Theorie

der

Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen

insbesondere des

Saturnringes

von

H. Seeliger.

Die vorliegende Abhandlung stützt sich auf Betrachtungen, die ich vor einigen Jahren in der Arbeit „zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbesondere des Saturn“ [1]) angestellt habe. Ich habe in jener Arbeit, die ich im Folgenden der Kürze wegen mit I bezeichnen will, die dort gewonnenen Grundlagen hauptsächlich auf den hellen Saturnring angewendet. Gegenwärtig beabsichtige ich den Gegenstand allgemeiner zu behandeln und hoffe damit die Photometrie der staubförmigen Massen nicht nur von specielleren Voraussetzungen, welche der Natur des behandelten Gegenstandes gemäss noch in I vorkommen, befreit, sondern auch so allgemein, als es wünschenswerth ist, dargestellt zu haben.

Unter einer staubförmigen kosmischen Masse oder kurz gesagt einer Staubwolke werde ein Aggregat von discreten Massentheilchen verstanden, deren gegenseitige Entfernung gross ist im Vergleiche zu ihren Dimensionen. Dieses Verhältniss braucht keineswegs s e h r gross zu sein, es ist aber sicher, dass die in I entwickelten Formeln erst dann genügend genau sind, wenn das genannte Verhältniss eine gewisse Grenze übersteigt. Diese Einschränkung liegt in der Natur der Sache und kommt bei den Anwendungen, die ich bisher zu machen Veranlassung hatte und bei der mässigen Genauigkeit, welche bei der mathematischen Verfolgung ähnlicher Vorgänge, wie die zu besprechenden, aus vielerlei Gründen zu erreichen möglich ist, nicht in Frage. Sie wird überdies bei kosmischen Gebilden staubförmiger Natur schon deshalb weniger wichtig sein, als sie hier wahrscheinlich immer von vornherein erlaubt sein wird.

1) Abhandlungen der k. bayer. Akademie d. W. II. Cl. XVI. Band. S. 403—516. München 1887. Insbesondere kommen hier in Betracht Art. 11 ff.

Wenn eine solche kosmische Wolke von der Sonne beleuchtet wird, so wird jedes Massentheilchen andere theilweise beschatten und wird von anderen davor liegenden theilweise verdeckt. Die beschatteten Theile sind im Allgemeinen von den verdeckten verschieden. Nur in dem Falle der genauen Opposition, wenn also der Beobachter genau in derselben Richtung wie die als leuchtender Punkt angenommene Sonne von der Staubwolke aus erscheint, sind beide vollkommen identisch. Hieraus ergiebt sich nun, dass eine mehr oder weniger merkbare Lichtzunahme in der Nähe der Opposition stattfinden muss und es folgt weiter, dass diese Lichtzunahme unter Umständen, nämlich dann, wenn die Staubmasse wenig durchsichtig ist, sehr bedeutend werden kann. Die mathematische Aufgabe, welche sich hier darbietet, besteht darin, die Grösse dieser Lichtzunahme zu berechnen. Dieselbe hat, wie man sieht, gar nichts zu thun mit der Untersuchung des Einflusses der Phase auf die Beleuchtung, welche jedes einzelne Massentheilchen darbietet. Im Gegentheil, die Phase spielt, solange man ganz in der Nähe der Opposition bleibt, gar keine Rolle und das ist der Grund, warum die Theorie der Beleuchtung der Staubwolken in diesem wichtigsten Punkte ganz unabhängig ist von dem elementaren Beleuchtungsgesetze. Dies ist schon deshalb nicht unwichtig, weil man über das letztere bisher keine allgemein gültigen Voraussetzungen machen konnte und dahin gerichtete Versuche in der Photometrie des Himmels immer scheitern müssen, wie ich bei verschiedenen Gelegenheiten gezeigt habe. Sobald man sich von der Opposition um grössere Winkelbeträge entfernt, kommt natürlich der gesammte elementare Einfluss der Phase in Frage und sobald dies eintritt, lassen sich die meisten Beleuchtungsphänomene der Planeten und ähnlicher Weltkörper im Allgemeinen nicht mehr auf gesichertem Wege theoretisch verfolgen.

Bei dem Saturnringe liegen nun in dieser Beziehung die Dinge ausserordentlich günstig, indem der Phasenwinkel stets klein ist. Hierdurch kann man den photometrischen Betrachtungen über ihn eine Sicherheit in den Grundlagen geben, die sonst schwer erreichbar ist. Die Untersuchung der Saturnringe in photometrischer Beziehung dürfen deshalb ein besonderes Interesse beanspruchen, ganz abgesehen davon, dass dieselben auch von nicht geringem Gewichte sind bei der Beantwortung der Frage nach der Constitution dieser merkwürdigen Gebilde. Dieser Punkt wird im Folgenden näher erörtert werden.

Die folgende Abhandlung ist in 10 Artikel getheilt, deren wesentlichen Inhalt mit wenigen Worten anzugeben zweckmässig sein dürfte.

Art. 1. Zusammenstellung von Formeln, welche für das Folgende unentbehrlich sind und welche sich auf die Beleuchtung von Kugeln und auf den Begriff der Albedo, in der von mir aufgestellten Definition, beziehen.

Art. 2. Die allgemeine Theorie der Beleuchtung staubförmiger Massen.

Art. 3. Anwendung der Formeln auf eine kugelförmige homogene Staubwolke.

Art. 4. Die Beleuchtung mehr oder weniger durchscheinender staubförmiger Massen mit besonderer Rücksicht auf den sogen. dunklen Saturnring. Die Helligkeitsverhältnisse einer Staubwolke, welche sich scheinbar auf einen anderen Körper projicirt, der durch sie hindurch von der Sonne beleuchtet wird.

Art. 5. Betrachtung der speciellen Verhältnisse, welche die Saturnringe darbieten.

Art. 6. Discussion der Wahrnehmungen, welche an dem dunklen Ringe und bei Gelegenheit des letzten Wiedererscheinens der Saturnringe (i. J. 1891) gemacht worden sind.

Art. 7. Angenäherte Darstellung der Lichtmenge einer undurchsichtigen Staubwolke (heller Saturnring) durch Kramp'sche Integrale.

Art. 8. Die staubförmige Masse wird nicht mehr bestehend gedacht aus Kugeln mit demselben Radius, sondern aus Kugeln von beliebiger Grösse in beliebigem Mischungsverhältniss, wodurch alsdann über die Gestalt der einzelnen Massentheilchen speciellere Voraussetzungen wegfallen.

Art. 9. Umgestaltung der Formeln für den allgemeinen Fall in eine für die numerische Rechnung brauchbare Form.

Art. 10. Detaillirte Behandlung des Falles, in welchem die staubförmige Masse aus Kugeln besteht, deren Radien alle möglichen Werthe zwischen zwei Grenzen haben und zwar alle in gleicher Häufigkeit. — Bemerkungen über den Einfluss einer räumlichen Ausdehnung der Lichtquelle.

Zum Schlusse werden noch einige wenig umfangreiche Zahlentabellen angefügt, welche bei den in dieser Abhandlung vorkommenden Rechnungen Erleichterungen gewähren.

1.

Es sollen zunächst im Anschluss an I einige Festsetzungen gemacht werden. Das Flächenelement ds erhalte unter dem Incidenzwinkel i von einem leuchtenden Punkte die Lichtmenge:

$$L\,ds\cos i$$

und sende einem sehr kleinen Flächenelemente 1, welches senkrecht auf der Verbindungslinie mit ds steht, in der Entfernung $\varDelta$ unter dem Emanationswinkel ε die Lichtmenge zu:

$$d\,Q = \frac{\gamma\,L\,ds}{\varDelta^2}\,\varphi\,(\cos i, \cos \varepsilon)$$

Hierin ist γ eine Constante und φ eine das elementare Beleuchtungsgesetz darstellende, somit im Allgemeinen nicht angebbare Funktion von i und ε. γ hängt mit der Albedo μ zusammen durch die Gleichung [1]):

$$\mu = 2\,\pi\,\gamma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} i . di \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\,(\cos i, \cos \varepsilon)\,\sin \varepsilon\,d\,\varepsilon$$

oder kürzer:

$$\mu = 2\,\pi\,\gamma\,P$$

Eine unter dem Phasenwinkel [2]) α beleuchtete Kugel mit dem Radius ϱ wird dann dem sehr entfernten Beobachter die Lichtmenge

$$Q\,(\alpha) = \frac{\mu\,L}{2\,\pi\,P} \cdot \frac{\varrho^2}{\varDelta^2} \cdot \int\limits_0^{\pi} \sin \vartheta\,d\,\vartheta \int\limits_{\alpha}^{\pi} \varphi\,(\sin \vartheta\,\sin\,(\omega - \alpha), \sin \vartheta\,\sin \omega)\,d\,\omega$$

zusenden. Für $\alpha = 0$ wird dieser Ausdruck:

---

1) Vergl. I Art. 5.

2) In der von mir stets gebrauchten Bedeutung: Winkel an der Kugel im Dreiecke Beobachter — Kugel — Lichtquelle.

$$Q(0) = \frac{\mu L}{P} \cdot \frac{\varrho^2}{\Delta^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos i, \cos i) \sin i \, d i$$

Legt man das sogenannte Lambert'sche Gesetz zu Grunde, setzt also:

$$\varphi = \cos i \cos \varepsilon$$

so wird

$$P = \tfrac{1}{2}$$

$$Q_L(\alpha) = \frac{2 \mu L \varrho^2}{3 \Delta^2 \pi} \left\{ \sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha \right\}$$

$$Q_L(0) = \frac{2 \mu L \varrho^2}{3 \Delta^2}$$

welche Formeln sehr bekannt sind. Für das zweite in I verwendete Gesetz (N) ist

$$\varphi = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}$$

und dann findet sich

$$P = \tfrac{1}{2}$$

und wenn der Kürze wegen nur der Werth von Q_N für $\alpha = 0$ hingeschrieben wird [1])

$$Q_N(0) = \frac{\mu L \varrho^2}{2 \Delta^2}$$

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass, wenn die Lichtquelle eine kleine überall gleich helle Kugel ist, die dem Elemente ds als eine Kreisscheibe mit dem scheinbaren Radius σ erscheint, man bekanntlich hat:

$$L = J \pi \sin^2 \sigma$$

Es ist hier J die Lichtmenge, welche die Flächeneinheit aussendet. Die nothwendige Voraussetzung für die Gültigkeit der letzten Formel ist die Gültigkeit des Emanationsgesetzes, welches in vielen Fällen, wie bei glühenden Metallkugeln, als experimentell und theoretisch hinlänglich bestätigt angesehen werden darf.

---

1) Der Werth $Q_N(\alpha)$ findet sich I S. 427 abgeleitet.

2.

