Ueber

die cogredienten Transformationen

einer bilinearen Form

in sich selbst.

Von

A. Voss.

In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht, die cogrediente (congruente) Transformation der bilinearen Formen in sich selbst, die für die symmetrischen und alternirenden Formen von Herrn Frobenius zum Abschluss gebracht ist, auf den allgemeinsten Fall einer beliebigen bilinearen Form auszudehnen.

Im § I findet man die nothwendigsten Definitionen und Bezeichnungen zusammengestellt, von denen im Anschluss an den von Herrn Frobenius entwickelten Algorithmus der bilinearen Formen[1]) Gebrauch gemacht wird, sowie einige andere einfache Folgerungen aus bekannten Theoremen erwähnt.

Daran schliesst sich in § II die Entwicklung der allgemeinen Eigenschaften der charakteristischen Function der Substitutionen U, sowie solcher Relationen, denen die Coefficienten derselben genügen müssen. Dabei ergeben sich einerseits die Theoreme, welche schon Herr Frobenius aufgestellt hat, doch schien es mir nicht überflüssig, dieselben von derjenigen Grundlage aus zu entwickeln, die ich bereits in meiner Arbeit über orthogonale Substitutionen[2]) benutzt habe. Andrerseits aber erhält man, indem man unter der Substitution eine solche versteht, welche die Form in eine beigeordnete — die conjugirte der reciproken — verwandelt, Relationen, welche in besonders ausgeprägtem Sinne eine Ver-

1) Vgl. Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Borchardt's Journ. Bd. 84, S. 1. Diese Arbeit werde ich im Folgenden mit F citiren. Vgl. ferner: Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form, Daselbst Bd. 86, S. 44; sowie Kronecker, Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen, Berl. Monatsb. April 1874. Diese letztere Arbeit werde ich mit K citiren.

2) Voss, Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen, Math. Annalen, Bd. XIII, S. 326. Ueber bilineare Formen, Göttinger Nachrichten, August 1887.

allgemeinerung der bekannten Eigenschaften der orthogonalen Substitutionen[1]) bilden. Bei der Untersuchung der reellen Transformation einer reellen Form habe ich versucht, dem Satze des Herrn Weierstrass[2]) über die Elementartheiler der characteristischen Function derjenigen Substitutionen, welche eine definite quadratische Form in sich transformiren, eine weitere Ausdehnung zu geben.

In § IV gehe ich zur Herleitung der Christoffel-Kronecker'schen Transformation[3]) vermöge einer reciproken Resolvente n^{ten} Grades über, jedoch mit der Erweiterung auf den Fall, dass die letztere lauter einfache Elementartheiler enthält.

Sodann zeige ich, dass die Transformations-Coefficienten aller nicht singulären Substitutionen in vollständigster Analogie mit den Cayley-Hermite'schen Formeln, insbesondere in der von Herrn Frobenius gegebenen Gestalt, sich darstellen lassen. Dabei ergiebt sich ein System linearer Gleichungen zur Bestimmung dieser Coefficienten, das in der symbolischen Form $ST + S^1 T^1 = o$ zusammengefasst werden kann[4]). Nach einer ausführlichen Erörterung der Eigenschaften der Formen T gehe ich zur Ermittelung dieser Formen selbst über, die sich leicht mittelst des bei allen ähnlichen Fragen dieser Art als erledigt anzusehenden Problems der vertauschbaren Formen bewerkstelligen lässt.

---

1) Vgl. Jacobi, Crelle's Journ. Bd. 12 S. 7; Baltzer, Determinanten, S. 173.

2) Weierstrass, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Berl. Monatsb. 1868. S. 336.

3) Christoffel, Theorie der bilinearen Functionen, Borchardt's Journal, Bd. 68, S. 253; Kronecker, Ueber bilineare Formen, ebenda, S. 273.

4) Die Möglichkeit, überhaupt rationale Transformationen einer Form in sich anzugeben, ist, worauf mich Herr Klein bei dem Erscheinen meiner Note in den Göttinger Nachrichten aufmerksam zu machen die Güte hatte, bereits 1858 durch Cayley (On the automorphic transformation of a bipartite quadric function. Phil. Transactions 148, S. 39—46) gewissermassen dargethan, der mittelst der Hermite'schen Methode (Crelle's Journal Bd. 47, S. 309) rationale zunächst nicht cogrediente Transformationen einer bilinearen Form in sich angiebt.

Indessen hat Herr Cayley dabei übersehen, dass seine Formeln — die mit denen des Herrn Frobenius übereinstimmen — nur für den Fall einer symmetrischen oder alternirenden Form ohne das Hinzutreten der im Texte angezogenen Gleichung eine cogrediente Substitution liefern, und auch die Frage, bei welcher besonderen Beschränkung des Characters der Substitution diese Transformationen die einzigen sind, gar nicht aufgeworfen.

Herr Frobenius hat zuerst die wichtige Frage nach der Irreducibilität der eigentlichen Transformationen einer symmetrischen oder alternirenden Form von nicht verschwindender Determinante[1]) in bejahendem Sinne entschieden. Eine ähnliche Untersuchung lässt sich auch in dem allgemeinen Falle führen, doch muss es weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben, diese schwierige Frage in ihrem ganzen Umfange zu erledigen, da auch bei anderen Voraussetzungen solche Substitutionen durch ein einziges rationales System dargestellt werden können.[2]) Die Untersuchung der Anzahl der willkürlichen Parameter, von denen überhaupt die Coefficienten der Transformation einer Form in sich abhängen, bildet den Inhalt des § *XII*, und es scheint mir bemerkenswerth, dass dieselbe stets durch lineare Operationen gefunden werden kann.

---

§ I.

Einleitung.

In diesem Paragraphen werde ich kurz die wesentlichsten Bezeichnungen und Definitionen, sowie einige einfache Theoreme zusammenstellen, die im Folgenden zur Anwendung kommen werden.

1. Unter dem Produkte[3])

1) $$C = AB$$

der beiden bilinearen Formen von n Variabelnpaaren x und y

$$A = \Sigma a_{ik} x_i y_k,$$
$$B = \Sigma b_{ik} x_i y_k,$$

sei der Ausdruck

$$C = \Sigma_k \frac{\partial A}{\partial y_k} \frac{\partial B}{\partial x_k} = \Sigma c_{ik} x_i y_k,$$

verstanden, so dass

2) $$c_{ik} = \Sigma_l a_{il} b_{lk}$$

$$\text{für } \; i, k = 1, 2, \ldots n$$

1) Ueber die Transformation von Formen mit verschwindender Determinante, die in den übrigen §§ der Arbeit ausgeschlossen sind, handelt § V.

2) Vgl. 2. B. § V, S.

3) F. S. 2.

wird. Bei dieser Definition wird die Multiplication associativ und distributiv, dagegen im allgemeinen nicht commutativ. Die Determinante der Coefficienten des Productes C wird nach 2) gleich dem Producte der Determinanten der Factoren A und B.[1]) Bezeichnet man die Determinante der Coefficienten c_{ik} einer Form C allgemein durch $|C|$, so zieht demnach die Gleichung 1) auch die folgende

$$|C| = |A|\,|B|$$

nach sich.

Zwei Formen A und B heissen vertauschbar, wenn ihr Product commutativ ist, d. h. wenn

$$A\,B = B\,A,$$

welche Gleichung also die n^2 in den Coefficienten von A und B linearen Gleichungen

$$\sum_l a_{il}\, b_{lk} = \sum_l b_{il}\, a_{lk}:$$

$$i, k = 1, 2, \ldots n,$$

repräsentirt.

2. Unter der conjugirten Form von A[2]) versteht man die Form

$$A^1 = \Sigma\, a_{ki}\, x_i\, y_k$$

welche sich durch gleichzeitige Vertauschung der sämmtlichen Variabeln x_i mit den y_i aus A ergibt. Alsdann gilt der Satz:

$$(A\,B \ldots D)^1 = D^1 \ldots B^1\,A^1.$$

3. Die mit jeder beliebigen Form vertauschbare Form[3])

$$\sum_i x_i\, y_i$$

werde durch E bezeichnet. Demnach ist $A\,E = E\,A = A$. Formen, welche nach dem Typus von E gebildet sind, aber weniger als n Variabelnpaare enthalten, sollen durch E_1, E_2 . . bezeichnet werden, so dass allgemein

$$E = \Sigma\, E_k$$

ist, sobald die Formen E_k unter sich kein Variabelnpaar gemein haben. Die Form

1) F. S 5. 2) F. S. 4. 3) F. S. 5, ff.

$$E_\alpha A E_\beta = \Sigma x_k^\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial x_k^\alpha \partial y_l^\beta} y_l^\beta$$

enthält also nur die Variabeln x welche in E_α, die Variabeln y welche in E_β vorkommen.[1])

4. Wenn die Determinante der Form A nicht verschwindet, so giebt es eine einzige vollkommen bestimmte Form X, welche der Gleichung [2])

3) $$A X = B$$

genügt, und wenn die Determinante von B nicht verschwindet, so ist auch die von X nicht Null. Ist $B = o$, so muss auch $X = o$ sein. Es giebt daher auch eine Form Y, welche der Gleichung

$$A Y = E$$

genügt. Aus der hieraus folgenden Gleichung

$$Y A Y = Y,$$

oder
$$(Y A - E) Y = o,$$

folgt aber
$$Y A = E.$$

Diese Form Y heisst die reciproke Form von A und wird durch A^{-1} bezeichnet, so dass also

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E$$

wird. Führt man für die Unterdeterminanten des Coefficientensystems der a_{ik}, dividirt durch $|A|$ die Bezeichnung α_{ik} ein, so ist

$$A^{-1} = \Sigma \alpha_{ki} x_i y_k,$$

wobei dann die Gleichungen

$$\Sigma_i a_{ik} \alpha_{il} = \Sigma_i a_{ki} \alpha_{li} = (k l)$$

gelten, in denen $(k l)$ das bekannte, für $k = l$ gleich Eins, sonst aber gleich Null zu setzende Symbol bedeutet.

Zugleich folgt aus 3) durch Multiplication mit A^{-1}

$$X = A^{-1} B,$$

und für die reciproke Form eines Productes gilt der Satz

---

1) F. S. 17. 2) Vgl. F. S. 6.

$$(AB\cdot\cdot D)^{-1} = D^{-1}\cdot\cdot B^{-1}A^{-1}.\ ^{1})$$

Aus
$$A\,A^{-1} = E,$$
$$(A^{-1})^1\,A^1 = E,$$
$$(A^1)^{-1}\,A^1 = E,$$

folgt daher noch
$$\left((A^{-1})^1 - (A^1)^{-1}\right)A^1 = o,$$
oder
$$(A^{-1})^1 = (A^1)^{-1}.$$

5. Wird die Form A durch die beiden Substitutionen

4)
$$x_i = \sum_l p_{li}\,\xi_l$$
$$y_k = \sum_m q_{km}\,\eta_m$$

in die Form B transformirt, so ist

5)
$$B = \Sigma\, a_{ik}\, p_{li}\, q_{km}\, \xi_l\, \eta_m.$$

Ordnet man den beiden Substitutionen 4) die Formen

$$P = \Sigma\, p_{li}\, x_l\, y_i,$$
$$Q = \Sigma\, q_{mk}\, x_m\, y_k,$$

zu, so lässt sich die Gleichung 5) in der symbolischen Form[2])

6)
$$B = P\,A\,Q$$

schreiben, falls man rechterhand noch die x und y durch die ξ und η ersetzt.

Die Transformation heisst eine contragrediente, wenn die p_{mk} die durch $|Q|$ dividirten ersten Unterdeterminanten nach den Elementen q_{km} sind, d. h., wenn $Q^{-1} = P$, dagegen cogredient, wenn $q_{mk} = p_{km}$ oder $P = Q^1$ ist. Die Transformation $P = Q$ heisse nach Herrn Kronecker eine conjugirte Transformation von A in B.

6. Unter der characteristischen Function[3]) einer bilinearen Form A versteht man die Determinante der Form

$$A - rE$$

in welcher r einen variabeln Parameter bedeutet. Zwei Formen A und B heissen ähnlich, wenn ihre characteristischen Functionen dieselben

1) F. S. 8. 2) F. S. 19. 3) F. S. 10.

Elementartheiler haben, und unter dieser Voraussetzung gibt es eine contragrediente Substitution P, welche A in B überführt, so dass die Gleichung

$$\bar{P}^{-1} A P = B$$

besteht. Nach Herrn Weierstrass heissen zwei Formenschaaren

$$A - rB \quad \text{und} \quad A_1 - rB_1$$

äquivalent, wenn die Elementartheiler der als nicht identisch verschwindend vorausgesetzten Determinanten $|A - rB|$ und $|A_1 - rB_1|$, welche ebenfalls als characteristische Functionen bezeichnet werden mögen, übereinstimmen. Nach Herrn Kronecker können zwei äquivalente Schaaren aus conjugirten Grundformen immer durch cogrediente Substitutionen in einander transformirt werden[1]), d. h. sie sind einander congruent.

7. Nach dem Verfahren des Herrn Weierstrass findet man unter der eben genannten Voraussetzung der Aequivalenz zwei Formen P und Q von nicht verschwindender Determinante, welche die Gleichungen

$$PAQ = A_1,$$
$$PBQ = B_1,$$

befriedigen. Giebt es nun auch noch irgend zwei andere Formen P_1 und Q_1 dieser Art, und wird die Determinante von B als nicht verschwindend vorausgesetzt, was sich immer erreichen lässt, so muss

$$PAQ = P_1 A Q_1,$$
$$PBQ = P_1 B Q_1,$$

sein. Hieraus folgt aber

$$Q_1 = B^{-1} P_1^{-1} PBQ,$$

oder

$$PAQ = P_1 A B^{-1} P_1^{-1} PBQ;$$

also, wenn der Factor Q beiderseits fortgelassen wird

$$P_1^{-1} PAB^{-1} = AB^{-1} P_1^{-1} P.$$

1) K. S. 436.

Setzt man aber

$$AB^{-1} = W,$$
$$P_1^{-1} P = R,$$

so ist

$$RW = WR.$$

Und ist umgekehrt R eine mit W ertauschbare Form von nicht verschwindender Determinante, so sind

$$P_1 = PR^{-1},$$
$$Q_1 = B^{-1} RBQ,$$

zwei Formen, welche die Gleichungen

$$P_1 A Q_1 = A_1,$$
$$P_1 B Q_1 = B_1,$$

befriedigen. Es giebt daher genau so viel linear von einander unabhängige Substitutionen von nicht verschwindender Determinante, welche die Schaar $A - rB$ in $A_1 - rB_1$ transformiren, als es linear von einander unabhängige Formen von nicht verschwindender Determinante giebt, die mit $W = AB^{-1}$ vertauschbar sind.[1])

8. Wird eine Form A von nicht verschwindender Determinante durch zwei Substitutionen P und Q in sich transformirt, so ist

$$PAQ = A.$$

Alle Formen B, welche gleichfalls durch P und Q in sich transformirt werden, ergeben sich aus der Gleichung

$$B = SA,$$

falls

$$SP = PS$$

genommen wird. Ist nämlich

$$PBQ = B,$$

so ist auch

$$PBA^{-1}P^{-1}A = B,$$

1) Alle Substitutionen P, Q, welche die Schaar $A - rB$ in sich selbst transformiren, sind daher in den Formen $P = BA^{-1}R^{-1}$, $Q = B^{-1}RA$ enthalten, wo R eine mit AB^{-1} vertauschbare Form ist.

oder

$$PBA^{-1}=BA^{-1}P.$$

Setzt man aber

$$BA^{-1}=S,$$

so ist $PS=SP$ und $B=SA$. Umgekehrt ist dann aber auch

$$PBQ=PSAQ=SPAQ=SA=B.$$

wie zu zeigen war[1]).

9. Wenn die Gleichung

$$U(P_1+P_2)=(Q_1+Q_2)U$$

besteht, in welcher P_1, Q_1; P_2, Q_2 Formen sind, die nur die in E_1; E_2 vorkommenden Variabelnpaare enthalten (also in derselben Weise zerlegbar[2]) sind) und die characteristischen Functionen von P_2 und Q_1 sowie von P_1 und Q_2 keinen gemeinsamen Theiler haben, so ist auch U in derselben Weise in zwei Formen U_1+U_2 zerlegbar.

Man hat nämlich durch Multiplication mit E_1 und E_2

$$E_1UP_1=Q_1UE_1;\qquad E_2UP_1=Q_2UE_1,$$
$$E_1UP_2=Q_1UE_2;\qquad E_2UP_2=Q_2UE_2,$$

oder wenn

$$E_1UE_1=u_1;\qquad E_1UE_2=w_1,$$
$$E_2UE_2=u_2;\qquad E_2UE_1=w_2$$

gesetzt wird

$$u_1P_1=Q_1u_1;\qquad w_1P_2=Q_1w_1,$$
$$u_2P_2=Q_2u_2;\qquad w_2P_1=Q_2w_2.$$

Aus der letzten Gleichung geht aber unter der genannten Bedingung hervor[3])

$$w_1=o,\qquad w_2=o,$$

so dass

$$U=(E_1+E_2)U(E_1+E_2)=u_1+u_2,$$

---

1) Herr Frobenius giebt zur Ermittelung solcher Formen B den specielleren Satz: Ist A eine Form, welche durch die Substitution P und Q in sich transformirt wird, so ist auch

$$f(P)A\,g(Q)$$

eine solche Form. F. S. 30.

2) F. S. 17.

3) Vgl. F. S. 28, Satz X.

wird. Und zugleich können die Determinanten von u_1 und u_2 nur dann von Null verschieden sein, wenn die Formen P_1 und Q_1 sowie P_2 und Q_2 zu einander ähnlich sind.

10. Eine Form von der Gestalt $\pm A(A^1)^{-1}$ heisst nach Herrn Rosanes[1]) antisymmetrisch. Damit eine Form S von nicht verschwindender Determinante antisymmetrisch sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler ihrer characteristischen Function paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden, und dass entweder diejenigen Elementartheiler, welche von der Form $(\varrho+1)^{2k}$ $(\varrho-1)^{2k+1}$ sind, paarweise auftreten, oder dass dieses mit den Theilern der Form $(\varrho-1)^{2k}$, $(\varrho+1)^{2k-1}$ der Fall ist.

Unter der genannten Voraussetzung ist nämlich die Schaar $S-\varrho E$ einer Schaar mit conjugirten Grundformen $W\mp\varrho W^1$ äquivalent[2]), also

$$P(S-\varrho E)Q = W\mp\varrho W^1$$

oder

$$PSQ = W,$$
$$PQ = \pm W^1,$$
$$Q^1 P^1 = \pm W.$$

Demnach ist

$$S = \pm P^{-1} Q^1 P^1 Q^{-1}.$$

Setzt man also

$$P^{-1} Q^1 = A$$

oder

$$P^1 Q^{-1} = (A^1)^{-1},$$

so wird

$$S = \pm A(A^1)^{-1},$$

wie zu zeigen war.

11. Das Problem, alle Formen P zu finden, welche der Gleichung

$$PA = AP$$

genügen, also mit A vertauschbar sind, ist zuerst von Herrn Frobenius

1) Borchardt's Journal Bd. 80, S. 61.

2) F., S. 22. Diese Untersuchung beruht auf dem wichtigen Satze des Herrn Kronecker über die Elementartheiler einer aus conjugirten Grundformen gebildeten Schaar, K. S. 442. Man vgl. auch den von Herrn Stickelberger gegebenen Beweis desselben, Borchardt's Journal, Bd. 86, S. 42.

behandelt worden [1]). Insbesondere hat derselbe die Anzahl m der linear von einander unabhängigen Formen dieser Art angegeben. Bezeichnet man dieselben durch

$$P_1,\ P_2, \cdot\cdot P_m,$$

so ist

$$P = \sum_m \alpha_s P_s,$$

während zwischen den P_s keine lineare Relation besteht. Unter denselben befindet sich auch die Form E selbst. Man kann aber stets voraussetzen, dass die Grundformen P_ϱ Formen von nicht verschwindender Determinante sind. Genügen nämlich die P_s nicht dieser Bedingung, so haben die Formen

$$Q_s = P_s + h_s E$$

bei willkürlichen Werthen der h_s nicht verschwindende Determinanten. Sie sind aber zugleich Grundformen. Bestände nämlich eine Relation

$$\Sigma \beta_s Q_s = o,$$

zwischen denselben, so wäre auch

$$\Sigma \beta_s P_s + E \Sigma h_s \beta_s = o;$$

d. h. es bestände auch eine lineare Relation zwischen den Formen P_s, da

$$E = \Sigma \gamma_s P_s$$

sein muss. Im folgenden werde ich eine (symbolische) lineare Gleichung zwischen Formen als gelöst betrachten, sobald dieselbe auf das Problem der vertauschbaren Formen zurückgeführt ist.

§ II.

Die Eigenschaften der cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst.

Wenn eine Substitution U, deren Determinante $|U|$ selbstverständlich nicht verschwindet, die Form S cogredient in sich transformirt, so ist [2])

---

1) F. S. 28, 29. Vgl. auch L. Maurer, Zur Theorie der linearen Substitutionen, Diss. Strassburg 1887; sowie meine Note in den Sitzgb. d. bayer. Ak. d. W. Ueber die mit einer bilinearen Form vertauschbaren bilinearen Formen, Juli 1889.

2) F. S. 33 ff.

1) $$U^1 S U = S,$$
$$U^1 S^1 U = S^1;$$

also auch

2) $$U^1 (S + \varrho S^1) U = S + \varrho S^1.$$

Eine solche Substitution transformirt demnach die ganze aus conjugirten Grundformen gebildete Schaar $S + \varrho S^1$, insbesondere also auch die symmetrische Form $S + S^1$, sowie die alternirende $S - S^1$ in sich selbst.

Es ist ferner nach 1)

$$U^1 S (U + \varrho E) = (S + \varrho U^1 S) = (E + \varrho U^1) S,$$

oder

3) $$U^1 S (U + \varrho E) = \varrho (U^1 + \varrho^1 E) S,$$

falls unter ϱ^1 der reciproke Werth von ϱ verstanden wird.

Bezeichnet man den Werth der Determinante von U durch ε, setzt man zugleich voraus, dass $|S|$ nicht verschwindet, so folgt aus 1) nach § I, 1.

$$\varepsilon^2 = 1,$$

und aus 3)

4) $$\varepsilon\, |U + \varrho E| = \varrho^n |U^1 + \varrho^1 E|.$$

Die Substitution heisst bekanntlich eigentlich, wenn ε gleich $+1$, dagegen uneigentlich, wenn ε gleich -1 ist. Man hat daher die bekannten Sätze: [1])

Bei einer eigentlichen (uneigentlichen) Substitution und ungeradem n ist $\varrho = +1$ ($\varrho = -1$) eine Wurzel der characteristischen Gleichung

5) $$|U - \varrho E| = o.$$

Das Product aller Wurzeln der characteristischen Gleichung 5) hat den Werth ε. Bei einer eigentlichen (uneigentlichen) Transformation ist die Anzahl der Wurzeln $\varrho = -1$ immer eine gerade (ungerade). Bei einer uneigentlichen Transformation und geradem n sind $\varrho = \pm 1$ Wurzeln der Gleichung 5).

Die Gleichung 5) hat nach 4) nur reciproke Wurzeln, mit Ausnahme der etwa vorhandenen Wurzeln von der Form

1) F. S. 35.

$\varrho = \pm 1$, und die zu reciproken Wurzeln gehörenden Elementartheiler haben dieselben Exponenten. Umgekehrt ist durch diese Eigenschaft eine Form U vollständig characterisirt, welche eine Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt.[1])

In der That sind unter dieser Bedingung die Schaaren

$$rE - U \text{ und } rU - E$$

äquivalent, also

$$A(rE - U)B = rU - E,$$

oder

$$AB = U;\ AUB = E.$$

Da ferner U und U^1 ähnliche Formen sind, so ist

$$WUW^{-1} = U^1,$$

also

$$WABW^{-1} = U^1,$$

oder

$$A = W^{-1}U^1WB^{-1} = B^{-1}U^{-1},$$

d. h.

$$U^1WB^{-1}U = WB^{-1};$$

mithin ist WB^{-1} eine Form von nicht verschwindender Determinante, welche durch U in sich transformirt wird, und aus dieser findet man alle Formen dieser Art vermöge der Lösung der Gleichung

$$PU^1 = U^1P$$

in der Gestalt

$$S = PWB^{-1}.$$

Damit eine Form U überhaupt eine Form S in sich transformire, deren Determinante auch verschwinden kann, ist nothwendig und hinreichend, dass die characteristische Function von U reciproke Wurzeln, resp. die Wurzeln $+1$ oder -1, besitze. — Soll nämlich die Gleichung

$$U^1S = SU^{-1}$$

überhaupt bestehen, ohne dass alle Coefficienten von S Null sind, so muss eine n^2 reihige aus den Coefficienten von U und U^{-1} gebildete

1) F. S. 34.

Determinante verschwinden, welche die genannte Bedingung für die characteristische Function von U repräsentirt.

Herr Frobenius hat ferner den folgenden Satz bewiesen:

Ist eine Substitution U in zwei Formen $U_1 + U_2$ zerlegbar, deren characteristische Functionen keine reciproken Wurzeln haben, so ist jede Form S (von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante), welche durch U in sich transformirt wird, in derselben Weise zerlegbar.[1])

Dieser Satz kann in folgender Weise umgekehrt werden:

Ist eine Form S (von nicht verschwindender Determinante) zerlegbar in $S_1 + S_2$, und haben die Determinanten,

$$|S_1 - S_1^1 \varrho|,$$
$$|S_2 - S_2^1 \varrho|$$

keine gemeinsamen Theiler, so ist U in derselben Weise zerlegbar.

Aus der Gleichung

$$U S (S^1)^{-1} = S (S^1)^{-1} U$$

folgt nämlich

$$U[S_1 (S_1^1)^{-1} + S_2 (S_2^1)^{-1}] = [S_1 (S_1^1)^{-1} + S_2 (S_2^1)^{-1}] U,$$

und damit der zu beweisende Satz,[2]) falls die characteristischen Functionen von $S_1 (S_1^1)^{-1}$ und $S_2 (S_2^1)^{-1}$, d. h. die vorhin angeführten beiden Determinanten keinen gemeinsamen Theiler haben. Insbesondere folgt:

Ist S zerlegbar in $S_1 + S_2$ und ist S_1 eine symmetrische respective alternirende Form, so ist U in derselben Weise wie S zerlegbar, wenn die Determinanten $|S_2 - S_2^1|$ respective $|S_2 + S_2^1|$ nicht verschwinden.

Durch diesen Satz ist zugleich die Transformation der wie S zerlegbaren Formen erledigt.

Ich entwickele nun einige allgemeine Relationen zwischen den Coefficienten einer Substitution U, welche sich freilich auch zum Theil in sym-

---

1) F. S. 36.

2) Vgl. § I, Nr. 9.

bolischer Form darstellen lassen, bei denen aber die explicite Gestalt im allgemeinen vortheilhaft scheint.

Ist

$$S = \Sigma a_{ik}\, x_i\, y_k,$$

und

$$x_i = \Sigma c_{im}\, \xi_m,$$
$$y_k = \Sigma c_{kl}\, \xi_l,$$

eine (congruente) Substitution U, welche S in sich transformirt, so ergeben sich zur Bestimmung der Coefficienten c_{ik} die folgenden n^2 quadratischen Gleichungen

$$1)\qquad \Sigma a_{ik}\, c_{im}\, c_{kl} = a_{ml};$$
$$m,\, l = 1,\, 2 \cdots n,$$

Multiplicirt man nun die mit k beliebigen Grössenreihen u_i^α, v_i^α, $i = 1, 2 \cdots n$; $\alpha = 1, 2 \cdots k$, geränderte Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11}+\varrho & c_{12} & \cdot\cdot & c_{1n} & u_1^1 & \cdot\cdot & u_1^k \\ c_{21} & c_{22}+\varrho & \cdot\cdot & c_{2n} & u_2^1 & \cdot\cdot & u_2^k \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot\cdot & c_{nn}+\varrho & u_n^1 & \cdot\cdot & u_n^k \\ v_1^1 & v_2^1 & \cdot\cdot & v_n^1 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ v_1^k & v_2^k & \cdot\cdot & v_n^k & 0 & \cdot\cdot & 0 \end{vmatrix}$$

welche durch $\psi(\varrho)$ bezeichnet werden möge, mit der nicht verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = A$$

vertical, und dann horizontal mit der Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot\cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = \varepsilon;$$

endlich wieder vertical mit der adjungirten Determinante von S

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot\cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} & \cdot\cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{A}$$

wobei

$$\Sigma \alpha_{il} a_{ik} = \Sigma \alpha_{li} a_{ki} = (k\, l),$$

so ergiebt sich für $\varepsilon\, \psi(\varrho)$ der Werth

$$\begin{vmatrix} 1+\varrho c_{11} & \varrho c_{21} & \cdot\ \cdot & \varrho c_{n_1} & \Sigma u_i^1 a_{is} c_{s_1} & \cdot\ \cdot \\ \varrho c_{12} & 1+\varrho c_{22} & \cdot\ \cdot & \varrho c_{n_2} & \Sigma u_i^1 a_{is} c_{s_2} & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ \varrho c_{1n} & \varrho c_{2n} & \cdot\ \cdot & 1+\varrho c_{nn} & \Sigma u_i^1 a_{is} c_{sn} & \cdot\ \cdot \\ \Sigma v_i^1 \alpha_{i_1} & \Sigma v_i^1 \alpha_{i_2} & \cdot\ \cdot & \Sigma v_i^1 \alpha_{in} & 0 & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \end{vmatrix}$$

falls statt der k Ränder nur einer derselben hingeschrieben wird. Zieht man die mit

$$\frac{1}{\varrho} \Sigma u_k^\alpha a_{k1},\ \frac{1}{\varrho} \Sigma u_k^\alpha a_{k2}, \ldots \frac{1}{\varrho} \Sigma u_k^\alpha a_{kn}$$

multiplicirten ersten n Verticalreihen von den letzten k ab, so folgt wenn

$$\varrho^1 = \frac{1}{\varrho}$$

gesetzt wird

$$2) \qquad \varepsilon\, \psi(\varrho) = (-1)^k \varrho^n \begin{vmatrix} c_{11}+\varrho^1 & c_{21} & \cdot\ \cdot & c_{n_1} & U_1^1 & \cdot\ \cdot & U_1^k \\ c_{12} & c_{22}+\varrho^1 & \cdot\ \cdot & c_{n_2} & U_2^1 & \cdot\ \cdot & U_2^k \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdot\ \cdot & c_{nn}+\varrho^1 & U_n^1 & \cdot\ \cdot & U_n^k \\ V_1^1 & V_2^1 & \cdot\ \cdot & V_n^1 & (u^1 v^1) & \cdot\ \cdot & (u^k v^1) \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ V_1^k & V_2^k & \cdot\ \cdot & V_n^k & (u^1 v^k) & \cdot\ \cdot & (u^k v^k) \end{vmatrix}$$

falls zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$U_l^\alpha = \frac{1}{\varrho^2} \Sigma u_m^\alpha a_{ml},$$

$$V_l^\alpha = \Sigma v_s^\alpha \alpha_{sl},$$

$$(u^\alpha v^\beta) = \frac{1}{\varrho} \Sigma u_i^\alpha v_i^\beta;$$

$$\alpha, \beta = 1, 2 \ldots k,$$

eingeführt werden.

