\ l(180^\circ - x, \beta) &= 180^\circ - l(x, \beta) \\ A(-x, \beta) &= -A(x, -\beta) \\ l(-x, \beta) &= -l(x, -\beta) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Schliesslich habe ich noch zu erwähnen, welche numerische Daten den Tabellen zu Grunde liegen.

Für Jupiter wurden die von Damoiseau gefundenen Zahlen angenommen, wie sie in Houzeau's „Vademecum“ angeführt werden. Bezeichnet N' die Distanz des aufsteigenden Knoten des Jupiteraequators auf der Jupiterbahn gezählt in der letzteren und vom aufsteigenden Knoten dieser über der jeweiligen Ecliptik, Ω' den aufsteigenden Knoten der Jupiterbahn, i' die Neigung des Jupiteraequators gegen die Bahn dieses Planeten und J' die Neigung der Jupiterbahn gegen die Ecliptik, so ist nach der angeführten Quelle:

$$\begin{aligned} N' + \Omega' &= 313^\circ 21' 55'' + 49.''8 (t - 1750) \\ i' &= 3^\circ 4' 5'' + 0.''022 (t - 1750) \end{aligned}$$

Nach Leverrier hat man aber:

$$\begin{aligned} \Omega' &= 98^\circ 56' 17.''0 + 36.''382 (t - 1850) \\ J' &= 1^\circ 18' 41.''4 - 0.''205 (t - 1850) \end{aligned}$$

Aus diesen Zahlen habe ich für die Neigung i und Knoten Ω des Jupiteraequators in Bezug auf die jeweilige Ecliptik gefunden:

$$\left. \begin{aligned} i &= 2^\circ 8'.81 + 0.'0065 (t - 1850) \\ \Omega' &= 335^\circ 40'.54 + 0.'821 (t - 1850) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Diese Elemente unterscheiden sich nur wenig von denen, welche Märth seinen angeführten Vorausberechnungen zu Grunde gelegt hat, und diese scheinen auch jetzt noch den Beobachtungen¹⁾ völlig zu genügen. Für Saturn wurden die bekannten Bessel'schen Werthe angenommen:

$$\left. \begin{aligned} i &= 28^{\circ} 10.75 - 0.0059(t - 1800) \\ \Omega &= 166^{\circ} 53.15 + 0.7744(t - 1800) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Zur Erleichterung ist (4) und (5) in der Hülftafel XII für verschiedene Werthe von t angeführt.

Den mitgetheilten Tafeln ist für Jupiter

$$i = 2^{\circ} 9.00$$

und für Saturn

$$i = 28^{\circ} 10.22$$

zu Grunde gelegt worden. Diese Werthe werden für lange Zeiten in den meisten Fällen völlig genügen. Will man indessen auf die Veränderlichkeit von i Rücksicht nehmen, so ergibt sich aus (1) durch einfache Differentiation:

$$\begin{aligned} \delta A &= -\sin l \cdot \delta i \\ \delta l &= +\operatorname{tg} A \cos l \cdot \delta i \end{aligned}$$

Aus denselben Tafeln VIII bis XII können offenbar auch die Coordinaten A' und l' der Erde in Bezug auf den Planetenaequator entnommen werden, wenn man nur statt der heliocentrischen Coordinaten λ und β des Planeten dessen geocentrische λ' und β' als Argumente wählt. Diese letzteren wird man, falls sie aus vorhandenen Ephemeriden nicht entnommen werden können, mit völlig hinreichender Genauigkeit aus den heliocentrischen Coordinaten mit Hülfe der Formeln berechnen können:

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta' &= \frac{r}{A} \cdot \sin \beta \\ \sin (\lambda' - \lambda) &= \frac{R}{A} \cdot \frac{\sin (\lambda - L)}{\cos \beta'} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wo r , A , R , heliocentrische resp. geocentrische Entfernung des Planeten, und Entfernung Sonne — Erde bedeuten und L die heliocentrische Erdlänge ist.

1) Lohse in: Publicationen des Observatoriums in Potsdam, Band III, pg. 20 etc.

Beispiel.

Es werden die Erdkoordinaten in Bezug auf den Saturnaequator für 1872, Jan. 21. 0^h m. B. Z. gesucht.

Das Jahrbuch giebt auf das m. Aequinoctium des Datums bezogen:

$$\begin{aligned} \log R &= 9.9931 & L &= 120^{\circ} 47.7 \\ \log A &= 1.0407 & \lambda &= 282 \ 48.7 & \Omega &= 167^{\circ} 49.0 \\ \log r &= 1.0018 & \beta &= +0 \ 25.4 \end{aligned}$$

Die Anwendung der Formel (6) giebt:

$$\beta' = +0^{\circ} 23.2; \quad \lambda' - \lambda = 1^{\circ} 35.1; \quad \lambda' - \Omega = 116^{\circ} 34.8$$

während man aus den Tafeln VIII und IX erhält

$$A = 24^{\circ} 35.9; \quad l = 299^{\circ} 28.7$$

Das Berliner Jahrbuch giebt übereinstimmend mit diesen Zahlen:

$$A = 24^{\circ} 36.0; \quad l = 299^{\circ} 28.6$$

Druckfehler:

- pag. 411 Zeile 14 v. u. lies der XY und EZ Ebene statt den beiderseitigen xy Ebenen.
 „ 414 „ 5 v. u.: Die obere Grenze des ersten Integrales ist $\frac{\pi}{2}$ nicht π .
 „ 417 In den Formeln (1) lies 1 statt l .
 „ „ In Formel (Ia) lies a^2 statt a^2 .
-

T a f e l n.

I.

(vergl. pag. 418 und 421).

$\frac{a}{b}$	$\log P$	$\log R$
1.04	9.5023 ⁻¹⁰	9.5296 ⁻¹⁰
1.05	9.4973 ⁵⁰	9.5312 ¹⁶
1.06	9.4924 ⁴⁹	9.5328 ¹⁶
1.07	9.4874 ⁵⁰	9.5344 ¹⁶
1.08	9.4825 ⁴⁹	9.5359 ¹⁵
1.09	9.4777 ⁴⁸	9.5374 ¹⁵
1.10	9.4728 ⁴⁹	9.5389 ¹⁵
1.11	9.4680 ⁴⁸	9.5404 ¹⁵
1.12	9.4633 ⁴⁷	9.5418 ¹⁴
1.13	9.4586 ⁴⁷	9.5432 ¹⁴
1.14	9.4539 ⁴⁷	9.5446 ¹⁴

A	$\log Z$	$\log Z(A)$	$\log \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A}$
0 ⁰	9.4623 - 10	0.0000	0.0000
2	9.4624	0.0001	0.0001
4	9.4627	0.0004	0.0003
6	9.4632	0.0009	0.0006
8	9.4640	0.0017	0.0011
10	9.4649	0.0026	0.0017
12	9.4661	0.0038	0.0024
14	9.4674	0.0051	0.0033
16	9.4689	0.0066	0.0042
18	9.4706	0.0083	0.0053
20	9.4724	0.0101	0.0065
22	9.4744	0.0121	0.0078
24	9.4766	0.0143	0.0091
26	9.4788	0.0165	0.0106
28	9.4812	0.0189	0.0121
30	9.4837	0.0214	0.0136

II.

(vergl. pag. 427).

α	D	I. Diff.	α	D	I. Diff.	α	D	I. Diff.	α	D	I. Diff.	α	D	I. Diff.	α	D	I. Diff.
0 ⁰	1.0000		30 ⁰	0.8594	72	60 ⁰	0.6198	84	90 ⁰	0.3768	76	120 ⁰	0.1760	56	150 ⁰	0.0453	30
1	0.9996	4	31	0.8522	73	61	0.6115	84	91	0.3692	75	121	0.1704	55	151	0.0423	28
2	0.9986	10	32	0.8449	74	62	0.6031	84	92	0.3617	75	122	0.1649	54	152	0.0395	28
3	0.9970	16	33	0.8375	74	63	0.5947	83	93	0.3542	74	123	0.1595	54	153	0.0367	26
4	0.9951	19	34	0.8301	75	64	0.5864	84	94	0.3468	73	124	0.1541	53	154	0.0341	26
5	0.9927	24	35	0.8226	76	65	0.5780	83	95	0.3395	74	125	0.1488	52	155	0.0315	24
6	0.9900	27	36	0.8150	77	66	0.5697	84	96	0.3321	72	126	0.1436	51	156	0.0291	24
7	0.9870	30	37	0.8073	77	67	0.5613	83	97	0.3249	72	127	0.1385	50	157	0.0267	23
8	0.9836	34	38	0.7996	78	68	0.5530	83	98	0.3177	71	128	0.1335	50	158	0.0244	21
9	0.9800	36	39	0.7918	78	69	0.5447	83	99	0.3106	71	129	0.1285	48	159	0.0223	21
10	0.9761	39	40	0.7840	79	70	0.5364	82	100	0.3035	70	130	0.1237	48	160	0.0202	19
		41												48			19
11	0.9720	41	41	0.7761	80	71	0.5282	83	101	0.2965	70	131	0.1189	47	161	0.0183	19
12	0.9676	44	42	0.7681	80	72	0.5199	82	102	0.2895	68	132	0.1142	46	162	0.0164	18
13	0.9630	46	43	0.7601	80	73	0.5117	82	103	0.2827	68	133	0.1096	45	163	0.0146	17
14	0.9582	48	44	0.7521	80	74	0.5035	82	104	0.2758	69	134	0.1051	44	164	0.0129	15
15	0.9532	50	45	0.7440	81	75	0.4953	81	105	0.2691	67	135	0.1007	44	165	0.0114	15
		52												44			15
16	0.9480	54	46	0.7359	82	76	0.4872	82	106	0.2624	67	136	0.0963	42	166	0.0099	13
17	0.9426	56	47	0.7277	82	77	0.4790	80	107	0.2557	65	137	0.0921	42	167	0.0086	13
18	0.9370	56	48	0.7195	82	78	0.4710	81	108	0.2492	65	138	0.0879	40	168	0.0073	12
19	0.9313	57	49	0.7113	82	79	0.4629	80	109	0.2427	64	139	0.0839	40	169	0.0061	10
20	0.9254	59	50	0.7031	82	80	0.4549	80	110	0.2363	64	140	0.0799	39	170	0.0051	10
		60												39			10
21	0.9194	62	51	0.6949	83	81	0.4469	80	111	0.2299	63	141	0.0760	38	171	0.0041	9
22	0.9132	63	52	0.6866	83	82	0.4389	79	112	0.2236	62	142	0.0722	37	172	0.0032	7
23	0.9069	63	53	0.6783	83	83	0.4310	79	113	0.2174	62	143	0.0685	36	173	0.0025	7
24	0.9004	65	54	0.6700	83	84	0.4231	78	114	0.2113	61	144	0.0649	35	174	0.0018	6
25	0.8939	65	55	0.6616	84	85	0.4153	78	115	0.2052	61	145	0.0614	35	175	0.0012	6
		67												34			4
26	0.8872	68	56	0.6533	84	86	0.4075	77	116	0.1992	59	146	0.0580	33	176	0.0008	3
27	0.8804	69	57	0.6449	83	87	0.3998	78	117	0.1933	58	147	0.0547	33	177	0.0005	3
28	0.8735	70	58	0.6366	84	88	0.3920	76	118	0.1875	58	148	0.0514	31	178	0.0002	2
29	0.8665	71	59	0.6282	84	89	0.3844	76	119	0.1817	58	149	0.0483	31	179	0.0000	2
30	0.8594	71	60	0.6198	84	90	0.3768	76	120	0.1760	57	150	0.0453	30	180	0.0000	0

III.