Wir denken uns die staubförmige Masse bestehend aus kleinen Kugeln mit den Radien ϱ, indem die Besprechung der Beschränkung, welche in dieser Annahme liegt, dem Folgenden (Art. 8 ff.) vorbehalten bleiben soll. Läge eine solche Kugel ganz frei im Raume, so würde sie dem Beobachter die Lichtmenge q' zusenden. Setzt man:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\mu L}{2\pi P} \cdot \frac{1}{\Delta^2} \\ f(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\pi \varphi(\sin\vartheta \sin(\omega-\alpha), \sin\vartheta \sin\omega)\, d\omega \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

so wird nach dem vorigen Artikel:

$$q' = \Gamma f(\alpha) \cdot \varrho^2$$

Thatsächlich wird nun aber die Lichtmenge q' nicht voll zur Geltung kommen, denn die einzelnen Kugeln werden von den davorliegenden theilweise verdeckt und von den zwischen ihnen und der Lichtquelle liegenden zum Theil beschattet. Bei der Ableitung der Lichtmenge, welche ein auf der Gesichtslinie senkrecht stehendes Flächenelement $d\sigma$ dem Beobachter zusendet, kann es sich natürlich nur um Mittelwerthe handeln. In I ist nun ausführlich gezeigt worden, dass in der That nur ein Bruchtheil von q' wirksam bleibt und zwar die Lichtmenge

$$q = q' \cdot w \quad (2)$$

Hierbei ist w die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der gegebenen Massenvertheilung ein unendlich kleiner Raum im Inneren der Masse weder beschattet noch verdeckt wird. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich näherungsweise, wenn die Kugeln nicht gar zu dicht bei einander stehen, wie a. a. O. in etwas speciellerer Form bewiesen, so berechnen. Man nenne D die Anzahl der Kugeln, welche in der Raumeinheit enthalten sind und V den Kubikinhalt eines ganz innerhalb der Massenvertheilung liegenden Raumes, der begrenzt wird von zwei Kreiscylindern vom Radius ϱ, deren Axen von der betrachteten kleinen Kugel aus nach der Lichtquelle bezw. nach dem Beobachter gerichtet sind. Denkt man sich demnach die Volumeneinheit dieses aus zwei sich gegenseitig durchsetzenden Cylindern bestehenden Raumes mit der Masse D belegt und berechnet seine Masse: $\int D\,dv$, wo dv ein Volumenelement bedeutet, so ist

$$w = e^{-\int D\,dv}$$

D ist im Allgemeinen eine Funktion des Ortes. Man wird sich also, da die Begrenzung des staubförmigen Körpers gegeben sein muss, $\int D\,dv$ dargestellt denken können als Funktion der Richtungen nach der Lichtquelle und nach dem Beobachter und des Stückes der in der letzteren Richtung gelegenen Geraden, welches zwischen der betrachteten kleinen Kugel und der Begrenzung des Körpers liegt. Ist dx ein Element dieser Strecke, so wird ein kleines Volumenelement, das jedoch als sehr gross gegenüber einer kleinen Kugel zu betrachten ist, von einer Anzahl Kugeln erfüllt sein, welche gegeben ist durch

$$D \cdot dx \cdot d\sigma$$

und da die Lichtmenge, welche jede Kugel der Erde zusendet, durch (2) gegeben ist, erhält man die Lichtmenge aller Kugeln zusammen, welche innerhalb des Körpers liegen und zu der scheinbaren Helligkeit des scheinbaren Flächenelementes $d\sigma$ beitragen

$$q'\,d\sigma \int_0^X D\,e^{-\int D\,dv} \cdot dx$$

wo X die Länge der innerhalb des Körpers gelegenen Strecke der Geraden bedeutet, welche durch $d\sigma$ und den Beobachter hindurchgeht.

Die Flächenhelligkeit J des Elementes $d\sigma$ ist also:

$$J = I\,f(\alpha) \cdot \varrho^2 \int_0^X D\,e^{-\int D\,dv} \cdot dx \qquad (3)$$

Die wirkliche Ausrechnung dieses allgemeinen Ausdruckes ist natürlich nur möglich, wenn D bekannt ist. Ich will mich, da zu anderen besonderen Annahmen keine Veranlassung vorliegt, auf den Fall be-

8

schränken, in welchem eine homogene Massenvertheilung vorliegt. Ist dann R der Inhalt des ganzen Körpers, der aus N Kugeln zusammengesetzt ist, so hat man $D = \frac{N}{R}$ und

$$J = \Gamma f(\alpha) \cdot \frac{N}{R} \varrho^2 \int_0^X e^{-\frac{N}{R} V} \cdot dx \tag{4}$$

V hängt offenbar, da gleiches der Fall ist mit der Grösse des gemeinschaftlichen Theiles der beiden in Frage kommenden Cylinder, vom Phasenwinkel α ab und die Aufstellung des allgemeinen Ausdruckes ist etwas verwickelt. In zwei Fällen jedoch gestaltet sich die Berechnung überaus einfach. Der erste Fall tritt ein, wenn α nicht klein ist. Dann ist das gemeinsame Stück der das V bildenden Cylinder sehr klein gegenüber dem Inhalt der anderen und man wird einfach haben

$$V = \varrho^2 \pi (x + x_1)$$

wo x_1 die Strecke der von einer kleinen Kugel der Masse nach der Sonne gezogenen Geraden ist, welche innerhalb des staubförmigen Körpers liegt. Man hätte nun x_1 als Funktion von x auszudrücken, um die Integration in (4) auszuführen. Das ist nun stets möglich, wenn die Form der Begrenzung des Körpers gegeben ist.

Der zweite Fall tritt ein, wenn α genau gleich Null ist. Dann hat man

$$V = \varrho^2 \pi x$$

und

$$J_0 = \frac{\Gamma f(0)}{\pi} \cdot \left(1 - e^{-\frac{N}{R} \varrho^2 \pi X}\right) \tag{5}$$

Gienge man aber von dem zuerst betrachteten Fall aus und nähme man darauf keine Rücksicht, dass die beiden das V bildenden Cylinder einen gemeinschaftlichen Raum haben, so hätte man für $\alpha = 0$

$$V = 2 \varrho^2 \pi x$$

und

$$J_1 = \frac{\Gamma f(0)}{2 \pi} \left\{1 - e^{-\frac{N}{R} \cdot 2 \varrho^2 \pi X}\right\} \tag{5a}$$

Diese beiden Werthe J_0 und J_1 weichen sehr wesentlich von einander ab und hierin besteht der grundsätzliche Unterschied zwischen der gewöhnlichen Absorptionstheorie und der Theorie der Beleuchtung staubförmiger Massen. Die letztere ergiebt, da sich $J'(4)$ bei kleinem α meistens nur sehr wenig ändert, eine unter Umständen sehr bedeutende Zunahme der Helligkeit bei sehr geringer Abnahme von α, eine Thatsache, die durch die gewöhnlichen Formeln für zerstreut reflectirende Substanzen in diesem Betrage absolut nicht zu erklären ist.

Diese Zunahme kann gemessen werden durch

$$\frac{J_0}{J_1} = 2\,\frac{1 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}}$$

wobei der Kürze wegen gesetzt worden ist

$$\lambda = \frac{N}{R}\,\varrho^2\,\pi\,X$$

Das Maximum dieses Einflusses tritt ein, wenn der staubförmige Körper fast undurchsichtig erscheint. Dies wird ausgedrückt dadurch, dass man λ sehr gross anzunehmen hat. Dann aber wird

$$\frac{J_0}{J_1} = 2$$

Die Helligkeit (im obigen Sinne gemessen) steigt also etwa auf das Doppelte, wenn α von kleinen Werthen bis zu Null abnimmt.

Ist dagegen der Körper äusserst durchsichtig, so wird λ sehr klein und man nähert sich bei abnehmendem λ dem Grenzwerthe

$$\frac{J_0}{J_1} = 1$$

wo schliesslich die ganze erwähnte Helligkeitszunahme nicht mehr zum Vorschein kommt. Die Zwischenstufen zwischen diesen beiden extremen Fällen sind es nun, die insoferne ein besonderes Interesse darbieten, weil zu ihnen der sogenannte dunkle Ring des Saturn gehört. Ehe ich zu der Betrachtung dieses Gegenstandes übergehe, soll zunächst ein Beispiel zu der in (4) angegebenen Integration besprochen werden.

3.

Es sei eine kugelförmige homogene Staubwolke mit dem Radius a gegeben. Es werde von der im letzten Artikel erwähnten Lichtvariation ganz abgesehen, also nur der Fall betrachtet, wo α nicht sehr klein ist. In der Formel (4) ist dann X die Kugelsehne, welche in der Richtung nach dem sehr entfernten Beobachter verläuft. Ist h das Stück der Sehne X zwischen einem auf ihr liegenden Punkte A und der dem Beobachter zugekehrten Kugeloberfläche und h_1 das Stück einer Sehne, die von jenem Punkte parallel zu der Richtung nach der sehr entfernten Lichtquelle verläuft, und zwar dasjenige, welches zwischen dem Punkte und der der Lichtquelle zugewandten Oberfläche liegt, und bezeichnet weiter s die kürzeste Entfernung der Sehne X vom Centrum der Kugel, so hat man

$$V = \varrho^2 \pi (h + h_1)$$

$$X = 2 \sqrt{a^2 - s^2}$$

und die Formel (4) für die Flächen-Helligkeit wird

$$J = \Gamma f(\alpha) \cdot \frac{N}{R} \varrho^2 \cdot K$$

$$K = \int_0^X e^{-\lambda (h + h_1)} \cdot dh \tag{1}$$

worin gesetzt worden ist

$$\lambda = \frac{N}{R} \varrho^2 \pi$$

Legt man in den Mittelpunkt der Kugel als Anfang ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen X Axe die Richtung nach dem Beobachter hat und in deren XZ Ebene die Richtung nach der Lichtquelle liegt, so sind die Coordinaten des Punktes A:

$$\xi = (\sqrt{a^2 - s^2} - h)$$

$$\eta = s \sin \vartheta$$

$$\zeta = s \cos \vartheta$$

Es ist hierin ϑ der Winkel, welchen die Ebene A-Beobachter-Centrum der Kugel mit der XZ Ebene bildet. Ferner sei, wie früher, α die vom Kugelcentrum gesehene scheinbare Entfernung der Lichtquelle vom Beobachter. In Bezug auf ein Coordinatensystem, welches dem soeben benutzten parallel gerichtete Axen hat, dessen Anfang aber in A liegt, ist die Gleichung der Kugel

$$(x + \xi)^2 + (y + \eta)^2 + (z + \zeta)^2 = a^2$$

Dreht man nun das Coordinatensystem um seine Y Axe so, dass die neue X' Axe die Richtung nach der Lichtquelle erhält, setzt also:

$$x = x' \cos \alpha - z' \sin \alpha$$
$$z = x' \sin \alpha + z' \cos \alpha$$

setzt dies in die Gleichung der Kugel ein und macht hierauf $y = z' = 0$, so wird x' gleich dem gesuchten h_1. Auf diese Weise ergiebt sich:

$$h_1 = -(\xi \cos \alpha + \zeta \sin \alpha) + \sqrt{(\xi \cos \alpha + \zeta \sin \alpha)^2 + 2h\sqrt{a^2 - s^2} - h^2}$$

indem leicht einzusehen ist, dass das positive Wurzelzeichen zu nehmen ist. Eine einfache Substitution der früheren Gleichungen ergiebt nun folgendes Resultat: Man setze:

$$f = \sqrt{a^2 - s^2} \cdot \cos \alpha + s \cos \vartheta \sin \alpha$$
$$F = \sqrt{a^2 - s^2} \cdot \sin \alpha - s \cos \vartheta \cos \alpha$$
$$G^2 = F^2 + f^2 = a^2 - s^2 \sin^2 \vartheta$$

dann wird

$$h + h_1 = 2h \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha - f + \sqrt{G^2 - (F - h \sin \alpha)^2}$$

und demzufolge:

$$K = \int_0^{2\sqrt{a^2 - s^2}} dh \cdot e^{-\lambda \left[2h \cos^2 \frac{1}{2}\alpha - f + \sqrt{G^2 - (F - h \sin \alpha)^2}\right]} \qquad (4)$$

Dieses Integral ist entweder mechanisch oder durch passende Reihenentwicklungen zu berechnen, worauf nicht weiter eingegangen werden soll.

Man kann sich indessen auch ohne die Ausführung dieser Berechnung einen Ueberblick über die Helligkeitsvertheilung auf der Kreisscheibe, als welche sich die Staubkugel darstellt, verschaffen, bei constant gehaltenem α.

Differentiirt man (4) partiell nach ϑ, so ergiebt sich nach einfacher Rechnung:

$$\frac{\partial K}{\partial \vartheta} = -\lambda s \sin \vartheta \sin \alpha \int_0^{2\sqrt{a^2-s^2}} \frac{e^{-\lambda(h+h_1)}}{\sqrt{G^2-(F-h\sin\alpha)^2}} h_1 \cdot dh$$

woraus folgt, dass, da $\alpha < 180^0$ ist, $\frac{\partial K}{\partial \vartheta}$ negativ bleibt für Werthe $0 < \vartheta < 180^0$ und stets positiv für Werthe $180^0 < \vartheta < 360^0$. Auf dem grössten Kreise Beobachter-Lichtquelle liegen also die grössten Werthe von J bei $\vartheta = 0$. Von da nehmen die J nach beiden Seiten ab und erreichen auf der Fortsetzung des genannten grössten Kreises, welche von der Lichtquelle abgewendet ist, ihre Minimalwerthe.

Auf dem grössten Kreise ($\vartheta = 0$) liegt also auch das absolute Maximum und zwar existirt ein solches zwischen $s = 0$ und $s = a$, d. h. auf der sichtbaren Seite der kugelförmig angeordneten Staubwolke.