Aus 2) folgt für $k = 1$, wenn man die ersten Unterdeterminanten der Determinante

$$\varDelta(\varrho) = \begin{vmatrix} c_{11}+\varrho & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n1} & & \cdot\ \cdot & c_{nn}+\varrho \end{vmatrix}$$

durch γ_{ik} bezeichnet, durch Vergleichung der Coefficienten der u, v auf beiden Seiten die Identität

$$-\varepsilon\gamma_{ik} = \varrho^{n-2}\Sigma a_{is}\alpha_{km}\gamma^1_{ms} - \varrho^{n-1}\varDelta(\varrho^1)(ik),$$

wobei unter γ^1_{ik} die zu $\varDelta(\varrho^1)$ gehörige Unterdeterminante verstanden wird. Multiplicirt man noch mit a_{kt} und summirt über k, so entsteht

$$3) \qquad -\varepsilon\Sigma\gamma_{ik}a_{kt} = \varrho^{n-2}\Sigma a_{ik}\gamma^1_{tk} - \varrho^{n-1}a_{it}\varDelta(\varrho^1);$$
$$i,\ t = 1,\ 2\ldots n.$$

Setzt man hier

$$\varrho = \pm 1$$

so wird

$$\gamma_{ik} = \gamma^1_{ik}$$

und die Formel 3) liefert lineare Gleichungen zur Bestimmung der Unterdeterminanten der characteristischen Function von U, aus denen man, wenn nur eine der Determinanten

$$|U+E|,\ |U-E|$$

nicht verschwindet, die c_{ik} finden kann.[1])

Die Gleichungen 3) besitzen aber eine weniger übersichtliche Form, wie diejenigen, die bei Benutzung einer anderen characteristischen Function sich ergeben. Es spricht sich das namentlich durch den Umstand aus, dass die geränderte Determinante rechter Hand in 2) die Grössenreihen U, V an Stelle der ursprünglichen u, v enthält, während es bei orthogonalen Formen gerade von besonderem Vortheil erscheint, dass die U, V den u, v gleich werden. Dies lässt sich zum Theil aber auch bei beliebigen Formen S erreichen.

Setzt man

$$(S)^{-1} = \Sigma\alpha_{ki}x_iy_k,$$
$$(S^1)^{-1} = \Sigma\alpha_{ik}x_iy_k,$$

1) Vgl. meine Note, Ueber bilineare Formen, Nachrichten von der k. Gesellschaft der W. zu Göttingen, Juli 1887.

und

$$V = U(S^1)^{-1}$$

so genügt, die Form V der Gleichung

$$V^1 S V = (S^1)^{-1};$$

sie transformirt die Form S in die Form $(S^1)^{-1}$, welche ihre beigeordnete heissen möge. Dabei ist

$$V + \varrho (S^1)^{-1} = (U + E\varrho)(S^1)^{-1}$$
$$S(V + \varrho S^{-1}) = (V^1)^{-1}(V^1 \varrho + (S^1)^{-1}).$$

d. h. die Gleichung

$$|V + \varrho S^{-1}| = o$$

hat auch jetzt nur reciproke Wurzeln. Bezeichnet man auch hier die Substitutionscoefficienten, deren Determinante jetzt gleich

$$\frac{\varepsilon}{A}$$

wird, durch c_{ik}, so haben dieselben dem System der n^2 Gleichungen

$$4) \qquad \Sigma a_{ik} c_{im} c_{kn} = \alpha_{mn}$$

zu genügen. Aus

$$V^1 S V = (S^1)^{-1}$$

ergiebt sich durch Uebergang zu den conjugirten und reciproken Formen

$$V^1 S^1 V = S^{-1},$$
$$V^{-1}(S^1)^{-1}(V^1)^{-1} = S$$

oder

$$V S V^1 = V^1 S V = (S^1)^{-1},$$

so dass neben den Gleichungen 4) auch das äquivalente System von n^2 Gleichungen

$$5) \qquad \Sigma a_{ik} c_{mi} c_{nk} = \alpha_{mn}$$

besteht.

Vermöge der Gleichungen

$$V^1 S V = (S^1)^{-1}$$
$$S^1 V S = (V^1)^{-1}$$

besteht jetzt zwischen den Formen V und S eine vollständige Reciprocität, so dass man sagen kann:

Wird durch die Substitution V die Form S in ihre beigeordnete Form transformirt, so wird umgekehrt durch die Substitution S die Form V in ihre beigeordnete transformirt.

Multiplicirt man nun die Determinante

$$
6) \qquad \psi(\varrho) = \begin{vmatrix}
c_{11} + \varrho\,\alpha_{11}, & c_{12} + \varrho\,\alpha_{22} & . & . & u_1^1 & . & u_1^k \\
c_{21} + \varrho\,\alpha_{21}, & c_{22} + \varrho\,\alpha_{22} & . & . & u_2^1 & . & u_2^k \\
. & . & . & . & . & . & . \\
c_{n1} + \varrho\,\alpha_{n1} & c_{n2} + \varrho\,\alpha_{n2} & . & . & u_n^1 & . & u_n^k \\
v_1^1 & v_2^1 & . & . & 0 & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
v_1^k & v_2^k & . & . & 0 & . & 0
\end{vmatrix}
$$

zuerst mit der Determinante der a_{ik}, dann mit der der Substitutionscoefficienten c_{ik}, so ergiebt sich vermöge ähnlicher Transformationen wie vorhin:

$$
7) \qquad \varepsilon\,\psi(\varrho) = (-1)^k \varrho^n \begin{vmatrix}
c_{11} + \varrho^1\alpha_{11}, & c_{12} + \varrho^1\alpha_{12} & . & . & v_1^1 & . & v_1^k \\
. & . & . & . & . & . & . \\
c_{n1} + \varrho^1\alpha_{n1}, & c_{n2} + \varrho^1\alpha_{n2} & . & . & v_n^1 & . & v_n^k \\
U_1^1 & U_2^1 & . & . & (u^1 v^1) & . & (u^1 v^k) \\
. & . & . & . & . & . & . \\
U_1^k & U_2^k & . & . & (u^k v^1) & . & (u^k v^k)
\end{vmatrix}
$$

falls

$$
U_l^h = \frac{1}{\varrho^2} \Sigma u_k^h a_{ki}\,\alpha_{il},
$$

$$
(u^h v^j) = \frac{1}{\varrho} \Sigma u_i^h v_k^j a_{ik}
$$

gesetzt wird. Man erhält auf demselben Wege die Gleichung:

$$
7^a) \qquad \varepsilon\,\psi(\varrho) = (-1)^k \varrho^n \begin{vmatrix}
c_{11} + \varrho^1\alpha_{11} & c_{21} + \varrho^1\alpha_{21} & . & . & u_1^1 & . & u_1^k \\
. & . & . & . & . & . & . \\
c_{1n} + \varrho^1\alpha_{1n} & c_{2n} + \varrho^1\alpha_{2n} & . & . & u_n^1 & . & u_n^k \\
V_1^1 & V_2^1 & . & . & (u^1 v^1) & . & (u^k v^1) \\
. & . & . & . & . & . & . \\
V_1^k & V_2^k & . & . & (u^1 v^k) & . & (u^k v^k)
\end{vmatrix}
$$

wobei die Bezeichnungen

$$V_l^h = \frac{1}{\varrho^2} \Sigma v_i^h a_{ki} \alpha_{lk}.$$

$$(u^h v^j) = \frac{1}{\varrho} \Sigma v_i^j u_k^h a_{ki},$$

zu gelten haben.

Bezeichnet man wieder die ersten Unterdeterminanten der characteristischen Function

$$\varDelta(\varrho) = |c_{ik} + \varrho \alpha_{ik}|$$

durch γ_{ik}, so hat man aus 7) für $k = 1$

$$8) \qquad -\varepsilon \Sigma \alpha_{is} \gamma_{ik} = \varrho^{n-2} \Sigma \alpha_{si} \gamma_{ki}^1 - \varrho^{n-1} \varDelta(\varrho^1)(ks),$$

und ebenso aus 7a)

$$8^a) \qquad -\varepsilon \Sigma \alpha_{si} \gamma_{ki} = \varrho^{n-2} \Sigma \alpha_{is} \gamma_{ik}^1 - \varrho^{n-1} \varDelta(\varrho^1)(ks).$$

Wählt man an Stelle von $\varDelta(\varrho)$ die characteristische Function

$$\varDelta_1(\varrho) = |c_{ik} + \varrho \alpha_{ki}|,$$

so erhält man auf ganz ähnlichem Wege, falls

$$9) \qquad \psi_1(\varrho) = \begin{vmatrix} c_{11} + \varrho \alpha_{11} & c_{12} + \varrho \alpha_{21} & \cdot & \cdot & u_1^1 & \cdot & u_k^k \\ c_{21} + \varrho \alpha_{12} & c_{22} + \varrho \alpha_{22} & \cdot & \cdot & u_2^1 & \cdot & u_2^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} + \varrho \alpha_{1n} & c_{n2} + \varrho \alpha_{2n} & \cdot & \cdot & u_n^1 & \cdot & u_n^k \\ v_1^1 & v_2^1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^k & v_2^k & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird,

$$10) \quad \varepsilon \psi_1(\varrho) = (-1)^k \varrho^n \begin{vmatrix} c_{11} + \varrho^1 \alpha_{11} & c_{12} + \varrho^1 \alpha_{21} & \cdot & \cdot & v_1^1 & \cdot & v_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} + \varrho^1 \alpha_{1n} & c_{n2} + \varrho^1 \alpha_{2n} & \cdot & \cdot & v_n^1 & \cdot & v_n^k \\ U_1^1 & U_2^1 & \cdot & \cdot & (u^1 v^1) & \cdot & (u^1 v^k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_1^k & U_2^k & \cdot & \cdot & (u^k v^1) & \cdot & (u^k v^k) \end{vmatrix}$$

$$U_l^h = \frac{1}{\varrho^2} \Sigma u_k^h a_{ik} \alpha_{li},$$

$$(u^h v^j) = \frac{1}{\varrho} \Sigma u_k^h v_i^j a_{ik},$$

also auch, wenn die ersten Unterdeterminanten von $\Delta_1(\varrho)$ wieder durch γ^1_{ik} bezeichnet werden, für $k=1$

$$11)\quad \begin{cases} -\varepsilon\,\Sigma\alpha_{si}\gamma_{ik} = \varrho_1^{n-2}\,\Sigma\alpha_{is}\gamma^1_{ki} - \varrho^{n-1}\Delta_1(\varrho^1)(ks), \\ -\varepsilon\,\Sigma\alpha_{is}\gamma_{ki} = \varrho^{n-2}\,\Sigma\alpha_{si}\gamma^1_{ik} - \varrho^{n-1}\Delta_1(\varrho^1)(ks). \end{cases}$$

Die Formeln 11) können zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten gebraucht werden, wenn für $\varrho = \pm 1$ $\Delta(\varrho)$, dagegen nicht $\Delta_1(\varrho)$ verschwindet. Ueber den Zusammenhang der Wurzeln beider Gleichungen vgl. § IV.

Aus der Gleichung 7) oder 9) ergeben sich weitere Eigenschaften der Substitutionscoefficienten von V.

Es sei $\varrho=\alpha$ eine Wurzel der Gleichung $\Delta(\varrho)=o$, für die der Exponent des grössten gemeinsamen Theilers aller $k-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten gleich l_{k-1}, der des grössten gemeinsamen Theilers der k^{ten} Unterdeterminanten aber mit l_k bezeichnet sein möge, wobei $l_k < l_{k-1}$ ist. Dann gilt, wie übrigens aus der Gleichung 7) folgt, in welcher α an Stelle von ϱ^1 einzusetzen ist, gleiches für die reciproke Wurzel $\alpha^1 = \dfrac{1}{\alpha}$.

Entwickelt man beide Seiten der Gleichung 7) nach Potenzen von $\varrho-\alpha$, und bezeichnet die Determinante $\psi(\varrho)$ jetzt durch

$$\psi\left(\varrho\,\begin{matrix} u^1 \cdot\cdot\, u^k \\ v^1 \cdot\cdot\, v^k \end{matrix}\right),$$

so ist

$$12^{a})\quad \psi\left(\varrho\,\begin{matrix} u^1\cdot\cdot u^k \\ v^1\cdot\cdot v^k \end{matrix}\right) = A_\alpha\begin{pmatrix} u^1\cdot\cdot u^k \\ v^1\cdot\cdot v^k \end{pmatrix}(\varrho-\alpha)^{l_k} + \cdots$$

wo der von ϱ unabhängige Coefficient A_α für $\varrho=\alpha$ nicht verschwindet. Zugleich wird

$$\begin{aligned} 12^{b})\quad \psi\left(\varrho^1\,\begin{matrix} v^1\cdot\cdot v^k \\ U^1_1\cdot\cdot U^k_1 \end{matrix}\right) &= A_{\alpha^1}\begin{pmatrix} v^1\cdot\cdot v^k \\ U^1_1\cdot\cdot U^k_1 \end{pmatrix}(\varrho^1-\alpha^1)^{l_k} + \cdots \\ &= A_{\alpha^1}\begin{pmatrix} v^1\cdot\cdot v^k \\ U^1_1\cdot\cdot U^k_1 \end{pmatrix}(-1)^{l_k}(\varrho-\alpha)^{l_k}(\varrho\,\alpha)^{-l_k} + \cdots \end{aligned}$$

Trägt man diese Werthe unter der Voraussetzung

$$13)\quad \begin{gathered} \Sigma u^k_h a_{ki}\alpha_{il} = U^h_{1l}; \\ h = 1,\ 2\cdots k, \\ l = 1,\ 2\cdots n, \end{gathered}$$

in die Gleichung 7) ein und bemerkt, dass zur Ermittelung der l_k^{ten} Potenz von $(\varrho - \alpha)$ rechter Hand die Elemente $(u^h v^i)$ sämmtlich gleich Null gesetzt werden können, da sie mit höheren Potenzen von $\varrho - \alpha$ multiplicirt sind, so ergiebt sich die Gleichung

$$14) \qquad \varepsilon\, A_\alpha \begin{pmatrix} u^1 \cdots u^k \\ v^1 \cdots v^k \end{pmatrix} = (-1)^{k + l_k} \alpha^{n - 2 l_k - 2k} A_{\alpha^1} \begin{pmatrix} v^1 \cdots v^k \\ U_1^1 \cdots U_1^k \end{pmatrix}.$$

Von dieser Gleichung sollen zunächst Anwendungen auf den Fall gemacht werden, wo S eine symmetrische resp. alternirende Form ist.

Ist S eine symmetrische Form, so werden nach 13) die U_1^h den u^h gleich, und man hat

$$15) \qquad \varepsilon\, A_\alpha \begin{pmatrix} u^1 \cdots u^k \\ v^1 \cdots v^k \end{pmatrix} = (-1)^{k + l_k} \alpha^{n - 2k - 2 l_k} A_{\alpha^1} \begin{pmatrix} v^1 \cdots v^k \\ u^1 \cdots u^k \end{pmatrix}.$$

Für eine alternirende Form S wird dagegen $U_1^h = -u^h$ und damit

$$16) \qquad \varepsilon\, A_\alpha \begin{pmatrix} u^1 \cdots u^k \\ v^1 \cdots v^k \end{pmatrix} = (-1)^{l_k} \alpha^{n - 2k - 2 l_k} A_{\alpha^1} \begin{pmatrix} v^1 \cdots v^k \\ u^1 \cdots u^k \end{pmatrix}.$$

Ist nun insbesondere $\alpha = \pm 1$, so folgt aus 15)

$$15^{a}) \qquad \varepsilon\, A_{\pm 1} \begin{pmatrix} u^1 \cdots u^k \\ v^1 \cdots v^k \end{pmatrix} = (\pm 1)^n A_{\pm 1} \begin{pmatrix} v^1 \cdots v^k \\ u^1 \cdots u^k \end{pmatrix} (-1)^{k + l_k}$$

und aus 16)

$$16^{a}) \qquad \varepsilon\, A_{\pm 1} \begin{pmatrix} u^1 \cdots u^k \\ v^1 \cdots v^k \end{pmatrix} = (-1)^{l_k} A_{\pm 1} \begin{pmatrix} v^1 \cdots v^k \\ u^1 \cdots u^k \end{pmatrix}$$

da für $\alpha = -1$ n nothwendig eine gerade Zahl sein muss, wenn die Determinante der alternirenden Form S von Null verschieden sein soll. Aus 15^{a}) und 16^{a}) folgt der Satz:

Verschwinden die sämmtlichen $k - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten der characteristischen Function $\Delta(\varrho)$ für eine Wurzel $\varrho = \alpha$, $\alpha = \pm 1$, und enthalten die sämmtlichen k^{ten} Unterdeterminanten noch den Factor $(\varrho - \alpha)^{l_k}$, $l_k > o$, so ist die Form

$$\left(\frac{\psi(\varrho)}{(\varrho - \alpha)^{l_k}} \right)_{\alpha = \varrho}$$

für ein symmetrisches S symmetrisch oder alternirend, je nachdem

$$\text{für } \alpha = +1 \quad \varepsilon \text{ und } (-1)^{k+l_k}$$
$$\text{für } \alpha = -1 \quad \varepsilon \text{ und } (-1)^{n+k+l_k}$$

gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben. Ist dagegen S alternirend, so findet dasselbe statt, je nachdem

$$\varepsilon \text{ und } (-1)^{l_k}$$

von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen sind.

Nach Herrn Stickelberger[1]) genügt nun zur Bestimmung der l_k oder der Elementartheiler die jedesmalige Untersuchung einer bilinearen Form $H(uv)$, welche den ersten Coefficienten der mit gewissen Grössen u^β, v^β; $\beta = 1, 2 \cdot\cdot k - 1$ und einer letzten Reihe von Grössen u, v geränderten Determinante der $c_{ik} + \varrho\alpha_{ik}$ in ihrer Entwickelung nach Potenzen von $\varrho - \alpha$ bildet. So lange $H(uv)$ nicht alternirend ist, kann man die u den v gleich setzen. In dem Falle aber, wo $H(uv)$ eine alternirende Form ist, werden zwei aufeinanderfolgende Elementartheiler gleich. Man kann dann zwar nicht die u den v gleich setzen, aber bei der Untersuchung der $k+1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten durch geeignete Wahl der Grössen des Randes die verloren gegangene Symmetrie wiederherstellen. Es sei nun S eine symmetrische Form, und das Zeichen von

$$\varepsilon\,\alpha^n (-1)^{k+l_k}, \quad \alpha = \pm 1$$

positiv, während k von 1 bis k_1 geht. Dann ist nach 15[a]) jene Form $H(uv)$ eine symmetrische, und man kann die u^β den v^β gleich wählen, so lange β gleich $1, 2 \cdots k_1$ ist. Wird aber jenes Zeichen für $k_1 + 1 + l_{k_1+1}$ negativ, so wird zugleich $H(uv)$ eine alternirende Form. Es ist dann der Elementartheiler e_{k_1} gleich e_{k_1+1}. Nun sind alle Zahlen $k + l_k$ für $k = 1, 2 \cdots k_1$ einander nach dem Modul 2 congruent, dagegen $k_1 + 1 + l_{k_1+1}$ denselben nach demselben Modul incongruent. Es ist also in der Gleichung

$$-1 + e_{k_1} = l_{k_1} + k_1 - (l_{k_1+1} + k_1 + 1)$$

1) Stickelberger, Ueber Schaaren von bilinearen und quadratischen Formen, Borchardt's Journal, Bd. 86, S. 39.

die rechte Seite eine ungerade, also e_{k_1} eine gerade Zahl. Und umgekehrt muss, wenn e_{k_1} eine gerade Zahl ist, die Differenz rechts aus zwei modulo 2 incongruenten Zahlen bestehen. Bezeichnet man daher mit $\varkappa$ irgend eine der Zahlen, welche kleiner als k_1 ist, so ist zufolge der Gleichung

$$e_\varkappa - e_{k_1} = l_\varkappa + \varkappa - (l_{\varkappa+1} + \varkappa + 1) - [l_{k_1} + k_1 - (l_{k_1+1} + k_1 + 1)],$$
$$e_\varkappa \text{ incongruent } e_{k_1} \pmod 2,$$

also $e_\varkappa$ eine ungerade Zahl. Aus der Gleichung

$$-1 + e_{k_1+1} = l_{k_1+1} + k_1 + 1 - (l_{k_1+2} + k_1 + 2),$$

in welcher $e_{k_1+1} = e_{k_1}$ zu setzen ist, geht dann hervor, dass

$$l_{k_1+2} + k_{1+2} \equiv l_{k_1} + k_1 \pmod 2.$$

Es muss also jeder Elementartheiler mit geradem Exponenten paarweise auftreten.

Ist dagegen die Form alternirend, so wird man, so lange das Zeichen von

$$\varepsilon(-1)^{l_k}$$

positiv ist, die u den v gleich setzen können. Wird aber $\varepsilon(-1)^{l_{k+1}}$ gleich -1, so wird die Form $H(uv)$ alternirend und zugleich

$$e_k = e_{k+1}$$

In diesem Falle ist aber $l_k - l_{k+1}$ ungerade, also e_k selbst eine ungerade Zahl.

Damit ist der wichtige Satz des Herrn Frobenius[1]) bewiesen: Die Elementartheiler der characteristischen Function jeder Substitution, welche eine symmetrische (oder alternirende) Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst transformirt, sind paarweise von gleichem Grade und verschwinden für reciproke Werthe, mit Ausnahme derer, welche für den Werth $+1$ oder -1 Null sind und einen ungeraden (oder geraden) Exponenten haben.

1) F. S. 41. Dass ein Beweis dieses Satzes mit Hülfe des S. 259 benutzten Ränderungsprincipes geführt werden könne, hat schon Herr Stickelberger angegeben, sein Verfahren jedoch nicht entwickelt. Borchardt's Journal, Bd. 86, S. 43.

Aus diesem Satze ergeben sich noch einige weitere Folgerungen.

Verschwindet für eine Form S (gerader Ordnung) keine der beiden Determinanten $|S \pm S^1|$, ist ferner q die grösste Zahl, für welche noch alle Unterdeterminanten $n-q^{\text{ter}}$ Ordnung der characteristischen Function $|U - \varrho E|$ einer Substitution U für $\varrho = \pm 1$ verschwinden, so ist q eine ungerade Zahl.[1])

Verschwindet dagegen $|S - S^1|$, während $|S + S^1|$ von Null verschieden ist, so sind die Elementartheiler mit ungeradem Exponenten, welche für $\varrho = \pm 1$ verschwinden, nicht nothwendig paarweise vorhanden. Bezeichnet man daher die ungeraden Exponenten für $\varrho = -1$ mit

$$\beta_1, \beta_2, \cdots$$

so ist

$$(-1)^{\Sigma\beta} = \varepsilon,$$

also $\Sigma\beta \equiv o$ oder 1 (mod. 2), je nachdem $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist. Man hat also auch:[2])

Sind U, V zwei zugleich eigentliche (uneigentliche) Substitutionen, welche eine symmetrische Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformiren, und verschwindet die Determinante von $|U + V|$, so verschwindet sie mit einer ungeraden Anzahl von Systemen von Unterdeterminanten.

Diese ausgezeichnete Eigenschaft der Wurzel $\varrho = -1$ der characteristischen Function von U bei einer eigentlichen Transformation lässt sich in allerdings beschränkterem Umfange auch erkennen, ohne dass die Existenz einer symmetrischen Form von nicht verschwindender Determinante vorausgesetzt wird.

Man hat nämlich vermöge $U^1 S U = S$ die Identität

$$17) \qquad (U^1 S^1 + S\varrho)(U + \sigma E) = (U^1 \sigma + E) S^1 + \varrho S (U + \sigma E).$$

---

1) Die Substitution in U ist eigentlich, da das Product der Wurzeln der characteristischen Function gleich $+1$ ist.

2) Vgl. Stieltjes, Sur un théorème d'algèbre, Acta Mathem. VI S. 319; Netto, über orthogonale Substitutionen, Acta Math. IX S. 291, sowie meine Note in den Göttinger Nachrichten, Juli 1887.

Setzt man hier $\varrho = \pm 1$ und

$$U^1 S^1 + S = W,$$
$$U^1 S^1 - S = V,$$

so folgt

18) $$W(U + \sigma E) = W^1 + \sigma W,$$
$$V(U + \sigma E) = -V^1 + \sigma V;$$

und für $\sigma = \pm 1$

19) $$(U^1 S^1 + S\varrho)(U + E) = (E + U^1) S^1 + \varrho S (E + U)$$
$$(U^1 S^1 + S\varrho)(U - E) = (E - U^1) S^1 - \varrho S (E - U)$$

Die Formen

$$U^1 S^1 + S\varrho, \; S(U + \sigma E)$$

werden dabei durch U in sich transformirt.

Verschwindet nun $|V|$ nicht, so sind die Elementartheiler von der Form $(\varrho + 1)^{2k}$, $(\varrho - 1)^{2k+1}$ in der characteristischen Function von U stets paarweise vorhanden; verschwindet $|W|$ nicht, so gilt dasselbe von den Theilern von der Gestalt $(\varrho - 1)^{2k}$, $(\varrho + 1)^{2k+1}$.

Und ähnlich folgt aus 19)

Verschwindet $|U + E|$ $[|U - E|]$ nicht, so hat die characteristische Function $|U^1 S^1 + S\varrho|$ den Character derjenigen einer Schaar von conjugirten Grundformen $A + \varrho A^1 [A - \varrho A^1]$.

Verschwindet dagegen $|U + E|$ oder $|U - E|$, so transformirt U eine Schaar von conjugirten Grundformen in sich, deren Determinante identisch verschwindet.

Aus der Gleichung 16ᵃ) ergiebt sich ferner der Satz: Eine alternirende Form von nicht verschwindender Determinante lässt keine uneigentliche Transformation zu.[1])

Ist nämlich $\varepsilon = -1$, so sind $\alpha = \pm 1$ Wurzeln der characteristischen Gleichung, und es gilt die Gleichung 16ᵃ). Verschwinden also die k^{ten} Unterdeterminanten nicht mehr sämmtlich, so ist $l_k = o$. Dann aber bilden die Werthe conjugirter k^{ter} Unterdeterminanten ein alternirendes System, und die sich selbst conjugirten Unterdeterminanten sind daher gleich Null. Dies bedingt aber nach einem bekannten Satze, dass alle k^{ten} Unterdeter-

1) Vgl. Frobenius, Ueber die schiefe Invariante etc. Borchardt's Journ. Bd. 86, S. 50.

minanten überhaupt gleich Null sind, was im Widerspruch mit der Voraussetzung steht. Dagegen bilden bei der eigentlichen Transformation einer alternirenden Form für eine Wurzel von der Form $\varrho = \pm 1$ die k^{ten} nicht verschwindenden Unterdeterminanten der characteristischen Function immer ein symmetrisches System.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich für $l_k = o$ aus 15^a) wenn man

$$\varepsilon = (-1)^{\mu}$$

setzt, dass für die Wurzel $\alpha = +1$ die Zahl $\mu + k$, für $\alpha = -1$ dagegen die Zahl $\mu + n + k$ eine gerade sein muss.

Uebrigens gilt nach 15), 16) der allgemeine Satz:

Bei einer alternirenden oder symmetrischen Form sind die zu $(\varrho - \alpha)^{l_k}$, $(\varrho_1 - \alpha_1)^{l_k}$ gehörigen Coefficienten der Entwickelung conjugirter k^{ter} Unterdeterminanten der characteristischen Function der Substitution V nach Potenzen von $\varrho - \alpha$, $\varrho_1 - \alpha_1$ einander proportional, so lange alle Unterdeterminanten von höherem als $n-k$-Grade für $\varrho = \alpha$ verschwinden.

Um an die Gleichung 14) für eine beliebige Form S ähnliche Folgerungen anknüpfen zu können, benutze ich den von Herrn Frobenius ausgesprochenen Satz:[1])

„In einem Elementensystem, in welchem alle partiellen Determinanten $m+1$ Grades verschwinden, verhalten sich die aus irgend m Zeilen gebildeten Determinanten m^{ten} Grades wie die entsprechenden, aus irgend m anderen Zeilen gebildeten partiellen Determinanten m^{ten} Grades."

Es ist vielleicht nicht überflüssig, diesen Satz, den Herr Frobenius mittelst der Betrachtung vollständiger Lösungssysteme linearer Gleichungen bewiesen hat[2]), auf einem etwas anderen Wege herzuleiten.

Es seien die 4 Determinanten m^{ten} Grades,

$$A = |a_{ik}|, \quad C = |c_{ik}|$$
$$B = |b_{ik}|, \quad D = |d_{ik}|$$

gebildet aus irgend welchen Elementen a, b, c, d,

---

1) Frobenius, Ueber das Pfaff'sche Problem, Borchardt's Journal Bd. 82, S. 241.
2) Ebenda S. 236.

$$i, k = 1, 2 \cdots m$$

in dem folgenden Schema

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1m} & b_{11} & . & . & b_{1m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mm} & b_{m1} & . & . & b_{mm} \\ c_{11} & . & . & c_{1m} & d_{11} & . & . & d_{1m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ c_{m1} & . & . & c_{mm} & d_{m1} & . & . & d_{mm} \end{vmatrix}$$

angeordnet und es werde die Determinante

$$D_{i\varrho} = \begin{vmatrix} b_{11} & . & b_{1m} & a_{1\varrho} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & . & b_{mm} & a_{m\varrho} \\ d_{i1} & . & d_{im} & c_{i\varrho} \end{vmatrix}$$

$$i, \varrho = 1, 2 \cdots m$$

betrachtet. Dann ist

$$B c_{i\varrho} - \Sigma a_{s\varrho} d_{i\sigma} B_{s\sigma} = D_{i\varrho},$$

wenn man unter $B_{s\sigma}$ die adjungirten Determinanten der Elemente $b_{s\sigma}$ versteht, oder

$$|c_{ik} B - D_{i\varrho}| = A D B^{m-1}.$$

Verschwinden nun alle $D_{i\varrho}$, während B zunächst nicht Null ist, so folgt

$$C B - A D = o.$$

Dies ist aber der von Herrn Frobenius angeführte Satz. Nennt man nämlich in einem Elementensystem alle m reihigen Determinanten, welche aus denselben Horizontal- (oder Verticalreihen) gebildet sind, einander horizontal (oder vertical) zugeordnet, versteht man dann unter B irgend eine m reihige Determinante des Systems, unter A irgend eine ihrer horizontal, unter C eine ihrer vertical zugeordneten, so ist D als gleichzeitig zu B und C zugeordnete bestimmt, und es gilt dann die obige Identität.

Ist die k^{te} Potenz eines Linearfactors s der Variabeln r, von der die Elemente ganze Functionen sind, die niedrigste, welche in allen $D_{i\varrho}$ vorkommt, so können auch nicht alle m reihigen Determinanten, aus denen die B gebildet werden, eine höhere Potenz desselben enthalten, denn die $D_{i\varrho}$ sind lineare Functionen der B. Es müssen also solche B vorhanden sein, für welche die höchste Potenz des Factors s gleich $k_0 \leqq k$ ist. Dann aber ergiebt sich leicht aus der obigen Identität

$$\left(\frac{B}{s^{k_0}}\right)^{m-1}(CB - AD) = s^k P$$

wo P wieder eine ganze Function ist; d. h. die $BC - AD$ enthalten mindestens den Factor s^k.