Saturn (vergl. pag. 410.)

A	log X	X	log Y	Y
0 ⁰	— ∞	0.000	0.0000	1.000 —
1	8.6694	0.047 ⁴⁷	9.9956 ⁴⁴	0.990 ¹⁰
2	8.9705	0.093 ⁴⁶	9.9913 ⁴³	0.980 ¹⁰
3	9.1469	0.140 ⁴⁷	9.9870 ⁴³	0.970 ¹⁰
4	9.2719	0.187 ⁴⁷	9.9827 ⁴³	0.961 ⁹
		⁴⁷	⁴²	⁹
5	9.3691	0.234	9.9785	0.952
6	9.4486	0.281 ⁴⁷	9.9743 ⁴²	0.943 ⁹
7	9.5160	0.328 ⁴⁷	9.9703 ⁴⁰	0.934 ⁹
8	9.5745	0.376 ⁴⁸	9.9664 ³⁹	0.926 ⁸
9	9.6262	0.423 ⁴⁷	9.9627 ³⁷	0.918 ⁸
		⁴⁸	³⁶	⁸
10	9.6726	0.471	9.9591	0.910
11	9.7147	0.519 ⁴⁸	9.9557 ³⁴	0.903 ⁷
12	9.7533	0.567 ⁴⁸	9.9526 ³¹	0.897 ⁶
13	9.7890	0.615 ⁴⁸	9.9497 ²⁹	0.891 ⁶
14	9.8223	0.664 ⁴⁹	9.9472 ²⁵	0.885 ⁶
		⁴⁹	²³	⁴
15	9.8533	0.713	9.9449	0.881
16	9.8827	0.763 ⁵⁰	9.9431 ¹⁸	0.877 ⁴
17	9.9105	0.814 ⁵¹	9.9418 ¹³	0.875 ²
18	9.9469	0.865 ⁵¹	9.9409 ⁹	0.873 ²
19	9.9623	0.917 ⁵²	9.9407 ²	0.872 ¹
		⁵³	⁴	¹
20	9.9866	0.970	9.9411	0.873
21	0.0102	1.024 ⁵⁴	9.9423 ¹²	0.876 ³
22	0.0332	1.080 ⁵⁶	9.9445 ²²	0.880 ⁴
23	0.0560	1.138 ⁵⁸	9.9482 ³⁷	0.887 ⁷
24	0.0796	1.201 ⁶³	9.9544 ⁶²	0.900 ¹³
		⁶⁴	⁶⁹	¹⁵
25	0.1022	1.265	9.9613	0.915
26	0.1234	1.329 ⁶⁴	9.9678 ⁶⁵	0.928 ¹³
27	0.1433	1.391 ⁶²	9.9740 ⁶²	0.942 ¹⁴
28	0.1621	1.452 ⁶¹	9.9800 ⁶⁰	0.955 ¹³
29	0.1799	1.513 ⁶¹	9.9856 ⁵⁶	0.968 ¹³
30	0.1966	1.573 ⁶⁰	9.9910 ⁵⁴	0.980 ¹²

α	D	log D
0 ⁰	1.0000	0.0000
1	0.9996	9.9998
2	0.9986	9.9994
3	0.9970	9.9987
4	0.9951	9.9979
5	0.9927	9.9968
6	0.9900	9.9956
7	0.9870	9.9943

IV.

Saturn (vergl. pag. 446.)

A	log X_L	X_L	log Y_L	Y_L
0 ⁰	— ∞	0.000	0.0000	1.000
1	8.8560	0.072 ⁷²	9.9948 ⁵²	0.988 ¹²
2	9.1571	0.144 ⁷²	9.9897 ⁵¹	0.977 ¹¹
3	9.3335	0.216 ⁷²	9.9846 ⁵¹	0.965 ¹²
4	9.4585	0.287 ⁷¹	9.9796 ⁵⁰	0.954 ¹¹
5	9.5557	0.359 ⁷²	9.9749 ⁴⁷	0.944 ¹⁰
6	9.6352	0.432 ⁷³	9.9703 ⁴⁶	0.934 ¹⁰
7	9.7026	0.504 ⁷²	9.9660 ⁴³	0.925 ⁹
8	9.7611	0.577 ⁷³	9.9621 ³⁹	0.916 ⁹
9	9.8128	0.650 ⁷³	9.9585 ³⁶	0.909 ⁷
10	9.8592	0.723 ⁷³	9.9553 ³²	0.902 ⁷
11	9.9013	0.797 ⁷⁴	9.9527 ²⁶	0.897 ⁵
12	9.9399	0.871 ⁷⁴	9.9506 ²¹	0.892 ⁵
13	9.9756	0.945 ⁷⁴	9.9489 ¹⁷	0.889 ³
14	0.0089	1.021 ⁷⁶	9.9480 ⁹	0.887 ²
15	0.0399	1.096 ⁷⁵	9.9475 ⁵	0.886 ¹
16	0.0693	1.173 ⁷⁷	9.9478 ³	0.887 ¹
17	0.0971	1.251 ⁷⁸	9.9489 ¹¹	0.889 ²
18	0.1235	1.329 ⁷⁸	9.9508 ¹⁹	0.893 ⁴
19	0.1489	1.409 ⁸⁰	9.9534 ²⁶	0.898 ⁵
20	0.1732	1.490 ⁸¹	9.9567 ³³	0.905 ⁷
21	0.1968	1.573 ⁸³	9.9610 ⁴³	0.914 ⁹
22	0.2199	1.659 ⁸⁶	9.9660 ⁵⁰	0.925 ¹¹
23	0.2426	1.748 ⁸⁹	9.9720 ⁶⁰	0.938 ¹³
24	0.2662	1.846 ⁹⁸	9.9786 ⁶⁶	0.952 ¹⁴
25	0.2888	1.944 ⁹⁸	9.9847 ⁶¹	0.965 ¹³
26	0.3100	2.042 ⁹⁸	9.9905 ⁵⁸	0.978 ¹³
27	0.3299	2.137 ⁹⁵	9.9959 ⁵⁴	0.990 ¹²
28	0.3487	2.232 ⁹⁵	0.0010 ⁵¹	1.002 ¹²
29	0.3665	2.325 ⁹³	0.0058 ⁴⁸	1.013 ¹¹
30	0.3832	2.417 ⁹²	0.0101 ⁴³	1.023 ¹⁰

α	log cos α
0	0.0000
1	9.9999
2	9.9997
3	9.9994
4	9.9989
5	9.9983
6	9.9976
7	9.9968

Va.

(vergl. pag. 455).

A	log b'	φ	f	v	φ'	f'	v'	log c = log (sin A / (a b 180))	A
0 ⁰	9.9499	64 1.4	0 ⁰ 0.7	0 ⁰ 0.0	48 ⁰ 55.6	0 ⁰ 0.0	0 ⁰ 0.0	— ∞	0 ⁰
1	9.9499	64 2.8	2 18.3	2 3.2	48 56.4	1 17.3	1 8.9	6.0367	1
2	9.9500	64 4.2	2 18.5	2 3.0	48 58.0	2 34.6	2 17.8	6.3376	2
3	9.9501	64 5.6	2 19.2	2 4.4	49 2.4	3 52.1	3 27.0	6.5136	3
4	9.9502	64 7.0	2 20.2	2 5.6	49 7.8	4 10.0	4 36.5	6.6384	4
5	9.9504	64 8.4	2 21.3	2 7.1	49 14.6	5 18.1	5 46.5	6.7351	5
6	9.9505	64 9.8	2 23.1	2 9.2	49 23.1	6 28.1	6 57.0	6.8140	6
7	9.9508	65 1.1	2 25.1	2 11.8	49 33.1	7 46.7	7 8.1	6.8807	7
8	9.9510	65 2.5	2 27.5	2 14.8	49 44.8	8 5.8	8 11.1	6.9383	8
9	9.9513	65 3.9	2 30.5	2 18.5	49 58.1	10 25.6	9 20.0	6.9891	9
10	9.9516	66 5.3	2 34.0	2 22.8	50 13.1	11 46.1	10 32.9	7.0345	10
11	9.9520	66 6.7	2 38.1	2 27.7	50 29.9	13 7.4	11 46.8	7.0754	11
12	9.9524	67 8.1	2 43.0	2 33.8	50 48.4	14 29.7	13 1.9	7.1127	12
13	9.9528	68 9.5	2 48.7	2 40.7	51 8.8	15 53.1	14 18.9	7.1469	13
14	9.9532	68 10.9	2 55.4	2 49.0	51 31.2	17 17.6	15 36.2	7.1785	14
15	9.9537	69 12.3	3 3.7	2 58.8	51 55.6	18 43.6	16 55.7	7.2078	15
16	9.9542	70 13.7	3 13.5	3 10.7	52 22.0	20 11.0	18 17.0	7.2351	16
17	9.9547	71 15.1	3 25.7	3 25.2	52 50.7	21 40.1	19 40.3	7.2607	17
18	9.9552	73 16.5	3 41.2	3 43.5	53 21.7	23 11.0	21 5.9	7.2848	18
19	9.9558	74 17.9	4 1.5	4 7.2	53 55.2	24 43.9	22 33.8	7.3074	19
20	9.9564	76 19.3	4 29.3	4 39.6	54 31.3	26 19.1	24 4.5	7.3288	20
21	9.9570	78 20.7	5 11.0	5 27.4	55 10.2	27 56.8	25 38.1	7.3491	21
22	9.9577	80 22.1	6 22.6	6 48.9	55 52.1	29 37.8	27 15.0	7.3684	22
23	9.9584	84 23.5	7 30.8	7 8.2	56 37.2	31 20.9	28 55.5	7.3867	23
24	9.9591	90 25.0	8 42.8	8 0.0	57 25.8	33 7.9	30 40.1	7.4011	24
25	9.9598	90 27.0	9 0.0	9 0.0	58 18.3	34 58.8	32 29.2	7.4207	25
26	9.9605	90 29.0	9 0.0	9 0.0	59 15.0	36 54.0	34 23.3	7.4366	26
27	9.9612	90 31.0	9 0.0	9 0.0	60 16.5	38 54.2	36 23.0	7.4518	27
28	9.9620	90 33.0	9 0.0	9 0.0	61 23.2	41 0.1	38 29.3	7.4664	28
29	9.9628	90 35.0	9 0.0	9 0.0	62 36.1	43 12.4	40 42.9	7.4804	29
30	9.9636	90 37.0	9 0.0	9 0.0	63 55.9	45 32.4	45 5.2	7.4938	30

$$\log \frac{a^2}{2} = 0.41603 \quad \log \frac{a^2}{2} = 0.06381 \quad \log \frac{a^2 - a'^2}{2} = 0.16079 \quad \log b = 9.94998 \quad a = 1$$

Vb.