Denn es wächst J für $s = 0$ mit zunehmendem s und für $s = a$ ist $J = 0$. Das letztere folgt von selbst aus (4). Um das erstere nachzuweisen, müssen wir $\frac{\partial J}{\partial s}$ bilden. Bezeichnet man $h + h_1 = S(h)$ so wird

$$\frac{\partial K}{\partial s} = e^{-\lambda \cdot S(X)} \cdot \frac{\partial X}{\partial s} - \lambda \int_0^X e^{-\lambda S(h)} \cdot \frac{\partial S}{\partial s} dh; \quad X = 2\sqrt{a^2-s^2}$$

Es ergiebt sich weiter:

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{G^2-(F-h\sin\alpha)^2}} \cdot \left\{ \frac{-hs}{\sqrt{a^2-s^2}} + h_1 \left[\frac{s}{\sqrt{a^2-s^2}} \cos\alpha - \cos\vartheta \sin\alpha \right] \right\}$$

$$\frac{\partial X}{\partial s} = -\frac{2s}{\sqrt{a^2-s^2}}$$

für $s = 0$ findet man demnach

$$\frac{\partial K}{\partial s} = +\lambda \int_0^X e^{-\lambda S(h)} \cdot \frac{h_1 \cos\vartheta \sin\alpha}{\sqrt{G^2-(F-h\sin\alpha)^2}} dh$$

welcher Ausdruck einen positiven Werth besitzt.

Der direkte Einfluss der Phase wird sich natürlich nach Massgabe von $f(\alpha)$ zeigen.

Es muss übrigens bemerkt werden, dass $f(\alpha) = \frac{1}{r^2} \cdot \varphi(\alpha)$, wo r die Entfernung der Staubkugel von der Lichtquelle und $\varphi(\alpha)$ eine nur von α abhängige Funktion bedeutet.

Die Gesammtlichtmenge Q, welche die ganze Kugel dem Beobachter zusendet, ergiebt sich aus

$$Q = \int J \cdot d\sigma$$

Die Integration ist hierbei auf alle Flächenelements der sichtbaren Scheibe auszudehnen. Es soll dieser Ausdruck nur für $\alpha = 0$ abgeleitet werden. In diesem Falle ist

$$Q = I' f(0) \cdot \frac{N}{R} \varrho^2 \cdot \int d\sigma \int_0^X e^{-\lambda h} \, dh$$

Nennt man x den Winkel, den ein Oberflächenelement ds mit der Richtung nach dem Beobachter bildet, so ist

$$d\sigma = ds \cdot \cos x$$

daher:

$$d\sigma = a^2 \sin x \cos x \cdot d\vartheta \cdot dx$$

und die Integration ist auszudehnen auf alle Werthe von x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und in Bezug auf ϑ von 0 bis 2π. Es ergiebt sich so, da $X = 2a \cos x$

$$Q = 2\pi a^2 \varrho^2 \cdot \frac{N}{\lambda R} \cdot I' f(0) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \left(1 - e^{-2\lambda a \cos x}\right) dx$$

oder $2\lambda a = \nu$ gesetzt:

$$Q = \pi a^2 \varrho^2 \frac{N}{\lambda R} \cdot I' f(0) \frac{\nu^2 - 2 + 2(1+\nu) e^{-\nu}}{\nu^2}$$

oder auch

$$Q = I' f(0) \cdot a^2 \frac{\nu^2 - 2 + 2(1+\nu) e^{-\nu}}{\nu^2}$$

Es ist hierin

$$\nu = 2 \varrho^2 \pi a \frac{N}{R} = \frac{3}{2} N \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2$$

eine absolute Zahl. Wenn die Masse undurchsichtig oder $\nu = \infty$ ist, ist Q demnach übereinstimmend mit der Lichtmenge, die eine jede der kleinen Kugeln aussenden würde, wenn sie denselben Radius wie die Gesammtkugel hat erhielte.

4.

In I habe ich nur eine vollständige Entwickelung für den einen der beiden in Art. 2 erwähnten Grenzfälle gegeben, nämlich, wenn die Staubmasse undurchsichtig ist und diese auf den hellen Saturnring angewandt, welcher allem Anscheine nach in diese Klasse von kosmischen Körpern gehört. Indem ich mich nun zu der Betrachtung des allgemeineren Falles wende, sollen die in I gegebenen Entwickelungen zu Grunde gelegt werden, denn mit ihrer Hülfe ist es leicht die wünschenswerthe Verallgemeinerung zu erlangen. Der Einfachheit wegen soll auch jetzt, wie in I, angenommen werden, dass die Staubmasse durch zwei parallele Ebenen begrenzt ist, welche Annahme übrigens, da nur kleine Winkel α in Betracht gezogen werden, kaum eine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, da sie leicht umgangen werden kann.

Nach den Entwicklungen I, S. 494 ff. hat man zu setzen, um die Formel Art. 2, 4 anwenden zu können:

$$\frac{\cos A \sin \delta}{\sin A + \sin A'}, \ \sin \alpha = \operatorname{tg} \mu; \quad h = x \sin A; \quad H = X \sin A$$

$$h_0 = \varrho \frac{\sin A + \sin A'}{\cos \mu \sin \alpha}; \quad \sin \varphi = \frac{h \cos \mu \sin \alpha}{\varrho (\sin A + \sin A')}$$

Dann kann man die Formel Art. 2, 4 schreiben:

$$J = \Gamma f(\alpha) \cdot \frac{N}{R} \varrho^2 \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ \varrho \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha \cos \mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{N}{R} \nu} \cos \varphi \, d\varphi + \int_{h_0}^{H} e^{-\frac{N}{R} \nu} dh \right\} \tag{1}$$

Hierin bedeuten A und A' die Elevationswinkel der Erde bezw. der Sonne über der Begrenzungsfläche (Ringebene), δ den Winkel zwischen der Ebene Saturncentrum — Erde — Sonne und der durch Saturn und Erde senkrecht auf die Ringebene gelegten Ebene. Ferner ist h die Tiefe der betrachteten Stelle des Ringes unter der oberen Ringebene und H die Dicke des Ringes. Die Formel (1) gilt offenbar nur wenn $H > h_0$. In andern Falle hat man

$$\left.\begin{aligned} J &= \Gamma f(\alpha) \cdot \frac{N}{R} \cdot \frac{\varrho^3}{\sin A} \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha \cos \mu} \int_0^{\varphi_1} e^{-\frac{N}{R} \nu} \cos \varphi \, d\varphi \\ \sin \varphi_1 &= \frac{H \cos \mu \sin \alpha}{\varrho (\sin A + \sin A')} \end{aligned}\right\} \tag{1 a}$$

Nach I S. 495 hat man weiter

$$V = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \cdot \frac{\varrho^3}{\cos \mu} \left\{ \cos \varphi - \tfrac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi \right\} - \tfrac{4}{3} \varrho^3 \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Bezeichnet man zur Abkürzung:

$$\Phi = \frac{3}{8\pi} \left\{ \cos \varphi - \tfrac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi - \tfrac{2}{3} \right\}$$

so kann man die letzte Formel auch schreiben:

$$V = \frac{(\sin A + \sin A')^2 \varrho^3}{\sin \alpha \sin A \sin A' \cos \mu} \left\{ \frac{8\pi}{3} \Phi + \tfrac{2}{3} \right\} - \tfrac{4}{3} \varrho^3 \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Wenn man weiter setzt:

$$m = \frac{N}{R} \varrho^2 \pi \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A \sin A'}$$

so wird

$$\int_{h_0}^{H} e^{-\frac{N}{R} V_2} dh = \frac{1}{m} e^{\frac{4 N \varrho^3 (1 + \cos \alpha)}{3 R \sin \alpha}} \cdot \left\{ e^{-m h_0} - e^{-m H} \right\}$$

Man führe nun die Bezeichnungen ein:

$$\delta = \frac{32}{3} \cdot \frac{\varrho^3 \pi}{R}; \quad \xi = \frac{N \delta}{\cos \mu \sin \alpha} \cdot \frac{(\sin A + \sin A')^2}{4 \sin A \sin A'}$$

$$\mathfrak{A}(\xi) = \xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\xi \Phi} \cos \varphi \, d\varphi; \qquad \mathfrak{B}(\xi) = \tfrac{8}{3} e^{-\xi \frac{3\pi - 2}{8\pi}}$$

Hierdurch wird

$$m h_0 = \tfrac{3}{8} \xi; \qquad m = \tfrac{3}{32} \frac{\sin A + \sin A'}{\varrho \sin A \sin A'} N \delta$$

und die Klammergrösse in (1):

$$\frac{\varrho}{\xi} \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha \cos \mu} \left\{ \mathfrak{A}(\xi) e^{-\frac{\xi}{4\pi} + \frac{1}{8} \frac{N\delta}{\pi} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}} \right\} + \frac{1}{m} e^{+\frac{N\delta}{8\pi} \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}} \cdot \left[e^{-\frac{3}{8}\xi} - e^{-mH} \right]$$

Wenn man, was im vorliegenden Falle erlaubt ist, α so klein annimmt, dass seine zweiten Potenzen vernachlässigt werden können, dann ist:

$$\frac{(\sin A + \sin A')^2}{4 \sin A \sin A'} = 1; \quad \xi = \frac{N\delta}{\cos \mu \sin \alpha}$$

und die Formel (1) wird:

$$J = \frac{3}{32\pi} \cdot \Gamma f(\alpha) \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A}$$

$$\cdot \left\{ (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\, e^{-\frac{\xi}{2\pi}\sin^2 \frac{1}{2}\mu} - \tfrac{8}{3}\, e^{\frac{\xi \cos\mu}{4\pi}} \cdot e^{-\frac{3}{8}\cdot\frac{N\delta}{\sin A + \sin A'}\cdot\frac{H}{\varrho}} \right\} \tag{2}$$

Diese Formel gilt, wie bereits erörtert, nur wenn

$$H > \varrho\, \frac{\sin A + \sin A'}{\cos\mu \sin\alpha}$$

oder, was dasselbe ist, wenn:

$$\frac{N\delta}{\sin A + \sin A'} \cdot \frac{H}{\varrho} > \xi$$

Im anderen Falle ist Formel (1 a) anzuwenden, die unter denselben Voraussetzungen, unter denen (2) aufgestellt worden ist, sich so schreiben lässt:

$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{3}{32\pi}\, \Gamma f(\alpha) \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \xi e^{-\frac{\xi \sin^2 \frac{1}{2}\mu}{2\pi}} \cdot \int_0^{\varphi_1} e^{-\xi\Phi} \cos\varphi\, d\varphi \\ \sin\varphi_1 &= \frac{H}{\varrho} \cdot \frac{\cos\mu \sin\alpha}{\sin A + \sin A'} \end{aligned}\right\} \tag{2 a}$$

Es ist leicht zu sehen, dass (2 a) für $\alpha = 0$ in die Formel Art. 2, 5 übergeht. Bei der Anwendung der Formeln (2) und (2 a) darf nicht vergessen werden, dass dieselbe nicht mehr mit Sicherheit geschehen kann, wenn A und A' sehr klein sind. Es folgt dies aus den Grundlagen der ganzen Betrachtung.

Man wird ferner, wie auch in I bemerkt worden, im Allgemeinen $\mu = 0$ setzen dürfen. Es soll dies weiterhin geschehen.

Im Folgenden wird es sich darum handeln, den Gang der Lichtcurve für kleine α im Grossen und Ganzen zu verfolgen und ich will, zur Bequemlichkeit, die gar keine Folgen haben kann, einfach den Factor

$$\frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} = 2$$

setzen. Da sich $f(\alpha)$ bei sehr kleinen α gewiss nur sehr wenig ändern kann, soll auch noch

$$\frac{\Gamma f(\alpha)}{\pi} = \Gamma' \tag{3}$$

als eine Constante betrachtet werden.

Wenn $H = \infty$ gesetzt wird, erhält man aus (2) die Formel, welche in I ausführlich besprochen worden ist. Man führt dann noch ein

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$$

während den obigen Bemerkungen gemäss

$$\xi = \frac{N\delta}{\sin\alpha}$$

zu setzen ist. Dann wird also

$$J = \tfrac{3}{16}\, \Gamma'\, \mathfrak{C}(\xi) \tag{4}$$

welches die Hauptformel I, S. 481 war. Ich möchte nur einige kurze Bemerkungen zu dem a. a. O. Gesagten hinzufügen.