Ich bezeichne nun die Elemente

$$c_{ik} + \varrho\,\alpha_{ik},\quad c_{ik} + \varrho^1\,\alpha_{ik}$$

durch

$$p_{ik},\ p^1_{ik}.$$

Setzt man ferner voraus, dass die Unterdeterminanten $m+1^{\text{ten}}$ Grades der characteristischen Function $\Delta(\varrho)$ für $\varrho = \alpha$ noch alle verschwinden, die vom m^{ten} Grade aber nicht mehr sämmtlich Null sind, d. h. dass die $k = n - m^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten nicht sämmtlich verschwinden, und bezeichnet man der Reihe nach mit

$$\begin{aligned} &i_1 \cdot\cdot\, i_m,\\ &k_1 \cdot\cdot\, k_m,\\ &s_1 \cdot\cdot\, s_m,\\ &\varkappa_1 \cdot\cdot\, \varkappa_m, \end{aligned}$$

irgend eine Combination der Zahlen $n = 1, 2 \cdots n$ zu m Elementen, setzt man ferner zur Abkürzung

$$P_{ik} = \begin{vmatrix} p_{i_1k_1} & \cdot & \cdot & p_{i_1k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{i_mk_1} & \cdot & \cdot & p_{i_mk_m} \end{vmatrix},$$

und bezeichnet man die analog aus den p^1_{ik} gebildete Determinante durch P^1_{ik}, so ist

$$P_{ik}\,P_{j\varkappa} = P_{i\varkappa}\,P_{jk}.$$

Setzt man ferner

$$\varepsilon\,(-1)^k\,\alpha^{n-2k} = \lambda,$$

so ist nach 14)

$$Q_i = \begin{vmatrix} p_{1i_1} & \cdot & \cdot & p_{1i_m} & u^1_1 & \cdot & \cdot & u^k_1 \\ p_{2i_1} & \cdot & \cdot & p_{2i_m} & u^1_2 & \cdot & \cdot & u^k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{ni_1} & \cdot & \cdot & p_{ni_m} & u^1_n & \cdot & \cdot & u^k_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} p^1_{i_1 1} & \cdot & \cdot & p^1_{i_m 1} & U^1_1 & \cdot & \cdot & U^k_1 \\ p^1_{i_1 2} & \cdot & \cdot & p^1_{i_m 2} & U^1_2 & \cdot & \cdot & U^k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^1_{i_1 n} & \cdot & \cdot & p^1_{i_m n} & U^1_n & \cdot & \cdot & U^k_n \end{vmatrix}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $P^1_{j\varkappa}$ und ersetzt jedes Product zweier Determinanten rechts durch das entsprechende Product nach dem vorher bewiesenen Satze, so wird

$$Q\,P^1_{j\varkappa} = \lambda \begin{vmatrix} p^1_{j_1 1} & \cdot & \cdot & p^1_{j_m 1} & U^1_1 & \cdot & \cdot & U^k_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^1_{j_1 n} & \cdot & \cdot & p^1_{j_m n} & U^1_n & \cdot & \cdot & U^k_n \end{vmatrix} P_{i\varkappa},$$

oder auch

$$Q_i\,P^1_{j\varkappa} = Q_j\,P^1_{i\varkappa}.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber durch Vergleichung der Coefficienten der willkürlichen Grössen u

$$P_{hi}\,P^1_{j\varkappa} = P_{hj}\,P^1_{i\varkappa},$$

wenn man unter den

$$h_1, \cdot \cdot h_m,$$

irgend eine Combination der Zahlen $1, 2 \cdot \cdot n$ zu m Elementen versteht, oder

a) $$\frac{P_{hi}}{P^1_{i\varkappa}} = \frac{P_{hj}}{P^1_{j\varkappa}}$$

In analoger Weise schliesst man aber aus 7[a])

b) $$\frac{P_{st}}{P^1_{us}} = \frac{P_{vt}}{P^1_{uv}}.$$

Setzt man nun in a)

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \cdot \cdot \varkappa_m = h_1, h_2, \cdot \cdot h_m,$$

dagegen in b)

$$s_1, s_2 \cdot \cdot \cdot s_m = h_1, h_2 \cdot \cdot \cdot h_m,$$
$$t_1, t_2 \cdot \cdot \cdot t_m = j_1, j_2 \cdot \cdot \cdot j_m,$$
$$u_1, u_2 \cdot \cdot \cdot u_m = j_1, j_2 \cdot \cdot \cdot j_m,$$

so wird

$$\frac{P_{hi}}{P^1_{ih}} = \frac{P_{hj}}{P^1_{jh}}; \quad \frac{P_{hj}}{P^1_{jh}} = \frac{P_{wj}}{P^1_{jw}},$$

oder

$$\frac{P_{hi}}{P^1_{hi}} = \frac{P_{wj}}{P^1_{jw}}.$$

Man hat also folgenden Satz:

Verschwinden die Unterdeterminanten m Grades nicht mehr sämmtlich, während noch alle Unterdeterminanten $m+1$ Grades für eine Wurzel $\varrho=\alpha$ von $\Delta(\varrho)$ Null sind, so ist das Verhältniss der Werthe der conjugirten Unterdeterminanten für die reciproken Wurzelwerthe $\varrho=\alpha$, α^1 ein unveränderliches.

Ist insbesondere $\alpha=\pm 1$, so folgt:

Verschwinden für eine Wurzel $\varrho=\pm 1$ von $\Delta(\varrho)$ die Unterdeterminanten m^{ten} Grades nicht mehr sämmtlich, dagegen noch alle höheren, so bilden die Unterdeterminanten m^{ten} Grades ein symmetrisches System, d. h. die Werthe conjugirter Unterdeterminanten sind stets einander gleich.

Denn nach dem vorigen Satze sind die Werthe conjugirter Unterdeterminanten nur um einen für alle Determinanten gleichen Factor verschieden. Dieser könnte nur dann von der Einheit verschieden sein, wenn alle Hauptunterdeterminanten gleich Null wären, womit aber überhaupt alle Determinanten m^{ten} Grades gleich Null werden[1]). Unter einer Hauptunterdeterminante ist dabei eine solche zu verstehen, welche in Bezug auf die Indices der Elemente p_{ik} symmetrisch gebildet ist.

§ III.

Die reelle Transformation reeller Formen.

Die besonderen Verhältnisse, welche stattfinden, wenn eine reelle symmetrische definite Form durch eine reelle Substitution in sich transformirt wird, sind von Herrn Frobenius insbesondere für eine orthogonale Form dargelegt worden[2]). Eine ähnliche Untersuchung

1) Vgl. die Anmerkung von Herrn Frobenius, Borchardt's Journal, Bd. 82, S. 242.
2) F. S. 51 ff.

lässt sich auch für beliebige Formen führen. Dabei ergeben sich etwas allgemeinere Sätze, als deren Specialfall dann das Theorem über definite Formen entspringt.

Ist nämlich α eine Wurzel der characteristischen Gleichung

$$\varDelta(\varrho) = |c_{ik} + \varrho\, a_{ki}| = o,$$

so sei, nach steigenden Potenzen von $\varrho - \alpha$ entwickelt,

$$\frac{\gamma_{si}}{\varDelta(\varrho)} = \delta_{si}(\varrho - \alpha)^{-e_0} + \cdots, \tag{1}$$

wo der grösste Elementartheiler e_0 mindestens gleich eins ist, und nicht alle δ_{si} verschwinden. Zugleich folgt aus der Identität

$$\Sigma(c_{ki} + \varrho\, a_{ki})\,\gamma_{si} = (ks)\,\varDelta(\varrho) \tag{2}$$

nach 1), wenn man ebenfalls nach Potenzen von $\varrho - \alpha$ entwickelt

$$\Sigma\, c_{ki}\,\delta_{si} = -\alpha\,\Sigma a_{ki}\,\delta_{si}. \tag{3}$$

Multiplicirt man, unter β irgend eine andere Wurzel, unter δ^0_{si} die zugehörigen Werthe verstanden, mit der Gleichung 3) die folgende

$$\Sigma c_{lj}\,\delta^0_{\sigma j} = -\beta\,\Sigma a_{lj}\,\delta^0_{\sigma l},$$

ferner mit a_{kl}, und summirt dann über k und l, so folgt

$$\Sigma a_{ij}\,\delta_{si}\,\delta^0_{\sigma j} = \alpha\beta\,\Sigma a_{ij}\,\delta_{si}\,\delta^0_{\sigma j}. \tag{4}$$

Die Form

$$M = \Sigma a_{ij}\,\delta_{si}\,\delta^0_{\sigma j}\,x_s\,y_\sigma \tag{5}$$

muss demnach für je zwei nicht reciproke Wurzeln α, β identisch verschwinden.

Für $\alpha = \beta$ folgt aus 4)

Für jede von ± 1 verschiedene Wurzel muss die Form

$$N = \Sigma a_{ij}\,\delta_{si}\,\delta_{\sigma j}\,x_s\,y_\sigma$$

identisch verschwinden.

Ist insbesondere die Form S reell, und

$$\delta_{si} = p_{si} + i\,q_{si}$$
$$\delta_{\sigma j} = p_{\sigma j} + i\,q_{\sigma j}$$

so müssen für jede von ± 1 verschiedene Wurzel die Formen

$$6)\qquad \begin{aligned} n &= \Sigma\alpha_{ij}(p_{si}p_{\sigma j} - q_{si}q_{\sigma j})\,x_s y_\sigma \\ n^1 &= \Sigma\alpha_{ij}(p_{si}q_{\sigma j} + q_{si}p_{\sigma j})\,x_s y_\sigma \end{aligned}$$

verschwinden.

Für zwei reciproke Wurzeln α und α^1, bei denen die zugehörigen Werthe der δ durch δ_{si}, δ^1_{si} bezeichnet werden, braucht die Form M nicht Null zu sein.

Dabei gilt der folgende Satz:

Zu denjenigen reciproken Wurzelpaaren, für welche die Form M nicht identisch verschwindet, gehören lauter einfache Elementartheiler der characteristischen Function $\varDelta(\varrho)$.

Differentiirt man nämlich die Gleichung 1) so entsteht

$$7)\qquad \frac{1}{\varDelta}\frac{\partial\gamma_{sj}}{\partial\varrho} - \frac{1}{\varDelta^2}\gamma_{sj}\frac{\partial\varDelta}{\partial\varrho} = -\,e_0\,\delta_{sj}(\varrho-\alpha)^{-(e_0+1)} + \cdots$$

Durch Differentiation von 2) folgt dagegen

$$\Sigma\alpha_{ki}\gamma_{si} + \Sigma(c_{ki} + \varrho\,\alpha_{ki})\frac{\partial\gamma_{si}}{\partial\varrho} = (ks)\frac{\partial\varDelta}{\partial\varrho}$$

oder nach Multiplication mit γ_{kj} und Summation nach k

$$\frac{1}{\varDelta}\frac{\partial\gamma_{sj}}{\partial\varrho} - \frac{1}{\varDelta^2}\gamma_{sj}\frac{\partial\varDelta}{\partial\varrho} = -\frac{1}{\varDelta^2}\Sigma\alpha_{ki}\gamma_{si}\gamma_{kj}.$$

Setzt man hierin nach 1)

$$\frac{\gamma_{si}\,\gamma_{kj}}{\varDelta^2} = \delta_{si}\,\delta_{kj}(\varrho-\alpha)^{-2e_0} + \cdots,$$

so folgt aus 7) die Identität

$$8)\qquad (\varrho-\alpha)^{-2e_0}\Sigma\alpha_{ki}\,\delta_{si}\,\delta_{kj} + \cdots = \alpha\,(\varrho-\alpha)^{-(e_0+1)}\,\delta_{sj} + \cdots$$

Bezeichnet man die zu der reciproken Wurzel $\alpha^1 = \frac{1}{\alpha}$ gehörigen Werthe der γ durch γ^1_{ki}, so ist

$$\frac{\gamma^1{}_{ki}}{\varDelta(\varrho^1)} = \delta^1_{ki}(\varrho^1 - \alpha^1)^{-e_0} + \cdots,$$

$$\varepsilon\,\varDelta(\varrho) = \varrho^n\,\varDelta(\varrho^1).$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$\frac{\varrho^2}{\Delta(\varrho)}\Sigma\alpha_{ki}\gamma_{kj}+\frac{1}{\Delta(\varrho^1)}\Sigma\alpha_{ik}\gamma^1_{jk}=\varrho(ij)$$

ein, so wird

$$\varrho^2\Sigma\alpha_{ki}\delta_{kj}(\varrho-\alpha)^{-e_0}+\cdots+\Sigma\alpha_{ik}\delta^1_{jk}\varrho^{e_0}\alpha^{e_0}(\alpha-\varrho)^{-e_0}+\cdots=\varrho(ij);$$

mithin folgt durch Coefficientenvergleichung

9) $$\Sigma\alpha_{ki}\delta_{kj}+(-1)^{l_0}\alpha^{2e_0-2}\Sigma\alpha_{ik}\delta^1_{jk}=o.$$

Setzt man den hieraus für $\Sigma\alpha_{ki}\delta_{kj}$ folgenden Werth linkerhand in 8) ein, so folgt

$$(\varrho-\alpha)^{-2e_0}(-1)^{e_0+1}\alpha^{2e_0-2}\Sigma\alpha_{ik}\delta^1_{kj}\delta_{si}+\cdots=\alpha(\varrho-\alpha)^{-(e_0-1)}\delta_{sj}+\cdots$$

Unter der Voraussetzung dass die Form

$$M=\Sigma\alpha_{ik}\delta^1_{jk}\delta_{si}x_jy_s$$

nicht identisch verschwindet, sollen nun in dieser Identität die Exponenten der niedrigsten Potenzen von $\varrho-\alpha$ verglichen werden. Wählt man ein Werthsystem der x, y für das M nicht Null ist, und ist dann etwa

$$\Sigma\delta_{si}x_jy_s$$

gleich Null, so ist der niedrigste Exponent rechts gleich $-(e_0+1)+\varrho$, $\varrho>o$; also

$$-2e_0=-(e_0+1)+\varrho,$$
$$e_0=1-\varrho$$

oder, da $e_0>o$ sein muss, $\varrho=o$ und $e_0=1$.

Man hat also folgenden Satz:

Verschwindet die Form M für irgend zwei reciproke Wurzeln der characteristischen Gleichung nicht identisch, so sind alle zu denselben gehörigen Elementartheiler gleich Eins.

Hat die Gleichung $\Delta(\varrho)=o$ irgend zwei conjugirt complexe Wurzeln α und α^{11}, zu denen die Werthe δ_{si}, δ^{11}_{si} gehören, so folgt aus 4):

Verschwindet die Form

$$N=\Sigma\alpha_{ij}\delta_{si}\delta^{11}_{\sigma j}x_sy_\sigma$$

für irgend zwei conjugirte Wurzeln nicht, so ist der absolute Betrag derselben gleich Eins, d. h. sie sind reciprok, und ist umgekehrt der Betrag nicht gleich Eins, so muss N verschwinden. Unter der Voraussetzung, dass die Form S und die Substitution V reell sind, sind nun für zwei conjugirte Wurzeln α und α^{11} auch δ und δ^{11} conjugirt, also

$$\delta_{si} = p_{si} + i\,q_{si},$$
$$\delta^{11}_{\sigma j} = p_{\sigma j} - i\,q_{\sigma j},$$

und

$$10)\quad N = \Sigma\big(\Sigma(p_{si}p_{\sigma j} + q_{si}\,q_{\sigma j})\alpha_{ij} - i\,\Sigma(q_{si}p_{\sigma j} - p_{si}q_{\sigma j})\,\alpha_{ij}\big)\,x_s y_\sigma.$$

Ist nun

$$\Sigma^1 = \Sigma x_i x_k \alpha_{ik} \text{ oder auch } \Sigma = \Sigma x_i x_k \alpha_{ik}$$

eine definite Form, so ist N von Null verschieden. Daraus folgt:

Alle Wurzeln der characteristischen Gleichung einer reellen Substitution, welche eine reelle Form S, bei welcher Σ definit ist, in sich transformiren, sind vom absoluten Betrage Eins.

Dann aber sind je zwei complex conjugirte Wurzeln auch reciprok; d. h. es wird die Form M mit N identisch. Hieraus folgt weiter:

Die characteristische Function einer reellen Substitution, welche eine reelle Form S, für die Σ definit ist, in sich transformirt, hat lauter einfache Elementartheiler.

Man kann diesen Satz noch etwas verallgemeinern.

Es sei α eine imaginäre Wurzel $\beta + i\gamma$. Dann können in

$$\delta_{si} = p_{si} + i q_{si}$$

die Grössen q_{si} nicht sämmtlich Null oder den p_{si} proportional sein. Denn die Gleichungen

$$\Sigma\big(c_{ki} + (\beta + i\gamma)\,\alpha_{ki}\big)\,p_{si} = o;\ k = 1,\ 2 \cdots n,$$

können nicht bestehen, so lange γ nicht Null ist und die Determinante von S nicht verschwindet, da sonst auch alle p_{si} Null sein müssten. Dagegen müssen für jede imaginäre Wurzel die beiden Formen 6) verschwinden, da das Quadrat derselben nicht gleich Eins sein kann. Verschwindet nun auch die Form N (10), so müssen die Ausdrücke

$$\Sigma\alpha_{ij}p_{si}p_{\sigma j},\ \Sigma\alpha_{ij}p_{si}q_{\sigma j},\ \Sigma\alpha_{ij}p_{\sigma j}q_{si},\ \Sigma\alpha_{ij}q_{si}q_{\sigma j}$$

also auch insbesondere

$$\Sigma\alpha_{ij}(p_{si}+\lambda q_{si})(p_{sj}+\lambda q_{sj})$$

verschwinden, wobei man unter p_{si}, q_{si} zwei verschiedene Puncte der Mannigfaltigkeit

$$\Sigma\alpha_{ij}x_i x_j = 0$$

zu verstehen hat. Das erfordert aber, dass diese Mannigfaltigkeit reelle gerade Linien enthält, oder dass sie in ihrer Tangentialmannigfaltigkeit sich nicht definit verhält[1]). Man hat daher den folgenden Satz:

Ist die Form $\Sigma\alpha_{ij}x_i x_j$ in ihrer Tangentialmannigfaltigkeit definit, und ist α eine imaginäre Wurzel der characteristischen Function einer reellen Substitution, welche die reelle Form S in sich transformirt, so ist die Form N nothwendig von Null verschieden, d. h. der Betrag von α ist gleich Eins und die zu dieser Wurzel gehörigen Elementartheiler sind sämmtlich einfach.

Es sei endlich noch eine Eigenschaft der characteristischen Function für eine symmetrische Form angeführt.

Bezeichnet man die Coefficienten der niedrigsten Potenzen der Entwicklung einer k^{ten} Unterdeterminante der characteristischen Function $\Delta(\varrho)$ nach Potenzen von $\varrho-\alpha$ durch P und ebenso für die reciproke Wurzel in Bezug auf die conjugirte k^{te} Unterdeterminante durch P^1, so gilt nach § II, 14 die Gleichung

$$P=\varepsilon(-1)^{k+l_k}\alpha^{n-2k-2l_k}P^1 .$$

Hat nun die Wurzel α den Betrag Eins, und sind ihre zugehörigen Elementartheiler alle einfach, so ist $k+l_k=s$, wo s die Multiplicität der betreffenden Wurzel. Versteht man unter P speciell eine k^{te} Hauptunterdeterminante, so ist unter Voraussetzung eines reellen S und V

$$P = A+iB,$$
$$P^1 = A-iB,$$

1) Also z. B. so wie ein Hyperboloid erster Art, oder ein hyperbolisches Paraboloid für $n=4$.

und man hat

$$A + iB = (-1)^s \varepsilon e^{(n-2s)\varphi i} (A - Bi),$$

wenn

$$\alpha = e^{i\varphi}$$

gesetzt wird. Setzt man

$$A + iB = a e^{i\psi}, \quad \frac{B}{A} = t_0 \operatorname{tang} \psi,$$

so wird

$$\psi = \tfrac{1}{2}\big(\pi s + (n-2s)\varphi\big) + m\pi,$$
$$\psi = \tfrac{1}{2}\big(\pi(s+1) + (n-2s)\varphi\big) + m_1\pi,$$

je nachdem $\varepsilon = \pm 1$ ist. Daraus folgt:

Das Verhältniss $\frac{B}{A}$ hat für alle k^{ten} Hauptunterdeterminanten, $k = 1, 2 \cdots s$ der characteristischen Function ein und denselben Werth.

§ IV.

Bestimmung der Transformationscoefficienten mit Hülfe einer Gleichung n. Grades.

Unter gewissen Voraussetzungen lassen sich die im § III entwickelten Sätze noch erweitern. Setzt man

$$\binom{u}{U} = \begin{vmatrix} c_{ik} + \varrho^1 \alpha_{ik}, & u_i \\ U_k & o \end{vmatrix},$$

und benutzt die analoge Bezeichnung auch bei mehrfacher Ränderung der characteristischen Function, so besteht die Identität

$$1) \qquad \varDelta(\varrho^1)\binom{u\,v}{U\,V} = \binom{u}{U}\binom{v}{V} - \binom{u}{U}\binom{v}{V},$$

deren rechte Seite entwickelt lautet

$$\Sigma u_k U_i v_l V_m (\gamma^1_{ki}\gamma^1_{lm} - \gamma^1_{km}\gamma^1_{li}).$$

Führt man nun an Stelle der Grössen U_i, $i = 1, 2 \cdots n$ die Coefficienten α_{si} ein, und bezeichnet mit l_o, l_1, l_2 die Exponenten der grössten gemeinsamen Theiler o^{ten}, 1^{ten}, 2^{ten} Unterdeterminanten um $\varDelta(\varrho^1)$ für irgend eine Wurzel $\varrho^1 = \alpha^1$ dieser Function, so enthält die linke Seite von 1) den Factor

$$(\varrho^1 - \alpha^1)^{l_0 + l_2 + \xi}$$

wo $\xi > o$ ist. Die rechte Seite wird dagegen, wenn nach 8), § III

$$\Sigma \alpha_{si} \gamma^1_{ki} = - \frac{\varepsilon}{\varrho^{n-2}} \Sigma \alpha_{is} \gamma_{ik} + \varrho \Delta (\varrho^1)(ks) \tag{2}$$

gesetzt wird, gleich

$$\begin{aligned} -\varepsilon \varrho^{1\,n-2} \Sigma u_k v_l V_m \alpha_{is} (\gamma_{ik} \gamma^1_{lm} - \gamma^1_{km} \gamma_{il}) \\ + \varrho \Delta (\varrho^1) \Sigma V_m \gamma^1_{lm} (u_s v_l - u_l v_s), \end{aligned} \tag{3}$$

und der zweite Theil von 3) enthält sicher den Factor

$$(\varrho^1 - \alpha^1)^{l_0 + l_1 + \eta},$$

wo $\eta > o$. Entwickelt man nun γ_{ik}, γ^1_{lm} nach Potenzen von $\varrho^1 - \alpha^1$, so entsteht

$$\begin{aligned} \gamma^1_{lm} &= \beta_{lm} (\varrho^1 - \alpha^1)^{l_1} + \cdots, \\ \gamma_{ik} &= \beta_{ik} (\varrho - \alpha)^{l_1} + \cdots, \\ &= (-1)^{l_1} (\varrho^1 - \alpha^1)^{l_1} (\varrho \alpha)^{-l_1} \beta_{ik} + \cdots, \end{aligned}$$

so dass der erste Theil von 3) mit dem Gliede

$$\Sigma u_k v_l V_m \alpha_{is} (\beta_{ik} \beta^1_{lm} - \beta^1_{km} \beta_{il}) (\varrho^1 - \alpha^1)^{2 l_1},$$

abgesehen von einer Constanten, beginnt. Da dasselbe einen niedrigeren Exponenten $2\,l_1$ hat, als das zweite, so muss es verschwinden, sobald

$$l_0 + l_2 + \xi > 2\,l_1$$

ist, was jedenfalls stattfindet, sobald

$$l_0 + l_2 > 2\,l_1,$$

oder

$$l_0 - l_1 > l_1 - l_2$$

ist. Aus der Gleichung

$$\Sigma u_k v_l V_m \alpha_{is} (\beta_{ik} \beta^1_{lm} - \beta^1_{km} \beta_{il}) = o,$$

folgt aber

$$\beta_{ik} \beta^1_{lm} - \beta^1_{km} \beta_{il} = o. \tag{4}$$

Wenn also der höchste zu irgend einer Wurzel ϱ der characteristischen Function gehörige Elementartheiler grösser ist, wie der nächstfolgende, so besteht zwischen den aus den ersten Unterdeterminanten der characteristischen Function hergeleiteten Entwicklungscoefficienten β, β^1 welche zu reciproken Wurzeln gehören, das System der Gleichungen

$$\frac{\beta_{ik}}{\beta_{il}} = \frac{\beta^1_{km}}{\beta^1_{lm}}.$$

Ebenso erhält man aber

$$\frac{\beta_{km}}{\beta_{lm}} = \frac{\beta^1_{ik}}{\beta^1_{il}}.$$

Schreibt man diese Gleichungen in der Form

$$\frac{\beta_{ik}}{\beta^1_{km}} = \frac{\beta_{in}}{\beta^1_{nm}}; \quad \frac{\beta_{im}}{\beta^1_{ki}} = \frac{\beta_{lm}}{\beta^1_{kl}},$$

setzt in der ersten $i = m$, in der zweiten $m = k$, so wird

$$\frac{\beta_{ik}}{\beta^1_{ki}} = \frac{\beta_{in}}{\beta^1_{ni}}, \quad \frac{\beta_{ik}}{\beta^1_{ki}} = \frac{\beta_{lk}}{\beta^1_{kl}}$$

und hieraus folgt

$$\frac{\beta_{in}}{\beta^1_{ni}} = \frac{\beta_{lk}}{\beta^1_{kl}}.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Werth aller dieser Quotienten durch Θ, so wird

5) $$\beta^1_{ki} = \beta_{ik}\,\Theta.$$

Die Werthe der Coefficienten β, β^1, welche zu conjugirten ersten Unterdeterminanten in Bezug auf zwei reciproke Wurzeln der characteristischen Function gehören, sind einander proportional, wenn der erste Elementartheiler $l_0 - l_1$ grösser ist als der Nächstfolgende.

Insbesondere folgt unter dieser Voraussetzung für die Wurzel $\varrho = \pm 1$ dass die Coefficienten β, welche conjugirten ersten Unterdeterminanten zugehören, einander gleich sind. Denn für $k = i$ ergiebt sich aus 5)

$$\Theta = 1,$$

also

$$\beta_{ki} = \beta_{ik}.$$

Für $l_1 = l_2 = o$ erhält man wieder den Satz des § II S. 267. Führt man nun die Relationen 5) in die Gleichung 2) ein, so folgt durch Coefficientenvergleichung

$$6)\qquad \Sigma\beta_{ik}(\alpha_{is} + \varepsilon\,\alpha^{n-2}\,\Theta\,\alpha_{si}) = o,$$
$$\Sigma\beta_{ki}(\alpha_{si} + \varepsilon\,\alpha^{n-2}\,\Theta\,\alpha_{is}) = o;$$

und zugleich ist

$$7)\qquad \Sigma(c_{is} + \alpha\,\alpha_{is})\,\beta_{ik} = o,\text{[1]}$$
$$\Sigma(c_{si}\,\alpha + \alpha_{si})\,\beta_{ik} = o;$$

also auch nach 6)

$$\Sigma(c_{is} + \varepsilon\,\alpha^{n}\,\Theta\,c_{si})\,\beta_{ik} = o,$$
$$\Sigma(c_{is} - \varepsilon\,\alpha^{n-1}\,\Theta\,\alpha_{si})\,\beta_{ik} = o.$$

Unter der Voraussetzung $l_0 - l_1 > l_1 - l_2$ bestehen also für eine Wurzel $\varrho = \alpha$ der characteristischen Function gleichzeitig die Relationen:

$$|c_{ik} + \alpha\,\alpha_{ik}| = o,$$
$$|\alpha_{is} + \alpha^{n-2}\,\varepsilon\,\Theta\,\alpha_{si}| = o,$$
$$|c_{is} + \alpha^{n}\,\varepsilon\,\Theta\,c_{si}| = o,$$
$$|c_{is} - \varepsilon\,\alpha^{n-1}\,\Theta\,\alpha_{si}| = o.$$

und insbesondere für $\varrho = \pm 1$ diejenigen, welche hieraus für $\Theta = 1$ folgen.

Hieraus ergiebt sich der folgende Zusammenhang zwischen den Functionen

---

1) Ist überhaupt

$$\text{a)}\qquad \Sigma(c_{is} + \varrho\,\alpha_{is})\,h_s = o,$$

so ist immer auch

$$\text{b)}\qquad \Sigma(c_{si}\,\varrho + \alpha_{si})\,h_s = o.$$

Aus den Gleichungen

$$\Sigma\,c_{ms}\,c_{ki}\,a_{mk} = \alpha_{si}$$

folgt nämlich durch Multiplication mit h_s und Anwendung von a)

$$\Sigma\alpha_{si}\,h_s = -\varrho\,\Sigma\,a_{mk}\,\alpha_{ms}\,c_{ki}\,h_s = -\varrho\,\Sigma c_{si}\,h_s$$

mithin das System b).

$$\Delta(\varrho) = |c_{ik} + \varrho \alpha_{ik}|,$$
$$\Delta^1(r) = |c_{ik} + r \alpha_{ki}|.$$

Ist ϱ eine Wurzel von $\Delta(\varrho)$, welche der angegebenen Bedingung genügt, und σ eine geeignete Wurzel von

8) $$A(\sigma) = |\alpha_{is} + \sigma \alpha_{si}| = o,$$

so ist

$$\sigma = \varrho^{n-2}\, \Theta \varepsilon,$$
$$r = -\varrho^{n-1}\, \Theta \varepsilon,$$

also

$$r = -\varrho\sigma,$$

eine Wurzel von $\Delta^1(r) = o$, und zugleich $t = \sigma\varrho^2$ eine Wurzel von

$$|c_{is} + t c_{si}| = o.$$

Weiter folgt:

Hat die characteristische Function $\Delta(\varrho)$ der Substitution lauter verschiedene Wurzeln, so muss die Function $A(\sigma)$ lauter einfache Elementartheiler haben.

Hat nämlich $\Delta(\varrho)$ die n einfachen Wurzeln

$$\varrho_1, \varrho_2 \cdots \varrho_n,$$

so gehört zu jeder Wurzel ϱ_h ein gewisses System von Werthen

$$\gamma_{ik_h} = x_{ih};$$

und man kann den Index k so wählen, dass nicht alle γ gleich Null sind. Zugleich ist die Determinante der n^2 Grössen x_{ih}; $i, h = 1, 2 \cdots n$ nicht Null.

In den Gleichungen 6) oder

9) $$\Sigma x_{ih}(\alpha_{is} + \sigma_h \alpha_{si}) = o,$$
$$s, h = 1, 2 \cdots n;$$

in denen

$$\sigma_h = \varrho_h^{n-2} \varepsilon\, \Theta_h$$

gesetzt ist, können nun alle σ_h von einander verschieden sein. Dann ist dasselbe der Fall mit den Wurzeln von 8). Ist aber z. B. $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \cdots \sigma_p$ so hat $A(\sigma)$ eine p-fache Wurzel, zu welcher nach 9) p linear unabhängige Grössenreihen x_{i1}, $x_{i2}, \cdots x_{ip}$ gehören, d. h. zu dieser p-fachen Wurzel gehören nur einfache Elementartheiler von $A(\sigma)$.

Aus diesem Zusammenhang ergiebt sich gleichzeitig die Herleitung der Transformationscoefficienten c_{ik}, zunächst in dem allgemeinen Falle einer völlig willkürlichen Form S, den zuerst die Herren Christoffel und Kronecker behandelt haben[1]).

Ich nehme an, dass die Gleichung 8)

$$|\alpha_{is} + \alpha\, \alpha_{si}| = o$$

lauter verschiedene Wurzeln besitze, und dass auch keine derselben gleich -1 sei. Dann ist n gerade und die n Wurzeln

$$z_1, z_2 \cdots z_n,$$

sind paarweise zu einander reciprok. Sind nun

$$z_h, \quad z_l$$

irgend zwei derselben, so gehört zu jeder je ein System von Grössen

$$g_{hi}, \quad g_{li};$$
$$i = 1, 2 \cdots n,$$

welches die Gleichungen

$$\Sigma g_{hi}(\alpha_{ki} + z_h \alpha_{ik}) = o,$$
$$\Sigma g_{lj}(\alpha_{kj} + z_l \alpha_{jk}) = o,$$

befriedigt. Multiplicirt man die letzteren mit g_{lk}, g_{hk} und summirt über k, so entsteht

$$10) \qquad \sum_{ik} g_{hi} g_{lk} \alpha_{ki} + z_h \sum_{ik} g_{hi} g_{lk} \alpha_{ik} = o,$$
$$\sum_{ik} g_{lk} g_{hi} \alpha_{ik} + z_l \sum_{ik} g_{lk} g_{hi} \alpha_{ki} = o,$$

wenn man gleichzeitig in der zweiten Gleichung die Indices j und k vertauscht und schliesslich j durch i ersetzt.