(vergl. pag. 453).

A	$\log \Sigma_0$	$\log \Sigma_1$	$\log \Sigma$	$\log V$	$\log \Sigma'_0$	$\log \Sigma'_1$	$\log \Sigma'$	$\log V'$	A
0 ⁰	8.0704 ⁻¹⁰	8.5943 ⁻¹⁰	8.4398 ⁻¹⁰	— ∞	7.413 ⁻¹⁰	8.3031 ⁻¹⁰	8.2432 ⁻¹⁰	— ∞	0 ⁰
1	8.0707 ³	8.5941 ²	8.4393 ⁵	5.735 ⁻¹⁰	7.415 ⁰	8.3030 ¹	8.2430 ²	5.736	1
2	8.0716 ⁹	8.5935 ⁶	8.4382 ¹¹	6.036 ³⁰¹	7.414 ¹	8.3026 ⁴	8.2425 ⁵	6.036	2
3	8.0731 ¹⁵	8.5925 ¹⁰	8.4361 ²¹	6.211 ¹⁷⁵	7.415 ¹	8.3020 ⁶	8.2416 ⁹	6.212 ¹⁷⁶	3
4	8.0752 ²¹	8.5911 ¹⁴	8.4332 ²⁹	6.335 ¹²⁴	7.417 ²	8.3012 ⁸	8.2404 ¹²	6.336 ¹²⁴	4
5	8.0779 ²⁷	8.5893 ¹⁸	8.4293 ³⁹	6.430 ⁹⁵	7.419 ²	8.3000 ¹²	8.2388 ¹⁶	6.433 ⁹⁷	5
6	8.0813 ³⁴	8.5870 ²³	8.4246 ⁴⁷	6.507 ⁷⁷	7.421 ²	8.2987 ¹³	8.2369 ¹⁹	6.511 ⁷⁸	6
7	8.0853 ⁴⁰	8.5843 ²⁷	8.4188 ⁵⁸	6.572 ⁶⁵	7.424 ³	8.2971 ¹⁶	8.2346 ²³	6.577 ⁶⁶	7
8	8.0899 ⁴⁶	8.5812 ³¹	8.4120 ⁶⁸	6.627 ⁵⁵	7.427 ³	8.2952 ¹⁹	8.2319 ²⁷	6.633 ⁵⁶	8
9	8.0953 ⁵⁴	8.5776 ³⁶	8.4041 ⁷⁹	6.675 ⁴⁸	7.431 ⁴	8.2931 ²¹	8.2289 ³⁰	6.683 ⁵⁰	9
10	8.1013 ⁶⁰	8.5734 ⁴²	8.3948 ⁹³	6.717 ⁴²	7.435 ⁴	8.2907 ²⁴	8.2254 ³⁵	6.727 ⁴⁴	10
11	8.1082 ⁶⁹	8.5688 ⁴⁶	8.3842 ¹⁰⁶	6.755 ³⁸	7.440 ⁵	8.2880 ²⁷	8.2215 ³⁹	6.767 ⁴⁰	11
12	8.1158 ⁷⁶	8.5635 ⁵³	8.3718 ¹²⁴	6.788 ³³	7.445 ⁵	8.2851 ²⁹	8.2172 ⁴³	6.803 ³⁶	12
13	8.1242 ⁸⁴	8.5576 ⁵⁹	8.3578 ¹⁴⁰	6.818 ³⁰	7.451 ⁶	8.2818 ³³	8.2125 ⁴⁷	6.836 ³³	13
14	8.1337 ⁹⁵	8.5509 ⁶⁷	8.3415 ¹⁶³	6.845 ²⁷	7.457 ⁶	8.2783 ³⁵	8.2072 ⁵³	6.865 ²⁹	14
15	8.1441 ¹⁰⁴	8.5435 ⁷⁴	8.3226 ¹⁸⁹	6.870 ²⁵	7.464 ⁷	8.2745 ³⁸	8.2015 ⁵⁷	6.893 ²⁸	15
16	8.1556 ¹¹⁵	8.5351 ⁸⁴	8.3005 ²²¹	6.892 ²²	7.471 ⁷	8.2704 ⁴¹	8.1953 ⁶²	6.918 ²⁵	16
17	8.1685 ¹²⁹	8.5256 ⁹⁵	8.2743 ²⁶²	6.912 ²⁰	7.479 ⁸	8.2659 ⁴⁵	8.1885 ⁶⁸	6.942 ²⁴	17
18	8.1829 ¹⁴⁴	8.5149 ¹⁰⁷	8.2427 ³¹⁶	6.931 ¹⁹	7.487 ⁸	8.2611 ⁴⁸	8.1811 ⁷⁴	6.964 ²²	18
19	8.1992 ¹⁶³	8.5024 ¹²⁵	8.2036 ³⁹¹	6.947 ¹⁶	7.496 ⁹	8.2560 ⁵¹	8.1730 ⁸¹	6.985 ²¹	19
20	8.2179 ¹⁸⁷	8.4878 ¹⁴⁶	8.1532 ⁵⁰⁴	6.962 ¹⁵	7.505 ⁹	8.2504 ⁵⁶	8.1643 ⁸⁷	7.004 ¹⁹	20
21	8.2400 ²²¹	8.4699 ¹⁷⁹	8.0830 ⁷⁰²	6.975 ¹³	7.515 ¹⁰	8.2445 ⁵⁹	8.1548 ⁹⁵	7.022 ¹⁸	21
22	8.2677 ²⁷⁷	8.4467 ²³²	7.9754 ¹⁰⁷⁶	6.987 ¹²	7.526 ¹¹	8.2381 ⁶⁴	8.1444 ¹⁰⁴	7.038 ¹⁶	22
23	8.3084 ⁴⁰⁷	8.4106 ³⁶¹	7.7322 ²⁴³²	6.998 ¹¹	7.537 ¹¹	8.2313 ⁶⁸	8.1331 ¹¹³	7.054 ¹⁶	23
24	8.3586 ⁵⁰²	8.3586 ⁵²⁹	— ∞	7.030 ³²	7.550 ¹³	8.2240 ⁷³	8.1208 ¹²³	7.069 ¹⁵	24
25	8.3544 ⁴²	8.3544 ⁴²	— ∞	7.078 ⁴⁸	7.562 ¹²	8.2162 ⁷⁸	8.1072 ¹³⁶	7.083 ¹⁴	25
26	8.3500 ⁴⁴	8.3500 ⁴⁴	— ∞	7.126 ⁴⁸	7.576 ¹⁴	8.2077 ⁸⁵	8.0922 ¹⁵⁰	7.096 ¹³	26
27	8.3455 ⁴⁵	8.3455 ⁴⁵	— ∞	7.171 ⁴⁵	7.591 ¹⁵	8.1986 ⁹¹	8.0757 ¹⁶⁵	7.108 ¹²	27
28	8.3408 ⁴⁷	8.3408 ⁴⁷	— ∞	7.214 ⁴³	7.606 ¹⁵	8.1888 ⁹⁸	8.0572 ¹⁸⁵	7.119 ¹¹	28
29	8.3359 ⁴⁹	8.3359 ⁴⁹	— ∞	7.255 ⁴¹	7.623 ¹⁷	8.1781 ¹⁰⁷	8.0364 ²⁰⁸	7.130 ¹¹	29
30	8.3308 ⁵¹	8.3308 ⁵¹	— ∞	7.294 ³⁹	7.640 ¹⁷	8.1664 ¹¹⁷	8.0128 ²³⁶	7.140 ¹⁰	30

V c.

(vergl. pag. 464).

	$\lambda(a)$	$\log \lambda(a)$	$\lambda(b)$	$\log \lambda(b)$	$\lambda(c)$	$\log \lambda(c)$	A
0^0	-0.0000		-0.0000	-	+	∞	0^0
1	0	4.21 _n -10	0	4.60 _n -10	+0.4999	9.6989-10	1
2	0	4.66	0	5.34	0.2498	9.3976	2
3	0	5.00	1	5.72	0.1663	9.2200	3
4	0	5.29	1	5.97	0.1245	9.0952	4
5	0	5.48	1	6.16	0.0993	8.997	5
6	0	5.64	2	6.32	0.0825	8.916	6
7	1	5.78	3	6.46	0.0703	8.847	7
8	1	5.90	4	6.58	0.0611	8.786	8
9	1	6.00	5	6.69	0.0538	8.731	9
10	1	6.09	6	6.79	0.0480	8.681	10
11	2	6.18	8	6.88	0.0430	8.634	11
12	2	6.26	9	6.96	0.0388	8.589	12
13	2	6.33	11	7.043	0.0351	8.546	13
14	3	6.40	13	7.118	0.0319	8.503	14
15	3	6.46	16	7.191	0.0289	8.460	15
16	3	6.53	18	7.262	0.0262	8.417	16
17	4	6.58	21	7.331	0.0236	8.372	17
18	4	6.64	25	7.400	0.0211	8.324	18
19	5	6.69	30	7.470	0.0186	8.270	19
20	6	6.74	35	7.542	0.0161	8.207	20
21	6	6.79	42	7.619	0.0134	8.128	21
22	7	6.84	51	7.706	0.0104	8.015	22
23	8	6.89	66	7.822	0.0061	7.787	23
24	9	6.93	87	7.941	0.0009	6.935	24
25	10	6.98	82	7.914	0.0010	6.982	25
26	11	7.02	77	7.885	0.0011	7.025	26
27	12	7.07	72	7.856	0.0012	7.072	27
28	13	7.12	67	7.824	0.0013	7.117	28
29	14	7.16	62	7.793	0.0014	7.155	29
30	0.0016	7.20	0.0057	7.758	0.0016	7.201	30

VI.