In I ist für verschiedene Werthe ξ die Funktion $\frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(\xi)}$ in Tafel VI gegeben worden. Ich füge diese Tafel, sowie einige andere von selbst verständliche, auch dieser Abhandlung bei, weil dieselben hier an mehreren Stellen gebraucht werden. Ferner wurde in I für einzelne Werthe von $N\delta$ diese Tafel nach dem Argumente α angeordnet (Tafel VII). Aus diesen Zahlen folgt schon, dass die ganze Lichtvariation sich umsomehr in der Nähe von $\alpha = 0$ abspielt, je kleiner $N\delta$ ist. Es geht diese Thatsache noch deutlicher hervor, wenn man die a. a. O. gegebene Tafel durch Hinzuziehung kleinerer Werthe $N\delta$ erweitert. Einige Zahlen mögen dies illustriren:

log $\mathfrak{C}(\xi)$

	$N\delta = 0.1$	0.05	0.01	0.005
$\alpha = 0^0$	0.727	0.727	0.727	0.727
0.1	0.686	0.656	0.546	0.501
0.2	0.656	0.614	0.501	0.469
0.3	0.633	0.585	0.480	0.456
0.4	0.614	0.563	0.469	0.449
0.5	0.598	0.546	0.461	0.445
1.0	0.546	0.501	0.445	0.436
2.0	0.501	0.469	0.436	0.431
3.0	0.480	0.456	0.432	0.429
4.0	0.469	0.449	0.431	0.428
5.0	0.461	0.445	0.430	0.428

Die Zahlen jeder Verticalreihe streben dem Grenzwerthe 0.426 zu. Man sieht also, dass sich die Helligkeit z. B. für $N\delta = 0.005$ bereits bei $\alpha = 0^0.5$ bis auf etwa 4% auf die Hälfte reducirt hat und für grössere α sich fast gar nicht mehr ändert. Nimmt man $N\delta = 0.00017$, so hat sich die ganze bedeutende Lichtvariation zwischen $\alpha = 0^0$ und $\alpha = 0^0.1$ bis auf etwa 1% vollständig abgespielt. Da nun $N\delta$ nichts anderes angiebt als die Dichtigkeit, welche die Staubwolke besitzt, so ergiebt sich Folgendes:

Eine staubförmige Masse, die so dick ist, dass sie fast undurchsichtig erscheint, weist eine Flächenhelligkeit auf, die sehr stark mit abnehmendem Phasenwinkel zunimmt. Dieselbe kann für $\alpha = 0$ fast bis zum doppelten Betrage steigen, den sie bei sehr kleinen α besitzt. Diese sehr bedeutende Lichtvariation spielt sich bei um so kleineren α ab, je geringer die Dichtigkeit der staubförmigen Masse ist.

Welche bedeutende Rolle dem geschilderten Verhältnisse bei der Beleuchtung des hellen Saturnringes zukommt, ist in I ausführlich erörtert worden und braucht deshalb an dieser Stelle nicht wiederholt zu werden.

Es ist schon oben bemerkt worden, dass bei durchsichtigen Staubwolken die Variation der Helligkeit in der Nähe der Opposition weniger deutlich auftrat und schliesslich bei grosser Durchsichtigkeit ganz unmerklich wird. Im Uebrigen gilt bei ihnen etwas ähnliches, wie bei fast undurchsichtigen Massen, indem sich die mehr oder weniger deutliche Lichtzunahme bei immer kleineren α abspielt, je dünner die Massenvertheilung ist. Als Maass für die Undurchsichtigkeit einer staubförmigen Masse kann die Grösse

$$\nu = \frac{N\delta}{\sin A + \sin A'} \frac{H}{\varrho}$$

angesehen worden. Wenn man dann die oben (S. 18) angedeuteten Vernachlässigungen zu machen sich erlaubt, so wird die Formel (2)

$$J = \tfrac{3}{16}\, \Gamma' \left\{ \mathfrak{C} - \tfrac{8}{3}\, e^{-\frac{3\pi\nu - 2\xi}{8\pi}} \right\} \tag{5}$$

Diese Formel gilt nur für $\nu > \xi$. Im andern Falle ist (2 a) anzuwenden:

$$J = \tfrac{3}{16}\, \Gamma' \xi \int_0^{\varphi_1} e^{-\xi\Phi} \cos\varphi\, d\varphi; \qquad \sin\varphi_1 = \frac{\nu}{\xi} \tag{5 a}$$

Für $\xi = \nu$ geben (5) und (5a) dasselbe, nämlich:

$$J = \tfrac{3}{16}\, \Gamma' \mathfrak{A}(\nu)$$

Setzt man allgemein $\nu = \xi + \sigma$, wo σ eine positive Grösse sein soll, so wird (5):

$$J = \tfrac{3}{16}\, \Gamma' \left\{ \mathfrak{A}(\xi) + \mathfrak{B}(\xi) \left(1 - e^{-\frac{3}{8}\sigma}\right) \right\} \tag{6}$$

Man sieht hieraus, dass für $\nu > 14$ die Helligkeit sich von der eines undurchsichtigen Körpers nur um 1% unterscheiden kann, denn es ist dann $\mathfrak{A} > 4.05$ und $\mathfrak{B} < 0.04$. Setzt man noch in (5a) $\alpha = 0$, so wird:

$$J_0 = \Gamma' \left\{ 1 - e^{-\frac{3}{16}\nu} \right\}$$

Die Grösse der Lichtvariation bei kleinen α wird wieder durch den Quotienten $\frac{J_0}{J}$ charakterisirt, wo J aus (5) oder (5a) zu entnehmen ist. Wenn demnach dieser Quotient für ein bestimmtes ν, also einen bestimmten Grad der Durchsichtigkeit, einen bestimmten Betrag annimmt, so wird dies für einen bestimmten Werth von

$$\xi = \frac{N\delta}{\sin\alpha}$$

eintreten, also bei um so kleineren Werthen von α, je kleiner $N\delta$ ist.

Als Maass der Lichtvariation kann man nach Art. 2 den Ausdruck ansehen

$$\frac{J_0}{J_1} = \frac{2(1 - e^{-\lambda})}{1 - e^{-2\lambda}}; \qquad \lambda = \tfrac{3}{16}\,\nu$$

und für kleine λ

$$\frac{J_0}{J_1} = 1 + \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{24}\lambda^3 \quad . \; . \; .$$

Es ergiebt sich hieraus, dass schon für mässig grosse Werthe von λ sehr merkbare Lichtvariationen eintreten. Man findet:

	$\frac{J}{J_0}$
$\lambda = 0.05$	1.025
0.10	1.050
0.15	1.075
0.20	1.100
0.5	1.26
1.0	1.44

Die mitgetheilten Formeln enthalten Alles, was zur vollständigen Berechnung der Lichtvariation nöthig ist und die Tafel für $\mathfrak{C}$ wird diese Rechnungen wesentlich erleichtern. Nur das in (5 a) vorkommende Integral wäre noch von Fall zu Fall zu berechnen, was keine grösseren Schwierigkeiten verursachen dürfte.

Wenn wir nun noch im Speciellen hervorheben, welche Folgen die Annahme, dass der Staubkörper, wie der Saturnring, durch zwei parallele Ebenen begrenzt ist, nach sich zieht, so ist zunächst zu bemerken, dass die Flächenhelligkeit überall gleich und zwar J ist. Für einen undurchsichtigen Körper ist für $\alpha = 0$

$$J_0 = \frac{\Gamma}{\pi} f(0) \tag{7}$$

dagegen für einen durchsichtigen

$$J_0 = \frac{\Gamma}{\pi} f(0) \left\{ 1 - e^{-\frac{3}{32}\frac{N\delta H}{\varrho \sin A}} \right\} \tag{7 a}$$

Im letzteren Fall ist also die Helligkeit wesentlich von A abhängig. Für äusserst durchsichtige Körper ändert sich dann J_0 umgekehrt proportional mit $\sin A$, denn es ist

$$J_0 = \frac{3}{32} \frac{\Gamma}{\pi} f(0) \frac{N\delta H}{\varrho} \cdot \frac{1}{\sin A}$$

Bei einer undurchsichtigen Masse kann man die Albedo μ jeder einzelnen Kugel bestimmen aus der Kenntniss von J_0. Denn wenn man (7) vergleicht mit Formel Art. 2, 1, so ergiebt sich

$$\mu = \frac{2\pi^2 P \Delta^2}{f(0)\, L} \cdot J_0$$

Nehmen wir z. B. an, dass sich μ auf den hellen Saturnring beziehe und vergleichen wir hiermit die Mitte der Saturnscheibe in der Opposition. Die entsprechenden Grössen für letztere sollen mit einem Strich bezeichnet werden. Nach Artikel 1 ist dann, da $i = \varepsilon = 0$

$$\mu' = \frac{2\pi P' \Delta^2}{\varphi(0,0)\, L} J_0'$$

und demzufolge:

$$\frac{\mu}{\mu'} = \pi \frac{P}{P'} \cdot \frac{\varphi(0,0)}{f(0)} \frac{J_0}{J_0'}$$

Um diesen Ausdruck reduciren zu können, muss eine Annahme über das elementare Beleuchtungsgesetz gemacht werden. Ich will, was ich schon bei früheren Gelegenheiten als zweckmässig bezeichnet habe, das Lambert'sche Gesetz und das zweite (N) in Art. 1 erwähnte in Betracht ziehen, und die zu dem einen oder andern gehörigen Ausdrücke mit dem Index L bezw. N versehen. Zunächst ist für beide Fälle $P = P' = \frac{1}{2}$. Ferner:

$$\varphi_L(0,0) = 1; \quad \varphi_N(0,0) = \tfrac{1}{2}; \quad f_L(0) = \frac{2\pi}{3}; \quad f_N(0) = \frac{\pi}{2}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\mu_L = \mu'_L \cdot \tfrac{3}{2} \frac{J_0}{J_0'} \qquad \Bigg| \qquad \mu_N = \mu'_L \, 2 \frac{J_0}{J_0'}$$

$$\mu_L = \mu'_N \cdot \tfrac{3}{4} \frac{J_0}{J_0'} \qquad \Bigg| \qquad \mu_N = \mu'_N \frac{J_0}{J_0'}$$

Wenn wir gleich eine Anwendung dieser Formeln auf die thatsächlichen Verhältnisse beim hellen Saturnring machen wollen, so ist zu bemerken, dass die hellsten Theile des hellen Ringes heller sind als die Saturnmitte.

Wir haben da hiefür $\frac{J_0}{J_0'} > 1$ anzusetzen.

Nach den Beobachtungen von Zöllner ist $\mu'_L = 0.498$, woraus sich ergiebt $\mu'_N = 0.664$. Es wäre also:

$$\mu_L > 0.747 \text{ oder } \mu_L > 0.498$$

je nachdem für die Saturnscheibe L oder N angenommen wird. Ebenso ergiebt sich in beiden Fällen:

$$\mu_N > 0.996 \text{ oder } \mu_N > 0.664$$

Man wird nun wohl kaum behaupten dürfen, dass die den μ'_L entsprechenden Werthe besonders wahrscheinlich sind, denn sie geben ganz ausserordentlich grosse Albedowerthe.

Es scheint mir dieser Umstand mit einiger Wahrscheinlichkeit den Schluss zuzulassen, dass die Oberfläche des Saturn dem Lambert'schen Gesetze nicht folgt.

Die Grösse ν, welche die Durchsichtigkeit der Staubmasse definirt, kann dadurch bestimmt werden, dass man beobachtet, wieviel das Licht einer Lichtquelle, z. B. eines Fixsternes geschwächt wird, wenn dasselbe den genannten Körper passirt. Das Licht eines Fixsterns von der Helligkeit J_0 wird nach dem Passiren der Staubwolke von der Dicke $\frac{H}{\sin A}$ — in der Richtung des Lichtstrahles gemessen — die Helligkeit

$$J = J_0 \, e^{-\lambda}$$

haben, wo

$$\lambda = \tfrac{3}{16} \, \nu = \tfrac{3}{32} \cdot \frac{N \delta}{\varrho} \cdot \frac{H}{\sin A}$$

Man hat also:

$$\lambda = -\frac{1}{\log e} \log \left(\frac{J}{J_0} \right)$$

Ist die Schwächung des Lichtes in Sterngrössen angegeben, so muss man sich erinnern, dass nach der gewöhnlichen Annahme zwischen den Intensitäten J, J_0 und den entsprechenden Sterngrössen m, m_0 die Gleichung besteht

$$m - m_0 = -2.512 \ \log \frac{J}{J_0}$$

womit man erhält:

$$\lambda = 0.917 \cdot (m - m_0) \tag{8}$$

Es soll nun noch die Beleuchtung studirt werden, welche ein Flächenelement darbietet, das durch eine Staubmasse hindurch von der Sonne beleuchtet und durch dieselbe von der Erde aus betrachtet wird.