Setzt man

$$\Sigma g_{lk} g_{hi} \alpha_{ik} = [l\,h],$$

so folgt

$$[l\,h](1 - z_h z_l) = o.$$

1) a. a. O. Borchardt's Journal Bd. 68.

Es ist demnach $[lh]$ gleich Null, sobald die Indices h und l zu nicht reciproken Wurzeln gehören.

Nunmehr bezeichne man die Unterdeterminanten der g_{hi}; $i, h = 1, 2 \cdots n$ durch Γ_{hi}. Dann ist

$$\Sigma \Gamma_{hm} g_{hn} = (mn),$$

und

$$\sum_{h,l} \Gamma_{ht} \Gamma_{l\tau} [lh] = \sum_{h,l,i,k} \Gamma_{ht} \Gamma_{l\tau} g_{lk} g_{hi} \alpha_{ik}$$
$$= \Sigma \alpha_{tk} \Gamma_{l\tau} g_{lk} = \alpha_{t\tau}.$$

Setzt man ferner

11) $$\sum_s (c_{is} - \varrho_h \alpha_{is}) g_{hs} = o,$$

wo die ϱ_h vorläufig ganz willkürlich sein mögen, so wird durch Multiplication mit Γ_{ht}

12) $$c_{it} = \Sigma \varrho_h \alpha_{is} g_{hs} \Gamma_{ht},$$
$$c_{k\tau} = \Sigma \varrho_l \alpha_{k\sigma} g_{l\sigma} \Gamma_{l\tau},$$

also

$$\Sigma c_{it} c_{k\tau} \alpha_{ik} = \Sigma \varrho_h \varrho_l \alpha_{s\sigma} g_{hs} g_{l\sigma} \Gamma_{ht} \Gamma_{l\tau}$$
$$= \Sigma \varrho_h \varrho_l [lh] \Gamma_{ht} \Gamma_{l\tau}.$$

Setzt man nun für den Fall, wo $[lh]$ nicht Null ist, d. h. die Indices h und l zu reciproken Wurzeln gehören,

$$\varrho_h \varrho_l = 1,$$

so wird

$$\Sigma c_{it} c_{k\tau} a_{ik} = \Sigma [lh] \Gamma_{ht} \Gamma_{l\tau} = \alpha_{t\tau};$$

und zugleich ist die Determinante der c_{ik} gleich der Determinante der α_{ik} oder gleich

$$\frac{1}{|A|}$$

also die Transformation 12) eine eigentliche.

Diese Transformation gilt übrigens auch für den Fall eines ungeraden n, nur ist dann der betreffende Werth von ϱ_h, welcher der einen Wurzel $z = -1$ entspricht, gleich $+1$ zu setzen. In diesem Falle bleiben also nur $\frac{1}{2}(n-1)$ Parameter ϱ_h willkürlich, während im ersten $\frac{1}{2}n$ willkürliche Parameter vorhanden sind, wie schon Herr Christoffel angegeben hat.[1])

Um diese Darstellung der Transformationscoefficienten für den Fall nur einfacher Elementartheiler der Resolvente n^{ten} Grades 8) zu erweitern, beweise ich zunächst einen allgemeinen Satz, der sich überhaupt auf die Lösungen der Gleichung[2])

$$|c_{ik} + \varrho d_{ik}| = o$$

bezieht.

Es seien

$$\varrho_1, \varrho_2 \cdots \varrho_p,$$

unter einander und von Null verschiedene Wurzeln dieser Gleichung, und

$$\begin{array}{llll} \xi_i^{11}, & \xi_i^{12}, & \cdots & \xi_i^{1h_1}; \\ \xi_i^{21}, & \xi_i^{22}, & \cdots & \xi_i^{2h_2}; \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_i^{p1}, & \xi_i^{p2}, & \cdots & \xi_i^{ph_p}; \end{array}$$

solche p Systeme von je h_q Werthen, welche den Gleichungen

$$\Sigma(c_{ik} + \varrho d_{ik})\xi_i = o$$

genügen. Es möge ferner eine lineare Relation zwischen den Werthen der ξ stattfinden, dergestalt, dass

$$\Sigma \alpha_{qq_1} \xi_i^{qq_1} = o,$$

oder

$$\sum_{m=1}^{h_1} \alpha_{1m} \xi_i^{1m} + \sum_{m=1}^{h_2} \alpha_{2m} \xi_i^{2m} + \cdots \sum_{m=1}^{h_p} \alpha_{pm} \xi_i^{pm} = o$$

ist für $i = 1, 2 \cdots n$. Multiplicirt man dieselbe mit c_{ik} und summirt nach i, so wird

$$\varrho_1 \sum_1^{h_1} \alpha_{1m} \xi_i^{1m} d_{ik} + \varrho_2 \sum_1^{h_2} \alpha_{2m} \xi_i^{2m} d_{ik} + \cdots + \varrho_p \sum_1^{h_p} \alpha_{pm} \xi_i^{pm} d_{ik} = o.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Determinante der d_{ik} nicht Null ist, folgt hieraus

---

1) Ebenda, S. 262.

2) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man hier die Determinanten der c_{ik}, d_{ik} als von Null verschieden annehmen.

$$\varrho_1 \Sigma \alpha_{1m} \xi_i^{1m} + \varrho_2 \Sigma \alpha_{2m} \xi_i^{2m} + \cdots \varrho_p \Sigma \alpha_{pm} \xi_i^{pm} = o,$$

und somit auch

$$(\varrho_2 - \varrho_1) \Sigma \alpha_{2m} \xi_i^{2m} + \cdots (\varrho_p - \varrho_1) \Sigma \alpha_{pm} \xi_i^{pm} = o.$$

Aber aus dieser Identität folgt auf demselben Wege

$$\varrho_2 (\varrho_2 - \varrho_1) \Sigma \alpha_{2m} \xi_i^{2m} + \cdots \varrho_p (\varrho_p - \varrho_1) \Sigma \alpha_{pm} \xi_i^{pm} = o,$$

oder

$$(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_3 - \varrho_1) \Sigma \alpha_{3m} \xi_i^{3m} + \cdots (\varrho_p - \varrho_2)(\varrho_p - \varrho_1) \Sigma \alpha_{pm} \xi_i^{pm} = o.$$

Indem man dies Verfahren fortsetzt, erhält man

$$\sum_{s=t+1}^{s=p} \prod_{\sigma=1}^{\sigma=t} (\varrho_s - \varrho_\sigma) \Sigma \alpha_{sm} \xi_i^{sm} = o.$$

Da keines der Producte

$$\prod_{\sigma=1}^{\sigma=t} (\varrho_s - \varrho_\sigma)$$

verschwinden kann, so folgt

Eine lineare Relation kann zwischen den Werthen der ξ_i nur dann stattfinden, wenn sie unter den zu ein und derselben Wurzel gehörigen ξ_i besteht. Sind die letzteren linear von einander unabhängig, so sind sie also überhaupt von einander linear unabhängig.

Insbesondere hat man also den Satz:

Sind die Elementartheiler der Function

$$|c_{ik} + \varrho d_{ik}|$$

alle einfach, so sind die Werthe der zugehörigen Grössen ξ_i von einander linear unabhängig, d. h. ihre Determinante ist von Null verschieden.

Hat demnach die characteristische Function

$$|\alpha_{is} + z \alpha_{si}|$$

lauter einfache Elementartheiler, so verschwindet die Determinante der zugehörigen Grössen g_{hi}; $h, i = 1, 2 \cdots n$ nicht. Bezeichnet man die letztere durch G, so ist

$$G^2 : A$$

gleich der Determinante der Grössen $[lh]$. Diese Determinante zerfällt aber zufolge der Gleichungen

$$[lh] = o,$$

welche für je zwei nicht reciproke Wurzeln bestehen, in ebensoviele partiale Determinanten, als von einander verschiedene Wurzeln der characteristischen Function vorhanden sind. Man hat also den Satz:

Hat die characteristische Function

$$|a_{ik} + z\,a_{ki}|$$

lauter einfache Elementartheiler, so gehört zu jeder $k$fachen Wurzel derselben eine k reihige Determinante von zugehörigen Grössen

$$[lh]$$

welche von Null verschieden ist.[1])

Es seien nun unter dieser Voraussetzung die Wurzeln

$$\begin{array}{ll} z = +1 & \alpha \text{ fach}, \\ z = -1 & \beta \text{ fach}, \\ z = z_h,\ z_h^{-1} & \gamma_h \text{ fach};\ h = 1, 2 \cdots l, \end{array}$$

vorhanden. Der Wurzel $z = +1$ mögen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\Sigma g_{1i}(\alpha_{ki} + \alpha_{ik}) = o, \\ &\Sigma g_{2i}(\alpha_{ki} + \alpha_{ik}) = o, \\ &\cdot\ \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot, \\ &\Sigma g_{\alpha i}(\alpha_{ki} + \alpha_{ik}) = o, \end{aligned}$$

entsprechen. Die Grössen

$$[lh] = \Sigma g_{lk}\, g_{hi}\, \alpha_{ik},$$

in denen die l, h irgend zwei Indices aus der Reihe $1, 2 \cdots \alpha$ sind, bilden zufolge der Relationen 10)

$$[lh] + [hl] = o,$$

1) In dem S. 278 f. behandelten Falle lauter ungleicher Wurzeln sind daher die zu reciproken Wurzeln gehörigen $[lh]$ sämmtlich von Null verschieden.

ein alternirendes System, dessen Determinante nach dem zuvor bewiesenen Satze nicht verschwinden kann.[1]) Man kann daher durch eine congruente Transformation von nicht verschwindender Determinante nach Herrn Kronecker[2]) bewirken, dass die alternirende Form

$$\Sigma x_m y_n [mn]$$

übergeht in die canonische Form

$$\Sigma(X_i Y_k - X_k Y_i),$$

welche aus $\frac{1}{2}\alpha$ elementaren Formen besteht. Es giebt daher ein System von Coefficienten β_{pq}, $p, q = 1, 2 \cdots \alpha$ von nicht verschwindender Determinante, für welches identisch

$$13)\qquad \Sigma X_m \beta_{lm} Y_n \beta_{hn} [mn] = \Sigma(X_i Y_k - X_k Y_i)$$

wird. Setzt man nun

$$\begin{aligned} g_{01i} &= \Sigma \beta_{1m} g_{mi}, \\ g_{02i} &= \Sigma \beta_{2m} g_{mi}, \\ &\vdots \\ g_{0\alpha i} &= \Sigma \beta_{\alpha m} g_{mi}; \\ m &= 1, 2 \cdot\cdot \alpha; \end{aligned}$$

so wird der entsprechende Ausdruck $[lh]_0$ für die g_{0pi} gegeben durch

$$[lh]_0 = \Sigma \beta_{lm} \beta_{hn} [mn];$$

d. h. es wird nach 13)

$$14)\qquad \begin{aligned} [1\,2]_0 &= -[2\,1]_0 = 1, \\ [3\,4]_0 &= -[4\,3]_0 = 1, \\ &\vdots \\ [\alpha - 1\,\alpha]_0 &= -[\alpha\,\alpha - 1]_0 = 1, \end{aligned}$$

während alle übrigen Ausdrücke $[lh]_0$ gleich Null werden.

Der Wurzel $z = -1$ entsprechend, erhält man dagegen nach 10) ein symmetrisches System von β^2 Grössen $[mn]$, und durch eine geeignete Transformation lässt sich dann jedenfalls bewirken[3]), dass bei geradem β die aus den den Gleichungen

---

1) α ist also nothwendig eine gerade Zahl, wie auch aus dem Kronecker'schen Satze folgt.

2) K. S. 405.

3) Vgl. wieder die Transformation des Herrn Kronecker, K. S. 405.

$$\Sigma g^0_{1i}(\alpha_{ki} - \alpha_{ki}) = o,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\Sigma g^0_{\beta i}(\alpha_{ki} - \alpha_{ki}) = o,$$

genügenden Grössen g^0_{pi} gebildeten Ausdrücke

$$[lh]^0; \; l, h = 1, 2 \cdots \beta;$$

die Bedingungen

$$\begin{aligned} 15) \qquad & [1\,2]^0 = [2\,1]^0 = 1, \\ & [3\,4]^0 = [4\,3]^0 = 1, \\ & \vdots \\ & [\beta - 1\,\beta]^0 = [\beta\,\beta - 1]^0 = 1, \end{aligned}$$

erfüllen, während wieder alle übrigen Werthe $[lh]^0$ verschwinden. Bei ungeradem β wird an Stelle der letzten der so eben angegebenen Gleichungen der nicht verschwindende Ausdruck

$$[\beta\beta]^0$$

treten.

Da endlich für die von ± 1 verschiedenen Wurzeln überhaupt alle Ausdrücke $[mn]$ verschwinden, sobald sie nicht zu reciproken Wurzeln z_h, z_h^{-1} gehören, so bedürfen die übrigen Grössen g_{ih} keiner weiteren Transformation. Gehört also etwa zu der γ_h fachen Wurzel z_h das System

$$g^h_{j1}, \; g^h_{j2} \cdots g^h_{jn}; \; j = 1, \; 2 \cdots \gamma_h;$$

zu der Wurzel z_h^{-1} das System

$$g_{h}{}^{j1}, \; g_{h}{}^{j2} \cdots g_{h}{}^{jn}; \; j = 1, \; 2 \cdots \gamma_h;$$

so sind nur die Ausdrücke

$$\Sigma g^h_{jk} g_{h}{}^{j_1 i} \alpha_{ik}$$

von Null eventuell verschieden. Diese Coefficienten sollen der Einfachheit halber durch

$$g_{j1}, \; g_{j2} \cdots g_{jn}$$

bezeichnet werden, so dass der Index j alle Werthe von 1 bis $n - (\alpha + \beta)$ durchläuft, und die Ausdrücke

$$[j_\mu \, j_\nu]$$

nur dann von Null verschieden sein können, wenn die aus der Reihe $1 \cdots n-(\alpha+\beta)$ gewählten Indices j_μ, j_ν zu reciproken Wurzeln gehören.

Vermöge des so bestimmten Systems canonischer Elemente, dessen Determinante nicht Null ist, bilde man nun die Gleichungen

$$16)\qquad \begin{aligned} &\Sigma(c_{is}-\varrho_{0l}\,a_{is})g_{0ls}=o;\ l=1,\ 2\cdots\alpha,\\ &\Sigma(c_{is}-\varrho_k^0\,a_{is})g_{ks}^0=o;\ k=1,\ 2\cdots\beta,\\ &\Sigma(c_{is}-\varrho_j\,a_{is})g_{js}=o;\ j=1,\ 2\cdots n-(\alpha+\beta), \end{aligned}$$

wobei die Parameter ϱ_0, ϱ^0, ϱ vorläufig ganz willkürlich sind. Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Coefficienten g, je nachdem sie nach g_{0ps}, g_{ps}^0, g_{ps} genommen sind, durch Γ_{0ps}, Γ_{ps}^0, Γ_{ps}, so findet man wie vorhin

$$16)\qquad \begin{aligned} a_{t\tau}=&(\Gamma_{01t}\Gamma_{02\tau}-\Gamma_{02t}\Gamma_{01\tau})+\cdots+(\Gamma_{0\alpha-1t}\Gamma_{0\alpha\tau}-\Gamma_{0\alpha t}\Gamma_{0\alpha-1\tau})\\ &+(\Gamma_{1t}^0\Gamma_{2\tau}^0+\Gamma_{2t}^0\Gamma_{1\tau}^0)+\cdots+(\Gamma_{\beta-1t}^0\Gamma_{\beta\tau}^0+\Gamma_{\beta t}^0\Gamma_{\beta-1\tau}^0)\\ &+\Sigma\Gamma_{j_\mu t}\Gamma_{j_\nu\tau}[j_\mu j_\nu], \end{aligned}$$

und zugleich wird

$$17)\qquad \begin{aligned} &\Sigma c_{it}\,c_{k\tau}\,a_{ik}\\ &=\varrho_{0}^{1}\varrho_{0}^{2}(\Gamma_{01t}\Gamma_{02\tau}-\Gamma_{02t}\Gamma_{01t})+\cdots\varrho_{0\alpha-1}\varrho_{0\alpha}(\Gamma_{0\alpha-1t}\Gamma_{0\alpha\tau}-\Gamma_{0\alpha t}\Gamma_{0\alpha-1\tau})\\ &+\varrho_1^0\varrho_2^0(\Gamma_{1t}^0\Gamma_{2\tau}^0+\Gamma_{2t}^0\Gamma_{1\tau}^0)+\cdots\varrho_{\beta-1}^0\varrho_\beta^0(\Gamma_{\beta-1t}^0\Gamma_{\beta\tau}^0+\Gamma_{\beta t}^0\Gamma_{\beta-1\tau}^0)\\ &+\Sigma\varrho_{j_\mu}\varrho_{j_\nu}\Gamma_{j_\mu t}\Gamma_{j_\nu\tau}[j_\mu j_\nu]. \end{aligned}$$

Die Transformationsbedingungen sind daher erfüllt, wenn man setzt

$$\begin{aligned} &\varrho_{0}^{1}\varrho_{0}^{2}=\cdots=\varrho_{0\alpha-1}\varrho_{0\alpha}=1;\\ &\varrho_1^0\varrho_2^0=\cdots=\varrho_{\beta-1}^0\varrho_\beta^0=1;\\ &\varrho_1\varrho_2=1,\ \varrho_3\varrho_4=1,\cdots\varrho_{n-(\alpha+\beta)-1}\varrho_{n-(\alpha+\beta)}=1. \end{aligned}$$

Die Determinante der c_{is} wird nach 16) gleich der mit dem Producte aller Parameter ϱ_0, ϱ^0, ϱ multiplicirten Grösse $\frac{1}{A}$; d. h. die Transformation ist eine eigentliche mit $\frac{1}{2}n$ willkürlichen Parametern, während bei ungeradem n, wie leicht zu sehen, nur $\frac{1}{2}(n-1)$ willkürliche Parameter auftreten.

Man erhält vermöge eines anderen Systemes canonischer Elemente auch uneigentliche Transformationen, sobald $\beta > o$

ist. Man kann nämlich durch eine cogrediente Transformation bewirken, dass die symmetrische zu den β^2 Grössen $[mn]$ gehörige Form in eine Summe von Quadraten verwandelt wird, d. h. dass an Stelle der Relationen 15) die folgenden

$$[ii]^0 = 1; \; i = 1, \; 2 \cdots \beta,$$
$$[ik]^0 = o; \; i \gtrless k$$

treten. Alsdann treten an Stelle der zweiten Gruppe von Formen auf den rechten Seiten von 16) und 17) die Ausdrücke

$$\Gamma^0_{1t}\Gamma^0_{1\tau} + \Gamma^0_{2t}\Gamma^0_{2\tau} + \cdots \Gamma^0_{\beta t}\Gamma^0_{\beta\tau},$$
$$(\varrho^0_1)^2\Gamma^0_{1t}\Gamma^0_{1\tau} + (\varrho^0_2)^2\Gamma^0_{2t}\Gamma^0_{2\tau} + \cdots (\varrho^0_\beta)^2\Gamma^0_{\beta t}\Gamma^0_{\beta\tau}.$$

Den Transformationsbedingungen genügt man nun durch die Annahme

$$\varrho^0_i = \pm 1;$$

und man erhält daher uneigentliche Transformationen mit $\frac{1}{2}(n-\beta)$ oder $\frac{1}{2}(n-\beta-1)$ Parametern, wenn für eine ungerade Anzahl von Indices i der Werth -1 gewählt wird. In der That ist auch für die Existenz uneigentlicher Transformationen nothwendig und hinreichend[1]), dass die Function

$$|S + \varrho S^1|$$

einen Elementartheiler von der Form $(\varrho + 1)^{2k+1}$ hat.

§ V.

Transformation von Formen mit verschwindender Determinante.

Ich schliesse hieran einige Bemerkungen über die Transformation von Formen mit verschwindender Determinante, welche, soviel mir bekannt, überhaupt bisher nicht näher in Betrachtung gezogen ist.

Wenn die Substitution U die Form $S + \varrho S^1$ in sich transformirt, so transformirt sie auch die Form S in sich selbst, falls ϱ^2 nicht gleich Eins ist.

---

1) Vgl. Frobenius, Borchardt's Journal Bd. 86, S. 47.

Denn aus

$$U^1(S+\varrho S^1)U=S+\varrho S^1$$

folgt durch Uebergang zu den conjugirten Formen

$$U^1(S^1+\varrho S)U=S^1+\varrho S,$$

also auch

$$U^1 S U(1-\varrho^2)=S(1-\varrho^2);$$

mithin unter der genannten Voraussetzung

$$U^1 S U=S.$$

Wofern daher die Determinante von $S+\varrho S^1$ nicht identisch verschwindet, kann man ϱ einen von ± 1 verschiedenen Werth ertheilen, und damit die Transformation auf die einer Form von nicht verschwindender Determinante zurückführen.

Verschwindet aber jene Determinante identisch, so kann S durch eine cogrediente Transformation V auf eine Form Σ reducirt werden, welche nur von den einer Form E_2 entsprechenden Variabelen $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \cdots x_{n_1} y_{n_1}$, wo $n_1 \leqq n$, abhängig ist[1]).

Setzt man nämlich

$$V^1 S V=\Sigma,$$
$$V^{-1} U V=W,$$

so ist

$$W^1 \Sigma W=\Sigma.$$

Falls nun die Determinante $|\Sigma+\varrho\Sigma^1|$ nicht identisch verschwindet, kann man gleich $|\Sigma|$ als von Null verschieden voraussetzen. Dann ist aber

1) $$E_2 W^1 E_2 \Sigma E_2 W E_2=\Sigma,$$

also auch

$$u=E_2 W E_2$$

eine Form von n_1 Variabeln, welche Σ in sich transformirt und deren Determinante $|u|$ nicht Null sein darf. Und zugleich ist für $E_1+E_2=E$

$$E_1 W^1 \Sigma W=o,$$

oder, da die Determinanten $|W|$ und $|\Sigma|$ nicht Null sind,

---

1) Vgl. K., § 3, IV. 1 ff.

$$E_2 W E_1 = o;$$

d. h. es verschwinden alle Coefficienten $W_{i_2 k_1}$ in der Form

$$W = \Sigma W_{ik} x_i y_k = \Sigma W_{i_1 k_1} x_{i_1} y_{k_1} + \Sigma W_{i_2 k_1} x_{i_2} y_{k_1} + \Sigma W_{i_1 k_2} x_{i_1} y_{k_1} + \Sigma W_{i_2 k_2} x_{i_2} y_{k_2}.$$

Damit ist die Transformation vollständig bestimmt, denn die Coefficienten $W_{i_2 k_2}$ sind aus der Gleichung 1) zu entnehmen, während die $W_{i_1 k_1}$, $W_{i_1 k_2}$ vollkommen willkürlich bleiben.

Wenn aber die Determinante von $\Sigma + \varrho \Sigma^1$ identisch verschwindet, so ist, da die Anzahl der in Σ vorkommenden Variabeln durch cogrediente Transformation nicht mehr verkleinert werden kann,

$$\Sigma = S_\alpha + S_\beta,$$

wo

$$S_\alpha = x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots x_{m-1} y_m,$$ [1])

und m eine ungerade Zahl ist, während S_β nur von den in E_β vorkommenden Variabeln abhängt und die Determinante von S_β nicht Null ist. Man erhält alsdann die Gleichungen

$$2) \qquad E_2 W^1 E_2 \Sigma E_2 W E_2 = \Sigma,$$

$$3) \qquad \begin{cases} E_1 W^1 E_2 \Sigma = o, \\ \Sigma E_2 W E_1 = o, \end{cases}$$

die im Wesentlichen auf die Gleichungen 2) zurückkommen, da die Gleichungen 3) linear sind. Aber auch die Gleichungen 2) lassen sich noch weiter reduciren.

Ich betrachte zunächst den Fall, wo $\Sigma = S_\alpha$, d. h. ich bestimme alle cogredienten Transformationen von m Variabeln der Form S_α in sich selbst. Setzt man an Stelle von x_i

$$\Sigma c_{ik} x_k,$$

so lauten die Transformationsrelationen

$$c_{1k} c_{2l} + c_{2k} c_{3l} + \cdots c_{m-1\,k} c_{ml} = (k\,l);$$

1) Vgl. K. § 3, IV, 1.

wo (kl) gleich Eins zu setzen ist, wenn $k = l - 1$, sonst aber die Null bedeutet. Bezeichnet man die ersten Unterdeterminanten der c_{ik} durch Γ'_{ik}, so erhält man die Bedingungen

$$\begin{array}{ll}
c_{s-1,1} = \Gamma'_{s2}, & c_{s+1,1} = o, \\
c_{s-1,2} = \Gamma'_{s3}, & c_{s+1,2} = \Gamma'_{s1}, \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
c_{s-1,n-1} = \Gamma'_{sn}, & c_{s+1,n-1} = \Gamma'_{s,n-2} \\
c_{s-1,n} = o, & c_{s+1,n} = \Gamma'_{s,n-1}.
\end{array}$$

Diesen Gleichungen zufolge wird eine grosse Zahl von Coefficienten c_{ik} gleich Null. Führt man die so reducirte Anzahl in das Transformationsproblem ein, und beachtet, dass die Determinante der c_{ik} nicht verschwinden darf, so ergiebt sich für die c_{ik} folgendes Schema

$$\begin{array}{cccccccccc}
\alpha & \beta & o & \gamma & o & \delta & o & . & . & . \\
o & \frac{1}{\alpha} & o & o & o & o & o & . & . & . \\
o & -\beta & \alpha & \beta & o & \gamma & o & . & . & . \\
o & o & o & \frac{1}{\alpha} & o & o & o & . & . & . \\
o & -\gamma & o & -\beta & \alpha & \beta & o & . & . & . \\
o & o & o & o & o & \frac{1}{\alpha} & o & . & . & . \\
o & -\delta & o & -\gamma & o & -\beta & \alpha & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

dessen Anordnung sofort verständlich ist, sowie man die der Hauptdiagonale parallelen Elemente betrachtet; die $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ sind dabei vollkommen willkürliche Parameter; die Substitution selbst lautet:

$$\begin{array}{ll}
x_1 = & \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_4 + \delta x_6 + \cdots \\
x_2 = & \frac{1}{\alpha} x_2 \\
x_3 = & -\beta x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + \gamma x_6 + \cdots \\
x_4 = & \frac{1}{\alpha} x_4 \\
x_5 = & -\gamma x_2 - \beta x_4 + \alpha x_5 + \beta x_6 + \cdots \\
x_6 = & \frac{1}{\alpha} x_6 \\
x_7 = & -\delta x_2 - \gamma x_4 - \beta x_6 + \alpha x_7 + \cdots \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot
\end{array}$$

Daraus ergiebt sich:

Jede Transformation welche die Form S_α in sich cogredient verwandelt, hat die Determinante α, sie enthält im allgemeinen $p+1$ Parameter, und ihre characteristische Function hat nur $p+1$ einfache Elementartheiler $\varrho-\alpha$ und p einfache Elementartheiler von der Form $\varrho-\frac{1}{\alpha}$, wenn $m=2p+1$.

Die Form

$$a_1 x_1 y_2 + a_2 x_2 y_3 + \cdots a_{m-1} x_{m-1} y_m$$

reducirt man durch die cogrediente Transformation

$$x_i = \alpha_i \xi_i$$

auf die Form S_α, wenn man setzt

$$\alpha_{2p+1} = \frac{a_1\, a_3 \cdots a_{2p-1} \cdot \alpha_1}{a_2\, a_4 \cdots a_{2p}},$$

$$\alpha_{2p} = \frac{a_2\, a_4 \cdots a_{2p-2}}{a_1\, a_3 \cdots a_{2p-1} \cdot \alpha_1}.$$

Auch bei geradem $m=2p$ lässt sich die cogrediente Transformation leicht bewerkstelligen, wie hier beiläufig bemerkt werden mag. Man erhält zunächst folgendes System von Coefficienten c_{ik}

$$\begin{matrix}
\alpha & 0 & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 & c_{17} & 0 & . & . \\
0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\
0 & 0 & \alpha & 0 & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 & . & . \\
0 & c_{42} & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & c_{13} & 0 & . & . \\
0 & c_{62} & 0 & c_{42} & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & . & . \\
0 & c_{82} & 0 & c_{62} & 0 & c_{42} & 0 & \frac{1}{\alpha} & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{matrix}$$

und eine directe Vergleichung der Transformationsbedingungen liefert dann noch $p-1$ Gleichungen, aus denen man linear die Werthe der $c_{42}, c_{62}, c_{82} \cdots$ bestimmen kann.

Ich betrachte endlich noch die cogrediente Transformation der Form

$$S_\alpha + S_\beta.$$

Ist m wieder eine ungerade Zahl $2p+1$, so findet man für die mit den Grössen u, v geränderte Determinante der Form

$$S_\alpha - \varrho S_\alpha^1$$

oder

$$H = \begin{vmatrix} o & 1 & o & o & . & . & u_1 \\ -\varrho & o & 1 & o & . & . & u_2 \\ o & -\varrho & o & 1 & . & . & u_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ o & o & o & o & . & . & u_m \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & . & . & o \end{vmatrix},$$

den Ausdruck

$$H = -(v_m \varrho^p + v_{m-2}\varrho^{p-1} + \cdots + v_1)(u_m + \varrho u_{m-2} + \cdots u_1 \varrho^p)$$

Versieht man jetzt die Determinante von

4) $$S_\alpha - \varrho S_\alpha^1 + S_\beta - \varrho S_\beta^1$$

mit einem Rande gebildet aus den Grössen u_i, v_k $i, k = 1, 2 \cdots n$, so entsteht als Werth dieser geränderten Determinante

5) $$H | S_\beta - \varrho S_\beta^1 |$$

da die Determinante von $S_\alpha - \varrho S_\alpha^1$ identisch verschwindet. Multiplicirt man ferner unter der Voraussetzung

$$\sum a_{ik} c_{im} c_{kn} = a_{mn},$$

die Form

$$A_{uv} = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} & u_1 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} & u_n \\ v_1 & . & . & v_n & v \end{vmatrix}$$

mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante, so entsteht, falls letztere gleich ε und

6) $$\sum c_{si} u_s = u_i^1; \quad i = 1, 2 \cdots n,$$

$$\sum c_{sk} v_s = v_k^1; \quad k = 1, 2 \cdots n,$$

gesetzt wird,

7) $$\varepsilon^2 A_{uv} = A_{u1v1}.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die Coefficienten a_{ik} durch die der Form 4) und berücksichtigt den in 5) gegebenen Werth, so ergiebt sich die Identität

$$\varepsilon^2 (v_m \varrho^p + v_{m-2} \varrho^{p-1} + \cdots v_1)(u_m + \varrho u_{m-2} + \cdots u_1 \varrho^p)$$
$$= (v_m^1 \varrho^p + v_{m-2}^1 \varrho^{p-1} + \cdots v_1^1)(u_m^1 + \varrho u_{m-2}^1 + \cdots u_1^1 \varrho^p),$$

welche unter der Voraussetzung von 6) besteht. Differentiirt man dieselbe nach den Variabeln v_i, u_j wenn i und j irgend zwei Zahlen aus der Reihe

$$2, 4, 6, \cdot\cdot 2p, \; 2p+2, \; 2p+3, \cdot\cdot n$$

sind, so folgt, da diese linkerhand gar nicht vorkommen

$$o = (c_{im} \varrho^p + c_{im-2} \varrho^{p-1} + \cdots c_{i1})(c_{jm} + \varrho c_{jm-2} + \cdots \varrho^p c_{j1})$$

d. h. es sind alle Coefficienten

$$c_{i1}, \; c_{i3}, \; c_{i5} \cdot\cdot c_{i\,2p+1},$$

gleich Null.