$$M = \frac{\zeta(\infty)}{\zeta(x)} \text{ (vergl. pag. 485).}$$

x	$\log M$	x	$\log M$	x	$\log M$	x	$\log M$	x	$\log M$
0.0	0.3010 ¹⁶³	10.0	0.1389 ³⁷	20	0.0910 ²⁹	80	0.0311 ¹⁶	200	0.0136 ⁴³
0.5	0.2847 ¹⁴⁷	10.5	0.1352 ³⁷	21	0.0881 ²⁸	85	0.0295 ¹⁵	300	0.0093 ²²
1.0	0.2700 ¹³⁴	11.0	0.1317 ³⁵	22	0.0853 ²⁸	90	0.0280 ¹⁵	400	0.0071 ²²
1.5	0.2566 ¹²¹	11.5	0.1285 ³²	23	0.0828 ²⁵	95	0.0267 ¹³	500	0.0057 ¹⁴
2.0	0.2445 ¹²¹	12.0	0.1255 ³⁰	24	0.0803 ²⁵	100	0.0256 ¹¹	600	0.0048 ⁹
2.5	0.2334 ¹¹¹	12.5	0.1226 ²⁹	25	0.0780 ²³	110	0.0236 ²⁰	700	0.0041 ⁷
3.0	0.2233 ¹⁰¹	13.0	0.1198 ²⁸	26	0.0758 ²²	120	0.0218 ¹⁸	800	0.0036 ⁵
3.5	0.2140 ⁹³	13.5	0.1171 ²⁷	27	0.0738 ²⁰	130	0.0203 ¹⁵	900	0.0032 ⁴
4.0	0.2055 ⁸⁵	14.0	0.1145 ²⁶	28	0.0719 ¹⁹	140	0.0190 ¹³	1000	0.0029 ³
4.5	0.1976 ⁷⁹	14.5	0.1121 ²⁴	29	0.0700 ¹⁹	150	0.0178 ¹²	2000	0.0015 ¹⁴
5.0	0.1902 ⁷⁴	15.0	0.1098 ²³	30	0.0683 ¹⁷	160	0.0168 ¹⁰	4000	0.0007 ⁸
5.5	0.1834 ⁶⁸	15.5	0.1076 ²²	35	0.0609 ⁷⁴	170	0.0160 ⁸	6000	0.0005 ²
6.0	0.1771 ⁶³	16.0	0.1054 ²²	40	0.0549 ⁶⁷	180	0.0152 ⁸	8000	0.0004 ¹
6.5	0.1712 ⁵⁹	16.5	0.1033 ²¹	45	0.0500 ⁴⁹	190	0.0144 ⁸	10000	0.0003 ¹
7.0	0.1657 ⁵⁵	17.0	0.1014 ¹⁹	50	0.0460 ⁴⁰	200	0.0136 ⁸		
7.5	0.1605 ⁵²	17.5	0.0995 ¹⁹	55	0.0426 ³⁴				
8.0	0.1556 ⁴⁹	18.0	0.0977 ¹⁸	60	0.0396 ³⁰				
8.5	0.1511 ⁴⁵	18.5	0.0960 ¹⁷	65	0.0371 ²⁵				
9.0	0.1468 ⁴³	19.0	0.0943 ¹⁷	70	0.0349 ²²				
9.5	0.1428 ⁴⁰	19.5	0.0926 ¹⁷	75	0.0329 ²⁰				
10.0	0.1389 ³⁹	20.0	0.0910 ¹⁶	80	0.0311 ¹⁸				

VII.

$$M = \frac{\zeta(\infty)}{\zeta(a)} \text{ (vergl. pag. 485).}$$

a	$nN\delta=0.1$ $\log M$	$nN\delta=0.2$ $\log M$	$nN\delta=0.3$ $\log M$	$nN\delta=0.4$ $\log M$	$nN\delta=0.5$ $\log M$	a
0 ⁰	0.000 ⁴¹	0.000 ²³	0.000 ¹⁶	0.000 ¹²	0.000 ¹⁰	0 ⁰
0.1	0.041 ³⁰	0.023 ¹⁸	0.016 ¹³	0.012 ¹¹	0.010 ⁹	0.1
0.2	0.071 ²³	0.041 ¹⁶	0.029 ¹²	0.023 ⁹	0.019 ⁸	0.2
0.3	0.094 ¹⁹	0.057 ¹⁶	0.041 ¹¹	0.032 ⁹	0.027 ⁸	0.3
0.4	0.113 ¹⁹	0.071 ¹⁴	0.052 ¹¹	0.041 ⁹	0.034 ⁷	0.4
0.5	0.129 ¹⁶	0.083 ¹²	0.062 ¹⁰	0.049 ⁸	0.041 ⁷	0.5
0.6	0.142 ¹³	0.094 ¹¹	0.071 ⁹	0.057 ⁸	0.048 ⁷	0.6
0.7	0.154 ¹²	0.104 ¹⁰	0.079 ⁸	0.064 ⁷	0.054 ⁶	0.7
0.8	0.164 ¹⁰	0.113 ⁹	0.087 ⁸	0.071 ⁷	0.060 ⁶	0.8
0.9	0.173 ⁹	0.121 ⁸	0.094 ⁷	0.077 ⁶	0.066 ⁶	0.9
1.0	0.181 ⁸	0.129 ⁸	0.101 ⁷	0.083 ⁶	0.071 ⁵	1.0
1.5	0.208 ²⁷	0.159 ³⁰	0.129 ²⁸	0.108 ²⁵	0.094 ²³	1.5
2.0	0.226 ¹⁸	0.181 ²²	0.129 ²¹	0.108 ²¹	0.094 ¹⁹	2.0
2.5	0.238 ¹²	0.196 ¹⁵	0.167 ¹⁷	0.129 ¹⁴	0.113 ¹³	2.5
3.0	0.247 ⁹	0.209 ¹³	0.181 ¹⁴	0.145 ¹⁶	0.129 ¹⁶	3.0
3.5	0.253 ⁶	0.218 ⁹	0.191 ¹⁰	0.159 ¹⁴	0.142 ¹³	3.5
4.0	0.258 ⁵	0.226 ⁸	0.200 ⁹	0.171 ¹²	0.154 ¹²	4.0
4.5	0.263 ⁵	0.232 ⁶	0.208 ⁸	0.181 ¹⁰	0.164 ¹⁰	4.5
5.0	0.266 ³	0.238 ⁶	0.215 ⁷	0.189 ⁸	0.173 ⁹	5.0
5.5	0.269 ³	0.243 ⁵	0.221 ⁶	0.196 ⁷	0.180 ⁷	5.5
6.0	0.271 ²	0.247 ⁴	0.226 ⁵	0.203 ⁷	0.187 ⁷	6.0
6.5	0.273 ²	0.250 ³	0.230 ⁴	0.208 ⁵	0.193 ⁶	6.5
				0.214 ⁶	0.199 ⁶	

VIII

giebt für Saturn *A* mit den Argumenten ($\lambda - \Omega$) und β .