Ein Element ds bekomme bei ganz freier Lage die Lichtmenge $ds \, L \cos i$ von der Sonne. Dann wird es thatsächlich die Lichtmenge

$$ds \, L \cos i \cdot e^{-\lambda'} \, ; \quad \lambda' = \tfrac{3}{32} \frac{N \delta}{\varrho} \cdot \frac{H'}{\sin A'}$$

erhalten, wo $\frac{H'}{\sin A'}$ das Stück der in der Richtung nach der Sonne gezogenen Geraden ist, welches innerhalb der Staubmasse liegt. Hiernach würde die Erde, falls diese, vom Elemente ds aus gesehen, ganz frei stände, die Lichtmenge erhalten

$$\gamma \cdot ds \, \frac{L}{\varDelta^2} \, e^{-\lambda'} \, \varphi(i, \varepsilon); \qquad \gamma = \frac{\mu'}{2 \pi P'}$$

wenn die Bezeichnungen der Artikel 1 und 2 beibehalten werden. In Wirklichkeit wird demnach die der Erde zugesendete Lichtmenge sein:

$$d\,Q = \gamma\, d\,s\, \frac{L}{\varDelta^2}\, \varphi(i, \varepsilon) \cdot e^{-(\lambda+\lambda')}\,; \quad \lambda = \frac{3}{3\,2} \cdot \frac{N\delta}{\varrho}\, \frac{H}{\sin A}$$

wo dann $\frac{H}{\sin A}$ die Dicke der Staubmasse in der Richtung $d\,s$ — Erde ist. Die scheinbare Helligkeit findet sich hieraus:

$$\frac{d\,Q}{d\,s \cos\varepsilon} = \gamma \cdot \frac{L}{\varDelta^2} \cdot \frac{\varphi(i, \varepsilon)}{\cos\varepsilon} \cdot e^{-(\lambda+\lambda')}$$

Hierzu kommt noch das Licht, welches die scheinbar vor $d\,s$ gelagerten kleinen Kugeln der Erde zusenden. Die hierdurch erzeugte Helligkeit ist durch eine der beiden Formeln (2) oder (2 a) gegeben. Die Gesammthelligkeit I des Flächenelementes $d\,s$ wird demnach:

$$I = \gamma\, \frac{L}{\varDelta^2}\, \frac{\varphi(i, \varepsilon)}{\cos\varepsilon} \cdot e^{-(\lambda+\lambda')} + J \tag{9}$$

Zur Discussion dieser allgemeinen Formel nehmen wir, wie oben, an, dass der Phasenwinkel sehr klein sei und nehmen für J entweder J_0 oder J_1, setzen also entweder in (2 a) direct $\alpha = 0$ oder gehen von der für nicht kleine α geltenden Formel aus und setzen in ihr nachträglich $\alpha = 0$.

Nach Art. 2, (5) und (5 a) ist aber:

$$J_0 = \frac{f(0)}{2\,\pi^2} \cdot \frac{\mu\, L}{P\, \varDelta^2} \left\{ 1 - e^{-\lambda} \right\}$$

$$J_1 = \frac{1}{2}\, \frac{f(0)}{2\,\pi^2} \cdot \frac{\mu\, L}{P\, \varDelta^2} \left\{ 1 - e^{-2\lambda} \right\}$$

Erlauben wir uns in (9) noch $i = \varepsilon$ und $\lambda = \lambda'$ zu setzen, was bei den späteren Anwendungen dieser Formel gewiss gestattet ist, so wird in den beiden Fällen:

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{L}{2\pi\, \varDelta^2} \left\{ \frac{\mu'}{P'} \cdot \frac{\varphi(\varepsilon, \varepsilon)}{\cos\varepsilon}\, e^{-\lambda} + \frac{\mu}{\pi\, P}\, f(0)\, (1 - e^{-\lambda}) \right\} \\ &\text{oder} \\ I &= \frac{L}{2\pi\, \varDelta^2} \left\{ \frac{\mu'}{P'} \cdot \frac{\varphi(\varepsilon, \varepsilon)}{\cos\varepsilon}\, e^{-2\lambda} + \frac{\mu}{2\pi\, P}\, f(0)\, (1 - e^{-2\lambda}) \right\} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Denn es muss in der ersten Formel berücksichtigt werden, dass, wenn α genau $= 0$ ist, statt $\lambda + \lambda'$ einfach λ zu setzen ist, weil die beschattenden Kugeln mit den verdeckenden vollkommen identisch sind. Diese Coincidenz findet aber, wenn, wie beim dunklen Saturnring, die Entfernung des Flächenelementes ds von der unteren Seite der Staubmasse gross ist im Vergleich zu deren Dicke nur für ausserordentlich kleine Werthe von α statt. Wir können also sagen, dass die erste Formel (10) nur für α genau $= 0$ gilt; wenn α sehr klein ist, wird im ersten Gliede dieser Formel 2λ an Stelle von λ zu setzen sein.

Nennt man I_0 die Flächenhelligkeit von ds, wenn es ganz frei läge, also:

$$I_0 = \frac{\mu'}{2\pi P'} \cdot \frac{L}{\Delta^2} \cdot \frac{\varphi(\varepsilon, \varepsilon)}{\cos \varepsilon}$$

und setzt ferner:

$$c = \frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{P' \cos \varepsilon\, f(0)}{P \pi\, \varphi(\varepsilon, \varepsilon)}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{I}{I_0}\right)_1 &= e^{-2\lambda} + c\,(1 - e^{-\lambda}) \\ \left(\frac{I}{I_0}\right)_2 &= e^{-2\lambda} + \tfrac{1}{2}\,c\,(1 - e^{-2\lambda}) \\ \left(\frac{I}{I_0}\right)_3 &= e^{-\lambda} + c\,(1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

und es entspricht kurz ausgedrückt 1) dem Fall: α sehr klein, 2) α nicht sehr klein und 3) α direct gleich Null. Zur besseren Uebersicht habe ich einige Werthe von (11) für $c = 1$ berechnet. Hier ist $\left(\frac{I}{I_0}\right)_3$ stets $= 1$.

λ	$\left(\frac{I}{I_0}\right)_1$	$\left(\frac{I}{I_0}\right)_2$
0.0	1.00	1.00
0.1	0.91	0.91
0.2	0.85	0.84
0.3	0.81	0.77
0.4	0.78	0.72
0.5	0.76	0.68
0.6	0.75	0.65
0.7	0.75	0.62
0.8	0.75	0.60
0.9	0.76	0.58
1.0	0.77	0.57

Man sieht hieraus, dass auch für nicht grosse λ eine recht merkliche, bis zu 25% steigende Zunahme der Helligkeit bei ganz kleinen Werthen des Winkels α stattfinden kann. Diese kann fast plötzlich auftreten, wenn die Entfernung des Flächenelementes von der Staubwolke im Vergleich zu ihrer Dicke gross ist. Auf diesen Punkt wird bei dem dunklen Saturnring, von dem der nächste Artikel etwas eingehender handeln soll, näher einzugehen sein.

5.

Die Beleuchtungsverhältnisse, welche der Saturnring aufweist, sind, wie ich bei verschiedenen Gelegenheiten auseinander gesetzt habe, nur dann vollständig zu erklären, wenn man die Ansicht, welche schon von J. Cassini angedeutet, in neuerer Zeit besonders eingehend von Maxwell und Hirn besprochen worden ist, acceptirt, nach welcher dieses Gebilde aus discreten Massentheilchen besteht, die nach Art eines dichten Schwarmes von Trabanten um den Saturnkörper kreisen. Nur diese Annahme ist im Stande, alle Erscheinungen und zwar ohne Ausnahme zu erklären, die der Saturnring sowohl dem betrachtenden Fernrohr als auch dem messenden Photometer darbietet.

Ich habe in I fast ausschliesslich nur den hellen Ring (die beiden nach O. Struve's Vorschlag mit A und B bezeichneten Ringtheile) ausführlich behandelt und diese Betrachtung hat dazu geführt, die an sich höchst merkwürdigen und sehr bedeutenden Lichtvariationen vollständig zu erklären, welche dieses Gebilde nach den Beobachtungen des Herrn G. Müller aufweist.

Ich werde nun auch den Ring C, d. i. den sogenannten dunklen Ring, einer Untersuchung in ähnlicher Richtung, soweit dies die Beobachtungen gestatten, unterziehen und auch diese scheint mir zu ganz befriedigenden Resultaten zu führen. Mir scheinen nun diese photometrischen Betrachtungen so unzweifelhaft für die Richtigkeit der obigen Annahmen über die Constitution des Saturnringes zu sprechen, dass ich in ihnen vielleicht den stärksten directen Beweis, der für diese spricht, erblicken möchte. Denn die von mir aufgestellte Formel enthält fast gar nichts Hypothetisches oder wenigstens nur solches, das ganz gleichgültig für die Resultate ist. Der Grund für diese Möglichkeit liegt in dem Umstande, dass der Phasenwinkel bei Saturn stets sehr klein (im Max. $6^0 3'$) ist und der directe Einfluss desselben auf das bei zerstreut reflectirenden Substanzen anzunehmende und als völlig unbekannt anzusehende photometrische Elementargesetz ohne Frage nur sehr unbedeutend sein kann. Man darf also behaupten, dass die Theorie der Beleuchtung des Saturnringes fast ganz unabhängig ist von der Unsicherheit, welche den photometrischen Betrachtungen der Planeten sonst anhaften muss, und dass diese Theorie einen der wenigen Fälle darstellt, wo sich diese Unabhängigkeit erzielen und den erlangten Resultaten eine zuverlässige Beweiskraft ertheilen lässt.

Dass auch in mechanischer Beziehung die Cassini'sche Ansicht zu keinen Widersprüchen führt, ist mit grosser Sicherheit zu behaupten, wenngleich einwandsfreie Untersuchungen in dieser Richtung nicht vorliegen. Ich muss dabei, da dieser Umstand meistens ausser Acht gelassen wird, besonders hervorheben, dass die Gründe, welche Maxwell für die Richtigkeit der genannten Annahme und besonders die, welche er für die Unhaltbarkeit anderer anführt, nicht als stichhaltig angesehen werden können, wenigstens nicht in der von Maxwell gegebenen Gestalt. Bei anderer Gelegenheit[1]) habe ich mich über diesen Punkt geäussert und hoffe demnächst darauf zurückkommen zu können. Indessen scheint es mir angemessen, das Wesentliche dessen, was ich a. a. O. vorgebracht habe, zum Theil mit denselben Worten hier zu wiederholen.

Maxwell hat ausführlich, ebenso wie Laplace, die Möglichkeit eines festen Aggregatzustandes der Ringe untersucht. In astronomischer Beziehung ist aber diesen Untersuchungen lediglich nur ein historisches Interesse zuzuerkennen und zwar deshalb, weil sie geeignet waren, die Ueberzeugung zu befestigen, dass die Saturnringe keine festen Gebilde sein können und so zu der Wiederaufnahme der Cassini'schen Ansicht hindrängten. Denn die flüssige Natur des Ringes ist, obwohl zu wiederholten Malen untersucht, wohl niemals als besonders wahrscheinlich betrachtet worden.

1) Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft XXV, S. 295 ff.

Bekanntlich nahm Laplace schliesslich an, der Saturnring bestehe aus sehr vielen concentrischen, äusserst dünnen Ringen. Da aber von einem solchen System unter gewissen Annahmen leicht gezeigt werden kann, dass es so lange instabil ist, als die Ringe homogen sind, indem die kleinste störende Wirkung von Aussen ein Herabfallen der Ringe auf den Saturnkörper bewirken muss, so sprach Laplace die Meinung aus, die Ringe enthielten sehr ungleichförmig vertheilte Massen. Dass hierdurch ein stabiler Zustand ermöglicht werde, ist indessen von Laplace nicht bewiesen worden. Es tritt ein solcher auch ganz gewiss im Allgemeinen nicht ein und wenn überhaupt, nur unter gewissen Bedingungen. Die Bewegung eines nicht homogenen sehr dünnen Ringes um einen innerhalb desselben gelegenen Centralpunkt ist übrigens auch gegenwärtig noch nicht bekannt. Selbst in sehr einfachen Specialfällen ist bisher die Integration noch nicht gelungen. Maxwell hat nur den Fall in Betracht gezogen, in dem ein homogener, unendlich dünner, an einem Punkte mit Masse beschwerter Kreisring sich um einen in seiner Ebene gelegenen anziehenden Punkt bewegt und die Bewegung sich in derselben Ebene abspielt. Wählt man dann den Anfangszustand des Systemes so, dass der anziehende Punkt sich in der Nähe des Mittelpunktes des Ringes befindet und sich von hier aus sehr langsam entfernt, und entwickelt man dann alles nach Potenzen der Variablen, deren Werthe sehr klein sind, so lange der genannte Zustand bestehen bleibt und lässt die höheren Potenzen fort, so reduciren sich die ursprünglichen Differentialgleichungen auf lineare, deren Integration durch Exponentialfunctionen möglich ist. Enthalten die Exponenten, welche lineare Functionen der Zeit sind, in gewisser Weise imaginäre Coefficienten, so werden Sinus- und Cosinusfunctionen der Zeit die untersuchte Bewegung darstellen. Die Bedingungen für dieses Vorkommniss betrachtet Maxwell als nothwendig und hinreichend für die Stabilität des Systemes. Es unterliegt aber wohl kaum einem Zweifel, dass dieses Verfahren gar keinen Beitrag zur Frage nach der Stabilität des Saturnsystemes liefern kann. Die Beweiskraft eines solchen ist genau so wenig stark, wie die der alten Betrachtungen über die Stabilität des Sonnensystems. Hier wie dort wird die Kleinheit gewisser Grössen vorausgesetzt und dann hierdurch die Beständigkeit dieser Kleinheit bewiesen. Wie sich die Lösungen der Differentialgleichungen gestalten, wenn z. B. in ihnen die nächst höheren Glieder mitgenommen werden, ist in dem vorliegenden Falle gänzlich unbekannt. Noch viel weniger aber kann man behaupten, dass periodische Lösungen der vereinfachten Gleichungen dieselbe Eigenschaft in dem ganz allgemeinen Falle behalten.