Differentiirt man dagegen nach v_{m-2i}, u_{m-2j} wo i, j irgend zwei Zahlen aus der Reihe

$$o, \; 1, \; 2 \cdots p,$$

sind, so folgt

$$\varepsilon^2 \varrho^{p+j-i} = (\varrho^p c_{m-2i,\,m} + \varrho^{p-1} c_{m-2i,\,m-2} + \cdots c_{m-2i,\,1})$$
$$+ (c_{m-2j,\,m} + \varrho c_{m-2j,\,m-2} + \cdots \varrho^p c_{m-2j,\,1})$$

und hieraus folgert man leicht, dass alle Coefficienten c_{qr}, welche nur ungerade Indices aus der Reihe

$$1, 3, \cdots 2p+1$$

enthalten, Null sind, mit Ausnahme von

$$c_{11} = c_{33} = \cdot\cdot = c_{mm} = \alpha,$$

wobei

$$\alpha = \pm \varepsilon$$

ist.

Die Substitution hat daher folgende Gestalt:

$$
\begin{array}{l}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{14}x_4 + c_{16}x_6 + \cdots c_{1\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{1h}x_h \\
\qquad c_{22}x_2 + c_{24}x_4 + c_{26}x_6 + \cdots c_{2\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{2h}x_h \\
c_{33}x_3 + c_{32}x_2 + c_{34}x_4 + c_{36}x_6 + \cdots c_{3\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{3h}x_h \\
\qquad c_{42}x_2 + c_{44}x_4 + c_{46}x_6 + \cdots c_{4\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{4h}x_h \\
\quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\qquad c_{2p,\,2}x_2 + c_{2p,\,4}x_4 + \qquad \cdots c_{2p,\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{2p\,h}x_h \\
c_{2p+1,\,2p+1}x_{2p+1} + c_{2p+1,\,2}x_2 + c_{2p+1,\,4}x_4 + \cdots c_{2p+1,\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{2p+1h}x_h \\
\qquad c_{s,\,2}x_2 + c_{s4}x_4 + \qquad \cdots c_{s,\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{sh}x_h \\
\qquad s,\ h = 2p+2,\ 2p+3, \cdots n.
\end{array}
$$

Führt man diese Coefficienten in die Bedingung ein, dass die Form $S_\alpha + S_\beta$ in sich selbst übergehen soll, so ergiebt sich

$$
\begin{array}{l}
c_{24} = c_{26} = \cdots = c_{2\,2p} = c_{2h} = o, \\
c_{42} = c_{46} = \cdots = c_{4\,2p} = c_{4h} = o, \\
\quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
c_{2p\,2} = c_{2p\,6} = \cdots = c_{2p\,2p} = c_{2p\,h} = o,
\end{array}
$$

so dass schliesslich die Substitution die Gestalt

$$
\begin{array}{l}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{14}x_4 + \cdots c_{1\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{1h}x_h \\
\qquad c_{22}x_2 \\
c_{33}x_3 + c_{32}x_2 + c_{34}x_4 + \cdots c_{3\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{3h}x_h \\
\qquad\qquad c_{44}x_4 \\
c_{55}x_5 + c_{52}x_2 + c_{54}x_4 + \cdots c_{5\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{5h}x_h \\
\quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\qquad\qquad\qquad c_{2p\,2p}x_{2p} \\
c_{2p+1,\,2p+1}x_{2p+1} + c_{2p+1,\,2}x_2 + c_{2p+1,\,4}x_4 + \cdots c_{2p+1,\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{2p+1\,h}x_h \\
\qquad c_{s2}x_2 + c_{s4}x_4 + \qquad \cdots c_{s\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{sh}x_h \\
\qquad s,\ h = 2p+2,\ 2p+3, \cdots n
\end{array}
$$

erhält, wobei

$$c_{11}c_{22} = c_{33}c_{44} = c_{55}c_{66} = c_{2p+1,\,2p+1}c_{2p,\,2p} = 1$$

sein muss.[1])

1) Für die Coefficienten

$$c_{l2},\ c_{l4}, \cdots c_{l,\,2p}$$
$$l = 1, 3, \cdots 2p+1$$

ergeben sich Bedingungen, durch welche dieselben linear durch die übrigen ausgedrückt werden.

Die characteristische Function jeder Substitution, welche die Form $S_\alpha + S_\beta$ in sich transformirt, hat demnach den Werth

$$(\alpha - \varrho)^{p+1} (\tfrac{1}{\alpha} - \varrho)^p M$$

wo M die aus denjenigen c_{ik} gebildete characteristische Function ist, die den

$$i, k = 2p + 2,\ 2p + 3, \cdots n$$

entsprechen.

§ VI.

Symmetrische und alternirende Transformation einer bilinearen Form in sich.

Die Substitution U, welche S in sich transformirt, ist eine symmetrische, resp. alternirende, wenn

$$U = \pm U^1$$

ist. Die Gleichung $U^1 S U = S$ geht dadurch über in

1) $$U S U = \pm S.$$

Aus 1) folgt

$$U S^2 = (US) S = \pm S (U^{-1} S) = S^2 U.$$

Jede Substitution dieser Art ist daher mit S^2 vertauschbar. Aber im allgemeinen ist sie auch schon mit S selbst vertauschbar. Setzt man nämlich

$$US - SU = X,$$

so wird

$$SX = SUS - S^2 U,$$

$$XS = US^2 - SUS,$$

also

2) $$SX + XS = o.$$

Damit die Gleichung 2) eine von Null verschiedene Lösung für X zulasse, ist nothwendig und hinreichend, dass die characteristische Function von S entgegengesetzt gleiche Wurzeln habe.[1]) Man hat daher in diesem Sinne zwei wesentlich verschiedene Transformationen zu unterscheiden. Die der ersten Art sind mit S vertauschbar, die der zweiten sind es nur mit S^2, können aber nur bei Formen speciellen Characters vorhanden sein.

Ich betrachte zunächst die symmetrischen Transformationen der ersten Art.

Unter der Voraussetzung $US = SU$ folgt aus 1)

$$U^2 = E; \tag{3}$$

und umgekehrt wird jede symmetrische Transformation, welche dieser Gleichung genügt, und mit S vertauschbar ist, auch S in sich transformiren. Denn es ist

$$S = SU^2 = (SU)\,U = USU.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung 3) erhält man aber leicht auf folgendem Wege. Da die characteristische Function einer Form U, die der Gleichung 3) genügt, nur einfache Elementartheiler von der Form $\varrho \pm 1$ haben kann, so ist U der Form

$$E_1 - E_2$$

ähnlich, also

$$U = V(E_1 - E_2)\,V^{-1}.$$

Damit U symmetrisch sei, muss

$$V(E_1 - E_2)\,V^{-1} = (V^1)^{-1}(E_1 - E_2)\,V^1,$$

oder

$$V^1 V(E_1 - E_2) = (E_1 - E_2)\,V^1 V \tag{4}$$

sein. Nun ist $V^1 V$ eine symmetrische Form W,[2] deren Determinante nicht verschwindet. Aus der Gleichung 4) oder

$$W(E_1 - E_2) = (E_1 - E_2)\,W$$

folgt aber

$$E_2 W E_1 = - E_2 W E_1,$$

$$E_1 W E_2 = - E_1 W E_2;$$

1) Vgl. F. S. 41.
2) F. S. 4.

d. h. es ist W zerlegbar in die beiden symmetrischen Formen $W_1 + W_2$, also auch

$$V^1 V = W_1 + W_2.$$

Nun bezeichne man mit $T = T_1 + T_2$ zwei cogrediente Substitutionen, welche die symmetrischen Formen W_1, W_2 von nicht verschwindender Determinante in E_1 und E_2 verwandeln. Dann wird

$$T^1 V^1 V T = E,$$

oder, wenn

$$V T = Z$$

gesetzt wird

$$Z Z^1 = E.$$

Es ist also Z eine orthogonale Transformation.[1]) Und umgekehrt wird, wenn man unter Z eine orthogonale Transformation versteht

$$V = Z T^{-1};$$

also auch

$$U = Z T^{-1} (E_1 - E_2) T Z^{-1} = Z (E_1 - E_2) Z^1.$$

Das heisst:

Jede symmetrische Form, welche der Gleichung 3) genügt, ist von der Gestalt

$$U = Z (E_1 - E_2) Z^1$$

wenn unter Z eine orthogonale Form verstanden wird.

Die Bedingung der Vertauschbarkeit von S und U geht nun über in

$$Z (E_1 - E_2) Z^1 S = S Z (E_1 - E_2) Z^1,$$

oder

$$(E_1 - E_2) Z^1 S Z = Z^1 S Z (E_1 - E_2);$$

und dies erfordert, dass auch

$$Z^1 S Z$$

in zwei Formen $S_1 + S_2$ zerlegbar sei. Daraus folgt:

Soll eine Form symmetrische Transformationen der

1) F. S. 48.

ersten Art in sich zulassen, so muss sie durch orthogonale Transformation in die Summe zweier Formen zerlegbar sein.[1])

Für eine symmetrische Form ist diese Bedingung immer erfüllt, und es giebt hiernach ebensoviele symmetrische Transformationen der Form in sich selbst, als Zerlegungen dieser Art, die man mit Hülfe bekannter Untersuchungen leicht bewerkstelligen kann, vorhanden sind.

Eine alternirende Transformation der ersten Art muss nach 1) der Gleichung

$$U^2 = -E \tag{5}$$

genügen, d. h. es ist

$$U = i\,V(E_1 - E_2)\,V^{-1}.$$

Die Bedingung der Alternanz aber ist, wenn $V^1 V$ wieder durch W bezeichnet wird,

$$W(E_1 - E_2) + (E_1 - E_2)\,W = o.$$

Die symmetrische Form W muss also den Bedingungen

$$E_1 W E_1 = o, \qquad E_2 W E_2 = o$$

genügen.[2]) Da zugleich die Determinante von W nicht Null sein darf, muss n eine gerade Zahl $2m$ und die Anzahl der Variabelnpaare in E_1 und E_2 dieselbe sein.[3]) Die Bedingung der Vertauschbarkeit von S und U wird ferner

$$S\,V(E_1 - E_2)\,V^{-1} = V(E_1 - E_2)\,V^{-1}S$$

oder nach einigen Umformungen

$$V^1 S\,V(E_1 - E_2) + (E_1 - E_2)\,V^1 S\,V = o.$$

---

1) Dass dies auch hinreichend ist, erkennt man ohne weiteres.

2) Dies ist auch hinreichend. Denn aus den Gleichungen

$$E_1\,Z E_1 = o, \qquad E_2\,Z E_2 = o$$

folgt

$$E_1\,Z E_2 + E_2\,Z\,E_1 = Z;$$

also

$$Z(E_1 - E_2) + (E_1 - E_2)\,Z = o.$$

3) Man vergleiche den Satz X, F. S. 26.

Hieraus ergiebt sich wieder

$$E_1 V^1 S V E_1 = o, \quad E_2 V^1 S V E_2 = o.$$

Damit also eine Form S von $2m$ Variabelnpaaren durch alternirende Transformation in sich transformirt werden könne, muss die Schaar

$$S + \varrho E$$

durch eine cogrediente Transformation V in die Summe zweier Formen verwandelt werden können, von denen die erste nur die Variabeln $x_1, x_2, \cdot \cdot x_m$; $y_{m+1}, y_{m+2} \cdot \cdot y_n$ die zweite nur die Variabeln $y_1, y_2, \cdot \cdot y_m$; $x_{m+1}, x_{m+2} \cdot \cdot x_n$ enthält. Diese Bedingung ist auch hinreichend.

Man kann übrigens auch auf anderen Wegen leicht sämmtliche Lösungen der Gleichung 3) oder 5) erhalten. Da die characteristische Function von U für den Fall $U^2 = E$ nur einfache Elementartheiler $\varrho \pm 1$ besitzt,[1]) so müssen n von einander unabhängige Grössenreihen α, β vorhanden sein, welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\Sigma c_{ik} \alpha_k^r = \alpha_i^r, \qquad r = 1, 2 \cdots \varrho, \\ &\Sigma c_{ik} \beta_k^s = -\beta_i^s \qquad s = 1, 2 \cdots \sigma; \\ &\varrho + \sigma = n, \end{aligned}$$

befriedigen, und die Determinante der α, β verschwindet dabei nicht. Hieraus folgt sofort, wenn man unter γ irgend eine der n Grössenreihen α oder β versteht

$$\Sigma c_{ik} c_{li} \gamma_k = \gamma_l;$$

oder, da die Determinante der γ nicht Null ist

$$\Sigma c_{li} c_{ik} = (lk).$$

Soll endlich $c_{ik} = c_{ki}$ sein, so folgt

$$6) \qquad \begin{aligned} &\Sigma \alpha_i^p \beta_i^q = o; \\ &p = 1, 2 \cdots \varrho, \\ &q = 1, 2 \cdots \sigma; \end{aligned}$$

und diese Bedingungen 6) sind auch hinreichend, wenn die Substitution

1) Vgl. F., S. 15.

eine symmetrische werden soll;[1]) diese selbst endlich eigentlich oder uneigentlich, je nachdem σ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Soll dagegen U alternirend sein, so ist zu setzen

$$\Sigma c_{ik} \alpha_k^r = i \alpha_i^r, \qquad r = 1, 2 \cdots \varrho$$

$$\Sigma c_{ik} \beta_k^s = - i \beta_i^s \quad s = 1, 2 \cdots \sigma; \ \varrho + \sigma = n.$$

Demgemäss wird

$$\Sigma c_{ik} \alpha_k^r \alpha_i^{r1} = - \Sigma \alpha_i^r \alpha_i^{r1},$$

$$\Sigma c_{ik} \alpha_k^{r1} \alpha_i^r = - \Sigma \alpha_i^r \alpha_i^{r1}.$$

Damit $c_{ik} + c_{ki} = o$ werde, muss also

7)
$$\Sigma \alpha_i^r \alpha_i^{r1} = o,$$

$$\Sigma \beta_i^s \beta_i^{s1} = o,$$

sein für alle

$$r, r^1 = 1, 2 \cdots \varrho$$

$$s, s^1 = 1, 2 \cdots \sigma.$$

Da die Determinante der α, β nicht Null sein darf, so folgt noch $\varrho = \sigma = \frac{n}{2}$, und es ergiebt sich auch hier, dass die characteristische Function der alternirenden orthogonalen Formen je $\frac{n}{2}$ einfache Elementartheiler von der Gestalt $\varrho \pm i$ besitzt. Diese Transformationen können aber nicht wie die symmetrischen rational hergestellt werden, sondern erfordern die Lösung des Systems von quadratischen Gleichungen 7).

Dass die Gleichungen 6), 7) hinreichend zur Bestimmung der c_{ik} sind, ergiebt sich leicht. Setzt man

$$\Sigma c_{ik} \alpha_k^r = \alpha_i^r, \qquad r = 1, 2 \cdots \varrho,$$

$$\Sigma c_{ik} \beta_k^s = - \beta_i^s, \quad s = 1, 2 \cdots \sigma,$$

$$\Sigma c_{ik} u_k = X,$$

so wird

---

1) Diese Formeln zur Bildung aller symmetrischen orthogonalen Formeln habe ich in etwas anderer Gestalt bereits in meiner Arbeit, Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades, Mathematische Annalen, Bd. X, S. 154, angegeben.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & . & . & \alpha_n^1 & -\alpha_i^1 \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_1^\varrho & . & . & \alpha_n^\varrho & -\alpha_i^\varrho \\ \beta_1^1 & . & . & \beta_n^1 & +\beta_i^1 \\ . & . & . & . & . \\ \beta_1^\sigma & . & . & \beta_n^\sigma & +\beta_i^\sigma \\ u_1 & . & . & u_n & -X \end{vmatrix} = o,$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der Determinante der α, β, so entsteht vermöge der Gleichungen 6) wenn man

$$\Sigma \alpha_i^p \alpha_i^q = (pq) = (qp); \qquad p,\, q = 1,\, 2 \cdot\cdot \varrho$$

$$\Sigma \beta_i^{p^1} \beta_i^{q^1} = (p^1 q^1) = (q^1 p^1); \quad p^1.\ q^1 = 1,\, 2 \cdot\cdot \sigma$$

setzt,

$$\begin{vmatrix} (11) & . & . & (1\varrho) & o & . & . & o & -\alpha_i^1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ (\varrho 1) & . & . & (\varrho\varrho) & o & . & . & o & -\alpha_i^\varrho \\ o & . & . & o & (11) & . & . & (1\sigma) & \beta_i^1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ o & . & . & o & (\sigma 1) & . & . & (\sigma\sigma) & \beta_i^\sigma \\ \alpha_k^1 & . & . & \alpha_k^\varrho & \beta_k^1 & . & . & \beta_k^\sigma & c_{ik} \end{vmatrix} = o;$$

d. h. es ist

$$c_{ik} = c_{ki}.$$

Ist andererseits

$$\Sigma c_{ik} \alpha_k^r = i\, \alpha_i^r, \qquad r,\, s = 1,\, 2 \cdots m;\ m = \tfrac{n}{2},$$

$$\Sigma c_{ik} \beta_k^s = -i\, \beta_i^s,$$

$$\Sigma c_{ik} u_k = X,$$

so wird unter der Voraussetzung

$$\Sigma \alpha_i^p \beta_i^q = (pq); \qquad p,\, q = 1,\, 2 \cdots m$$

$$\begin{vmatrix} o & . & . & o & (11) & . & . & (1m) & -i\alpha_i^1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ o & . & . & o & (m1) & . & . & (mm) & -i\alpha_i^m \\ (11) & . & . & (m1) & o & . & . & o & +i\beta_i^1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ (1m) & . & . & (mm) & o & . & . & o & +i\beta_i^m \\ \alpha_k^1 & . & . & \alpha_k^m & \beta_k^1 & . & . & \beta_k^m & -c_{ik} \end{vmatrix} = o$$

und hieraus folgt sofort

$$c_{ik} + c_{ki} = o.$$

Die Bestimmung der symmetrischen resp. alternirenden Transformation zweiter Art kann hier nicht weiter ausgeführt werden. Ich behandele hier nur diejenigen Transformationen U, für welche $|U + E|$ oder $|U - E|$ von Null verschieden ist, bei denen also die allgemeinen Formeln des § VII zur Anwendung kommen.

Soll die Form

$$U = (E - TS)(E - T^1 S^1)^{-1},$$

in welcher T der Gleichung

8) $$ST + S^1 T^1 = o,$$

zu genügen hat, symmetrisch sein, so folgt

9) $$TS + ST = o.$$

Aus den Gleichungen 8) und 9) folgt

$$ST = T^1 S^1.$$

d. h. ST ist eine symmetrische Form Z. Setzt man aber

$$ST = Z,$$

so tritt an Stelle von 8) und 9) die Gleichung

10) $$ZS + SZ = o,$$

welche durch eine symmetrische Form Z befriedigt werden muss.

Unter der Voraussetzung, dass S eine Form ist, deren characteristische Function entgegengesetzt gleiche Wurzeln besitzt, existiren nun überhaupt Lösungen der Gleichung

$$XS + SX = o.$$

Ist aber S eine symmetrische Form, so wird gleichzeitig

$$X^1 S + S X^1 = o,$$

also auch

$$(X + X^1)S + S(X + X^1) = o,$$

so dass in diesem Falle

$$Z = X + X^1$$

gesetzt werden kann.

Ist dagegen S eine alternirende Form, so hat die Gleichung 10) immer Lösungen. Es existiren daher auch immer symmetrische Transformationen der zweiten Art, welche eine alternirende Form (von nicht verschwindender Determinante) in sich transformiren. In der That ist das System der Gleichungen 10), wenn man die Coefficienten von Z durch p_{ik} bezeichnet,

$$\Sigma a_{ik} p_{kl} + \Sigma p_{ik} a_{kl} = o \tag{11}$$

$$k, l = 1, 2 \cdots n.$$

Dieselben reduciren sich, wenn die a_{ik} alternirend, die p_{ik} symmetrisch vorausgesetzt werden, auf $n\left(\frac{n-1}{2}\right)$ Gleichungen, durch welche also die p_{ik} von n homogenen Parametern $p_{11}, p_{22} \cdots p_{nn}$ abhängig werden. Eine allgemeine alternirende Form lässt also immer symmetrische Transformationen mit n Parametern in sich zu.

Sind dagegen die a_{ik} symmetrisch, so reduciren sich die Gleichungen 11) nur auf $n\left(\frac{n+1}{2}\right)$ zwischen den homogenen Parametern p_{ik}, und die Bedingung einer gemeinsamen Lösung ist eben das Vorhandensein entgegengesetzt gleicher Wurzeln der characteristischen Function von S.

In speciellen Fällen kann die Mannigfaltigkeit der symmetrischen Transformationen einer alternirenden Form viel grösser werden. Die Kronecker'sche Normalform[1]) der alternirenden Formen von $2n = m$ Variabeln

$$S = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdots (x_{m-1} y_m - x_m y_{m-1})$$

ergiebt z. B. im ganzen

$$\tfrac{1}{4} m (m + 2)$$

von einander unabhängige Parameter in der symmetrischen Form Z, wovon man sich leicht überzeugt, so wie man beachtet, dass die Coefficienten des folgenden symmetrischen Schema's den Gleichungen 10) genügen

1) K. S. 405.

11	12	13	14	15	16	. .
12	—11	14	—13	16	—15	. .
13	14	33	34	35	36	. .
14	—13	34	—33	36	—35	. .
15	16	35	36	55	56	. .
16	—15	36	—35	56	—55	. .
.	.	.	.	.	.	. .
.	.	.	.	.	.	. .

in welchem jedes Paar von Ziffern einen völlig willkürlichen Parameter bedeutet, und die Form Z wird daher:

$$p_{11}(x_1y_1 - x_2y_2) + p_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + p_{13}(x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_4 - x_4y_2)$$
$$+ p_{14}(x_4y_1 + x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2) + p_{15}(x_1y_5 + x_5y_1 - x_2y_6 - x_6y_2)$$
$$+ p_{33}(x_3y_3 - x_4y_4) + \cdots .$$

§ VII.

Rationale Lösung des Transformationsproblems.

Es sei U eine Substitution, welche die Form S (von nicht verschwindender Determinante) in sich cogredient transformirt. Dann bestehen die Gleichungen

$$1)\qquad U^1 S U = S,$$
$$U^1 S^1 U = S^1.$$

Setzt man nun

$$2)\qquad R_\varrho = S(E\varrho - U)(E\varrho + U)^{-1},$$

so wird

$$R_\varrho^1 = (E\varrho + U^1)^{-1}(E\varrho - U^1)S^1;$$

oder unter Anwendung der Gleichung

$$U^1 S^1 = S^1 U^{-1}$$

auf den zweiten Factor, der Gleichung

$$(S^1)^{-1} U^1 = U^{-1}(S^1)^{-1}$$

auf den ersten

$$R_\varrho^1 = [(S^1)^{-1}\varrho + (S^1)^{-1} U^1]^{-1}(E\varrho - U^{-1}) = [(S^1)^{-1}\varrho + U^{-1}(S^1)^{-1}]^{-1}(E\varrho - U^{-1})$$
$$= S^1(E\varrho + U^{-1})^{-1}(E\varrho - U^{-1});$$

also

3) $$R_\varrho^1 = S^1\left(U + \frac{E}{\varrho}\right)^{-1}\left(U - \frac{E}{\varrho}\right).$$

Man hat demnach durch Vergleichung von 2) und 3), falls

$$\varrho_1\varrho = 1,$$

gesetzt wird

4) $$(S^1)^{-1} R_\varrho^1 = - S^{-1} R_{\varrho 1}.$$

Versteht man unter η die positive oder negative Einheit, und setzt

5) $$R_\eta = S(E\eta - U)(E\eta + U)^{-1},$$

so muss diese Form der linearen Gleichung

6) $$R_\eta^1 = - S^1 S^{-1} R_\eta$$

genügen.

Führt man endlich an Stelle der Form R_η die neue Form

7) $$T_\eta = S^{-1} R_\eta S^{-1} = (E\eta - U)(E\eta + U)^{-1} S^{-1}$$

ein, so genügt dieselbe der Gleichung

8) $$T_\eta^1 S^1 = - T_\eta S,$$

oder

$$S^1 T_\eta^1 = - S T_\eta,$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Determinante

$$|E\eta + U|$$

nicht verschwindet.

Aus der Gleichung 7) folgt aber umgekehrt

$$U(T_\eta S + E) = (E - T_\eta S)\eta,$$

oder

$$U = \eta(E - T_\eta S)(E + T_\eta S)^{-1};$$

und nach 8)

$$U = \eta(E - T_\eta S)(E - T_\eta^1 S^1)^{-1},$$
$$= \eta(S^{-1} - T_\eta) S (S^1)^{-1}(S^{1-1} - T_\eta^1)^{-1}.$$

Hieraus geht hervor, dass die Determinante von U den Werth η^n hat, da das Product der reciproken Formen rechterhand die Determinante $+1$ besitzt. Da nun bei ungeradem n und eigentlicher Substitution die Determinante $|U-E|$ verschwindet, so wird diese Transformation im allgemeinen nur eine eigentliche sein können, indem $\eta=+1$ zu setzen ist. Denn die Determinante von

$$E+T_\eta S$$

kann im allgemeinen nicht verschwinden, da sie für hinreichend kleine Werthe der homogenen Coefficienten von T_η sich von der Einheit beliebig wenig unterscheidet.

Eine uneigentliche Transformation kann bei geradem n überhaupt aus der Formel 8) nicht erhalten werden, da in diesem Falle $|U+E\eta|$ eine verschwindende Determinante hat. Dagegen wird bei ungeradem n und uneigentlicher Transformation η gleich -1 gesetzt werden können.

Man hat also den folgenden Satz:

Jede Substitution U, welche die Form S von nicht verschwindender Determinante in sich cogredient transformirt, und für welche die Determinante von

$$U+E\eta$$

nicht verschwindet, lässt sich in einer einzigen Art auf die Gestalt

9) $$U=\eta(E-TS)(E+TS)^{-1}$$

bringen, falls T der Gleichung

8) $$TS+T^1S^1=o$$

genügt. Unter Zugrundelegung der Form R, welche der Gleichung

8ª) $$(S^1)^{-1}R^1+S^{-1}R=o$$

genügt, wird dagegen U die Form

9ª) $$U=\eta(S+R)^{-1}(S-R)$$

annehmen.

Dass aber umgekehrt auch jede Form U, welche aus der Gleichung

9) entnommen wird, S cogredient in sich transformirt, sobald T der Gleichung 8) genügt, ergiebt sich leicht auf folgendem Wege.

Man hat nämlich aus 9), wenn in dem ersten Factor

$$E - TS = 2E - (E + TS)$$

und

$$(E + TS)(E + TS)^{-1} = E$$

gesetzt wird,

$$\frac{U}{\eta} = 2(E + TS)^{-1} - E.$$

Nimmt man beiderseits die conjugirte Form, so ist[1])

$$\frac{U^1}{\eta} = 2(E + S^1 T^1)^{-1} - E,$$

also, wenn man diese letzteren Gleichungen mit einander multiplicirt und $\eta^2 = 1$ setzt,

$$U^1 S U = 4(E + S^1 T^1)^{-1} S (E + TS)^{-1} - 2(E + S^1 T^1)^{-1} S$$
$$- 2S(E + TS)^{-1} + S.$$

oder wenn

$$S^1 T^1 = - S T$$

gesetzt wird

$$U^1 S U =$$
$$4(E - ST)^{-1} S (E + TS)^{-1} - 2(E - ST)^{-1} S - 2S(E + TS)^{-1} + S.$$

Setzt man nun

$$X = 4(E - ST)^{-1} S (E + TS)^{-1} - 2(E - ST)^{-1} S - 2S(E + TS)^{-1},$$

so wird

$$(E - ST) X = 4S(E + TS)^{-1} - 2S - 2(E - ST) S (E + TS)^{-1},$$

$$(E - ST) X (E + TS) = 4S - 2S(E + TS) - 2(E - ST) S = o.$$

Wird jetzt vorausgesetzt, dass die Determinanten

---

1) Es ist also auch

$$U + \eta E = 2\eta (E + TS)^{-1},$$
$$U - \eta E = 2\eta TS(E + TS)^{-1},$$

d. h. die Determinante von $U - \eta E$ verschwindet nur dann, wenn $|T|$ Null ist, falls T bereits den im Text angegebenen Bedingungen gemäss gewählt ist.

$$|E-ST|, \quad |E+TS|$$

was immer erfüllbar ist, nicht verschwinden, so folgt aus

$$(E-ST)X(E+TS)=o$$

für die Form X

$$X=o;$$

d. h. es ist

$$U^1 S U = X+S = S.$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Bezeichnet man mit T eine Form, die der Gleichung 8) genügt, wobei S eine beliebige Form ist, deren Determinante auch verschwinden kann, und verschwinden die Determinanten von

$$TS+E, \quad ST-E$$[1]

nicht, so wird durch die Substitution 9) die Form S cogredient in sich transformirt, und zwar ist die Determinante von

$$U+\eta E = 2\eta(E+TS)^{-1}$$

nicht Null, während die Determinante von U selbst den Werth

$$\eta^n$$

hat.

Der Beweis dieses Satzes lässt sich weit einfacher führen, wenn die Determinante von S nicht verschwindet, was bei der so eben ausgeführten Betrachtung nicht vorausgesetzt zu werden braucht.

---

1) Diese Bedingungen reduciren sich übrigens, wie man leicht bemerkt auf eine einzige. Denn vermöge der Gleichung 8) ist

$$ST-\varrho E = -(S^1 T^1 + \varrho E),$$
$$|ST-\varrho E| = (-1)^n |TS+\varrho E|,$$

da conjugirte Formen gleiche Determinanten haben. Und wenn $|S|$ nicht Null ist, so folgt aus der Identität

$$ST-\varrho E = -S(T^1 S^1 + \varrho E)S^{-1}$$

ebenso die Gleichung

$$|ST-\varrho E| = (-1)^n |ST+\varrho E|.$$

Durch die vorige Untersuchung wird die Ermittelung aller nicht singulären Substitutionen U auf die Lösung des linearen Systems 8), welches n^2 Gleichungen für die Coefficienten der Form T repräsentirt, zurückgeführt. Alle diese Substitutionen können somit durch rationale Operationen bestimmt werden, insofern es nur erforderlich ist, das Verschwinden der Unterdeterminantensysteme der Coefficienten jener n^2 Gleichungen zu untersuchen. Der eigenthümliche Bau jener Gleichungen scheint es indessen nicht zu ermöglichen, eine solche Untersuchung mit den Hülfsmitteln der Determinantentheorie allein auszuführen, wenigstens ist mir dies nur in den einfachsten Fällen $n = 2, 3, 4$ in befriedigender Weise gelungen.

In etwas allgemeinerer Form lässt sich der vorhergehende Satz auch so ausdrücken:

Die vorhergehende Untersuchung liefert alle cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst auf rationalem Wege, mit alleiniger Ausnahme derjenigen Transformationen, welche mit jeder nicht singulären verbunden wieder eine singuläre bilden.

Ist nämlich V irgend eine Transformation, U eine nicht singuläre Transformation, so ist auch

$$W = UV$$

eine cogrediente Transformation von S. Ist nun W nicht singulär, so lässt sich W auf dem angegebenen Wege erhalten, und es wird

$$V = U^{-1} W.$$

Nur diejenigen Transformationen, deren Product mit jeder nicht singulären immer wieder eine singuläre liefert, und die auch nicht durch Grenzübergang aus den nicht singulären ableitbar sind, sind daher als „eigentlich singulär" zu bezeichnen. Von dieser Art sind z. B. die uneigentlichen Transformationen einer Form gerader Ordnung.