$\lambda - \Omega$	$\beta = -2^{\circ}40'$	$\beta = -2^{\circ}0'$	$\beta^0 = -1^{\circ}20'$	$\beta = -0^{\circ}40'$	$\beta = 0$	$\beta = +0^{\circ}40'$	$\beta = +1^{\circ}20'$	$\beta = +2^{\circ}0'$	$\beta = +2^{\circ}40'$	Δ für $\Delta\beta = 40'$
0°	+2 21.0	+1°45.8	+1°10.5	+0°35.3	+0° 0.0	-0°35.3	-1°10.5	-1°45.8	-2°21.0	-35.3
1	2 49.4 ^{28.4}	2 14.1 ^{28.3}	1 38.9 ^{28.4}	1 3.6 ^{28.3}	0 28.3 ^{28.3}	-0 6.9 ^{28.4}	-0 42.2 ^{28.3}	-1 17.5 ^{28.3}	-1 52.7 ^{28.3}	35.3
2	3 17.7 ^{28.3}	2 42.4 ^{28.3}	2 7.2 ^{28.3}	1 31.9 ^{28.3}	0 56.7 ^{28.3}	+0 21.4 ^{28.3}	-0 13.9 ^{28.3}	-0 49.2 ^{28.3}	-1 24.4 ^{28.3}	35.3
3	3 46.0 ^{28.3}	3 10.8 ^{28.4}	2 35.5 ^{28.3}	2 0.2 ^{28.3}	1 25.0 ^{28.3}	0 49.7 ^{28.3}	+0 14.4 ^{28.3}	-0 20.9 ^{28.3}	-0 56.2 ^{28.2}	35.3
4	4 14.3 ^{28.3}	3 39.1 ^{28.3}	3 3.8 ^{28.3}	2 28.5 ^{28.3}	1 53.2 ^{28.2}	1 18.0 ^{28.3}	0 42.7 ^{28.3}	+0 7.4 ^{28.3}	-0 27.9 ^{28.3}	35.3
5	4 42.6 ^{28.3}	4 7.3 ^{28.2}	3 32.1 ^{28.2}	2 56.8 ^{28.3}	2 21.5 ^{28.2}	1 46.2 ^{28.2}	1 10.9 ^{28.2}	0 35.6 ^{28.2}	+0 0.3 ^{28.2}	35.3
6	5 10.9 ^{28.3}	4 35.6 ^{28.3}	4 0.3 ^{28.2}	3 25.0 ^{28.2}	2 49.7 ^{28.2}	2 14.4 ^{28.2}	1 39.1 ^{28.2}	1 3.8 ^{28.1}	0 28.5 ^{28.2}	35.3
7	5 39.1 ^{28.2}	5 3.8 ^{28.2}	4 28.5 ^{28.2}	3 53.2 ^{28.2}	3 17.9 ^{28.2}	2 42.6 ^{28.2}	2 7.3 ^{28.2}	1 31.9 ^{28.1}	0 56.6 ^{28.1}	35.3
8	6 7.3 ^{28.2}	5 32.0 ^{28.2}	4 56.7 ^{28.2}	4 21.4 ^{28.2}	3 46.0 ^{28.1}	3 10.7 ^{28.1}	2 35.4 ^{28.1}	2 0.0 ^{28.1}	1 24.6 ^{28.0}	35.3
9	6 35.5 ^{28.2}	6 0.2 ^{28.2}	5 24.8 ^{28.1}	4 49.5 ^{28.1}	4 14.1 ^{28.1}	3 38.8 ^{28.1}	3 3.4 ^{28.0}	2 28.0 ^{28.0}	1 52.6 ^{28.0}	35.3
		28.1	28.0	28.1	28.0	28.0	28.0	28.0	28.0	
10	7 3.6 ^{28.0}	6 28.2 ^{28.0}	5 52.9 ^{28.0}	5 17.5 ^{28.0}	4 42.1 ^{28.0}	4 6.8 ^{27.9}	3 31.4 ^{27.9}	2 56.0 ^{27.9}	2 20.6 ^{27.8}	35.4
11	7 31.6 ^{28.0}	6 56.2 ^{28.0}	6 20.9 ^{27.9}	5 45.5 ^{27.9}	5 10.1 ^{27.9}	4 34.7 ^{27.9}	3 59.3 ^{27.8}	3 23.9 ^{27.7}	2 48.4 ^{27.8}	35.4
12	7 59.6 ^{27.9}	7 24.2 ^{27.9}	6 48.8 ^{27.9}	6 13.4 ^{27.9}	5 38.0 ^{27.8}	5 2.6 ^{27.7}	4 27.1 ^{27.7}	3 51.6 ^{27.6}	3 16.2 ^{27.7}	35.4
13	8 27.5 ^{27.9}	7 52.1 ^{27.9}	7 16.7 ^{27.8}	6 41.2 ^{27.8}	6 5.8 ^{27.7}	5 30.3 ^{27.7}	4 54.8 ^{27.7}	4 19.4 ^{27.8}	3 43.9 ^{27.7}	35.5
14	8 55.4 ^{27.7}	8 19.9 ^{27.7}	7 44.5 ^{27.6}	7 9.0 ^{27.6}	6 33.5 ^{27.6}	5 58.0 ^{27.6}	5 22.5 ^{27.5}	4 47.0 ^{27.5}	4 11.4 ^{27.5}	35.5
15	9 23.1 ^{27.7}	8 47.6 ^{27.7}	8 12.1 ^{27.6}	7 36.6 ^{27.6}	7 11.9 ^{27.5}	6 25.6 ^{27.5}	5 50.0 ^{27.5}	5 14.5 ^{27.4}	4 38.9 ^{27.5}	35.5
16	9 50.8 ^{27.5}	9 15.3 ^{27.5}	8 39.7 ^{27.5}	8 4.2 ^{27.4}	7 28.6 ^{27.4}	6 53.1 ^{27.5}	6 17.5 ^{27.5}	5 41.9 ^{27.4}	5 6.3 ^{27.4}	35.6
17	10 18.3 ^{27.5}	9 42.8 ^{27.4}	9 7.2 ^{27.4}	8 31.6 ^{27.4}	7 56.0 ^{27.4}	7 20.4 ^{27.2}	6 44.8 ^{27.3}	6 9.2 ^{27.1}	5 33.5 ^{27.1}	35.6
18	10 45.8 ^{27.3}	10 10.2 ^{27.3}	9 34.6 ^{27.2}	8 59.0 ^{27.2}	8 23.3 ^{27.3}	7 47.6 ^{27.2}	7 12.0 ^{27.2}	6 36.3 ^{27.1}	6 0.6 ^{27.1}	35.7
19	11 13.1 ^{27.2}	10 37.5 ^{27.3}	10 1.8 ^{27.2}	9 26.2 ^{27.2}	8 50.5 ^{27.2}	8 14.8 ^{27.2}	7 39.1 ^{27.1}	7 3.4 ^{27.1}	6 27.6 ^{27.0}	35.7
		27.1	27.2	27.0	27.0	27.0	26.9	26.9	26.9	
20	11 40.3 ^{27.1}	11 4.6 ^{27.1}	10 29.0 ^{27.0}	9 53.2 ^{27.0}	9 17.5 ^{26.9}	8 41.8 ^{26.8}	8 6.0 ^{26.8}	7 30.3 ^{26.7}	6 54.5 ^{26.7}	35.7
21	12 7.4 ^{26.9}	11 31.7 ^{26.9}	10 56.0 ^{26.9}	10 20.2 ^{26.9}	9 44.4 ^{26.8}	9 8.6 ^{26.8}	8 32.8 ^{26.7}	7 57.0 ^{26.7}	7 21.2 ^{26.7}	35.8
22	12 34.3 ^{26.8}	11 58.6 ^{26.9}	11 22.9 ^{26.9}	10 47.0 ^{26.8}	10 11.2 ^{26.8}	9 35.3 ^{26.7}	8 59.5 ^{26.7}	8 23.6 ^{26.6}	7 47.8 ^{26.6}	35.8
23	13 1.1 ^{26.7}	12 25.3 ^{26.7}	11 49.5 ^{26.6}	11 13.7 ^{26.6}	10 37.8 ^{26.6}	10 1.9 ^{26.6}	9 26.0 ^{26.5}	8 50.1 ^{26.5}	8 14.2 ^{26.4}	35.9
24	13 27.8 ^{26.5}	12 51.9 ^{26.6}	12 16.1 ^{26.6}	11 40.2 ^{26.5}	11 4.2 ^{26.4}	10 28.3 ^{26.4}	9 52.4 ^{26.4}	9 16.4 ^{26.3}	8 40.4 ^{26.2}	35.9
25	13 54.3 ^{26.5}	13 18.4 ^{26.5}	12 42.5 ^{26.4}	12 6.5 ^{26.3}	11 30.5 ^{26.3}	10 54.5 ^{26.2}	10 18.5 ^{26.1}	9 42.5 ^{26.1}	9 6.5 ^{26.1}	36.0
26	14 20.6 ^{26.2}	13 44.6 ^{26.2}	13 8.7 ^{26.2}	12 32.7 ^{26.2}	11 56.6 ^{26.1}	11 20.6 ^{26.1}	10 44.5 ^{26.0}	10 8.4 ^{25.9}	9 32.4 ^{25.9}	36.0
27	14 46.8 ^{26.0}	14 10.8 ^{26.2}	13 34.7 ^{26.0}	12 58.7 ^{26.0}	12 22.6 ^{25.9}	11 46.5 ^{25.9}	11 10.3 ^{25.8}	10 34.2 ^{25.8}	9 58.1 ^{25.7}	36.1
28	15 12.8 ^{25.8}	14 36.7 ^{25.9}	14 0.6 ^{25.9}	13 24.5 ^{25.8}	12 48.3 ^{25.7}	12 12.1 ^{25.6}	11 35.9 ^{25.6}	10 59.8 ^{25.6}	10 23.6 ^{25.5}	36.2
29	15 38.6 ^{25.6}	15 2.4 ^{25.7}	14 26.3 ^{25.7}	13 50.1 ^{25.6}	13 13.9 ^{25.6}	12 37.6 ^{25.5}	12 1.4 ^{25.5}	11 25.1 ^{25.5}	10 48.9 ^{25.3}	36.2
		25.6	25.4	25.4	25.3	25.3	25.2	25.2	25.0	
30	16 4.2 ^{25.4}	15 28.0 ^{25.3}	14 51.7 ^{25.3}	14 15.5 ^{25.2}	13 39.2 ^{25.1}	13 2.9 ^{25.1}	12 26.6 ^{25.0}	11 50.3 ^{24.9}	11 13.9 ^{24.9}	36.3
31	16 29.6 ^{25.1}	15 53.3 ^{25.1}	15 17.0 ^{25.1}	14 40.7 ^{25.0}	14 4.3 ^{25.0}	13 28.0 ^{24.8}	12 51.6 ^{24.8}	12 15.2 ^{24.7}	11 38.8 ^{24.7}	36.4
32	16 54.7 ^{25.0}	16 18.4 ^{24.9}	15 42.1 ^{24.8}	15 5.7 ^{24.7}	14 29.3 ^{24.7}	13 52.8 ^{24.7}	13 16.4 ^{24.6}	12 39.9 ^{24.5}	12 3.5 ^{24.4}	36.4
33	17 19.7 ^{24.8}	16 43.3 ^{24.7}	16 6.9 ^{24.8}	15 30.4 ^{24.7}	14 54.0 ^{24.4}	14 17.5 ^{24.4}	13 41.0 ^{24.3}	13 4.4 ^{24.3}	12 27.9 ^{24.2}	36.5
34	17 44.5 ^{24.5}	17 8.0 ^{24.7}	16 31.5 ^{24.6}	15 55.0 ^{24.6}	15 18.4 ^{24.4}	14 41.9 ^{24.4}	14 5.3 ^{24.3}	13 28.7 ^{24.3}	12 52.1 ^{24.2}	36.6
35	18 9.0 ^{24.3}	17 32.4 ^{24.4}	16 55.9 ^{24.4}	16 19.3 ^{24.3}	15 42.6 ^{24.2}	14 41.9 ^{24.1}	14 29.4 ^{24.1}	13 52.7 ^{24.0}	13 16.0 ^{23.9}	36.7
36	18 33.3 ^{24.0}	17 56.6 ^{24.2}	17 20.9 ^{24.1}	16 43.3 ^{24.0}	16 6.6 ^{24.0}	15 29.9 ^{23.9}	14 53.2 ^{23.8}	14 16.4 ^{23.7}	13 39.7 ^{23.7}	36.7
37	18 57.3 ^{23.7}	18 20.6 ^{24.0}	17 43.9 ^{23.9}	17 7.1 ^{23.8}	16 30.4 ^{23.8}	15 53.6 ^{23.7}	15 16.8 ^{23.6}	14 39.9 ^{23.5}	14 3.1 ^{23.4}	36.8
38	19 21.0 ^{23.5}	18 44.3 ^{23.7}	18 7.5 ^{23.6}	17 30.7 ^{23.6}	16 53.8 ^{23.4}	16 17.0 ^{23.4}	15 40.1 ^{23.3}	15 3.2 ^{23.3}	14 26.3 ^{23.2}	36.8
39	19 44.5 ^{23.3}	19 7.7 ^{23.4}	18 30.8 ^{23.3}	17 53.9 ^{23.2}	17 17.0 ^{23.2}	16 40.1 ^{23.1}	16 3.1 ^{23.0}	15 26.1 ^{22.9}	14 49.1 ^{22.8}	36.9
		23.2	23.1	23.0	22.9	22.8	22.8	22.7	22.6	
40	20 7.8 ^{22.9}	19 30.9 ^{22.8}	18 53.9 ^{22.8}	18 16.9 ^{22.7}	17 39.9 ^{22.7}	17 2.9 ^{22.6}	16 25.9 ^{22.4}	15 48.8 ^{22.4}	15 11.7 ^{22.4}	37.0
41	20 30.7 ^{22.7}	19 53.7 ^{22.6}	19 16.7 ^{22.5}	18 39.6 ^{22.4}	18 2.6 ^{22.3}	17 25.5 ^{22.2}	16 48.3 ^{22.2}	16 11.2 ^{22.1}	15 34.1 ^{22.0}	37.1
42	20 53.4 ^{22.4}	20 16.3 ^{22.3}	19 39.2 ^{22.2}	19 2.0 ^{22.1}	18 24.9 ^{22.0}	17 47.7 ^{22.0}	17 10.5 ^{21.9}	16 33.3 ^{21.8}	15 56.1 ^{21.7}	37.2
43	21 15.8 ^{22.0}	20 38.6 ^{21.9}	20 1.4 ^{21.9}	19 24.1 ^{21.9}	18 46.9 ^{21.7}	18 9.7 ^{21.6}	17 32.4 ^{21.6}	16 55.1 ^{21.5}	16 17.8 ^{21.4}	37.3
44	21 37.8 ^{21.7}	21 0.5 ^{21.7}	20 23.3 ^{21.5}	19 46.0 ^{21.5}	19 8.6 ^{21.5}	18 31.3 ^{21.3}	17 54.0 ^{21.2}	17 16.6 ^{21.2}	16 39.2 ^{21.1}	37.3
45	21 59.5 ^{21.7}	21 22.2 ^{21.7}	20 44.8 ^{21.5}	20 7.5 ^{21.5}	19 30.1 ^{21.5}	18 52.6 ^{21.3}	18 15.2 ^{21.2}	17 37.8 ^{21.2}	17 0.3 ^{21.1}	37.4