Eine Behandlung des mechanischen Systemes, welches der Cassini'schen Ansicht entspricht, liegt, wie schon erwähnt, bisher nicht vor. Allgemeinere Untersuchungen in dieser Richtung hat Maxwell nicht angestellt, er hat aber eine an sich interessante Annahme verfolgt. Diese besteht darin, dass eine Zahl von kleinen Massen im Anfange der Bewegung sich in den Ecken eines regelmässigen Polygones befinden und die Tendenz haben, sich von dieser Configuration ein wenig zu entfernen. Durch Weglassung der zweiten und höheren Potenzen der Glieder, welche die kleinen Abweichungen von dieser regelmässigen Anordnung ausdrücken, führt das Problem auf lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, deren Integration durch Exponentialfunctionen gelingt. Diese letzteren stellen Sinus- und Cosinusfunctionen der Zeit dar, wenn die Gesammtmasse der kleinen Körper einen kleinen Bruchwerth der Saturnmasse nicht überschreitet. Die Frage aber nach der Stabilität eines solchen Systemes kann auf diesem Wege ebenso wenig entschieden werden, wie die analoge, oben erörterte, nach der Stabilität der Bewegung fester Ringe. Auch haben die thatsächlichen Verhältnisse beim Saturnring nicht einmal eine oberflächliche Aehnlichkeit in mechanischer Beziehung mit diesem Maxwell'schen Problem.

Dass der dunkle Ring aus discreten Massentheilchen besteht, dürfte schon der Anblick desselben ergeben. Wir haben bei diesem Gebilde, soweit der äussere Anblick in Frage kommt, zwei Theile zu unterscheiden. Der erste Theil liegt ausserhalb der Saturnscheibe und projicirt sich auf den freien Himmelsgrund. Der zweite projicirt sich auf die dahinter gelegene Saturnscheibe und erscheint als feiner Schleier, wobei natürlich ganz von den Fällen abgesehen werden soll, wo sich der vom hellen Saturnringe auf den Saturnkörper geworfene Schatten mit dem Schleier vermischt. Wir wollen im Folgenden der Kürze wegen den ersten Theil des dunklen Ringes den freien Theil, den zweiten den Schleier nennen. Wenn man nun den Rand der Planetenscheibe ausserhalb des Schleiers und seine Fortsetzung in ihm verfolgt, so ist auch nicht der geringste Einfluss einer Lichtbrechung zu bemerken, eine Erscheinung, die, seit jeher bekannt, mit einer continuirlichen Massenvertheilung wohl nicht zu vereinigen ist.

Nach dem Früheren ist es sehr leicht, die Flächenhelligkeiten des freien Theiles des dunklen Ringes (f), des Schleiers (s) und des hellen Ringes (h) zu berechnen. Es mögen diese Flächenhelligkeiten, dividirt durch die Helligkeit eines Elementes der Saturnscheibe, am besten der Mitte dieser, bezeichnet werden der Reihe nach mit J_f, J_s und J_h. Dann ist nach Art. 4, (11):

$$J_s = e^{-2\lambda} + c_d\,(1 - e^{-\lambda}) \qquad \text{wenn } \alpha \text{ äusserst klein}$$

$$= e^{-2\lambda} + \tfrac{1}{2}\,c_d\,(1 - e^{-2\lambda}) \quad \text{wenn } \alpha \text{ nicht sehr klein}$$

$$= e^{-\lambda} + c_d\,(1 - e^{-\lambda}) \qquad \text{wenn } \alpha = 0$$

und nach Art. 2 (5 a) und Art. 4 (7 a)

$$J_f = \frac{c_d}{2}\,(1 - e^{-2\lambda}) \qquad \text{wenn } \alpha \text{ nicht sehr klein}$$

$$= c_d\,(1 - e^{-\lambda}) \qquad \text{wenn } \alpha = 0$$

Hierin ist dem vorigen Artikel entsprechend

$$c_d = \frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{P'}{\pi P} \cdot \frac{f(0)}{\varphi(\varepsilon, \varepsilon)} \cos \varepsilon$$

wenn die ungestrichenen Buchstaben und f dem dunklen Saturnringe und die gestrichenen und φ der Scheibenmitte entsprechen. Ferner hat man dem Früheren gemäss noch

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\sin A}; \quad \lambda_1 = \frac{3}{32} \cdot \frac{N\delta}{\varrho}\, H$$

Für den hellen Ring hat man einfach:

$$J_h = \frac{c_h}{2} \text{ für nicht sehr kleine } \alpha$$

$$J_h = c_h \text{ für } \alpha = 0$$

wobei c_h die dem c_d analoge Grösse für den hellen Ring bedeutet.

Zunächst ist nun darauf aufmerksam zu machen, dass, wie der Augenschein lehrt, c_h durchaus nicht denselben Werth für alle Theile des hellen Ringes hat. Denn der Ring A, also der äusserste bis zur Cassini'schen Linie, ist offenbar merklich weniger hell als B, ist aber dabei so gut wie vollkommen undurchsichtig bei allen Elevationswinkeln. Daraus folgt nothwendig, dass die Oberflächen der den Ring A bildenden Theilchen physikalisch verschieden sein müssen von denen, welche den Ring B bilden. Daraus folgt aber weiter die Berechtigung, im Bedarfsfalle c_d verschieden von c_h annehmen zu dürfen. Es stände also nichts im Wege c_d bedeutend kleiner als c_h anzunehmen, wodurch der Schleier dann sich als ein auffälligeres Object darstellen müsste. Aber auch, wenn man c_d etwa $= 1$ annimmt, was also bedeuten würde, dass der dunkle Ring, falls er so dick wäre, dass er undurchsichtig erschiene, eine gleiche Flächenhelligkeit wie das zum Vergleich herangezogene Element der Saturnscheibe hätte, kommt man zu keinen Widersprüchen, wie sich aus den Zahlen am Ende des vorigen Artikels ergiebt. Diese Zahlen zeigen, dass in allen jenen Fällen der Schleier als leicht und deutlich sichtbares Object sich darstellen muss, in denen λ ein nicht gar zu kleiner Bruch ist, und man sieht leicht, dass diese Erscheinung mit abnehmendem c an Deutlichkeit gewinnt. Die Erklärung also der Erscheinung, welche der Schleier zeigt, bietet gar keine Schwierigkeiten dar.

Es muss aber noch auf einen Punkt besonders hingewiesen werden. Der dritte Werth von J_s $(\alpha = 0)$ ist gewissermassen ein Ausnahmefall, der nur selten eintritt, während der Werth für kleine Werthe von α fast stets der Wirklichkeit entspricht. Er fängt bei äusserst kleinen Werthen von α überzugehen an in den dritten Werth nach Massgabe des gemeinschaftlichen Theiles, den die beiden Kreiscylinder mit dem Radius ϱ und mit den Axen parallel den Richtungen zur Sonne und zur Erde haben. Es ist leicht die strenge Formel für diesen Uebergang darzustellen; dies soll aber nicht ausgeführt werden, denn die beiden genannten Cylinder schneiden sich innerhalb des dunklen Ringes erst bei ganz minimalen Werthen von α, die auch nur in Ausnahmefällen stattfinden können, so dass der dritte Werth von J_s in der That ganz aus dem Spiele bleiben kann. Bezeichnet man mit d die Entfernung des betrachteten Flächenelementes der Saturnoberfläche von der unteren Begrenzung des Ringes, gemessen in der Richtung nach der Sonne, so kann offenbar der genannte Ausnahmefall nur stattfinden, wenn

$$\alpha < \frac{2\varrho}{d}$$

Nun ist offenbar $d > D$, wo D die kürzeste Entfernung des inneren Randes des dunklen Ringes von der Saturnoberfläche bedeutet, und da D rund zu 15 000 Kilometer angenommen werden darf, folgt

$$\alpha < 28'' \cdot \varrho$$

wo ϱ in Kilometern ausgedrückt gewiss keine grosse Zahl sein kann.

Also bei Werthen von α, die grösser sind als vielleicht einige Zehner von Bogensekunden, kommt nur der erste und zweite Werth von J_s in Betracht. Sobald aber α unter die genannte Grenze herabsinkt, tritt sofort eine merkliche Aufhellung des Schleiers und zwar ziemlich plötzlich auf, und diese Aufhellung wird um so merkbarer sein, je grösser c_d ist. Ist diese Grösse $= 1$, so wird der Schleier ganz verschwinden. Diese merkwürdige Erscheinung dauert nur ganz kurze Zeit und verschwindet sofort wieder, wenn α aus dem genannten Bereiche sich entfernt. Es ist klar, dass dieselbe nur auftreten kann, wenn die Opposition sich zur Zeit ereignet, zu welcher sich Saturn im Knoten seiner Bahn befindet. Es ist aus diesen Gründen sehr wenig wahrscheinlich, dass diese eigenthümliche Lichtvariation jemals wird constatirt werden können. Auch wird hierbei nicht zu übersehen sein, dass das Augenfällige der Erscheinung etwas verwischt werden muss durch den Umstand, dass die Sonne kein leuchtender Punkt ist, sondern auf dem Saturn als eine Scheibe vom Durchmesser $3\frac{1}{2}'$ erscheint. Am Schlusse dieser Abhandlung wird ganz kurz auf diesen Punkt eingegangen werden.

Zur Bestimmung der in den obigen Formeln vorkommenden Grösse λ werden in einwurfsfreier Weise fast nur die seltenen Phänomene dienen können, wo der Trabant Japetus durch den Schatten des Saturnsystemes hindurchzieht. Bis jetzt liegt in dieser Richtung nur eine einzige Beobachtung vor, welche am Lick-Observatory von dem ausgezeichneten Beobachter Herrn Barnard [1]) gemacht worden ist. Herr A. Marth [2]) hatte darauf aufmerksam gemacht, dass 1889 November 1—2, das genannte Phänomen stattfinden werde. Wie es scheint ist ausser Herrn Barnard

1) Monthly Notices L, S. 107 ff.

2) Monthly Notices IXL, S. 427 ff.