§ VIII.

Die Gleichung $TS + T^1 S^1 = o$.

Bezeichnet man die Coefficienten von S durch a_{ik}, die der Form T durch p_{ik}, so hat man das System der n^2 linearen Gleichungen zwischen den homogenen Unbekannten p_{ik}

1) $$\sum_k p_{ik} a_{kl} + \sum_k p_{ki} a_{lk} = o;\ i, l = 1, 2 \cdots n;$$

welches mit der Gleichung

2) $$TS + T^1 S^1 = o$$

gleichbedeutend ist. Dieses System von Gleichungen ist ein an und für sich sehr merkwürdiges. Bezeichnet man nämlich mit N die grösste ganze in $\frac{n}{2}$ enthaltene Zahl, so lässt sich dasselbe bei völlig willkürlichen Werthen der a_{ik} durch Werthe der p_{ik} lösen, welche N lineare homogene Parameter enthalten. Es müssen daher im allgemeinsten Falle noch sämmtliche $N-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten des Systemes 1) verschwinden. Hieraus folgt, dass die Zahl der von einander unabhängigen Lösungen des Systemes 1) mindestens gleich N ist, welches auch die Werthe der a_{ik} sein mögen, deren Determinante übrigens, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben wird, als nicht verschwindend vorausgesetzt werden soll.

Ich entwickele zunächst einige Eigenschaften derjenigen Formen, welche der Gleichung 2) genügen.

Wird die Determinante der Form T durch P bezeichnet, so ist

$$P = (-1)^n P.$$

1) Bei ungeradem n verschwindet die Determinante von T identisch.

Ferner folgt aus 2)

$$T(S - \varrho S^1) + (T^1 + \varrho T) S^1 = o.$$

also:

2) Verschwindet die Determinante von T, so muss die

Determinante der linearen Schaar $T+\varrho T^1$ identisch verschwinden.

3) Verschwindet die Determinante von T nicht, so sind die Elementartheiler von $|S-\varrho S^1|$ identisch mit denen von

$$|T^1+\varrho T|.$$

Das Verhalten der Determinante $T+\varrho T^1$ kann man näher durch folgende Betrachtung präcisiren. Multiplicirt man die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & p_{1n} & p_{11} & p_{21} & \cdot & \cdot & p_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdot & \cdot & p_{nn} & p_{1n} & p_{2n} & \cdot & \cdot & p_{nn} \\ u_1^1 & u_2^1 & \cdot & \cdot & u_n^1 & v_1^1 & v_2^1 & \cdot & \cdot & v_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^n & u_2^n & \cdot & \cdot & u_n^n & v_1^n & v_2^n & \cdot & \cdot & v_n^n \end{vmatrix}$$

mit

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & a_{n1} & a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & a_{nn} & a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \\ U_1^1 & U_2^1 & \cdot & \cdot & U_n^1 & V_1^1 & V_2^1 & \cdot & \cdot & V_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_1^n & U_2^n & \cdot & \cdot & U_n^n & V_1^n & V_2^n & \cdot & \cdot & V_n^n \end{vmatrix}$$

so ergiebt sich zufolge der Gleichungen

$$\Sigma p_{ik} a_{kl} + \Sigma p_{ki} a_{lk} = o$$

die Beziehung

$$\varDelta D = |\alpha_{ik}| \; |\beta_{ik}|,$$

wo

$$\alpha_{ik} = \Sigma p_{im} U_m^k + \Sigma p_{mi} V_m^k,$$

$$\beta_{ik} = \Sigma a_{mi} u_m^k + \Sigma a_{im} v_m^k.$$

Zerlegt man die Zahlen $1, 2 \cdots n$ das einemal in die Gruppe

$$i_1,\ i_2 \cdots i_\alpha; \quad k_1,\ k_2 \cdots k_\beta;$$

und ein zweites mal in die Gruppe

$$j_1,\ j_2 \cdots j_a; \quad \varkappa_1,\ \varkappa_2 \cdots \varkappa_b;$$

so, dass $\alpha + a = n$, während die Zahlen i von den Zahlen j nicht verschieden zu sein brauchen, setzt man ferner alle U_r^λ gleich Null, deren

Indices r gleich den $k_1, k_2 \cdots k_\beta$ sind, ebenso alle V_s^μ gleich Null, deren Indices s gleich den $\varkappa_1\, \varkappa_2 \cdots \varkappa_b$ sind, und vergleicht die beiden Seiten der vorstehenden Determinantenrelation, so findet man:

$$P \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_2 1} & \cdot & \cdot & a_{i_\alpha 1} & a_{1 j_1} & a_{1 j_2} & \cdot & \cdot & a_{1 j_a} \\ a_{i_1 2} & a_{i_2 2} & \cdot & \cdot & a_{i_\alpha 2} & a_{2 j_1} & a_{2 j_2} & \cdot & \cdot & a_{2 j_a} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_1 n} & a_{i_2 n} & \cdot & \cdot & a_{i_\alpha n} & a_{n j_1} & a_{n j_2} & \cdot & \cdot & a_{n j_a} \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} p_{1 i_1} & p_{1 i_2} & \cdot & \cdot & p_{1 i_\alpha} & p_{j_1 1} & p_{j_2 1} & \cdot & \cdot & p_{j_a 1} \\ p_{2 i_1} & p_{2 i_2} & \cdot & \cdot & p_{2 i_\alpha} & p_{j_1 2} & p_{j_2 2} & \cdot & \cdot & p_{j_a 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n i_1} & p_{n i_2} & \cdot & \cdot & p_{n i_\alpha} & p_{j_1 n} & p_{j_2 n} & \cdot & \cdot & p_{j_a n} \end{vmatrix}$$

wobei die letztere Determinante aus P dadurch entsteht, dass in P die Elemente in einer beliebigen Anzahl von Reihen durch die Elemente irgend welcher Reihen aus den conjugirten Elementen ersetzt werden. Es verschwindet daher mit $|T|$ nicht nur die Determinante von $|T + \varrho T^1|$ sondern überhaupt die Determinante

$$\begin{vmatrix} p_{11} + \varrho_1 p_{11} & p_{12} + \varrho_2 p_{21} & \cdot & \cdot & p_{1n} + \varrho_n p_{n1} \\ p_{21} + \varrho_1 p_{12} & p_{22} + \varrho_2 p_{22} & \cdot & \cdot & p_{2n} + \varrho_n p_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} + \varrho_1 p_{1n} & p_{n2} + \varrho_2 p_{2n} & \cdot & \cdot & p_{nn} + \varrho_n p_{nn} \end{vmatrix}$$

für alle Werthe von $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$. Das letztere kann man übrigens durch Multiplication dieser Determinante mit A leicht bestätigen.

4) Verschwindet die Determinante von T, so kann die Form T stets durch congruente Transformation in eine Form t verwandelt werden, welche weniger als n Variabeln enthält, und deren Determinante nicht verschwindet.

Entweder ist dies nämlich von vorneherein der Fall, oder es giebt eine Form W von nicht verschwindender Determinante, vermöge der die Gleichung

$$W^1 T W = A + t$$

besteht, in welcher

$$A = x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots x_{k-1} y_k,$$

und k eine ungerade Zahl ist, dagegen t die Variabelnpaare $x_1 y_1, \cdots x_k y_k$

nicht enthält und eine nicht verschwindende Determinante besitzt. Setzt man nun

$$W^{-1} S^1 (W^1)^{-1} = s$$

so kann die Gleichung 2) auch in der Form

$$(W^1 T W)\big(W^{-1} S (W^1)^{-1}\big) + (W^1 T^1 W)\big(W^{-1} S^1 (W^1)^{-1}\big) = o$$

oder

$$(A + t) s + (A^1 + t^1) s^1 = o$$

geschrieben werden, und die Determinante von s ist nicht Null. Durch Multiplication mit der der Form A zugehörigen Form E_1 ergiebt sich

$$A s + A^1 s^1 = o,$$

oder

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial s}{\partial y_2} y_3 + \cdots \frac{\partial s}{\partial y_{k-1}} y_k$$
$$+ \frac{\partial s^1}{\partial y_2} y_1 + \frac{\partial s^1}{\partial y_3} y_2 + \cdots \frac{\partial s^1}{\partial y_k} y_{k-1} = o$$

Daraus folgt aber

$$\frac{\partial s^1}{\partial y_2} = o, \quad \frac{\partial s}{\partial y_{k-1}} = o,$$

was mit der Bedingung, dass die Determinante von s nicht Null ist, unverträglich ist. Daher kann T auch nicht der zerlegbaren Form $A + t$ congruent sein, d. h. es kann überhaupt kein solcher Bestandtheil A auftreten.

Man kann dies auch direct beweisen. Verschwindet nämlich die Determinante von

$$T = \Sigma p_{ik} x_i y_k,$$

so giebt es mindestens ein System von nicht sämmtlich verschwindenden Grössen z,

$$z_1, \; z_2 \cdot \cdot z_n,$$

für welches

$$\Sigma z_i p_{ik} = o; \quad k = 1, 2 \cdots n,$$

wird. Aus den Gleichungen 1) folgt dann durch Multiplication mit z und Summation nach i

$$\Sigma z_i p_{ki} a_{lk} = o,$$

oder, da die Determinante von S nicht Null ist,

$$\Sigma z_i p_{ki} = o.$$

Es sei nun z_h eines der nicht verschwindenden z. Dann setze man:

3)
$$\begin{array}{llll}
x_1 = X_1 + \frac{z_1}{z_h} X_h, & y_1 = Y_1 + \frac{z_1}{z_h} Y_h, \\
x_2 = X_2 + \frac{z_2}{z_h} X_h, & y_2 = Y_2 + \frac{z_2}{z_h} Y_h, \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\
x_{h-1} = X_{h-1} + \frac{z_{h-1}}{z_h} X_h, & y_{h-1} = Y_{h-1} + \frac{z_{h-1}}{z_h} Y_h, \\
x_h = X_h \quad , & y_h = Y_h \quad , \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\
x_n = X_n + \frac{z_n}{z_h} X_h, & y_n = Y_n + \frac{z_n}{z_h} Y_h.
\end{array}$$

Führt man diese cogrediente Substitution mit der Determinante $+1$ an der Form T aus, so ergiebt sich

$$T = \Sigma p_{ik} x_i y_k = \Sigma y_k p_{i_1 k} X_{i_1} = \Sigma p_{i_1 k_1} X_{i_1} Y_{k_1},$$

wo der Index 1 anzeigt, dass die Variabeln X_h, Y_h rechter Hand nicht mehr auftreten. Bezeichnet man die Substitution 3) durch V, so geht S durch die Substitution $(V^1)^{-1}$ in eine Form s von n Variabeln

$$s = \Sigma b_{ik} X_i Y_k$$

über, deren Determinante nicht Null ist. Die Coefficienten $p_{i_1 k_1}$ der transformirten Form T müssen daher den Gleichungen

$$\Sigma p_{i_1 k_1} b_{k_1 l} + \Sigma p_{k_1 i_1} b_{l k_1} = o$$

genügen. Verschwindet nun wieder die Determinante der $p_{i_1 k_1}$, so giebt es auch ein System von Grössen

$$\zeta_1, \zeta_2 \cdots, \zeta_{n-1}$$

die nicht sämmtlich Null sind, und für welches

$$\Sigma p_{i_1 k_1} \zeta_{i_1} = o.$$

Dann ist aber auch

$$\Sigma p_{k_1 i_1} \zeta_{i_1} b_{lk_1} = o,$$

und hieraus folgt, wenn man mit den Unterdeterminanten der Elemente b_{lk_1} multiplicirt und nach l summirt,

$$\Sigma p_{k_1 i_1} \zeta_{i_1} = o.$$

Man kann demnach dieses Verfahren so lange fortsetzen, als überhaupt die Determinante der aus T durch cogrediente Transformation entspringenden Formen verschwindet. Die Form T kann also stets durch cogrediente Transformation in eine Form t verwandelt werden, die nur noch die n^1 einer Form E_1 entsprechenden Variabelnpaare enthält, und deren Determinante nicht Null ist, d. h. es ist

$$V^1 T V = t.$$

Dabei ist nicht nur die Determinante von V gleich Eins, sondern es ist auch

4) $$|E_1 V E_1| = 1, \quad E_1 V E_2 = o.$$

Bei geeigneter Bezeichnung der Indices der Variabeln von T kann man es nämlich so einrichten, dass die Grössen z, $\zeta, \cdots$ welche nicht verschwinden, gerade den Indices $1, 2 \cdots k$ $(k = n - n^1)$ entsprechen. Die Substitution V ist demnach so beschaffen, dass an Stelle von

$$x_1, \; x_2, \; x_3 \cdots x_k, \; x_{k+1}, \cdots x_n,$$

die Ausdrücke

4ª) $$\begin{array}{l} x_1 \\ \alpha_{21} x_1 + x_2 \\ \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + x_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{k1} x_1 + \alpha_{k2} x_2 + \cdots + x_k \\ \alpha_{k+1,1} x_1 + \cdots + \alpha_{k+1,k} x_k + x_{k+1} \\ \alpha_{k+2,1} x_1 + \cdots + \alpha_{k+2,k} x_k + x_{k+2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n,1} x_1 + \cdots + \alpha_{n,k} x_k + x_n \end{array}$$

treten.

Setzt man also

$$V = \Sigma q_{ik} x_i y_k,$$

so sind ersichtlich alle Coefficienten $q_{i_1 k_2}$ gleich Null, d. h. es ist

$$E_1 V E_2 = o.$$

Da nun

$$T = (V^1)^{-1} t V^{-1},$$

$$E_1 T E_1 = E_1 (V^1)^{-1} E_1 t E_1 V^{-1} E_1$$

ist, so muss die Determinante von $E_1 T E_1$ ebenfalls von Null verschieden sein. Es ist dies aber eine der $n - n^{1\,\text{ten}}$ Unterdeterminanten von T, und daher ist n^1 um so viele Einheiten kleiner, als n, wie die um 1 vermehrte Anzahl der verschwindenden Unterdeterminantensysteme von T beträgt. Insbesondere ergiebt sich aus der angeführten Betrachtung:

Jede alternirende Form kann durch cogrediente Transformation in die Kronecker'sche Normalform

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdot \cdot$$

transformirt werden, welche nur von einer geraden Zahl von Variabeln abhängt.

5) Aus der Gleichung

$$T(S + S^1) = -(T^1 - T) S^1$$

folgt, wenn $|S + S^1|$ nicht Null ist,

$$TS = -(T^1 - T) S^1 (S + S^1)^{-1} S.$$

Die Form TS ist also das Product einer alternirenden Form in eine symmetrische von nicht verschwindender Determinante. Eine solche Form ist aber stets einer alternirenden Form ähnlich. Das heisst:

Verschwindet $|S + S^1|$ nicht, so ist TS einer alternirenden Form ähnlich[1]).

1) Vgl. meine Note über die conjugirte Transformation einer bilinearen Form in sich selbst, Sitzungsb. d. bayer. Akad. Juni 1889. — Andererseits ist, falls $|S - S^1|$ nicht verschwindet,

$$(S(S^1)^{-1} - E) T$$

einer symmetrischen Form ähnlich, wie aus der Gleichung

$$(S(S^1)^{-1} - E) T = (S - S^1)(S^1)^{-1}(T + T^1) S^1 (S - S^1)^{-1}$$

hervorgeht.

6) Die Form T kann nur dann eine symmetrische resp. alternirende Form von nicht verschwindender Determinante sein, wenn S selbst eine alternirende resp. symmetrische Form ist. Denn aus der Beziehung

$$T = \pm T^1$$

folgt unter dieser Voraussetzung

$$S = \mp S^1,$$

und umgekehrt ist T eine alternirende resp. symmetrische übrigens ganz willkürliche Form, sobald S eine symmetrische resp. alternirende Form (von nicht verschwindender Determinante) ist. Auf dieser Eigenschaft von T beruht die Transformation der alternirenden und symmetrischen Formen in sich selbst[1]).

7) Ist dagegen die Determinante von T gleich Null und T symmetrisch, so folgt

$$(S + S^1)\,T = o;$$

d. h. es muss die Determinante von $S + S^1$ verschwinden. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn wenn $|S + S^1|$ gleich Null ist, so kann man durch eine congruente Transformation von nicht verschwindender Determinante W bewirken, dass

$$W(S + S^1)\,W^1 = E_1$$

wird, wo E_1 nur die Variabelnpaare $x_1 y_1, \cdot \cdot x_k y_k$ enthält. Ist nun H eine willkürliche symmetrische Form der übrigen Variabelnpaare, so wird

$$W(S + S^1)\,W^1 H = o$$

oder

$$(S + S^1)\,W^1 H W = o;$$

also auch

$$T = W^1 H W = T^1,$$

und

$$S T + S^1 T^1 = o.$$

1) Man vergleiche die von Herrn Frobenius (F. S. 38) gegebenen Formeln mit der Formel 9ᵃ) des § VII.

Soll dagegen T eine alternirende Form von verschwindender Determinante sein, so muss die Determinante von $S - S^1$ verschwinden. Man kann daher durch eine congruente Transformation W von nicht verschwindender Determinante bewirken, dass

$$W(S - S^1) W^1$$

nur von den in E_1 befindlichen Variabelnpaaren abhängt. Bezeichnet man also mit H eine alternirende Form der übrigen Variabeln, so ist

$$(S - S^1) W^1 H W = o,$$

und für

$$T = W^1 H W = -T^1$$

ist wieder die Gleichung 2) erfüllt.

8) Verschwindet die Determinante von $S + S^1$ nicht, so ist die Determinante von T, wenn sie nicht verschwindet, das Quadrat einer rationalen Function ihrer eigenen Elemente. Denn es ist

$$T(S + S^1) = (T - T^1) S^1,$$

also $|T|$ nur um einen Factor von der schiefen Determinante $|T - T^1|$ verschwinden. Aus dieser Gleichung geht zugleich hervor:

Verschwindet die Determinante von T, während die von $S + S^1$ nicht Null ist, so verschwinden auch noch ihre sämmtlichen ersten bis k^{ten} Unterdeterminanten, wo k eine gerade oder ungerade Zahl ist, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Man kann diese Sätze noch erweitern. Aus der Gleichung

5) $$T(S + \varrho S^1) + (T^1 - \varrho T) S^1 = o$$

folgt:

$$(-1)^n P = A \frac{|T^1 - \varrho T|}{|S + \varrho S^1|}$$

oder für

$$r = \frac{\varrho - 1}{\varrho + 1},$$

$$(-1)^n P = A \frac{|T^1 - T - r(T + T^1)|}{|S + S^1 + r(S^1 - S)|}.$$

Ist nun $|T| = P$ nicht Null, verschwindet dagegen $|S + S^1|$, so ist auch $|T^1 - T| = o$; und aus der letzten Gleichung geht hervor, dass Zähler und Nenner auf der rechten Seite mit der nämlichen Potenz von r beginnen. Es wird demnach auch für $r = o$

$$P = A \frac{|T^1 - T - r(T + T^1)|}{|S + S^1 + r(S^1 - S)|}.$$

Nun hat Herr Frobenius den folgenden Satz bewiesen: „Ist A eine symmetrische, B eine alternirende Form, ist die Determinante $|rA + B|$ nicht identisch Null, und haben ihre für $r = o$ verschwindenden Elementartheiler alle einen geraden Exponenten, so ist in der Entwickelung dieser Determinante nach steigenden Potenzen von r der Coefficient des Anfangsgliedes das Quadrat einer rationalen Function der Coefficienten von A und B.“ 1)

Da nach Nr. 3 die Elementartheiler von $T^1 - \varrho T$ zugleich die von $S + \varrho S^1$ sind, so folgt:

Haben die für $\varrho = 1$ verschwindenden Elementartheiler der Function $S + \varrho S^1$ sämmtlich einen geraden Exponenten, und verschwindet $|T|$ nicht, so ist diese Determinante das Quadrat einer rationalen Function ihrer eigenen Elemente.

9) Es seien t, T zwei Formen, von denen wenigstens eine, etwa T, eine nicht verschwindende Determinante hat, und welche die Gleichung 2) befriedigen. Dann folgt nach 5)

$$(t + \varrho t^1) S + t^1 (S^1 - \varrho S) = o,$$
$$(T + \varrho T^1) S + T^1 (S^1 - \varrho S) = o,$$

oder

$$(t + \varrho t^1) = t^1 (T^1)^{-1} (T + \varrho T^1);$$

das heisst, die aus conjugirten Grundformen gebildeten beiden Schaaren

$$t + \varrho t^1, \quad T + \varrho T^1$$

sind äquivalent, sobald die Determinante von t nicht Null ist. Sollte t dieser Bedingung nicht genügen, so kann man jedenfalls an Stelle von

1) Frobenius, Ueber die schiefe Invariante etc., Borchardt's Journal, Bd. 86, S. 57.

t $t+hT$ setzen, sobald man unter h eine solche Constante versteht, dass $|t+hT|$ nicht Null ist. Dann aber sind jene Schaaren auch congruent, und man hat den folgenden Satz:

Ist T eine Lösung der Gleichung 2), und verschwindet die Determinante von T nicht, so ist jede andere Lösung derselben in der Form

$$t = hT + V^1 T V$$

enthalten.

Die Gleichung

$$tS + t^1 S^1 = o$$

verwandelt sich damit aber in

$$V^1 T V S + V^1 T^1 V S^1 = o,$$

oder nach Entfernung des Factors V^1, wenn noch

$$(T)^{-1} T^1 = - S(S^1)^{-1}$$

gesetzt wird, in

$$VS(S^1)^{-1} = S(S^1)^{-1} V;$$

d. h. die Form V ist mit der antisymmetrischen Form $S(S^1)^{-1}$ vertauschbar. Es lassen sich daher aus einer Lösung von nicht verschwindender Determinante der Gleichung 2) alle anderen mittelst des Problems der vertauschbaren Formen herleiten, und insbesondere ist jede Lösung, deren Determinante gleichfalls nicht verschwindet, dieser Lösung congruent.

10) Der so eben bewiesene Satz lässt sich in der folgenden Form erweitern:

Je zwei Formen R, T welche der Gleichung 2) genügen, und deren Unterdeterminantensysteme bis zu derselben Ordnung verschwinden, sind einander congruent, sobald sie gleichzeitig durch zwei auf dieselben Indices erstreckte Substitutionen V, W von der Gestalt 4^a) in Formen von nicht verschwindender Determinante cogredient transformirt werden. Seien nämlich

$$t = V^1 T V,$$
$$\tau = W^1 R W,$$

die beiden Formen von nicht verschwindender Determinante welche nur die Variabelnpaare einer Form E_1 enthalten, in welche nach Nr. 4) T und R cogredient transformirt werden können, so ist

$$t V^{-1} S + t^1 V^{-1} S^{-1} = o,$$
$$\tau W^{-1} S + \tau^1 W^{-1} S^1 = o.$$

Multiplicirt man unter der Voraussetzung

$$E = E_1 + E_2,$$

diese Gleichungen mit

$$(t^1)^{-1} + E_2, \quad (\tau^1)^{-1} + E_2,$$

so entsteht

$$(t^1)^{-1} t V^{-1} = - E_1 V^{-1} S^1 S^{-1},$$
$$(\tau^1)^{-1} \tau W^{-1} = - E_1 W^{-1} S^1 S^{-1}.$$

Es ist ferner nach Nr. 4)

$$V = E_1 V E_1 + E_2 V,$$

oder

$$E = E_1 V E_1 V^{-1} + E_2;$$

also

$$E_1 = E_1 V E_1 V^{-1}, \quad E_1 = E_1 W E_1 W^{-1}.$$

Multiplicirt man also die vorhergehenden Gleichungen mit

$$E_1 V E_1 + E_2, \quad E_1 W E_1 + E_2,$$

so wird

$$E_1 V E_1 (t^1)^{-1} t E_1 V^{-1} = - E_1 S^1 S^{-1},$$
$$E_1 W E_1 (\tau^1)^{-1} \tau E_1 W^{-1} = - E_1 S^1 S^{-1}.$$

Da nun nach Nr. 4) die Determinanten von $E_1 V E_1$ und $E_1 W E_1$ nicht verschwinden, so kann man setzen

$$E_1 V E_1 = P_1, \quad E_1 W E_1 = Q_1$$

und es wird

$$P_1 [(t^1)^{-1} t + \varrho E_1)] P_1^{-1} = Q_1 [(\tau^1)^{-1} \tau + \varrho E_1] Q_1^{-1},$$

oder

$$P_1 (t^1)^{-1} [t + \varrho t^1] P_1^{-1} = Q_1 (\tau^1)^{-1} [\tau + \varrho \tau^1] Q_1^{-1}.$$

Die beiden Formen $t+\varrho t^1$ und $\tau+\varrho\tau^1$ sind also äquivalent, daher auch congruent. D. h. es ist

$$U_1^1 t U_1 = \tau,$$

wo U_1 eine Form von nicht verschwindender Determinante der in E_1 vorkommenden Variabeln ist. Bezeichnet man mit U_2 eine Form der übrigen Variabeln, deren Determinante ebenfalls nicht Null ist, und setzt

$$U = u_1 + u_2,$$

so ist

$$U^1 t U = \tau,$$

oder

$$(W^1)^{-1} U^1 V^1 T V U W^{-1} = R,$$

wie zu zeigen war.

11) Multiplicirt man die mit den Grössen u_i, v_i geränderte Determinante der Coefficienten p_{ik} von T

6) $$\begin{vmatrix} p_{ik} & u_i \\ v_k & o \end{vmatrix}$$

mit der Determinante von S, und bezeichnet die ersten Unterdeterminanten der p_{ik} durch P_{ik}, so ergiebt sich

7) $$\Sigma P_{il}\alpha_{lk} = (-1)^{n-1}\Sigma P_{li}\alpha_{kl}.$$

Durch Multiplication der Gleichungen 7) mit den p_{im} und Summation nach i folgt aus 7)

$$P\alpha_{mk} = (-1)^{n-1}\Sigma P_{li}\alpha_{kl}p_{im};$$

mit P mus also auch

$$\Sigma P_{li}p_{im}$$

verschwinden. Da aber andererseits

$$\Sigma P_{il}p_{im} = (m\,l)\,P = o,$$

ist, so folgt, falls die P_{il} nicht sämmtlich verschwinden

$$P_{il} = P_{li}.$$

Verschwindet die Determinante von T, ohne dass ihre ersten Unterdeterminanten sämmtlich Null sind, so bilden diese letzteren ein symmetrisches System, d. h. die Werthe conjugirter erster Unterdeterminanten sind einander gleich.

Man erhält daher aus 7)

$$\Sigma P_{il}\left(\alpha_{lk} - (-1)^{n-1}\alpha_{kl}\right) = o.$$

Hat also bei ungeradem n, wo P verschwindet, die Function $|S - \varrho S^1|$ nicht mehrere Elementartheiler von der Gestalt $(\varrho - 1)^k$, so sind die ersten Unterdeterminanten der Formen T demselben Systeme von Coefficienten proportional, falls sie nicht sämmtlich verschwinden.

Der nämliche Satz gilt bei geradem n, falls $|S + \varrho S^1|$ nicht mehrere Elementartheiler von der Form $(\varrho - 1)^k$ enthält.

Dieser Satz lässt sich aber erweitern. Verschwinden die $k-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten von T noch sämmtlich, die k^{ten} dagegen nicht alle, so bilden die letzteren ein symmetrisches System, d. h. die Werthe conjugirter k^{ten} Unterdeterminanten sind gleich, und unter denselben befinden sich auch nicht verschwindende Hauptunterdeterminanten.

Man hat nämlich

$$\begin{vmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & p_{1n} & u_1^1 & u_1^2 & \cdot & \cdot & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & \cdot & \cdot & p_{nn} & u_n^1 & u_n^2 & \cdot & \cdot & u_n^k \\ W_1^1 & \cdot & \cdot & W_n^1 & o & o & \cdot & \cdot & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_1^k & \cdot & \cdot & W_n^k & o & o & \cdot & \cdot & o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} \Sigma p_{i1} a_{1i} & \cdot & \cdot & \Sigma p_{i1} a_{ni} & u_1^1 & \cdot & \cdot & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma p_{in} a_{1i} & \cdot & \cdot & \Sigma p_{in} a_{ni} & u_n^1 & \cdot & \cdot & u_n^k \\ w_1^1 & \cdot & \cdot & w_n^1 & o & \cdot & \cdot & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1^k & \cdot & \cdot & w_n^k & o & \cdot & \cdot & o \end{vmatrix}$$

falls

$$W_i^l = \Sigma w_s^l \alpha_{is}$$

genommen wird.

Ebenso wird aber

$$\begin{vmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & p_{n1} & u_1^1 & \cdot & \cdot & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1n} & \cdot & \cdot & p_{nn} & u_n^1 & \cdot & \cdot & u_n^k \\ V_1^1 & \cdot & \cdot & V_n^1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_1^k & \cdot & \cdot & V_n^k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gleich der in voriger Gleichung rechts stehenden $n+k$ reihigen Determinante, wenn

$$V_i^l = \Sigma w_s^l \alpha_{si}$$

genommen wird. Es gilt daher die Identität

$$\begin{vmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & p_{1n} & u_1^1 & \cdot & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & \cdot & \cdot & p_{nn} & u_n^1 & \cdot & u_n^k \\ W_1^1 & \cdot & \cdot & W_n^1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_1^k & \cdot & \cdot & W_n^k & 0 & \cdot & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & p_{n1} & u_1^1 & \cdot & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1n} & \cdot & \cdot & p_{nn} & u_n^1 & \cdot & u_n^k \\ V_1^1 & \cdot & \cdot & V_n^1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_1^k & \cdot & \cdot & V_n^k & 0 & \cdot & 0 \end{vmatrix}$$

unter der Voraussetzung

$$W_i^l = \Sigma w_s^l \alpha_{is}, \quad V_i^l = \Sigma w_s^l \alpha_{si}$$
$$l = 1,\ 2 \cdots k.$$

Dies ist aber die nämliche Identität, welche im § II, S. 265 ff. untersucht wurde, und damit ist zugleich der angegebene Satz bewiesen.

§ IX.

Fortsetzung.

Ein besonderes Interesse besitzt der Fall, wo bei geradem n die Determinante von T nicht Null ist, oder bei ungeradem n die ersten Unterdeterminanten von T nicht mehr sämmtlich verschwinden.

Nach § VIII, Nr. 3 haben die beiden Schaaren von conjugirten Grundformen

$$\varrho S + S^1 \text{ und } \varrho T^1 - T$$

dieselben Elementartheiler, wenn die Determinante von T nicht verschwindet. Setzt man in der zweiten Schaar $\varrho = -\sigma$, so sind nach dem Kronecker'schen Satze die Elementartheiler von der Form

$$(\varrho + 1)^{2k}, \quad (\varrho - 1)^{2k+1}$$
$$(\sigma + 1)^{2k} = (\varrho - 1)^{2k}, \quad (\sigma - 1)^{2k+1} \equiv (\varrho + 1)^{2k+1}$$

stets paarweise vorhanden. Das heisst:

Verschwindet die Determinante von T nicht, so muss die aus conjugirten Grundformen gebildete Determinante

$$|\varrho S + S^1| \tag{1}$$

nur paarweise Elementartheiler von der Form $(\varrho \pm 1)^\alpha$ enthalten. [Und umgekehrt muss, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, die Determinante von T stets verschwinden.]