VIII.
(Fortsetzung.)

$\lambda - \Omega$	$\beta = -2^0 40'$	$\beta = -2^0 0'$	$\beta = -1^0 20'$	$\beta = -0^0 40'$	$\beta = 0$	$\beta = +0^0 40'$	$\beta = +1^0 20'$	$\beta = +2^0 0'$	$\beta = +2^0 40'$	Δ
45 ⁰	+21 ⁰ 59.5	+21 ⁰ 22.2	+20 ⁰ 44.8	+20 ⁰ 7.5	+19 ⁰ 30.1	+18 ⁰ 52.6	+18 ⁰ 15.2	+17 ⁰ 37.8	+17 ⁰ 0.3	-37.4
46	22 20.9	21 43.5	21 6.1	20 28.6	19 51.1	19 13.6	18 36.1	17 58.6	17 21.0	37.5
47	22 42.0	22 4.5	21 27.0	20 49.5	20 11.9	19 34.3	18 56.7	18 19.2	17 41.5	37.5
48	23 2.8	22 25.2	21 47.6	21 10.0	20 32.3	19 54.6	19 17.0	18 39.3	18 1.5	37.6
49	23 23.2	22 45.5	22 7.8	21 30.1	20 52.4	20 14.6	19 36.9	18 59.1	18 21.3	37.7
50	23 43.2	23 5.5	22 27.7	21 49.9	20 12.1	21 34.3	19 56.4	19 18.5	18 40.7	37.8
	19.7	19.6	19.5	19.4	19.3	19.2	19.2	19.1	19.0	
51	24 2.9	23 25.1	22 47.2	22 9.3	21 31.4	20 53.5	20 15.6	19 37.6	18 59.7	37.9
52	24 22.2	23 44.3	23 6.3	22 28.4	21 50.4	21 12.4	20 34.4	19 56.4	19 18.3	38.0
53	24 41.2	24 3.1	23 25.1	22 47.1	22 9.0	21 30.9	20 52.8	20 14.7	19 36.6	38.1
54	24 59.7	24 21.6	23 43.5	23 5.4	22 27.2	21 49.1	21 10.9	20 32.7	19 54.5	38.2
55	25 17.8	24 39.7	24 1.5	23 23.3	22 45.0	22 6.8	21 28.5	20 50.3	20 12.0	38.2
56	25 35.6	24 57.3	24 19.1	23 40.8	23 2.4	22 24.1	21 45.9	21 7.4	20 29.1	38.3
57	25 52.9	25 14.6	24 36.2	23 57.8	23 19.5	22 41.0	22 2.6	21 24.2	20 45.7	38.4
58	26 9.8	25 31.4	24 53.0	24 14.5	23 36.0	22 57.6	22 19.1	21 40.5	21 2.0	38.5
59	26 26.3	25 47.8	25 9.3	24 30.8	23 52.2	23 13.6	22 35.1	21 56.5	21 17.9	38.6
60	26 42.4	26 3.8	25 25.2	24 46.6	24 8.0	23 29.3	22 50.7	22 12.0	21 33.3	38.6
	15.6	15.5	15.5	15.4	15.3	15.2	15.1	15.0	15.0	
61	26 58.0	26 19.3	25 40.7	25 2.0	24 23.3	23 44.5	23 5.8	22 27.0	21 48.3	38.7
62	27 13.2	26 34.4	25 55.7	25 16.9	24 38.1	23 59.3	23 20.5	22 41.7	22 2.8	38.8
63	27 27.9	26 49.1	26 10.2	25 31.4	24 52.5	24 13.6	23 34.7	22 55.9	22 16.9	38.9
64	27 42.1	27 3.2	26 24.3	25 45.4	24 66.7	24 27.5	23 48.5	23 9.6	22 30.6	38.9
65	27 55.9	27 16.9	26 37.9	25 58.9	25 19.9	24 40.9	24 1.9	23 22.8	22 43.8	39.0
66	28 9.2	27 30.1	26 51.1	26 12.0	25 32.9	24 53.8	24 14.7	23 35.6	22 56.5	39.1
67	28 22.0	27 42.9	27 3.8	26 24.6	25 45.5	25 6.3	24 27.1	23 48.0	23 8.8	39.2
68	28 34.3	27 55.1	27 15.9	26 36.8	25 57.5	25 18.3	24 39.1	23 59.8	23 20.6	39.2
69	28 46.1	28 6.9	27 27.6	26 48.4	26 9.1	25 29.8	24 50.5	24 11.2	23 31.9	39.3
70	28 57.4	28 18.1	27 38.8	26 59.5	26 20.1	25 40.8	25 1.4	24 22.1	23 42.7	39.3
	10.8	10.8	10.7	10.6	10.6	10.5	10.5	10.3	10.3	
71	29 8.2	28 28.9	27 49.5	27 10.1	26 30.7	25 51.3	25 11.9	24 32.4	23 53.0	39.4
72	29 18.5	28 39.1	27 59.6	27 20.2	26 40.7	26 1.3	25 21.8	24 42.3	24 2.8	39.5
73	29 28.3	28 48.8	28 9.2	27 29.8	26 50.3	26 10.8	25 31.2	24 51.7	24 12.2	39.5
74	29 37.5	28 58.0	28 18.4	27 38.9	26 59.3	26 19.7	25 40.1	25 0.6	24 21.0	39.6
75	29 46.3	29 6.6	28 27.0	27 47.4	27 7.8	26 28.2	25 48.5	25 8.9	24 29.3	39.6
76	29 54.4	29 14.8	28 35.1	27 55.4	27 15.8	26 36.1	25 56.4	25 16.8	24 37.1	39.7
77	30 2.0	29 22.4	28 42.6	28 2.9	27 23.2	26 43.5	26 3.8	25 24.1	24 44.3	39.7
78	30 9.1	29 29.4	28 49.6	28 9.9	27 30.1	26 50.4	26 10.6	25 30.8	24 51.1	39.8
79	30 15.6	29 35.9	28 56.1	28 16.3	27 36.5	26 56.7	26 16.9	25 37.1	24 57.3	39.8
80	30 21.6	29 41.8	29 2.0	28 22.1	27 42.3	27 2.5	26 22.7	25 42.8	25 3.0	39.8
	5.4	5.4	5.3	5.4	5.3	5.2	5.2	5.2	5.2	
81	30 27.0	29 47.2	29 7.3	28 27.5	27 47.6	27 7.7	26 27.9	25 48.0	25 8.2	39.9
82	30 31.9	29 52.0	29 12.1	28 32.2	27 52.3	27 12.5	26 32.6	25 52.7	25 12.8	39.9
83	30 36.2	29 56.3	29 16.4	28 36.4	27 56.5	27 16.6	26 36.7	25 56.8	25 16.9	39.9
84	30 39.9	30 0.0	29 20.0	28 40.1	28 0.1	27 20.2	26 40.3	26 0.3	25 20.4	39.9
85	30 43.1	30 3.1	29 23.1	28 43.2	28 3.2	27 23.3	26 43.3	26 3.4	25 23.4	40.0
86	30 45.7	30 5.7	29 25.7	28 45.7	28 5.7	27 25.8	26 45.8	26 5.9	25 25.9	40.0
87	30 47.6	30 7.7	29 27.7	28 47.7	28 7.7	27 27.7	26 47.7	26 7.8	25 27.8	40.0
88	30 49.0	30 9.1	29 29.1	28 49.1	28 9.1	27 29.1	26 49.1	26 9.1	25 29.1	40.0
89	30 49.9	30 9.9	29 29.9	28 49.9	28 9.9	27 29.9	26 49.9	26 9.9	25 30.0	40.0
90	+30 50.2	+30 10.2	+29 30.2	+28 50.2	+28 10.2	+27 30.2	+26 50.2	+26 10.2	+25 30.2	40.0

IX

giebt für Saturn $l - 180^\circ - (\lambda - \Omega)$ mit den Argumenten $(\lambda - \Omega)$ und β .