Niemandem sonst eine Beobachtung geglückt. Die Resultate, welche Herr Barnard gewonnen, müssen als der directeste Beweis für die Durchsichtigkeit des dunklen Ringes betrachtet werden. Dieselben scheinen, obwohl sie nur auf Helligkeitsschätzungen, nämlich auf Vergleichungen der Helligkeit des Japetus mit Encelaudus und Tethys beruhen, doch einen bedeutenden Grad von Genauigkeit zu besitzen, und eine eingehendere Bearbeitung derselben wäre eine dankenswerthe Arbeit. Es müsste hierbei auf die Wirkung des Halbschattens, welche sich beim Austritt von Japetus aus dem Schatten des Saturnkörpers und bei seinem Eintritt in den Schatten des hellen Ringes deutlich zu zeigen scheint, Rücksicht genommen werden. Für die vorliegenden Zwecke genügt es hervorzuheben, dass aus den Beobachtungen des Herrn Barnard und bei Festhaltung der von ihm angenommenen Helligkeitsscala folgt, dass der dunkle Ring in seinen dem Planeten am nächsten liegenden Theilen fast alles Licht durchlässt und seine Undurchsichtigkeit mit der Annäherung an den hellen Ring successive zunimmt. Die photometrische Lichtabnahme wird ziemlich nahe durch eine gerade Linie dargestellt und die Schwächung des Lichtes beträgt in der Nähe des hellen Ringes ungefähr 0.7 Grössenclassen. Der Elevationswinkel der Sonne war zu jener Zeit — 11°.18. Nehmen wir der Mitte des dunklen Ringes entsprechend eine Schwächung des Lichtes um 0.35 Grössenclassen an, so wird nach Art. 4, (8)

$$\lambda = 0.32; \quad \lambda_1 = 0.0627.$$

Hiermit ergeben sich die folgenden Zahlen:

A	$e^{-2\lambda}$	$(1-e^{-\lambda})$	$\frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda})$	$e^{-\lambda}$
1°	0.00	0.97	0.50	0.03
2	0.03	0.83	0.49	0.17
3	0.09	0.70	0.45	0.30
4	0.17	0.59	0.42	0.41
5	0.24	0.51	0.38	0.49
10	0.49	0.30	0.26	0.70
15	0.62	0.21	0.19	0.79
20	0.70	0.17	0.15	0.83
25	0.74	0.14	0.13	0.86
30	0.78	0.12	0.11	0.88

	$c_d = 1$					$c_d = \frac{1}{2}$				
	J_s			J_f	$J_f(\alpha=0)$	J_s			J_f	$J_f(\alpha=0)$
A	1	2	3			1	2	3		
1°	0.97	0.50	1.0	0.50	0.97	0.49	0.25	0.52	0.25	0.49
2	0.86	0.52	1.0	0.49	0.83	0.45	0.28	0.59	0.24	0.42
3	0.79	0.54	1.0	0.45	0.70	0.44	0.33	0.65	0.23	0.35
4	0.76	0.59	1.0	0.42	0.59	0.47	0.38	0.71	0.21	0.30
5	0.75	0.62	1.0	0.38	0.51	0.50	0.43	0.75	0.19	0.26
10	0.79	0.75	1.0	0.26	0.30	0.64	0.62	0.85	0.13	0.15
15	0.83	0.81	1.0	0.19	0.21	0.73	0.72	0.90	0.10	0.11
20	0.87	0.85	1.0	0.15	0.17	0.78	0.78	0.91	0.08	0.08
25	0.88	0.87	1.0	0.13	0.14	0.81	0.81	0.93	0.06	0.07
30	0.90	0.89	1.0	0.11	0.12	0.84	0.84	0.94	0.05	0.06

Man sieht hieraus, dass der Schleier bei kleinen A sehr erhebliche Lichtvariationen zeigt, auch wenn man von der oben erwähnten plötzlichen Zunahme der Helligkeit absieht. Der freie Theil des Ringes zeigt ebenfalls sehr beträchtliche Lichtvariationen bei kleinen A, dieselben nehmen aber bald mit wachsendem A ab. Man darf indessen hierbei nicht ausser Acht lassen, dass für kleine A die obige Theorie ungenau wird und zum Mindesten dann die abgekürzten Formeln dadurch zu ergänzen sind, dass man nicht $A = A'$ annimmt. Indessen werden doch jedenfals die mitgetheilten Zahlen hinreichen, um ein deutliches Bild von den Verhältnissen, die sich abspielen müssen, zu geben.

Die Zahlen J_f deuten darauf hin, dass man wohl der Albedo der Theilchen, welche den dunklen Ring bilden, einen Werth zuertheilen wird müssen, der beträchtlich kleiner als c_h ist. Etwas Sicheres lässt sich, wie schon erwähnt, darüber nicht sagen; es scheint aber nicht, dass in dieser Beziehung für die Theorie irgend welche Schwierigkeiten entstehen könnten.

Auf der andern Seite bietet die Geschichte der Wahrnehmungen des dunklen Ringes doch, wie mir scheint, einige Merkwürdigkeiten dar. Es soll deshalb zum Schluss dieser Auseinandersetzungen ein flüchtiger Blick auf diese geworfen werden.

6.

Es darf als festgestellt gelten, dass der dunkle Ring zuerst auf der Berliner Sternwarte in den Jahren 1838 und 1839 gesehen worden ist. Encke[1]) hat darüber folgende Aufzeichnungen veröffentlicht:

„1838 Mai 25. Der dunkle Raum zwischen Saturn und seinem Ringe schien Herrn Galle zur Hälfte aus dem allmähligen Uebergange des inneren Randes des Ringes zur Dunkelheit zu bestehen, so dass die Verwaschenheit dieses inneren Randes des inneren Ringes eine bedeutende Breite haben würde.

Juni 10. Die inneren Ränder des ersten Ringes verwaschen sich allmählig in den dunklen Zwischenraum zwischen Ring und Kugel. Es schien, wenn keine Täuschung obwaltet, der Ring von dem Anfang der Verdunkelung an gerechnet fast die Hälfte des Raumes bis zur Saturnkugel einzunehmen."

Dieser sehr reservirten Wiedergabe des von Herrn Galle Gesehenen ist es zuzuschreiben, dass die Berliner Beobachtung unbeachtet blieb. dass der dunkle Ring von W. C. Bond im Herbste 1850 wie ein ganz neues Object beschrieben worden ist und diese Neuentdeckung erst die allgemeinere Aufmerksamkeit auf dieses Object gelenkt hat. Es ist zu bedauern, dass sich Herr Galle[2]) erst hierdurch veranlasst sah, seine in den Jahren 1838 und 1839 ausgeführten zahlreichen Messungen zu veröffentlichen, welche doch die Dimensionen des dunklen Ringes vollkommen exact wiedergeben, und es bleibt räthselhaft, warum Encke in der seiner angeführten Abhandlung beigegebenen Abbildung jeden Hinweis auf den dunklen Ring vermieden hat. Es ist dies um so merkwürdiger, als der dunkle Ring, der im November 1850 ganz unabhängig von Bond auch von Dawes mit einem $6\frac{1}{2}$ zölligen Refractor bemerkt worden ist, gegenwärtig wenigstens ein sehr auffälliges Object ist, das schon in mässig grossen Fernrohren leicht sichtbar ist und auch dem, der nicht besonders darauf achtet, kaum entgehen kann. Ich habe in den letzten Jahren, als der Ring noch weit geöffnet war, öfters den Versuch gemacht, von

1) Ueber den Ring des Saturn. Abhandlungen der Berliner Akademie. 1838.
2) Astronomische Nachrichten Nro. 756.

Laien, die durch das Münchener $10\frac{1}{2}$zöllige Fernrohr den Saturn ansahen, zu erfahren, ob sie den dunklen Ring von selbst, also ohne darauf aufmerksam gemacht zu werden, gesehen haben, und in den allermeisten Fällen eine bejahende Antwort darauf bekommen.

Während also wohl in der That der dunkle freie Ring als ein leicht sichtbares Object bezeichnet werden muss, wird man dies von dem Schleier nicht behaupten können, und es wird immerhin als verwunderlich bezeichnet werden können, dass auf der Encke'schen Zeichnung dieser Schleier ganz deutlich hervortritt, während von dem freien Theil des Ringes keine Spur angedeutet ist.

Noch merkwürdiger ist, dass sich vor der Galle'schen Wahrnehmung nirgends eine Bemerkung über den dunklen Ring vorfindet, obwohl die Saturnringe genug oft von ausgezeichneten Beobachtern betrachtet und sogar ausgemessen worden sind.

Herr O. Struve [1]) hat in Bezug auf diesen Punkt die ältere astronomische Literatur genau durchforscht und ist dabei auf folgende Umstände aufmerksam geworden:

W. Herschel spricht an 4 Stellen, die über Beobachtungen am Saturn in den Jahren 1791 und 1805 handeln, ausdrücklich von dem gleichförmigen Aussehen, das der Zwischenraum zwischen dem Saturnkörper und dem hellen Ring darbot und vergleicht ihn mit dem freien Himmelsgrunde. Herr O. Struve neigt aber der Ansicht zu, dass trotzdem die Aufmerksamkeit Herschel's auf diesen Punkt nicht besonders gerichtet war, er vielmehr nur nebenbei den innersten Theil des Saturnsystemes gewissermassen als Vergleichsobject anführt. Dem gegenüber bleibt aber doch die Schwierigkeit bestehen, auch die Richtigkeit der Auffassung O. Struve's vorausgesetzt, dass ein so deutlich sichtbares Object, wie der dunkle Saturnring jetzt ist, der Aufmerksamkeit Herschel's nicht nur einmal, sondern zu wiederholten Malen hat entgehen können.

Dagegen weist Herr O. Struve, wie mir scheint, ganz überzeugend nach, dass der Schleier mehrere Mal und zwar von verschiedenen Beobachtern gesehen und beschrieben worden ist. Man darf hierbei aber

1) Sur les dimensions des anneaux de Saturne. Mémoires de l'Académie de St. Petersbourg 1852.

nicht übersehen, dass bei diesen Wahrnehmungen die Mitwirkung von Contrastphänomenen nicht ausgeschlossen ist. Der sehr helle Ring *B* grenzt zum Theil an weniger helle Partien der Saturnscheibe. Dann aber erscheint bekanntlich an der Grenze und zwar in der weniger hellen Fläche meistens ein mehr oder weniger auffälliges trübes Band, das ganz wie ein matter Schleier aussieht. Es wird schwer sein zu entscheiden, in wie weit diese Contrastwirkung auf die beschriebenen Phänomene beim Saturn passt, und es soll keineswegs behauptet werden, dass hierdurch Alles bei den älteren Wahrnehmungen, so z. B. die Andeutungen auf der erwähnten Zeichnung von Encke, vollständig erklärt werden kann, aber man wird doch auf die genannten Contrastphänomene Rücksicht zu nehmen haben bei einer endgültigen Interpretation der beschriebenen Erscheinungen.

Auf den Untersuchungen O. Struve's fussend, darf man folgende Sätze als wohl begründet hinstellen:

1) Der dunkle Ring ist vor dem Jahre 1838 nicht gesehen worden, obwohl nachweisbar Saturn mit grösseren, den mittleren Fernrohren der Gegenwart in der hier in Frage kommenden Richtung wohl ebenbürtigen Teleskopen eingehend betrachtet worden ist.

2) Der den hellen Ring von der Saturnscheibe trennende Schleier ist öfters und von verschiedenen Beobachtern bemerkt worden.

3) Gegenwärtig ist der freie Theil des dunklen Ringes ein leicht sichtbares Object, das den Beobachtern weniger leicht entgehen wird, als der Schleier.

Die erste und dritte Thatsache sind schwer mit einander zu vereinigen, wenn man nicht annehmen will, dass im dunklen Ringe bedeutende Veränderungen vor sich gegangen sind. Die zweite Thatsache dagegen mag vielleicht in Nebenumständen, wenn auch nicht ihre Entstehung, so doch eine Verstärkung gefunden haben. Wichtig wäre es, wenn Saturn durch die älteren Fernrohre, natürlich auch mit den alten Ocularen, eingehend betrachtet werden möchte, um einen Vergleich mit den älteren Beschreibungen zu ermöglichen. Die Möglichkeit hierzu ist gegenwärtig noch vorhanden, indem sich einige der älteren Fernrohre noch in gebrauchsfähigem Zustande befinden.

Jedenfalls sind die angedeuteten Verhältnisse sehr merkwürdig und bedürfen der Aufklärung. Stünde es fest, dass der genannte Schleier in früherer Zeit mehr in die Augen fiel, so könnte man diese Thatsache in Verbindung mit der kaum bezweifelbaren Wahrnehmung, dass der freie Theil des dunklen Ringes jetzt heller ist, nur durch die Annahme erklären, dass die Albedo der den dunklen Ring bildenden Theilchen sich vergrössert hätte. Man könnte dann diese Veränderungen mit ähnlichen Processen, wie Vereisungen etc. in Verbindung bringen, eine Hypothese, die an sich zwar nichts Unangemessenes enthält, aber gegenwärtig doch so viel Unsicheres und Gewagtes darbietet, dass nicht näher darauf eingegangen werden soll.

Nicht unerwähnt mögen noch die Erscheinungen bleiben, welche beim Wiedererscheinen des unsichtbar gewordenen Saturnringes im Jahre 1891 beobachtet worden sind.