Aber diese Bedingung ist auch hinreichend. Sind nämlich die Elementartheiler der Function 1) von der Form $(\varrho \pm 1)^\alpha$ paarweise vorhanden, so lässt sich nach einer Bemerkung des Herrn Frobenius[1]) eine Form

$$\varrho X - X^1$$

construiren, welche genau dieselben Elementartheiler besitzt, und deren Determinante nicht Null ist. Denn es ist möglich, eine Schaar $\varrho X - X^1$ mit conjugirten Grundformen zu bilden, welche vorgeschriebene Elementartheiler hat, vorausgesetzt, dass dieselben paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden, mit Ausnahme derjenigen, die für $\varrho = 1$ von einer ungeraden, und für $\varrho = -1$ von einer geraden Ordnung verschwinden. Dann aber giebt es nach dem Weierstrass'schen Satze zwei Substitutionen P und Q von nicht verschwindender Determinante, vermöge welcher

$$PSQ = X;$$
$$PS^1Q = -X^1,$$

wird. Es ist also auch

$$PSQ = -Q^1SP^1.$$

Setzt man nun

$$(Q^1)^{-1}PS = T^{-1},$$
$$S^1P^1Q^{-1} = (T^1)^{-1},$$

1) F. S. 22.

so wird

$$T^{-1} = -S(S^1)^{-1}(T^1)^{-1},$$

oder

$$TS + T^1 S^1 = o;$$

und die Determinante von T verschwindet dabei nicht. Daraus folgt:

Wenn die Form gerader Ordnung $|\varrho S + S^1|$ nur paarweise Elementartheiler von der Form $(\varrho + 1)^\alpha$, $(\varrho - 1)^\beta$ hat, so lässt sich immer eine Form T von nicht verschwindender Determinante finden, welche der Gleichung 1) genügt. Zur wirklichen Ermittelung aller Formen T dieser Art, von deren Existenz in § XI Gebrauch gemacht werden wird, kann man freilich weder die so eben gegebene Methode (Vgl. § I, Nr. 7), noch den in § VIII, Nr. 9) angeführten Satz benutzen, da die so erhaltenen Formen T keineswegs von einander linear unabhängig sind. Der obige Satz lässt sich auch in der folgenden Form aussprechen:

Wenn die Determinante $|\varrho S + S^1|$ nur paarweise Elementartheiler von der Form $(\varrho + 1)^\alpha$, $(\varrho - 1)^\beta$ hat, so giebt es unter denjenigen Transformationen U, für die die Determinante von $U + E\eta$ nicht verschwindet, auch solche für die auch die Determinante von $U - E\eta$ von Null verschieden ist.

Ich gehe nun zu dem Falle über, wo bei ungeradem n eine Lösung T existirt, deren erste Unterdeterminanten nicht mehr sämmtlich verschwinden. Dabei mögen folgende Bemerkungen vorausgeschickt werden. Lässt sich die Form T durch die cogrediente Transformation V in eine Form t von nicht verschwindender Determinante verwandeln, welche nur die in E_1 vorkommenden Variabelnpaare enthält, so ist

$$tV^{-1}S(S^1)^{-1}V + t^1 = o,$$

und demgemäss

$$tE_1V^{-1}S(S^1)^{-1}VE_1 + t^1 = o,$$

$$E_1V^{-1}S(S^1)^{-1}VE_2 = o.$$

Setzt man also

$$V^{-1}S(S^1)^{-1}V = \sigma_1 + \sigma_{21} + \sigma_{12} + \sigma_2$$

$$= \Sigma b_{i_1k_1}x_{i_1}y_{k_1} + \Sigma b_{i_2k_1}x_{i_2}y_{k_1} + \Sigma b_{i_1k_2}x_{i_1}y_{k_2} + \Sigma b_{i_2k_2}x_{i_2}y_{k_2},$$

so ist nothwendig, dass σ_{12}, d. h. dass alle Coefficienten $b_{i_1k_2}$ gleich Null sind, dass ferner die Zahl der in E_1 vorkommenden Variabeln eine gerade ist, und dass die Gleichung

2) $$t\sigma_1 + t^1 = o$$

Lösungen von nicht verschwindender Determinante besitze. Da ferner die Determinante von σ_1 gleich Eins ist, so ist auch die von σ_2 gleich Eins. Aus der Gleichung

$$t(\sigma_1 - E_1\varrho) + t^1 + t\varrho = o$$

folgt aber, dass die characteristische Function von σ_1 ausser reciproken Wurzeln mit gleichen Elementartheiler-Exponenten Elementartheiler von der Form

$$(\varrho + 1)^{2k}, \quad (\varrho - 1)^{2k+1}$$

nur paarweise besitzen darf.

Genügt umgekehrt σ_1 diesen Bedingungen, so existiren zwei Formen P, Q von den in E_1 vorkommenden Variabeln, für welche

$$P(\sigma_1 - E_1\varrho)Q = X + \varrho X^1$$

wird. Daher ist

$$P\sigma_1 Q = X, \quad PQ = -X^1;$$

mithin auch

$$Q^1 P^1 = -P\sigma_1 Q,$$

oder

$$(Q^1)^{-1} P\sigma_1 + P^1 Q^{-1} = o;$$

mithin ist die Gleichung 2) erfüllt, sobald $t = (Q^1)^{-1} P$ gesetzt wird.

Damit also bei ungeradem n eine Lösung T vorhanden sei, für welche die ersten Unterdeterminanten nicht mehr sämmtlich Null sind, muss $S(S^1)^{-1}$ einer Form ähnlich sein, welche von der Gestalt

$$\sum_1^{n-1} b_{ik}\, x_i y_k + y_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_{n-1} \alpha_{n-1}) + x_n y_n$$

ist, und in welcher der erste Theil eine Form σ_1 bezeichnet, die den soeben angegebenen Bedingungen genügt. Hieraus lassen sich aber die Bedingungen herleiten, denen S selbst zu genügen hat.

Ist nämlich allgemein

$$\Phi = \Sigma b_{ik}\, x_i\, y_k$$

eine Form der $n-1$ Variabeln $x_1 y_1 \cdot x_{n-1} y_{n-1}$ und

$$F = \Phi + y_n (\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_{n-1} x_{n-1}) + x_n y_n$$

so hat die characteristische Function von F dieselben Elementartheiler wie Φ, bis auf einen zu der Wurzel $\varrho = +1$ gehörigen, der einen um eine Einheit höheren Exponenten besitzt.

Bezeichnet man die k fach mit beliebigen Grössenreihen

$$u_i^\alpha,\ v_i^\alpha,\quad i = 1,\ 2 \cdots n-1;$$
$$\alpha = 1,\ 2 \cdots k$$

geränderte Determinante der characteristischen Function von Φ mit

$$\begin{pmatrix} u^1\, u^2 \cdots u^k \\ v^1\, v^2 \cdots v^k \end{pmatrix}$$

so ergiebt sich leicht für die ebenso geränderte Determinante der characteristischen Function von F der Ausdruck

$$(1-\varrho)\begin{pmatrix} u^1\, u^2 \cdots u^k \\ v^1\, v^2 \cdots v^k \end{pmatrix} + A + (-1)^k \left[u_n^k \begin{pmatrix} \alpha \cdots u^{k-2}\, u^{k-1} \\ v_1 \cdots v^{k-1}\, v^k \end{pmatrix} - u_n^{k-1} \begin{pmatrix} \alpha \cdots u^{k-2}\, u^k \\ v_1 \cdots v^{k-1}\, v^k \end{pmatrix} + \cdots \right]$$

und der mit A bezeichnete Theil enthält nur Producte der $u_n^h,\ v_n^h;\ h = 1,\ 2 \cdots k$ mit Determinanten die weniger als k Ränder enthalten. Es sei nun $\varrho - \varrho_i$ ein Wurzelfactor, der in den p^{ten} Unterdeterminanten der characteristischen Fnnction von Φ l_p^i mal enthalten ist. Dadurch, dass an Stelle der willkürlichen Grössen u in den letzten k Formen des obigen Ausdruckes die gegebenen Coefficienten α eintreten, kann die Multiplicität dieses Wurzelfactors in denselben gleich $l_k^i + \xi_i$ werden, wo $\xi_i \geqq o$. Da aber alle in A befindlichen Glieder denselben in der Multiplicität l_{k-1}^i enthalten, und $l_{k-1}^i > l_k^i$ ist, so sind die Wurzelfactoren der drei Glieder

$$(1-\varrho)\, \Pi(\varrho-\varrho_i)^{l_k^i};\ \ \Pi(\varrho-\varrho_i)^{l_{k-1}^i};\ \ \Pi(\varrho-\varrho_i)^{l_k^i+\xi_i}$$

und so lange ϱ_i von 1 verschieden ist, muss daher jene Multiplicität genau gleich l_k^i sein. Ist aber $\varrho_i = 1$, so kann dieselbe gleich $l_k + 1$ oder l_k sein, je nachdem $\xi \geqq 1$, oder $\xi = o$ ist. Daraus folgt:

Die characteristischen Functionen von F und Φ haben dieselben Elementartheiler in Bezug auf alle von $\varrho - 1$ verschiedenen Wurzelfactoren.

Nun habe ich in den Sitzungsberichten der k. bayer. Akademie[1]) den folgenden Satz bewiesen:

„Bringt in einer $k-1$ fach geränderten Determinante, deren Elemente rationale Functionen eines Parameters ϱ sind, die Ersetzung einer Reihe willkürlicher Grössen u durch gegebene Grössen α keine Aenderung für den Exponenten l_{k-1} des in dieser $k-1$ fach geränderten Determinante enthaltenen Wurzelfactors hervor, so ist dies auch bei keiner der höher geränderten Determinanten der Fall“. Bezeichnet man also die betreffenden Exponenten für die characteristische Function von Φ in Bezug auf die Wurzel $\varrho = 1$ durch

$$l_0, \; l_1 \cdot \cdot \; l_{k-1}, \; l_k \cdot \cdot \; l_h, \; l_{h+1} = o,$$

in Bezug auf F durch

$$\lambda_0, \; \lambda_1 \cdot \cdot \; \lambda_{k-1}, \; \lambda_k \cdot \cdot \; \lambda_h. \; \lambda_{h+1}$$

so gilt der Satz:

Ist $\lambda_{k-1} = l_{k-1}$, so ist auch $\lambda_k = l_k$.

Da nun $\lambda_0 = l_0 + 1$, so ist die Reihe der Exponenten für F

$$l_0 + 1, \; l_1 + 1, \; l_2 + 1 \cdot \cdot \; l_p + 1, \; l_{p+1}, \cdot \cdot \; l_h, \; l_{h+1}$$

wobei p irgend eine der Zahlen

$$0, \; 1, \; 2 \cdot \cdot \cdot h, \; h + 1$$

sein kann. Das heisst:

Die characteristische Function von F hat auch in Bezug auf die Wurzel $\varrho = 1$ dieselben Elementartheiler, wie Φ, mit Ausnahme eines einzigen, nämlich des Elementartheilers mit dem Exponenten

$$l_p - l_{p+1} + 1$$

der um eine Einheit grösser ist.

1) Ueber einen Satz aus der Theorie der Determinanten, Sitzb. d. math. phys. Classe, November 1889.

Es kann übrigens eine Aenderung in der Zahlenreihe der Exponenten nur an einer Stelle stattfinden, wo zwei aufeinander folgende Elementartheiler nicht gleich sind. Ist nämlich

$$l_{p-1} - l_p = l_p - l_{p-1},$$

und wäre

$$\begin{aligned} \lambda_{p-1} &= l_{p-1} + 1, \\ \lambda_p &= l_p + 1, \\ \lambda_{p+1} &= l_{p+1}, \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} \lambda_{p-1} - \lambda_p &= l_{p-1} - l_p; \\ \lambda_p - \lambda_{p+1} &= 1 + l_p - l_{p+1}, \end{aligned}$$

was unmöglich ist, da

$$\lambda_{p-1} - \lambda_p \geqq \lambda_p - \lambda_{p+1}$$

sein muss.

Hat umgekehrt die Form F dieselben Elementartheiler wie Φ mit Ausnahme eines einzigen von der Form $(\varrho - \alpha)^q$, der einen um eine Einheit höheren Exponenten hat, wie der correspondirende von Φ, so ist F der Form Φ ähnlich, vermehrt um die Form

$$y_n[\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_{n-1} x_{n-1}] + \alpha x_n y_n.$$

Denn die Normalformen[1]) von Φ und F unterscheiden sich, wenn der Elementartheiler $(\varrho - \alpha)^{q-1}$ in Φ, $(\varrho - \alpha)^q$ in F vorkommt, bei geeigneter Bezeichnung der Variabeln nur um die Glieder

$$\alpha x_n y_n + x_{n-1} y_n.$$

Es ist also

$$V^{-1} F V - W^{-1} \Phi W = \alpha x_n y_n + x_{n-1} y_p,$$

wo die Form W von nicht verschwindender Determinante nur von den in Φ vorkommenden Variabeln $x_1 y_1 \cdot \cdot x_{n-1} y_{n-1}$ abhängt. Daraus folgt aber

---

1) F. S. 21.

$$(W+E_n)V^{-1}FV(W^{-1}+E_n)-\Phi=(W+E_n)(\alpha x_n y_n+x_{n-1}y_n)(W^{-1}+E_n),$$

oder nach einfacher Rechnung

$$(V(W^{-1}+E_n))^{-1}F(V(W^{-1}+E_n))=\Phi+\alpha x_n y_n+y_n\frac{\partial W}{\partial y_{n-1}};$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Wendet man diesen Satz auf die vorliegende Frage an, so folgt:

Damit bei ungeradem n nur die Determinante von T, nicht aber noch die ersten Unterdeterminanten von T sämmtlich verschwinden, ist nothwendig und hinreichend, dass die sämmtlichen Elementartheiler von

$$S+\varrho S^1|$$

von der Gestalt $(\varrho+1)^k$ paarweise vorhanden sind, mit Ausnahme eines einzigen von der Form $(\varrho-1)^\alpha$, der einen um eine Einheit höheren Exponenten hat, als der folgende $(\varrho-1)^{\alpha-1}$.

§ X.

Lösung der Gleichung $TS+T^1S^1=o$.

Ich werde in diesem Paragraphen zeigen, wie die Lösung der Gleichung

1) $$ST+S^1T^1=o,$$

oder

$$TS+T^1S^1=o,$$

auf das Problem der vertauschbaren Formen zurückgeführt werden kann.

Aus 1) folgt durch Elimination von T^1

2) $$TS(S^1)^{-1}-(S^1)^{-1}ST=o.$$

Setzt man

$$S(S^1)^{-1}=X,$$

so wird aus 2)

$$X^1TX=T;$$

d. h. jede Form T, welche der Gleichung 1) genügt, wird durch die antisymmetrische Form X cogredient in sich transformirt.

Setzt man

$$T = S^{-1} Y,$$

so ist nach 2)

3) $$S(S^1)^{-1} Y = Y S (S^1)^{-1};$$

d. h. die Form Y ist mit der antisymmetrischen Form X vertauschbar. Ferner folgt aus 1)

$$Y + S^1 Y^1 (S^1)^{-1} = o,$$

oder

$$Y^1 S^{-1} + S^{-1} Y = o.$$

Demnach wird

4) $$2T = S^{-1} Y - Y^1 S^{-1}.$$

Jede Form T, welche der Gleichung 1) genügt, ist also von der Gestalt 4), falls Y die Gleichung 3) befriedigt.

Dieser Satz lässt sich in der folgenden Weise umkehren.

Bezeichnet man mit Y irgend eine Lösung der Gleichung 3), so stellt der Ausdruck 4) alle Lösungen der Gleichung 1) vor.

Denn aus 4) folgt

$$\begin{aligned} 2TS &= S^{-1} Y S - Y^1, \\ 2T^1 S^1 &= Y^1 - (S^{1-1} Y) S^1 = Y^1 - \left(S^{-1} Y S (S^1)^{-1}\right) S^1 \\ &= Y^1 - S^{-1} Y S, \end{aligned}$$

also

$$TS + T^1 S^1 = o.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen Formen T, welche in dem Ausdrucke 4) enthalten sind, werde ich im nächsten Paragraphen bestimmen.

Man kann auch einen anderen Weg zur Lösung der Gleichung 1) einschlagen.

Aus der Identität

$$(1 + \varrho\sigma)(TS + T^1 S^1) = (T + T^1 \varrho)(S + \sigma S^1) + (T^1 - T\sigma)(S^1 - \varrho S)$$

folgt insbesondere für

$$\varrho = \sigma = 1$$

5) $$(T + T^1)(S + S^1) + (T^1 - T)(S^1 - S) = o.$$

Man kann nun versuchen, die symmetrische Form $T + T^1$, sowie die alternirende Form $T^1 - T$ für sich zu bestimmen. Dies kann zunächst in dem Falle geschehen, wo $|S + S^1|$ nicht Null ist.

Aus der leicht zu beweisenden Identität

$$(S + S^1) S^{-1} (S^1 - S) = (S^1 - S) S^{-1} (S + S^1),$$

folgt nämlich

$$S^{-1} (S^1 - S)(S + S^1)^{-1} = (S + S^1)^{-1} (S^1 - S) S^{-1}.$$

Setzt man nun

6) $$W = S^{-1} (S^1 - S)(S + S^1)^{-1} = (S + S^1)^{-1} (S^1 - S) S^{-1},$$

so genügt die Form W der Gleichung

7) $$S W + S^1 W^1 = o,$$

denn es ist

$$W^1 = -(S^1)^{-1} (S^1 - S)(S + S^1)^{-1}$$

nach 6) gleich

$$-(S^1)^{-1} S W.$$

Da ferner

$$\begin{aligned} E + S W &= (S^1 - S)(S + S^1)^{-1} + E \\ &= (S^1 - S + S + S^1)(S + S^1)^{-1} \\ &= 2 S^1 (S + S^1)^{-1}, \end{aligned}$$

so folgt:

Die Determinante von $E + S W$ ist nicht gleich Null.

Aus der Gleichung 5) folgt ferner

$$T + T^1 = -(T^1 - T) S W,$$

und durch Uebergang zu den conjugirten Formen

$$T + T^1 = W^1 S^1 (T^1 - T) = - W S (T^1 - T).$$

Genügt also die alternirende Form $T^1 - T$ der Gleichung

$$(T^1 - T) S W = W S (T^1 - T),$$

so ist

$$(T+T^1) = -(T^1-T)SW.$$

Schreibt man an Stelle der vorstehenden Gleichung

$$[(T^1-T)S]WS = WS[(T^1-T)S]$$

so hat man:

Jede der Formen $(T^1-T)S$ ist mit der Form WS vertauschbar.

Und umgekehrt erhält man aus jeder Lösung Z der Gleichung

8) $$ZWS = WSZ$$

eine Lösung $(T^1-T)S$, welche der genannten Bedingung genügt.

In der That folgt aus 8) für $Z = YS$

9) $$YSW = WSY,$$

und durch Uebergang zu den conjugirten Formen

$$Y^1S^1W^1 = W^1S^1Y^1,$$

oder nach 7)

9ª) $$Y^1SW = WSY^1;$$

mithin aus den beiden vorstehenden Gleichungen 9) und 9ª)

$$(Y^1-Y)SW = WS(Y^1-Y).$$

Es ist also auch

10) $$T^1-T = Y^1-Y = (S^1)^{-1}Z^1 - ZS^{-1},$$

und

$$T^1+T = -[(S^1)^{-1}Z^1 - ZS^{-1}]SW,$$

also endlich

11) $$2T = [ZS^{-1} - (S^1)^{-1}Z^1](E+SW).$$

Hiermit sind alle Lösungen von 1) gefunden, und die Anzahl der linear unabhängigen Formen T ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Formen von der Gestalt

$$ZS^{-1} - (S^1)^{-1}Z^1$$

wobei Z mit WS vertauschbar ist, da die Determinante von $E + SW$, wie oben gezeigt, nicht verschwindet.

Verschwindet dagegen die Determinante der alternirenden Form $S^1 - S$ nicht, so kann in analoger Weise die Bestimmung von T auf die einer symmetrischen Form zurückgeführt werden. Denn aus 5) folgt alsdann

12ᵃ) $$-(T^1 - T) = (T + T^1)(S + S^1)(S^1 - S)^{-1}$$

also auch

12) $$(T + T^1)(S + S^1)(S^1 - S)^{-1} = (S^1 - S)^{-1}(S + S^1)(T + T^1).$$

Setzt man nun

$$S^{-1}(S + S^1)(S^1 - S)^{-1} = (S^1 - S)^{-1}(S + S^1)S^{-1} = V,$$

so genügt die Form V der Gleichung

12ᵇ) $$S^1 V^1 + SV = o,$$

und die Determinante von

$$SV + E = 2\,S^1(S^1 - S)^{-1}$$

ist von Null verschieden. Die Gleichung 12) verwandelt sich also in

13) $$[(T + T^1)S]\,VS = VS[(T^1 + T)S].$$

Aber auch umgekehrt folgt aus jeder Lösung X der Gleichung

14) $$XVS = VSX$$

eine symmetrische Form $T + T^1$, und zwar wird, wenn man ganz wie vorhin verfährt

$$T + T^1 = XS^{-1} + (S^1)^{-1}X^1,$$

also auch nach 12ᵃ)

15) $$2\,T = [XS^{-1} + (S^1)^{-1}X^1](SV + E),$$

und die Anzahl der linear von einander unabhängigen Formen T ist gleich der Anzahl der von einander linear unabhängigen Formen von der Gestalt

$$XS^{-1} + (S^1)^{-1}X^1.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen Formen in den Darstellungen 11) und 15) lässt sich aber leicht angeben.

Sind nämlich

$$X_1,\ X_2 \cdots X_k,$$

die k von einander linear unabhängigen Formen welche der Gleichung 14) genügen, so ist

$$X_h^1 S V = S V X_h^1,$$

also auch

$$(S^1)^{-1} X_h^1 S V S = (S^1)^{-1} S V X_h^1 S,$$

oder nach 12ᵇ)

$$[(S^1)^{-1} X_h^1 S]\, V S = V S [(S^1)^{-1} X_h^1 S].$$

Die Formen X_h haben also die characteristische Eigenschaft:

Ist X_h eine Form, welche der Gleichung 14) genügt, so genügt auch

$$(S^1)^{-1} X_h^1 S$$

derselben Gleichung; d. h. die letztgenannten Formen sind lineare Combinationen der X_l.

Setzt man nun

16) $$(S^1)^{-1} X_h^1 S = \sum_1^k \alpha_{hi} X_i,$$

$$X_h = \Sigma (h i) X_i,$$

so wird

$$P_h = X_h S^{-1} + (S^1)^{-1} X_h^1 = \Sigma [\alpha_{hi} + (h i)]\, X_i S^{-1};$$

d. h. zwischen den Formen P_h bestehen so viel lineare Relationen, als zwischen dem System der Coefficienten

$$\alpha_{hi} + (i h),\ i = 1,\ 2 \cdots k$$

enthalten sind.

Aus 16) folgt aber durch Uebergang zu der conjugirten Form

$$S^1 X_h S^{-1} = \Sigma \alpha_{hi} X_i^1,$$

oder

$$X_h = \Sigma \alpha_{hi} (S^1)^{-1} X_i^1 S,$$

also nach 16)

17) $$X_h = \Sigma \alpha_{hi}\, \alpha_{il}\, X_l.$$

Da nun zwischen den Formen X_h keine lineare Relation besteht, so ist diese Gleichung eine Identität, also

$$\Sigma \alpha_{hi} \alpha_{il} = (h\,l).$$

Die Coefficienten α_{mn}, als Coefficienten der bilinearen Form

$$A = \Sigma \alpha_{mn} x_m y_n$$

aufgefasst, genügen also der Gleichung

$$A^2 = E.$$

Die characteristische Function von A hat also[1]) p einfache Elementartheiler von der Form $\varrho - 1$ und $k - p$ einfache Elementartheiler $\varrho + 1$. Mithin giebt es $k - p$ linear von einander unabhängige Grössenreihen

$$\alpha_1^s,\ \alpha_2^s \cdots \alpha_k^s;\quad s = 1,\ 2 \cdots k - p,$$

für welche

$$\Sigma [\alpha_{hi} + (h\,i)]\, \alpha_h^s = o;\quad i = 1,\ 2 \cdots k,$$

ist. Es bestehen also auch zwischen den Formen P_h nicht mehr als $k - p$ linear von einander unabhängige Identitäten

$$\Sigma P_h \alpha_h^s = o,\ s = 1,\ 2 \cdots k - p$$

d. h. die Zahl der linear von einander unabhängigen Formen ist gleich p^2[2]).

---

1) F., S. 15.

2) In derselben Weise lässt sich, worauf ich hier noch aufmerksam machen möchte, auch das Problem lösen:

Alle symmetrischen oder alternirenden Formen zu finden, welche durch eine Substitution U, die eine Form S von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt, in sich selbst übergehen.

Ist

1) $$U^1 S U = S,$$

so sind alle Formen T, die gleichfalls durch U in sich übergehen, nach § I Nr. 8 gegeben durch

2) $$T = P S,$$

wenn

3) $$P U^1 = U^1 P.$$

Bezeichnet man die vollständige Lösung von 3) durch

$$P = \Sigma \alpha_s P_s,$$

Analoge Betrachtungen gelten auch für den Fall wo die Determinante von $(S+S^1)$ nicht verschwindet. In dem Falle, wo beide Determinanten gleich Null sind, ist eine Reduction auf das Problem der vertauschbaren Formen auf diesem Wege nicht mehr ausführbar. Aber auch hier lässt sich die Bestimmung der Formen T^1+T, T^1-T gesondert vornehmen.

Setzt man nach 2)

$$V^{-1}(T+T^1)(V^1)^{-1}V^1(S+S^1)V+V^{-1}(T^1-T)(V)^{-1}V^1(S^1-S)V=o,$$

so kann man die Substitution V stets so wählen, dass die symmetrische Form in E_1 übergeht, wo E_1 nur die n_1 Variabelnpaare $x_1 y_1 \cdot\cdot x_\varrho y_\varrho$ enthält.

---

so ist die zu erfüllende Bedingung, dass T symmetrisch oder alternirend werden soll, ausgedrückt durch

4) $$\Sigma \alpha_s P_s = \pm \Sigma \alpha_s S^1 P_s^1 S^{-1}.$$

Setzt man aber in der aus 3) folgenden Gleichung

$$P^1 U^{-1} = U^{-1} P^1$$

für U^{-1} den aus 1) folgenden Werth:

$$S^{-1} U^1 S = (S^1)^{-1} U^1 S^1$$

ein, so erhält man:

$$S^1 P^1 S^{-1} U^1 = U^1 S^1 P^1 S^{-1};$$

d. h. es ist

5) $$S^1 P_s^1 S^{-1} = \Sigma \beta_{sl} P_l;$$

und nach 4)

$$\Sigma \alpha_s P_s = \pm \Sigma \alpha_l \beta_{ls} P_s,$$

oder wegen der Unabhängigkeit der Formen P_s

6) $$\alpha_s = \pm \Sigma \alpha_l \beta_{ls}.$$

Aus 5) folgt aber:

$$P_s^1 = \Sigma \beta_{sl} S^{1^{-1}} P_l S.$$

$$P_s = \Sigma \beta_{sl} S^1 P_l^1 S^{-1} = \Sigma \beta_{sl} \beta_{lj} P_j,$$

und hieraus erhält man

$$\Sigma \beta_{sl} \beta_{lj} = (sj).$$

Die Anzahl der von einander unabhängigen symmetrischen und alternirenden Formen, welche hiernach durch die Anzahl der einfachen Elementartheiler von der Form $(\varrho \pm 1)$ der characteristischen Function der Form

$$\Sigma \beta_{ik} x_i y_k$$

bestimmt ist, ist demnach insgesammt stets gleich der der linear unabhängigen mit der gegebenen Substitution U vertauschbaren Formen.

Ich muss mich hier damit begnügen, auf die mannigfache Bedeutung hinzuweisen, welche diese Betrachtung für die Geometrie der quadratischen Formen hat.

Setzt man also

$$V^1 S^1 V = s^1, \quad V^{-1} T (V^1)^{-1} = t,$$
$$V^1 S V = s, \quad V^{-1} T^1 (V^1)^{-1} = t^1,$$

so wird

$$18) \qquad (t + t^1) E_1 + (t^1 - t)(s^1 - s) = o.$$

Hieraus folgt erstens

$$(t^1 - t)(s^1 - s) E_2 = o,$$

und dies sind $n(n - n_1)$ lineare Gleichungen für die $\frac{1}{2} n(n-1)$ Coefficienten der alternirenden Form $t^1 - t$. Aus der Gleichung

$$[(t + t^1) + (t^1 - t)(s^1 - s)] E_1,$$

in welche 18) nun übergeht, ergeben sich noch $n n_1$ lineare Gleichungen für die $\frac{1}{2} n(n+1)$ Coefficienten der symmetrischen Form $t + t^1$.

Eine besonders elegante Lösung ergiebt sich so in dem Falle, wo $E_1 = E$ ist, d. h. die Determinante von $S + S^1$ nicht Null ist. Setzt man

$$s^1 - s = \sigma,$$

so folgt aus 18)

$$(t + t^1) + (t^1 - t)\sigma = o,$$

oder als Bedingung für $(t^1 - t)$

$$(t^1 - t)\sigma = \sigma (t^1 - t).$$

Ist umgekehrt X eine Form, welche mit der alternirenden Form σ vertauschbar ist, so ist

$$t^1 - t = X^1 - X,$$
$$t^1 + t = -(X^1 - X)\sigma,$$

also

$$2t = -(X^1 - X)(\sigma + E).$$

Es möge nun angenommen werden, dass die ersten Unterdeterminanten der characteristischen Function von σ

$$|\sigma - \varrho E| = |V^1| \, |S^1 - S - \varrho(S + S^1)| \, |V|$$

für keine Wurzel derselben sämmtlich verschwinden, dass also namentlich auch $|S^1 - S|$ nicht bei geradem n, und ohne seine ersten Unterdeterminanten bei ungeradem n verschwindet. Ist nun[1])

$$|\sigma - \varrho E| = a_0 + a_1 \varrho + a_2 \varrho^2 + \cdots a_n \varrho^n,$$

so besteht zwischen den Potenzen der Form σ die Relation

$$a_0 \sigma^0 + a_1 \sigma^1 + a_2 \sigma^2 \cdots a_n \sigma^n = o,$$

während die Formen

$$\sigma^0, \ \sigma^1, \ \sigma^2 \cdots \sigma^{n-1},$$

von einander unabhängig sind. Da nun σ eine alternirende Form ist, wird bei geradem $n = 2p$

$$|\sigma - \varrho E| = a_0 + a_2 \varrho^2 + a_4 \varrho^4 + \cdots a_{2p} \varrho^{2p};$$

also

$$a_0 \sigma + a_2 \sigma^3 + \cdots a_{2p} \sigma^{2p+1} = o.$$

Mithin sind die $p = \frac{n}{2}$ alternirenden Formen

$$\sigma, \ \sigma^3, \ \sigma^5 \cdots \sigma^{2p-1},$$

von einander unabhängig.

Ist dagegen $n = 2p + 1$, so wird

$$|\sigma - \varrho E| = a_1 \varrho + a_3 \varrho^3 + \cdots a_{2p+1} \varrho^{2p+1};$$

d. h. es sind nur die $p = \frac{n-1}{2}$ alternirenden Formen

$$\sigma, \ \sigma^3, \cdots \sigma^{2p-1}$$

von einander linear unabhängig. Da ferner unter der angegebenen Voraussetzung die einzigen mit σ vertauschbaren Formen die linearen Combinationen der Potenzen von σ sind, so ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn die characteristische Function

$$|S^1 - S - \varrho (S + S^1)|$$

oder

$$|S - \lambda S^1|$$

keine Wurzel besitzt, für welche ihre sämmtlichen ersten Unterdeterminanten verschwinden, und auch für $\lambda = -1$

---

1) Vgl. F. S. 11, ff.

nicht verschwindet, so ist die Gesammtheit der linear von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$TS + T^1 S^1 = o$$

dargestellt durch

$$t^1 - t = \alpha_1 \sigma + \alpha_3 \sigma^3 + \cdots \alpha_{2p-1} \sigma^{2p-1}$$

$$-(t^1 + t) = \alpha_1 \sigma^2 + \alpha_3 \sigma^4 + \cdots \alpha_{2p-1} \sigma^{2p}$$

oder

$$-2t = (\alpha_1 \sigma + \alpha_3 \sigma^3 + \cdots \alpha_{2p+1} \sigma^{2p-1})(E + \sigma)$$

wobei die Anzahl der p von einander unabhängigen Parameter α gleich der grössten ganzen in $\frac{n}{2}$ enthaltenen Zahl ist.