$\lambda - \Omega$	$\beta = -2^\circ 40'$	$\beta = -2^\circ 0'$	$\beta = -1^\circ 20'$	$\beta = -0^\circ 40'$	$\beta = 0^\circ$	$\beta + 0^\circ 40'$	$\beta = +1^\circ 20'$	$\beta = +2^\circ 0'$	$\beta = +2^\circ 40'$
0 ⁰	-1 ⁰ 15.6	-0 ⁰ 56.7	-0 ⁰ 37.8	-0 ⁰ 18.9	-0 ⁰ 0.0	+0 ⁰ 18.9	+0 ⁰ 37.8	+0 ⁰ 56.7	+1 ⁰ 15.6
1	-1 22.7	-1 3.8	-0 44.9	-0 26.0	-0 7.1	+0 11.8	+0 30.7	+0 49.6	+1 8.5
2	-1 29.8	-1 10.8	-0 52.0	-0 33.1	-0 14.2	+0 4.6	+0 23.5	+0 42.4	+1 1.3
3	-1 36.9	-1 17.9	-0 59.1	-0 40.2	-0 21.3	-0 2.4	+0 16.4	+0 35.3	+0 54.2
4	-1 43.9	-1 25.0	-1 6.1	-0 47.2	-0 28.4	-0 9.5	+0 9.4	+0 28.2	+0 47.0
5	-1 50.9	-1 32.0	-1 13.1	-0 54.2	-0 35.4	-0 16.6	+0 2.3	+0 21.1	+0 39.9
6	-1 57.9	-1 39.0	-1 20.1	-1 1.2	-0 42.4	-0 23.6	-0 4.8	+0 14.0	+0 32.8
7	-2 4.8	-1 45.9	-1 27.0	-1 8.2	-0 49.3	-0 30.6	-0 11.8	+0 7.0	+0 25.7
8	-2 11.6	-1 52.7	-1 33.9	-1 15.1	-0 56.3	-0 37.5	-0 18.7	+0 0.0	+0 18.6
9	-2 18.4	-1 59.5	-1 40.7	-1 22.0	-1 3.1	-0 44.4	-0 25.6	-0 7.0	+0 11.7
10	-2 25.1	-2 6.2	-1 47.4	-1 28.7	-1 9.9	-0 51.2	-0 32.5	-0 13.9	+0 4.8
11	-2 31.7	-2 12.8	-1 54.0	-1 35.3	-1 16.6	-0 57.9	-0 39.3	-0 20.7	-0 2.1
12	-2 38.2	-2 19.4	-2 0.6	-1 41.9	-1 23.2	-1 4.6	-0 46.0	-0 27.4	-0 8.9
13	-2 44.6	-2 25.8	-2 7.1	-1 48.4	-1 29.9	-1 11.2	-0 52.6	-0 34.1	-0 15.6
14	-2 50.9	-2 32.1	-2 13.5	-1 54.8	-1 36.3	-1 17.7	-0 59.2	-0 40.7	-0 22.3
15	-2 57.1	-2 38.4	-2 19.7	-2 1.1	-1 42.6	-1 24.1	-1 5.6	-0 47.2	-0 28.9
16	-3 3.2	-2 44.5	-2 25.9	-2 7.3	-1 48.8	-1 30.4	-1 12.0	-0 53.7	-0 35.3
17	-3 9.1	-2 50.5	-2 31.9	-2 13.4	-1 55.0	-1 36.6	-1 18.3	-1 0.0	-0 41.7
18	-3 14.9	-2 56.3	-2 37.8	-2 19.4	-2 1.0	-1 42.7	-1 24.4	-1 6.2	-0 48.0
19	-3 20.6	-3 2.0	-2 43.6	-2 25.2	-2 6.9	-1 48.6	-1 30.4	-1 12.3	-0 54.2
20	-3 26.1	-3 7.6	-2 49.2	-2 30.9	-2 12.7	-1 54.5	-1 36.3	-1 18.3	-1 0.2
21	-3 31.4	-3 13.0	-2 54.7	-2 36.5	-2 18.3	-2 0.2	-1 42.1	-1 24.1	-1 6.1
22	-3 36.6	-3 18.3	-3 0.0	-2 41.9	-2 23.7	-2 5.7	-1 47.8	-1 29.8	-1 11.9
23	-3 41.7	-3 23.4	-3 5.2	-2 47.1	-2 29.1	-2 11.1	-1 53.2	-1 35.4	-1 17.6
24	-3 46.6	-3 28.3	-3 10.2	-2 52.2	-2 34.2	-2 16.4	-1 58.5	-1 40.8	-1 23.1
25	-3 51.2	-3 33.1	-3 15.1	-2 57.1	-2 39.2	-2 21.4	-2 3.7	-1 46.1	-1 28.5
26	-3 55.7	-3 37.7	-3 19.7	-3 1.8	-2 44.1	-2 26.4	-2 8.7	-1 51.2	-1 33.7
27	-4 0.0	-3 42.0	-3 24.2	-3 6.4	-2 48.7	-2 31.1	-2 13.6	-1 56.1	-1 38.7
28	-4 4.1	-3 46.2	-3 28.4	-3 10.8	-2 53.2	-2 35.7	-2 18.3	-2 0.9	-1 43.6
29	-4 8.0	-3 50.2	-3 32.5	-3 14.9	-2 57.5	-2 40.1	-2 22.7	-2 5.5	-1 48.3
30	-4 11.6	-3 54.0	-3 36.4	-3 18.9	-3 1.5	-2 44.3	-2 27.1	-2 9.9	-1 52.9
31	-4 15.1	-3 57.5	-3 40.1	-3 22.7	-3 5.4	-2 48.3	-2 31.2	-2 14.2	-1 57.3
32	-4 18.3	-4 0.8	-3 43.5	-3 26.2	-3 9.1	-2 52.1	-2 35.1	-2 18.2	-2 1.4
33	-4 21.3	-4 3.9	-3 46.7	-3 29.6	-3 12.6	-2 55.7	-2 38.8	-2 22.1	-2 5.4
34	-4 24.0	-4 6.8	-3 49.7	-3 32.7	-3 15.8	-2 59.1	-2 42.4	-2 25.7	-2 9.2
35	-4 26.5	-4 9.4	-3 52.5	-3 35.6	-3 18.9	-3 2.2	-2 45.7	-2 29.2	-2 12.8
36	-4 28.8	-4 11.8	-3 55.0	-3 38.3	-3 21.7	-3 5.2	-2 48.8	-2 32.4	-2 16.2
37	-4 30.8	-4 14.0	-3 57.3	-3 40.7	-3 24.3	-3 7.9	-2 51.6	-2 35.5	-2 19.4
38	-4 32.5	-4 15.9	-3 59.3	-3 42.9	-3 26.6	-3 10.4	-2 54.3	-2 38.3	-2 22.4
39	-4 34.0	-4 17.5	-4 1.1	-3 44.9	-3 28.7	-3 12.7	-2 56.7	-2 40.9	-2 25.1
40	-4 35.2	-4 18.9	-4 2.7	-3 46.6	-3 30.6	-3 14.7	-2 58.9	-2 43.2	-2 27.7
41	-4 36.2	-4 20.0	-4 4.0	-3 48.0	-3 32.2	-3 16.5	-3 1.0	-2 45.4	-2 30.0
42	-4 36.9	-4 20.8	-4 5.0	-3 49.2	-3 33.6	-3 18.0	-3 2.7	-2 47.3	-2 32.0
43	-4 37.3	-4 21.4	-4 5.7	-3 50.2	-3 34.7	-3 19.3	-3 4.1	-2 48.9	-2 33.9
44	-4 37.4	-4 21.7	-4 6.2	-3 50.8	-3 35.5	-3 20.4	-3 5.3	-2 50.4	-2 35.5
45	-4 37.5	-4 21.8	-4 6.4	-3 51.2	-3 36.1	-3 21.2	-3 6.3	-2 51.6	-2 36.8

IX.

(Fortsetzung.)

$\lambda - \Omega$	$\beta = -2^{\circ}40'$	$\beta = -2^{\circ}00'$	$\beta = -1^{\circ}20'$	$\beta = -0^{\circ}40'$	$\beta = 0^{\circ}$	$\beta = +0^{\circ}40'$	$\beta = +1^{\circ}20'$	$\beta = +2^{\circ}00'$	$\beta = +2^{\circ}40'$
45 ⁰	-4 ⁰ 37.5	-4 ⁰ 21.8	-4 ⁰ 6.4	-3 ⁰ 51.2	-3 ⁰ 36.1	-3 21.2	-3 ⁰ 6.3	-2 ⁰ 51.6	-2 ⁰ 36.8
46	-4 36.8 ^{0.7}	-4 21.5 ^{0.3}	-4 6.1 ^{0.0}	-3 51.4	0.2	-3 36.5 ^{0.4}	-3 21.8 ^{0.6}	-3 7.1 ^{0.8}	-2 52.5 ^{0.9}
47	-4 36.0 ^{0.8}	-4 21.0 ^{0.5}	-4 5.0 ^{0.2}	-3 51.3	0.1	-3 36.6 ^{0.1}	-3 22.0 ^{0.2}	-3 7.6 ^{0.5}	-2 53.1 ^{0.6}
48	-4 35.0 ^{1.0}	-4 20.2 ^{0.8}	-4 5.5 ^{0.5}	-3 50.9	0.4	-3 36.4 ^{0.2}	-3 22.0 ^{0.0}	-3 7.8 ^{0.2}	-2 53.6 ^{0.5}
49	-4 33.7 ^{1.3}	-4 19.1 ^{1.1}	-4 4.6 ^{0.9}	-3 50.2	0.7	-3 35.9 ^{0.5}	-3 21.8 ^{0.2}	-3 7.8 ^{0.0}	-2 53.9 ^{0.3}
50	-4 32.1 ^{1.6}	-4 17.7 ^{1.4}	-4 3.4 ^{1.2}	-3 49.2	1.0	-3 35.2 ^{0.7}	-3 21.3 ^{0.5}	-3 7.5 ^{0.3}	-2 53.8 ^{0.1}
	1.9	1.7	1.5	1.2	1.0	0.5	0.6	0.3	0.1
51	-4 30.2	-4 16.0	-4 1.9	-3 48.0	-3 34.2	-3 20.6	-3 6.9	-2 53.5	-2 40.2
52	-4 28.0 ^{2.2}	-4 14.0 ^{2.0}	-4 0.2 ^{1.7}	-3 46.5	1.5	-3 33.0 ^{1.2}	-3 19.6 ^{1.0}	-3 6.1 ^{0.8}	-2 53.0 ^{0.5}
53	-4 25.5 ^{2.5}	-4 11.8 ^{2.2}	-3 58.2 ^{2.0}	-3 44.8	1.7	-3 31.5 ^{1.5}	-3 18.3 ^{1.3}	-3 5.1 ^{1.0}	-2 52.2 ^{0.8}
54	-4 22.6 ^{2.9}	-4 9.4 ^{2.6}	-3 55.9 ^{2.3}	-3 42.7	2.1	-3 29.7 ^{1.8}	-3 16.7 ^{1.6}	-3 3.9 ^{1.2}	-2 51.2 ^{1.0}
55	-4 19.5 ^{3.1}	-4 6.2 ^{2.8}	-3 53.3 ^{2.6}	-3 40.4	2.3	-3 27.6 ^{2.1}	-3 14.9 ^{1.8}	-3 2.4 ^{1.5}	-2 49.9 ^{1.3}
56	-4 16.1 ^{3.4}	-4 3.2 ^{3.2}	-3 50.5 ^{2.8}	-3 37.8	2.6	-3 25.3 ^{2.3}	-3 12.9 ^{2.0}	-3 0.6 ^{1.8}	-2 48.4 ^{1.5}
57	-4 12.5 ^{3.6}	-3 59.8 ^{3.4}	-3 47.3 ^{3.2}	-3 34.9	2.9	-3 22.7 ^{2.6}	-3 10.5 ^{2.4}	-2 58.5 ^{2.1}	-2 46.6 ^{1.8}
58	-4 8.5 ^{4.0}	-3 56.1 ^{3.7}	-3 43.9 ^{3.4}	-3 31.8	3.1	-3 19.8 ^{2.9}	-3 8.0 ^{2.5}	-2 56.2 ^{2.3}	-2 44.6 ^{2.0}
59	-4 4.2 ^{4.3}	-3 52.1 ^{4.0}	-3 40.2 ^{3.7}	-3 28.4	3.4	-3 16.7 ^{3.1}	-3 5.1 ^{2.9}	-2 53.7 ^{2.5}	-2 42.3 ^{2.3}
60	-3 59.6 ^{4.6}	-3 47.9 ^{4.2}	-3 36.2 ^{4.0}	-3 24.7	3.7	-3 13.3 ^{3.4}	-3 2.0 ^{3.1}	-2 50.9 ^{2.8}	-2 39.8 ^{2.5}
	4.8	4.6	4.5	3.9	3.6	3.3	3.1	2.7	2.5
61	-3 54.8	-3 43.3	-3 32.0	-3 20.8	-3 9.7	-2 58.7	-2 47.8	-2 37.1	-2 26.4
62	-3 49.6 ^{5.2}	-3 38.5 ^{4.8}	-3 27.5 ^{4.5}	-3 16.6	4.2	-3 5.8 ^{3.9}	-2 55.1 ^{3.6}	-2 44.5 ^{3.3}	-2 34.1 ^{3.0}
63	-3 44.2 ^{5.4}	-3 33.4 ^{5.1}	-3 22.7 ^{4.8}	-3 12.1	4.5	-3 1.7 ^{4.1}	-2 51.3 ^{3.8}	-2 41.0 ^{3.5}	-2 30.9 ^{3.2}
64	-3 38.5 ^{5.7}	-3 28.1 ^{5.3}	-3 17.7 ^{5.0}	-3 7.4	4.7	-2 57.3 ^{4.4}	-2 47.2 ^{4.1}	-2 37.3 ^{3.7}	-2 27.4 ^{3.5}
65	-3 32.6 ^{5.9}	-3 22.4 ^{5.7}	-3 12.4 ^{5.3}	-3 2.5	4.9	-2 52.6 ^{4.7}	-2 42.9 ^{4.3}	-2 33.3 ^{4.0}	-2 23.8 ^{3.6}
66	-3 26.4 ^{6.2}	-3 16.6 ^{5.8}	-3 6.9 ^{5.5}	-2 57.3	5.2	-2 47.8 ^{4.8}	-2 38.4 ^{4.5}	-2 29.1 ^{4.2}	-2 19.9 ^{3.9}
67	-3 20.0 ^{6.4}	-3 10.4 ^{6.2}	-3 1.1 ^{5.8}	-2 51.8	5.5	-2 42.7 ^{5.1}	-2 33.6 ^{4.8}	-2 24.7 ^{4.4}	-2 15.8 ^{4.1}
68	-3 13.2 ^{6.8}	-3 4.1 ^{6.3}	-2 55.1 ^{6.0}	-2 46.1	5.7	-2 37.4 ^{5.3}	-2 28.7 ^{4.9}	-2 20.1 ^{4.6}	-2 11.5 ^{4.3}
69	-3 6.2 ^{7.0}	-2 57.5 ^{6.6}	-2 49.0 ^{6.1}	-2 40.3	5.8	-2 31.8 ^{5.6}	-2 23.5 ^{5.2}	-2 15.2 ^{4.9}	-2 7.0 ^{4.5}
70	-2 59.0 ^{7.2}	-2 50.6 ^{6.9}	-2 42.5 ^{6.5}	-2 34.2	6.1	-2 26.1 ^{5.7}	-2 18.1 ^{5.4}	-2 10.2 ^{5.0}	-2 2.4 ^{4.6}
	7.4	7.0	6.8	6.3	6.0	5.6	5.3	4.9	4.5
71	-2 51.6	-2 43.6	-2 35.7	-2 27.9	-2 20.1	-2 12.5	-2 4.9	-1 57.5	-1 50.1
72	-2 44.0 ^{7.6}	-2 36.3 ^{7.3}	-2 28.8 ^{6.9}	-2 21.3	6.6	-2 14.0 ^{6.1}	-2 6.7 ^{5.8}	-1 59.5 ^{5.4}	-1 52.4 ^{5.1}
73	-2 36.1 ^{7.9}	-2 28.8 ^{7.5}	-2 21.7 ^{7.1}	-2 14.6	6.7	-2 7.6 ^{6.4}	-2 0.7 ^{6.0}	-1 53.9 ^{5.6}	-1 47.2 ^{5.2}
74	-2 28.0 ^{8.1}	-2 21.1 ^{7.7}	-2 14.4 ^{7.3}	-2 7.7	6.9	-2 1.1 ^{6.5}	-1 54.6 ^{6.1}	-1 48.2 ^{5.7}	-1 41.8 ^{5.4}
75	-2 19.7 ^{8.3}	-2 13.3 ^{7.8}	-2 6.9 ^{7.5}	-2 0.6	7.1	-1 54.4 ^{6.7}	-1 48.3 ^{6.3}	-1 42.2 ^{6.0}	-1 36.2 ^{5.6}
76	-2 11.3 ^{8.4}	-2 5.2 ^{8.1}	-2 59.3 ^{7.6}	-1 53.4	7.2	-1 47.6 ^{6.8}	-1 41.8 ^{6.5}	-1 36.1 ^{6.1}	-1 30.5 ^{5.7}
77	-2 2.6 ^{8.7}	-1 57.0 ^{8.2}	-1 51.4 ^{7.9}	-1 46.0	7.4	-1 40.5 ^{7.1}	-1 35.2 ^{6.6}	-1 29.9 ^{6.2}	-1 24.7 ^{5.8}
78	-1 53.9 ^{8.4}	-1 48.6 ^{8.4}	-1 43.5 ^{8.4}	-1 38.4	7.6	-1 33.4 ^{7.1}	-1 28.4 ^{6.8}	-1 23.5 ^{6.4}	-1 18.7 ^{6.0}
79	-1 44.9 ^{9.0}	-1 40.1 ^{8.5}	-1 35.4 ^{8.1}	-1 30.7	7.7	-1 26.1 ^{7.3}	-1 21.5 ^{6.9}	-1 17.0 ^{6.5}	-1 12.6 ^{6.1}
80	-1 35.8 ^{9.1}	-1 31.5 ^{8.6}	-1 27.1 ^{8.3}	-1 22.9	7.8	-1 18.7 ^{7.4}	-1 14.5 ^{7.0}	-1 10.4 ^{6.6}	-1 6.3 ^{6.3}
	9.2	8.8	8.3	8.0	7.6	7.1	6.7	6.3	5.9
81	-1 26.6	-1 22.7	-1 18.8	-1 14.9	-1 11.1	-1 7.4	-1 3.7	-1 0.0	-0 56.4
82	-1 17.3 ^{9.3}	-1 13.9 ^{8.8}	-1 10.3 ^{8.5}	-1 6.9	8.0	-1 3.5 ^{7.6}	-1 0.2 ^{7.2}	-0 56.9 ^{6.8}	-0 50.4 ^{6.4}
83	-1 7.9 ^{9.4}	-1 4.8 ^{9.1}	-1 1.7 ^{8.6}	-0 58.7	8.2	-0 55.8 ^{7.7}	-0 52.8 ^{7.4}	-0 49.9 ^{7.0}	-0 44.2 ^{6.5}
84	-0 58.3 ^{9.6}	-0 55.7 ^{9.1}	-0 53.1 ^{8.7}	-0 50.5	8.3	-0 48.0 ^{7.8}	-0 45.4 ^{7.4}	-0 43.0 ^{6.9}	-0 38.0 ^{6.6}
85	-0 48.7 ^{9.6}	-0 46.6 ^{9.1}	-0 44.4 ^{8.7}	-0 42.2	8.4	-0 40.1 ^{7.9}	-0 38.0 ^{7.4}	-0 35.9 ^{7.1}	-0 31.8 ^{6.7}
86	-0 39.1 ^{9.6}	-0 37.3 ^{9.3}	-0 35.6 ^{8.9}	-0 33.8	8.4	-0 32.1 ^{8.0}	-0 30.4 ^{7.6}	-0 28.8 ^{7.2}	-0 27.1 ^{6.7}
87	-0 29.4 ^{9.7}	-0 28.0 ^{9.3}	-0 26.7 ^{8.9}	-0 25.4	8.4	-0 24.1 ^{8.0}	-0 22.9 ^{7.5}	-0 21.6 ^{7.1}	-0 20.4 ^{6.7}
88	-0 19.6 ^{9.8}	-0 18.7 ^{9.3}	-0 17.8 ^{8.9}	-0 17.0	8.4	-0 16.1 ^{8.0}	-0 15.4 ^{7.5}	-0 14.4 ^{7.2}	-0 13.6 ^{6.8}
89	-0 9.8 ^{9.8}	-0 9.4 ^{9.3}	-0 8.9 ^{8.9}	-0 8.5	8.5	-0 8.1 ^{8.0}	-0 7.7 ^{7.7}	-0 7.2 ^{7.2}	-0 6.8 ^{6.8}
90	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	8.5	0 0.0 ^{8.0}	0 0.0 ^{7.7}	0 0.0 ^{7.2}	0 0.0 ^{6.8}

X.

Jupiter.

$$l = 180^\circ + (\lambda - \Omega) + X$$

X

$(\lambda - \Omega)$	$\beta = -1^\circ 40'$	$-1^\circ 0'$	$-0^\circ 20'$	$+0^\circ 20'$	$+1^\circ 0'$	$+1^\circ 40'$	für $\Delta\beta = 40'$ Δ
0 ⁰	-0 ⁰ 3.8	-0 ⁰ 2.2	-0 ⁰ 0.8	+0 ⁰ 0.8	+0 ⁰ 2.2	+0 ⁰ 3.8	1.5
5	4.0	2.4	0.9	0.6	2.0	3.5	1.5
10	4.1	2.6	1.1	0.3	1.8	3.3	1.5
15	4.3	2.8	1.3	+0.1	1.6	3.0	1.5
20	4.3	2.9	1.5	-0.1	1.3	2.8	1.4
25	4.3	3.0	1.6	0.2	1.1	2.5	1.4
30	4.3	3.0	1.7	0.4	0.9	2.2	1.3
35	4.2	3.0	1.8	0.5	0.7	1.9	1.2
40	4.1	2.9	1.8	0.6	0.5	1.7	1.2
45	4.0	2.8	1.8	0.7	0.4	1.5	1.1
50	3.6	2.6	1.7	0.7	0.3	1.2	1.0
55	3.3	2.4	1.6	0.7	0.2	1.0	0.9
60	2.9	2.2	1.4	0.7	0.1	0.8	0.7
65	2.5	1.9	1.2	0.6	0.0	0.7	0.6
70	2.1	1.6	1.0	0.5	0.0	0.5	0.5
75	1.6	1.2	0.8	0.4	0.0	0.4	0.4
80	1.1	0.8	0.5	0.3	0.0	0.2	0.3
85	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.1	0.1
90	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

XI.

$$A = -\beta + A_0$$

A_0

$\lambda - \Omega$	A_0	$\lambda - \Omega$	A_0	$\lambda - \Omega$	A_0	$\lambda - \Omega$	A_0	$\lambda - \Omega$	A_0
0 ⁰	+0 ⁰ 0.0	20 ⁰	+0 ⁰ 44.1	40 ⁰	+1 ⁰ 22.9	60 ⁰	+1 ⁰ 51.7	80 ⁰	+2 ⁰ 7.0
1	2.3	21	46.2	41	24.6	61	52.8	81	7.4
2	4.5	22	48.3	42	26.3	62	53.9	82	7.8
3	6.8	23	50.4	43	28.0	63	54.9	83	8.0
4	9.0	24	52.5	44	29.6	64	55.9	84	8.3
5	11.3	25	54.5	45	31.2	65	56.9	85	8.5
6	13.5	26	56.5	46	32.8	66	57.8	86	8.7
7	15.7	27	58.6	47	34.3	67	58.7	87	8.8
8	18.0	28	+1 0.6	48	35.9	68	59.6	88	8.9
9	20.2	29	2.5	49	37.4	69	+2 0.4	89	9.0
10	22.4	30	4.5	50	38.8	70	1.2	90	+2 9.0
11	24.6	31	6.4	51	40.3	71	2.0		
12	26.8	32	8.4	52	41.7	72	2.7		
13	29.0	33	10.3	53	43.0	73	3.4		
14	31.2	34	12.1	54	44.4	74	4.0		
15	33.4	35	14.0	55	45.7	75	4.6		
16	35.6	36	15.8	56	46.9	76	5.2		
17	37.7	37	17.6	57	48.2	77	5.7		
18	39.9	38	19.4	58	49.4	78	6.2		
19	42.0	39	21.2	59	50.6	79	6.6		
20	044.1	40	+1 22.9	60	+1 51.7	80	+2 7.0		

XII.

Jupiter.

$$i = 2^{\circ}8'81 + 0'0065(t - 1850)$$

$$\Omega = 335^{\circ}40.54 + 0'821(t - 1850)$$

	Ω
1840	335 ^o 32'33
50	40.54
60	48.75
70	56.96
80	336 5.16
90	13.37
1900	21.58
10	29.79
20	38.00
30	46.20
40	54.41

Saturn.

$$i = 28^{\circ}10'94 - 0'0058(t - 1750)$$

$$\Omega = 166^{\circ}14'43 + 0'7744(t - 1750)$$

1840	167 ^o 24.13
50	31.87
60	39.61
70	47.36
80	55.10
90	168 2.85
1900	10.59
10	18.33
20	26.08
30	33.82
40	41.56

2 FEB 1888