Für zerlegbare Formen kann man die Lösung der Gleichung 1) nicht unerheblich vereinfachen.

Ist S eine in $S_1 + S_2 + \cdot + S_k$ zerlegbare Form, und sind S_α und S_β irgend zwei Bestandtheile derselben, so folgt aus

$$ST + S^1 T^1 = o$$

nach Multiplication mit E_α und E_β

$$S_\alpha T + S_\alpha^1 T^1 = o,$$

$$S_\beta T + S_\beta^1 T^1 = o,$$

oder, wenn

$$E_\alpha T E_\alpha = t_\alpha; \quad E_\alpha T E_\beta = t_{\alpha\beta},$$

$$E_\beta T E_\beta = t_\beta; \quad E_\alpha T^1 E_\beta = t_{\beta\alpha},$$

gesetzt wird, und

$$t_{\alpha\beta}^1, \; t_{\beta\alpha}^1$$

die conjugirten Formen von $t_{\alpha\beta}$, $t_{\beta\alpha}$ sind:

19) $$S_\alpha t_\alpha + S_\alpha^1 t_\alpha^1 = o,$$

$$S_\beta t_\beta + S_\beta^1 t_\beta^1 = o,$$

$$S_\alpha t_{\alpha\beta} + S_\alpha^1 t_{\beta\alpha} = o,$$

$$S_\beta t_{\beta\alpha}^1 + S_\beta^1 t_{\alpha\beta}^1 = o.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen 19) ergeben sich die Coefficienten der beiden Formen t_α, t_β. Aus den beiden letzten aber folgt durch Uebergang zu den conjugirten Formen

20) $$-t_{\alpha\beta} = S_\alpha^{-1} S_\alpha^1 t_{\beta\alpha} = t_{\beta\alpha} S_\beta^1 S_\beta^{-1},$$

21) $$-t_{\beta\alpha}^1 = S_\beta^{-1} S_\beta^1 t_{\alpha\beta}^1 = t_{\alpha\beta}^1 S_\alpha^1 S_\alpha^{-1}.$$

Hieraus geht hervor:

Haben die beiden characteristischen Functionen

$$|S_\alpha^1 - \varrho S_\alpha|, \quad |S_\beta^1 - \varrho S_\beta|$$

keinen gemeinsamen Theiler, so ist

$$t_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}^1 = t_{\beta\alpha} = t_{\beta\alpha}^1 = o;$$

d. h. es ist dann die Form T in derselben Weise zerlegbar.

Haben dagegen jene Functionen einen gemeinsamen Theiler, so existirt eine von Null verschiedene Form $t_{\beta\alpha}$, welche die Gleichung 20)

$$S_\alpha^{-1} S_\alpha^1 t_{\beta\alpha} = t_{\beta\alpha} S_\beta^1 S_\beta^{-1}$$

befriedigt. Bezeichnet man den gemeinsamen Werth der beiden Seiten dieser Gleichung mit

$$-t_{\alpha\beta},$$

so ist auch

$$-t_{\alpha\beta}^1 = t_{\beta\alpha}^1 S_\alpha (S_\alpha^1)^{-1} = (S_\beta^1)^{-1} S_\beta t_{\beta\alpha}^1,$$

oder

$$-t_{\beta\alpha}^1 = t_{\alpha\beta}^1 S_\alpha^1 S_\alpha^{-1} = S_\beta^1 S_\beta^{-1} t_{\alpha\beta}^1$$

d. h. es ist auch die Gleichung 21) erfüllt. Zugleich wird

$$t_\alpha + t_\beta + t_{\alpha\beta} + t_{\beta\alpha}^1$$

derjenige Bestandtheil von T, welcher zu den beiden Bestandtheilen S_α, S_β von S gehört, denn nach den vorstehenden Gleichungen sind auch die beiden letzten Gleichungen 19) befriedigt.

Setzt man aber, um 20) zu lösen,

$$S_\alpha = \Sigma a_{i_\alpha k_\alpha} x_{i_\alpha} y_{k_\alpha},$$

$$S_\beta = \Sigma a_{i_\beta k_\beta} x_{i_\beta} y_{k_\beta},$$

$$t_{\beta\alpha} = \Sigma t_{i_\alpha k_\beta} x_{i_\alpha} y_{k_\beta},$$

wobei die Indices anzeigen, dass nur die in den entsprechenden Formen

S_α, S_β vorkommenden Variabeln vorhanden sind, so besteht für die $(\alpha\beta)$ Coefficienten $t_{i_\alpha k_\beta}$ das System von $(\alpha\beta)$ Gleichungen

21) $$\Sigma t_{k_\alpha m_\beta}(a_{k_\alpha l_\alpha} a_{m_\beta s_\beta} - a_{l_\alpha k_\alpha} a_{s_\beta m_\beta}) = o.$$

Setzt man

$$a_{k_\alpha l_\alpha} a_{m_\beta s_\beta} - a_{l_\alpha k_\alpha} a_{s_\beta m_\beta} = h_{k_\alpha m_\beta,\ l_\alpha s_\beta},$$

so folgt bei gleichzeitiger Vertauschung von l_α und k_α, s_β und m_β

$$h_{k_\alpha m_\beta,\ l_\alpha s_\beta} = - h_{l_\alpha s_\beta,\ k_\alpha m_\beta}$$

Die Determinante des Systems der Coefficienten in den Gleichungen 21) ist daher eine schiefe, und ihr Verschwinden mit der oben angegebenen Bedingung eines gemeinsamen Theilers äquivalent. Und so hat man den Satz:

Die Anzahl der Parameter, durch welche die Form $S_\alpha + S_\beta$ in sich nicht singulär transformirt wird, ist um eine gerade resp. ungerade Zahl grösser, als die Zahl der Parameter, durch welche S_α und S_β in sich transformirt werden, je nachdem das Product der Ordnungen von S_α, S_β gerade oder ungerade ist.

Nach Herrn Kronecker[1]) kann jede bilineare Form von nicht verschwindender Determinante durch congruente Substitution in ein Aggregat elementarer Formen von der Gestalt

$$E,\ \overline{E}_0,\ \underline{E}^0,\ E^0$$

verwandelt werden, wo

$$E = x_0 y_1 + x_1 y_2 + \cdots x_{2n-2} y_{2n-1}$$
$$+ c(x_1 y_0 + x_2 y_1 + \cdots x_{2n-1} y_{2n-2}),$$

und c^2 nicht gleich Eins;

$$\overline{E}_0 = x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_4 - x_4 y_3$$
$$+ \cdots x_{2n-2} y_{2n-1} + x_{2n-1} y_{2n-2},$$

und n eine gerade Zahl $2p$;

1) K. S. 430.

$$\underline{E}^0 = -x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_3 + x_3 y_2 - x_3 y_4 - x_4 y_3$$
$$+ \cdots - x_{2n-2} y_{2n-1} - x_{2n-1} y_{2n-2}$$

und n eine ungerade Zahl $2p+1$;

$$E^0 = c^1 x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_3$$
$$+ \cdots x_n y_{n-1} + (-1)^n x_{n-1} y_n$$

zu setzen ist.

Die Determinante von $E + \varrho E^1$ enthält nur die Elementartheiler $(c+\varrho)^n$, $(1+\varrho c)^n$; die von $\bar{E}_0 + \varrho \bar{E}_0^1$ nur die Elementartheiler $(1+\varrho)^{2p}$, $(1+\varrho)^{2p}$; die von $\underline{E}^0 + \varrho \underline{E}^{01}$ nur die Elementartheiler $(\varrho-1)^{2p+1}$, $(\varrho-1)^{2p+1}$; die Determinante von $E^0 + \varrho E^{01}$ enthält endlich bei geradem n nur den elementaren Theiler $(1+\varrho)^{n+1}$, während derselbe bei ungeradem n gleich $(1-\varrho)^{n+1}$ ist.

Für Formen von der einfachen Gestalt der elementaren Formen E, $\underline{E}_0$, $\bar{E}^0$, E^0, welche im ganzen

$$2n,\ 4p,\ 2(2p+1),\ n+1$$

Variabelnpaare enthalten, lässt sich leicht die Anzahl der homogenen willkürlichen linearen Parameter bestimmen, welche in den Lösungen der Gleichung

$$ST + S^1 T^1 = o$$

auftreten. Die betreffenden Resultate mögen hier kurz angeführt werden.

1) Ist

$$S = x_0 y_1 + x_1 y_2 + \cdots$$
$$+ c(x_1 y_0 + x_2 y_1 + \cdots)$$

und N die Zahl der Variabelnpaare in S, so hat man in T $\frac{1}{2}N$ resp. $\frac{1}{2}(N+1)$ Parameter, je nachdem N gerade oder ungerade ist. Die nicht singulären Substitutionen für E sind daher — wie im allgemeinen Falle — von n Parametern abhängig.

2) Ist

$$S = x_0 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + \cdots$$
$$+ x_1 y_0 - x_2 y_1 + x_3 y_2 - x_4 y_3 + \cdots$$

und versteht man unter N dieselbe Zahl wie bei 1), so enthält die Form T für

$$N = 4p,\ 2(2p+1),\ 2p+1$$

im ganzen

$$4p,\ 4p+1,\ p+1$$

willkürliche Parameter. Die nicht singulären Substitutionen für $\overline{E}_0$ sind also von $4p$ Parametern abhängig.

3) Ist

$$S = -x_1 y_0 + x_1 y_0 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) - x_1 y_3 + x_3 y_2 - (x_3 y_4 + x_4 y_3) \cdots$$

so beträgt die Zahl der Parameter in T

$$4p,\ 4p+3,\ p+1$$

je nachdem

$$N = 4p,\ 2(2p+1),\ 2p+1$$

ist. Die nicht singulären Substitutionen für $\underline{E}^0$ sind daher von $4p+3$ Parametern abhängig

4) Ist endlich

$$S = c x_0 y_0 + (x_1 y_0 - y_1 x_0) + (x_2 y_1 + x_1 y_2) + (x_3 y_2 - x_2 y_3) + (x_4 y_3 + x_3 y_4) + \cdots$$

so erhält man für T, ganz wie im allgemeinen Falle $\frac{1}{2} N$ resp. $\frac{1}{2}(N-1)$ Parameter, und daher sind auch die nicht singulären Substitutionen für E^0 nicht durch eine grössere Mannigfaltigkeit ausgezeichnet.

Es hat hiernach keine Schwierigkeit, die Zahl der Parameter zu bestimmen, durch welche eine bereits auf elementare Formen reducirte Form in sich transformirt wird[1]). Indessen beruht diese Reduction durch congruente Transformationen selbst auf Operationen[2]), die bisher auf rationale noch nicht zurückgeführt sind.

---

1) Vgl. insbesondere auch die Bemerkungen auf Seite 340—342.

2) Vgl. die mit K. bezeichnete Arbeit des Herrn Kronecker, sowie C. Jordan, Sur les transformations d'une forme quadratique en elle même, Journal de Mathématiques, Année 1888, S. 349.

§ XI.

Irreducibilität des Systemes der eigentlichen Transformationen.

Durch die vorstehenden Untersuchungen können alle Substitutionen U gefunden werden, für die wenigstens eine der beiden Determinanten $|U+E|$ oder $|U-E|$ von Null verschieden ist.

Wenn dagegen die characteristische Function

$$\Delta(\varrho) = |U - \varrho E|$$

von U unter der Voraussetzung einer eigentlichen Substitution sowohl für $\varrho = +1$ als auch für $\varrho = -1$ verschwindet, so muss $\Delta(\varrho)$ von einer geraden Ordnung m für $\varrho = -1$ verschwinden. Sei ferner $\Delta(\varrho) = \Delta_1(\varrho)\Delta_2(\varrho)$, wo $\Delta_1(\varrho)$ das Product der Elementartheiler, die für $\varrho = -1$ verschwinden, und U_1 eine Form der Variabeln $x_1 y_1, \cdot \cdot x_m y_m$, welche dieselben Elementartheiler hat, wie $\Delta_1(\varrho)$ und ebenso U_2 eine aus den Variabeln x_{m+1}, $y_{m+1} \cdot \cdot x_n y_n$ gebildete Form mit den Elementartheilern von $\Delta_2(\varrho)$. Dann ist die Form

$$U_0 = U_1 + U_2$$

der Form U ähnlich, also

$$G U G^{-1} = U_0 = U_1 + U_2,$$

und

$$U^1 S U = S.$$

Hieraus folgt

$$(G^1)^{-1} U^1 G^1 (G^1)^{-1} S G^{-1} G U G^{-1} = (G^1)^{-1} S G^{-1};$$

also, wenn

$$(G^1)^{-1} S G^{-1} = S_0,$$

gesetzt wird

$$(G^1)^{-1} U^1 G^1 S_0 G U G^{-1} = S_0,$$

oder

$$U_0^1 S_0 U_0 = S_0.$$

Hieraus folgt aber[1]), dass S_0 ebenso in zwei Formen $S_1 + S_2$ zerlegbar ist, wie die Form U_0 in $U_1 + U_2$.

---

1) Vgl. § II, S. 250.

Daher wird

$$U_1^1 S_1 U_1 = S_1,$$
$$U_2^1 S_2 U_2 = S_2.$$

Nun verschwindet die Form $\varDelta_1(\varrho)$ nur für $\varrho = -1$, also ist die Determinante von $E_1 - U_1$ nicht Null, und ebenso ist die Determinante von $E_2 + U_2$ von Null verschieden, da $\varDelta_2(\varrho)$ den Theiler $\varrho = -1$ nicht enthält. Es werde nun angenommen, dass eine Form H_1 der m Variabelnpaare $x_1 y_1, \cdot \cdot x_m y_m$ vorhanden sei, deren Determinante nicht verschwindet, und der Gleichung

$$1) \qquad H_1 S_1 + H_1^1 S_1^1 = o$$

genügt, und es sei ferner

$$2) \qquad T_1 = \frac{E_1 + U_1}{E_1 - U_1}(S_1)^{-1},$$

$$T_2 = S_2 \frac{E_2 - U_2}{E_2 + U_2};$$

also auch

$$3) \qquad T_1 S_1 + T_1^1 S_1^1 = o,$$

$$4) \qquad T_2^1 = - S_2^1 S_2^{-1} T_2.$$

Setzt man ferner

$$5) \qquad T_h = G^1 [(T_1 + 2\,h\,H_1)^{-1} + T_2] G,$$

wo h einen willkürlichen Parameter bedeutet, so ist wegen

$$S = G^1 (S_1 + S_2) G,$$
$$S^1 = G^1 (S_1^1 + S_2^1) G,$$
$$S^{-1} = G^{-1}(S_1^{-1} + S_2^{-1})(G^1)^{-1} = G^{-1}(S_1 + S_2)^{-1}(G^1)^{-1},$$

$$\begin{aligned} S^1 S^{-1} T_h &= G^1 (S_1^1 + S_2^1) G\, G^{-1} (S_1 + S_2)^{-1} (G^1)^{-1} G^1 [(T_1 + 2\,h\,H_1)^{-1} + T_2] G \\ &= G^1 (S_1^1 + S_2^1) [(T_1 + 2\,h\,H_1)(S_1 + S_2)]^{-1} G + G^1 (S_1^1 + S_2^1)(S_1^{-1} + S_2^{-1}) T_2 G \\ &= G^1 (S_1^1 + S_2^1)(T_1 S_1 + 2\,h\,H_1 S_1)^{-1} G + G^1 S_2^1 S_2^{-1} T_2 G. \end{aligned}$$

Mittelst der Gleichungen 1), 3), 4) wird hieraus mit Bezug auf 5)

$$\begin{aligned} S^1 S^{-1} T_h &= G^1 [(T_1 S_1 + 2\,h\,H_1 S_1)(S_1^1)^{-1}]^{-1} G - G^1 T_2^1 G \\ &= - G^1 [(T_1^1 + 2\,h\,H_1^1)^{-1} + T_2^1] G = - T_h^1. \end{aligned}$$

Demnach genügt die Form T_h der Gleichung

6) $$T_h^1 = -S^1 S^{-1} T_h.$$

und der Parameter h kann dabei jeden Werth oberhalb einer gewissen Grenze annehmen, da die Determinante von H_1 nicht Null ist.

Es ist ferner nach 5)

$$\begin{aligned}
&(T_1 + 2hH_1 + S_2^{-1})(G^1)^{-1}(S + T_h) \\
&= (T_1 + 2hH_1 + S_2^{-1})[S_1 + S_2 + (T_1 + 2hH_1)^{-1} + T_2]G, \\
&= [(T_1 + 2hH_1)S_1 + E_1 + E_2 + S_2^{-1}T_2]G, \\
&= \left[\frac{E_1 + U_1}{E_1 - U_1} + \frac{E_2 - U_2}{E_2 + U_2} + E_1 + E_2 + 2hH_1 S_1\right]G, \\
&= 2[(E_1 - U_1)^{-1} + (E_2 + U_2)^{-1} + hH_1 S_1]G;
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
(T_1 + 2hH_1 + S_2^{-1})(G^1)^{-1}(S - T_h) &= [(T_1 + 2hH_1)S_1 - E_1 + E_2 - S_2^{-1}T_2)]G, \\
&= 2[U_1(E_1 - U_1)^{-1} + U_2(E_2 + U_2)^{-1} + hH_1 S_1]G.
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\begin{aligned}
(S + T_h)^{-1}(S - T_h) = G^{-1}[(E_1 - U_1)^{-1} + hH_1 S_1 + (E_2 + U_2)^{-1}]^{-1} \times \\
\times [U_1(E_1 - U_1)^{-1} + hH_1 S_1 + U_2(E_2 + U_2)]G
\end{aligned}$$

Die Determinante der Potenz mit dem Exponenten -1 wird hier auch für $h = o$ nicht unbestimmt, da die Formen $E_1 - U_1$ und $E_2 + U_2$ kein Variabelnpaar gemeinsam haben und ihre Determinanten nicht verschwinden. Demnach wird

$$\lim_{h=o}[(S + T_h)^{-1}(S + T_h)] = G^{-1}(U_1 + U_2)G = U,$$

denn es ist

$$[(E_1 - U_1)^{-1} + (E_2 + U_2)^{-1}]^{-1} = (E_1 - U_1) + (E_2 + U_2).$$

Das heisst:

Unter der angegebenen Voraussetzung lässt sich die Transformation U mit Hülfe eines Grenzprocesses aus der vollständigen Lösung der linearen Gleichung 6)

$$T^1 = -S^1 S^{-1} T$$

herleiten, indem man die willkürlichen Parameter als Functionen einer Variabeln h auffasst.

Es beruht aber die vorstehende Betrachtung auf der Möglichkeit, eine Form H_1 von nicht verschwindender Determinante zu finden, welche der Gleichung 1) genügt, und hierzu ist nothwendig und hinreichend[1]), dass die Elementartheiler der characteristischen Function

$$|S_1 + \varrho S_1^1|$$

von der Form $(\varrho - 1)^\alpha$, $(\varrho + 1)^\beta$ nur paarweise auftreten. Die Elementartheiler von $|S + \varrho S^1|$ sind aber zusammengenommen gleich denen von

$$|S_1 + \varrho S_1^1| \text{ und } |S_2 + \varrho S_2^1|.$$

Diese Bedingung ist zunächst erfüllt, wenn die Determinante

$$|S \pm S^1|,$$

was bei geradem n stattfinden kann, überhaupt nicht verschwindet. Ist dagegen n eine ungerade Zahl, und hat die Function

$$|S + \varrho S^1|$$

nur die einfache Wurzel $\varrho = -1$, während $|S + S^1|$ nicht Null ist, so kann die zu einer geraden Zahl von Variabeln m gehörige Function

$$|S_1 + \varrho S_1^1|$$

nicht für $\varrho = -1$ verschwinden, da sie in diesem Falle mindestens den Theiler $(\varrho + 1)^2$ haben müsste, für den überdies alle ersten Unterdeterminanten noch Null werden.

Man hat also den folgenden Satz:

Die sämmtlichen Substitutionen, durch welche eine allgemeine bilineare Form S von nicht verschwindender Determinante eigentlich in sich transformirt wird, bilden ein irreducibeles System.

Durch eine andere Specialisirung ergeben sich auch die beiden wichtigen von Herrn Frobenius bewiesenen Sätze über den irreducibelen

---

1) Vgl. § IX.

Character derjenigen eigentlichen Transformationen, welche eine symmetrische resp. alternirende Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformiren, dessen darauf bezüglicher Untersuchung[1]) die vorstehende nachgebildet ist.

§ XII.

Ueber die Anzahl der Parameter, von denen die Coefficienten der Transformation in sich selbst abhängen.

Da jede Form ihrer conjugirten ähnlich ist[2]), so besteht die Gleichung

1) $$SP^1S^{-1} = P.$$

Ist umgekehrt S eine gegebene Form von nicht verschwindender Determinante, und ist p eine Form, welche der Gleichung 1) genügt, so existirt auch immer eine Form P von nicht verschwindender Determinante, welche dieselbe befriedigt. Denn für

$$P = p - \varrho E$$

wird

$$SP^1S^{-1} = P;$$

und umgekehrt kann man aus den Lösungen P von nicht verschwindender Determinante jede Speciallösung herleiten. Die Aufgabe, bei gegebenem S alle Formen P zu finden, welche der Gleichung 1) genügen, reducirt sich also auf die Bestimmung aller Formen dieser Art, deren Determinante von Null verschieden ist.

Da aus 1) folgt

$$PS^1 + \varrho SP^1 = P(S^1 + \varrho S),$$

so sind die Schaaren conjugirter Formen

$$PS^1 + \varrho SP^1 \text{ und } S^1 + \varrho S$$

äquivalent, also auch congruent. Mithin existirt eine Substitution W, für welche

---

1) F. S. 44 ff.
2) F. S. 21.

$$PS^1 + \varrho S P^1 = W^1 (S^1 + \varrho S) W$$

wird, und es ist

$$PS^1 = W^1 S^1 W.$$

Die Gleichung 1) geht demzufolge über in

2) $$(S^1)^{-1} S W = W (S^1)^{-1} S,$$

und zugleich wird

3) $$P = W^1 S^1 W (S^1)^{-1}.$$

Demnach ist die Form W mit der antisymmetrischen Form $(S^1)^{-1} S$ vertauschbar. Und umgekehrt sind in der Gleichung 3) alle Lösungen der Gleichung 1) von nicht verschwindender Determinante enthalten, sobald W der Gleichung 2) genügt.

Denn aus

$$P = W^1 S^1 W (S^1)^{-1},$$

oder

$$P^1 = S^{-1} W^1 S W,$$

folgt

$$S P^1 = W^1 S W = W^1 S^1 W (S^1)^{-1} S = PS.$$

Es seien nun

$$P_1, \; P_2 \cdot \cdot \; P_\mu,$$

die μ von einander linear unabhängigen Lösungen der Gleichung 1), deren Anzahl durch eine Untersuchung der Determinante des Systems der linearen Gleichungen 1) bestimmt werden kann; ferner

$$W_1, \; W_2 \cdot \cdot \; W_m,$$

die m von einander linear unabhängigen Lösungen der Gleichung 2), also

$$W = \sum_m \beta_i W_i$$

die allgemeine Lösung von 2). Dann wird

4) $$W^1 S^1 \cdot W = \sum_m \sum \beta_i \beta_k (W_i^1 S^1 W_k + W_k^1 S^1 W_i)$$

unter der Voraussetzung, dass bei gleichen Indices i und k der Term in der Klammer nur einmal hinzuschreiben ist.

Setzt man

$$Q_{ik} = W_i^1 S^1 W_k (S^1)^{-1},$$

so wird

$$Q_{ik}\,S = W_i^1 S^1\, W_k (S^1)^{-1} S = S(S^{-1}\, W_i^1 S\, W_k),$$

also

$$Q_{ik} S = S\, Q_{ki}^1.$$

Die Form

$$R_{ik} = Q_{ik} + Q_{ki} = (W_i^1 S^1\, W_k + W_k^1 S^1\, W_i)(S^1)^{-1}$$

genügt also der Gleichung

$$R_{ik} S = S\, R_{ik}^1;$$

mithin wieder der Gleichung 1).

Es ist daher

$$R_{ik} = \sum_{\mu} r_{iks} P_s,$$

wo die $r_{iks} = r_{kis}$ numerische Coefficienten sind, und aus der Gleichung 4) folgt nunmehr die Identität

5) $$\sum_{\mu} \alpha_s P_s = \sum_{\mu}\sum_{m} \beta_i \beta_k r_{iks} P_s,$$

aus welcher wegen der Unabhängigkeit der P_s folgt

6) $$\alpha_s = \sum_{m} \beta_i \beta_k r_{iks};$$

$$s = 1,\ 2 \cdots \mu.$$

In diesen Gleichungen muss jede der Grössen β_i wirklich enthalten sein. Denn da in der Form

$$W_i^1 S^1\, W_i$$

die Determinanten von W_i und S nicht verschwinden, so kann dieselbe nicht Null sein, und daher enthält der Ausdruck $W^1 S^1\, W$ selbst den Term

$$\beta_i^2\, W_i^1 S^1\, W_i,$$

der sich gegen keinen anderen aufheben kann. Dagegen können die rechten Seiten der Gleichungen 6) etwa nur $m_1 \overline{\overline{<}} m$ von einander unabhängige Functionen der β_i enthalten, welche durch

$$B_1,\ B_2 \cdots B_{m_1},$$

bezeichnet sein mögen.

Sind nun umgekehrt die Grössen α, d. h. ist die Form P willkürlich als Lösung von 1) gegeben, so ist

$$PS^1 = W^1 S^1 W;$$

d. h. es giebt dann stets Auflösungen der Gleichungen 6), diese sind also von einander unabhängig. Von den Grössen B sind daher $m_1 - \mu$ willkürlich. Und da aus den Grössen B nur m_1 Parameter β_i bestimmt werden können, so folgt, dass bei gegebenen Werthen der α die Grössen β noch

$$m - \mu$$

willkürliche Parameter enthalten müssen.

Diese Zahl ist aber, wie leicht zu sehen, gleich der Anzahl der Parameter, die in denjenigen Substitutionen enthalten sind, welche S in sich selbst transformiren.

Ist nämlich U eine Substitution, die S in sich transformirt, so ist

$$U^1 S U = S,$$

also auch

$$(S^1)^{-1} S U = U (S^1)^{-1} S.$$

Bezeichnet man mit W_h irgend eine willkürlich gedachte Lösung dieser Gleichung 2), deren Determinante nicht Null ist, ferner mit

$$W_1, \; W_2 \cdot \cdot \; W_m,$$

die Gesammtheit der von einander linear unabhängigen, so ist

$$U = (\Sigma \beta_s W_s) W_h^{-1}.$$

Setzt man

$$W_h^1 S^1 W_h = PS^1,$$

so kann P als eine völlig willkürliche Lösung der Gleichung 1) angesehen werden, so dass also die Coefficienten α in der Gleichung

$$P = \sum_{\mu} \alpha_s P_s$$

selbst willkürlich sind. Zugleich wird aber

$$P = W_h^1 U^1 S^1 U W_h (S^1)^{-1}.$$
$$= (\Sigma \beta_s W_s^1) S^1 (\Sigma \beta_\sigma W_\sigma) (S^1)^{-1};$$

man erhält also vermöge der auf S. 351 ausgeführten Betrachtung wieder zur Bestimmung der β die Gleichungen 6), wie zu zeigen war.

Man erhält also folgenden Satz:

Die Anzahl der willkürlichen Parameter, durch welche eine Form S von nicht verschwindender Determinante in sich cogredient transformirt wird, ist gleich

$$m - \mu$$

wo m die Anzahl der linear von einander unabhängigen mit $(S^1)^{-1}S$ vertauschbaren Formen, μ die Zahl der von einander linear unabhängigen Formen P ist, die der Gleichung 1) genügen.

Sei, um diese Theorie auf ein Beispiel anzuwenden, S eine symmetrische Form. Dann ist $(S^1)^{-1}S = E$, also $m = n^2$. Dagegen ist die Zahl der von einander linear unabhängigen Formen, welche der Gleichung 1)

$$SP^1 = PS$$

genügen gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$, da hierzu nur erforderlich ist, dass PS eine symmetrische Form ist, also $\mu = \frac{1}{2}n(n+1)$. Mithin beträgt die Zahl der Parameter β

$$n^2 - \tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{2}n(n-1).$$

Ist dagegen S alternirend, so findet man auf demselben Wege $m = n^2$, und für die alternirende Form

$$SP^1 = PS = -(SP^1)^1,$$

$\mu = \frac{1}{2}n(n-1)$, also

$$m - \mu = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Man kann nun endlich leicht zeigen, dass die Zahl $m - \mu$ gleich der Anzahl der willkürlichen Parameter ist, welche in den nicht singulären Substitutionen auftreten, die vermöge der Gleichung

$$ST + S^1T^1 = o \tag{7}$$

bestimmt werden.

Bezeichnet man mit

$$T_1,\ T_2 \cdot \cdot T_\varrho,$$

die von einander linear unabhängigen Lösungen der Gleichung 7), so ist

$$T = \Sigma \beta_\varrho T_\varrho;$$

und zugleich nach § X, 4)

$$T = \Sigma \alpha_s (S^{-1} W_s - W_s^1 S^{-1}),$$

sowie

$$S^{-1} W_s - W_s^1 S^{-1} = \Sigma \beta_{\varrho s} T_\varrho,$$

also

8) $$\beta_\varrho = \sum_m \alpha_s \beta_{\varrho s}.$$

Da die Grössen β von einander unabhängig sind, so können nicht alle ϱ reihigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccc} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdot\ \cdot & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdot\ \cdot & \beta_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \beta_{\varrho 1} & \beta_{\varrho 2} & \cdot\ \cdot & \beta_{\varrho m} \end{array} \right\|$$

verschwinden. Den Gleichungen

9) $$\sum_m \alpha_s \beta_{\sigma s} = o, \quad \sigma = 1,\ 2 \cdot \cdot \varrho,$$

genügen daher $m - \varrho$ von einander linear unabhängige Systeme der Grössen α_s. Bezeichnet man diese durch

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdot\ \cdot & \alpha_m^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdot\ \cdot & \alpha_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \cdot \\ \alpha_1^{m-\varrho} & \alpha_2^{m-\varrho} & \cdot\ \cdot & \alpha_m^{m-\varrho} \end{array}$$

so verschwinden auch die $m - \varrho$ reihigen Determinanten der Matrix aus den α_i^k nicht sämmtlich. Es sind demnach die Formen

$$\begin{array}{l} \alpha_1^1 \quad W_1 + \cdot \cdot \alpha_m^1 \quad W_m = Z_1, \\ \alpha_1^2 \quad W_1 + \cdot \cdot \alpha_m^2 \quad W_m = Z_2, \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \alpha_1^{m-\varrho}\ W_1 + \cdot \cdot \alpha_m^{m-\varrho}\ W_m = Z_{m-\varrho}, \end{array}$$

linear von einander unabhängig, welche zufolge der Gleichungen 9) die Gleichung

$$S^{-1}Z - Z^1 S^{-1} = o$$

oder die Gleichung 1) befriedigen. Die Anzahl dieser Formen ist aber gleich ${}_{\prime}\mu$. Demnach ist

$${}_{\prime}\mu = m - \varrho, \quad \varrho = m - {}_{\prime}\mu.$$

Hieraus folgt der Satz:

Die nicht singulären Substitutionen, welche eine Form S in sich transformiren, enthalten ebenso viele willkürliche Parameter, wie die allgemeinste Substitution dieser Art überhaupt.

Inhalt.