Der Ring war nach Herrn Barnard[1]) Ende October 1891 selbst in den mächtigsten Fernrohren der Lick Sternwarte vollkommen unsichtbar. Zum ersten Male wurde er dort 1891 October 30, $1^h\ 7^m$ m. Z. Gr. gesehen. Da nun Herr Oudemans[2]) October 29, $17^h\ 9^m$ m. Z. Gr. nichts von dem Ringe sehen konnte, so fällt sein Wiedererscheinen innerhalb des durch diese beiden Angaben eng begrenzten Zeitintervalles. Die Erde besass zu jener Zeit einen Elevationswinkel von $1^0\ 56'$. Herr Oudemans hat weiter an jenem Tage bemerkt: „eine feine dunkle Linie läuft über den Aequator“ und dieselbe als die Projection des dunklen Ringes auf die Saturnscheibe erklärt, weil sie auch noch sichtbar blieb, nachdem die Sonne sich ein wenig über die Ebene des Ringes erhoben hatte. Gegen diese Erklärung ist principiell nichts einzuwenden, nur könnte vielleicht bemerkt werden, dass man hierbei ganz gut auch die Mitwirkung eines Theiles des hellen Ringes hinzuziehen kann. Denn es liegen gewiss nicht die den Ring bildenden Theilchen genau zwischen zwei Ebenen und können immerhin einige Partien sich in dem Schatten der davor liegenden Theilchen befinden, auch nachdem die Sonne ein wenig über die Ringebene emporgestiegen war. Man erhält hierdurch

---

1) Monthly Notices LII, S. 419 ff.
2) Astronomische Nachrichten Nr. 3074.

den Vortheil, eine etwas grössere Breite der dunklen Linie erklären zu können, und dies ist wünschenswerth, weil die innersten Theile des dunklen Ringes, wie oben erwähnt, noch fast vollständig durchsichtig sind und also die dahinterliegende Saturnscheibe hindurchscheinen lassen und selbst nicht ganz dunkel erscheinen. In der Mitte des dunklen Ringes, was dem obigen Werthe von λ als entsprechend angenommen wurde, ist ($A = 1^0\,56'$) $\log \lambda = 0.266$ und demnach lässt hier der Ring immerhin noch 16% des Lichtes der dahinter liegenden Saturnscheibe hindurch.

Ehe der Ring anfing sichtbar zu werden, musste derselbe sich auf der Saturnscheibe als schwarzes Band darstellen. Dasselbe wurde in der That von Herrn Barnard beobachtet und gezeichnet. Derselbe fand am 22. October für die Breite dieses schwarzen Bandes 0.''51 und seine Mitte war vom nördlichen Rande 7.''40, vom südlichen 6.''56 entfernt. Herr Barnard giebt an, dass die gemessene Breite vollkommen übereinstimmt mit den Daten der Ephemeriden. Ich finde nun aber für einen Elevationswinkel A der Erde von $1^0\,41'$ für diese Breite 0.''16 bezw. 0.''24, je nachdem der helle Ring allein oder der dunkle Ring mitgenommen wird. Dagegen finde ich mit den Beobachtungen sehr gut übereinstimmend aus den weiter unten folgenden Daten für den Abstand der Mitte des dunklen Bandes vom nördlichen bezw. südlichen Scheibenrand 7.''64 und 6.''72, wenn nur der helle Ring, und 7.''60 und 6.''76, wenn der dunkle Ring mitgemessen wird. Die vorhin erwähnte Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung scheint einer Aufklärung bedürftig, da Herr Barnard auch am 29. October eine gleich grosse Breite des schwarzen Bandes (0.''65) findet.

Von den vielen interessanten Notizen des Herrn Barnard über das Aussehen des eben sichtbar gewordenen Saturnringes am 29. October 1891 verdienen besonders die folgenden einer Hervorhebung. Der Ring konnte erst in einiger Entfernung (etwa 2'') vom Rande der Scheibe wahrgenommen werden, weiter waren die beiden Hälften des Ringes zu beiden Seiten des Planeten durchaus nicht von gleichem Aussehen, und schliesslich bemerkte Herr Barnard auf der östlichen Ringhälfte zwei hellere Lichtknoten. Das erste Factum kann, wenn man will, durch die Nähe der hellen Planetenscheibe vollständig erklärt werden, aber es wirkt, wie gleich gezeigt werden wird, noch ein zweiter Umstand mit. Die zweite

Thatsache bedarf wohl kaum einer weiteren Erörterung, während zur Erklärung der dritten Herr Barnard annimmt, dass er zwei der inneren Saturntrabanten gesehen habe. Nun könnte aber nur Mimas in Frage kommen und es möchte Schwierigkeiten bereiten beide Lichtknoten auf diese Weise zu erklären. Doch bedarf es in dieser Beziehung keiner weitläufigen Erörterungen, denn mir scheint es überaus wahrscheinlich, dass hier eine ganz andere Erscheinung vorliegt. Schon Schroeter hat solche Lichtknoten an dem äusserst schmalen Saturnringe gesehen und Olbers[1]) hat diese Erscheinung vollständig erklärt. Wenn die Erde nahe in der Ebene des Saturnringes steht, so werden die Helligkeiten der einzelnen Punkte der Lichtlinie, als welche sich dann der Ring darstellt, keineswegs gleich sein. Sie ist proportional der Anzahl der Theilchen, welche sich scheinbar in dem betrachteten Punkte der Lichtlinie vereinigen. Man hat also senkrecht auf die Ringebene Ebenen parallel zur Richtung nach der Erde zu legen und die Anzahl der Theilchen, welche in jeder Ebene liegen, giebt die dort stattfindende Helligkeit an. Man sieht nun leicht ein, dass die Helligkeit der Lichtlinie von der Planetenscheibe aus zuerst zunimmt und dort, wo die innere Anse des dunklen Ringes sich projicirt, ein erstes Maximum eintritt. Ein zweites Maximum tritt dort ein, wo die innere Anse des nächsten hellen Ringes (B), und ein drittes dort, wo die innere Anse des äusseren hellen Ringes (A) sich projicirt. Ein Minimum ergiebt sich am äusseren Ende des hellen Ringes B. Das gilt natürlich in Strenge nur, wenn alle Ringtheile gleich hell wären, was bekanntlich nicht der Fall ist. Namentlich wird das erste Maximum nicht oder nicht in auffälliger Weise zu Stande kommen.

Nach den sorgfältigen Zusammenstellungen des Herrn Oudemans[2]) ist in der mittleren Entfernung des Saturn (9.539)

Radius des äusseren Randes des Ringes A	19."75
„ „ inneren „ „ „ A	17.60
„ „ äusseren „ „ „ B	17.10
„ „ inneren „ „ „ B	13.75
„ „ inneren „ „ „ C	10.90
Aequatorial-Radius des Saturn	8.65
Polarer Radius „ „	7.70

1) Astronomische Nachrichten Nr. 241.

2) Kaiser, de Sterrenhemel, 2. Auflage von Oudemans, Band II. S. 701.

In der mittleren Entfernung müssten also zunächst die ausgesprochenen Maxima der Helligkeit stattfinden in den Entfernungen vom Saturncentrum:

1. Maximum	13″75
2. Maximum	17.60

Näheres über die Art, wie sich diese Maxima herausheben, findet sich bei Olbers a. a. O. Herr Barnard hat die Lage der von ihm bemerkten beiden Lichtknoten nicht gemessen, er giebt aber in einer leider sehr kleinen Zeichnung diese Lage an. Ich habe aus diesem Diagramme mit einer in der Natur der Sache liegenden, voraussichtlich sehr geringen, Genauigkeit mit einem Maassstabe folgende Dimensionen in Millimetern entnommen:

		Rechnung
Aequator. Saturnradius	6.3	6.1
Radius des äussersten Ringes	14.0	14.0
Entfernung des ersten Lichtknotens vom Saturncentrum	10.0	9.7
Entfernung des zweiten Lichtknotens	12.2	12.1

Die daneben stehenden Zahlen geben die auf denselben Maassstab bezogenen Zahlen, wie sie aus den obigen Darlegungen für die beiden Maxima und den angeführten Dimensionen des Saturnsystemes folgen. Die Uebereinstimmung ist eine so vollkommene, dass man kaum zweifeln wird, dass die gegebene Interpretation der von Herrn Barnard gesehenen Lichtknoten zutreffend ist.

Da nun nach dem Obigen auch der Ring von dem Scheibenrande aus an Helligkeit zunimmt, so wird dieser Umstand jedenfalls dazu mitwirken, dass erst in einiger Entfernung vom Rande die Lichtlinie bemerkt werden wird, und es ist kein Zufall, dass Herr Barnard die ersten Spuren derselben in einer Entfernung (2″) gesehen hat, welche fast genau mit der Stelle zusammenfällt, wo sich die innere Anse des dunklen Ringes projicirt, wo also das erste Maximum der Helligkeit in der Lichtlinie auftritt.

7.

Aus den vorstehenden Untersuchungen geht hervor, dass es keine Schwierigkeiten macht, sich einen Ueberblick über die Grösse der Lichtschwankungen zu verschaffen, welche staubförmige kosmische Massen in der Nähe der Opposition zeigen. Die detaillirte Darstellung der Lichtvariation ist dagegen ziemlich verwickelt. Sie ist aber in dem Vorstehenden und insbesondere für undurchsichtige Staubmassen in meiner früheren Abhandlung I vollständig durchgeführt. Man wird sich indessen gegenwärtig halten müssen, dass schon zufolge der Praemissen, auf denen die ganze Theorie beruht, und auch aus practischen Gründen eine rigorose Genauigkeit in den Formeln ganz zwecklos wäre. Deshalb erscheint es als nicht unwichtig, dass sich die Formeln näherungsweise einfacher gestalten und auf bequemer zu handhabende Ausdrücke bringen lassen. Das soll in diesem Artikel geschehen, während in den weiteren Artikeln gezeigt werden wird, wie man sich auch von jenen Annahmen in der Theorie unabhängig machen kann, welche auf noch nicht ganz allgemeinen Voraussetzungen beruhen. Ich werde mich der Kürze wegen dabei ausschliesslich auf undurchsichtige Körper staubförmiger Structur, die wie der Saturnring von zwei parallelen Ebenen begrenzt sind, beschränken. Der allgemeinere Fall lässt sich auf genau dieselbe Weise erledigen. Die in Frage kommenden Formeln für eine undurchsichtige Staubmasse waren (I. S. 481)

$$Q \doteq \Gamma' \cdot (\sin A + \sin A')\,\mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}; \qquad \mathfrak{A} = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\Phi} \cos\varphi\, d\varphi; \qquad \mathfrak{B} = \tfrac{8}{3}\, e^{-x\frac{3\pi-2}{8\pi}}$$

$$\Phi = \frac{3}{8\pi}\left\{\cos\varphi - \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi + \left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\sin\varphi - \tfrac{2}{3}\right\}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass man $\mathfrak{C}$ bis auf geringfügige etwa $\frac{1}{2}$ % nicht übersteigende Fehler genau erhält, wenn man Φ nach Potenzen von $\sin\varphi$ entwickelt und nur die zweiten Potenzen von $\sin\varphi$ mitnimmt. Es kommt dies einer Vernachlässigung von Gliedern gleich, welche innerhalb der Klammer mit $\frac{1}{12}\sin^4\varphi$ beginnen.

Macht man diese Entwickelung, so wird

$$\Phi = \frac{3}{8\pi}\sin\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \sin\varphi\right)$$

und es wird, wenn man $\sin\varphi = z$ setzt:

$$\mathfrak{A} = x\int_0^1 dz \cdot e^{-\frac{3}{8}\frac{x}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}z + z^2\right)}$$

Das kann man aber in die Form eines Kramp'schen Integrales bringen:

$$\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{8\pi x}{3}} \cdot e^{T^2} \int_T^{T'} e^{-\xi^2} \cdot d\xi$$

wenn man setzt:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi x}{128}}; \qquad T' = T\left(\frac{\pi + 4}{\pi}\right)$$

Für die numerische Rechnung führt man zunächst für nicht grosse T und T' das Integral

$$\Theta(T) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^T e^{-\xi^2} d\xi$$

ein und hat dann

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= [0.40910] \sqrt{x} \cdot e^{T^2} \{ \Theta(T') - \Theta(T) \} \\ T &= [9.43353] \sqrt{x}; \qquad T' = [9.79018] \sqrt{x} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierin bedeuten die in Klammern gesetzten Zahlen Logarithmen. Für kleinere T ist $\Theta(T)$ den bekannten älteren Tafeln zu entnehmen oder die Function

$$\Psi(Z) = e^{Z^2} \int_Z^\infty e^{-\xi^2} d\xi$$

den sehr bequemen Tafeln, welche Herr Radau[1]) berechnet hat. Wo diese nicht ausreichen, also für grosse T, wird man nach Herrn Schlömilch so verfahren:

Man hat

$$\left.\begin{aligned} \int_T^\infty e^{-\xi^2} d\xi &= \frac{1}{2T} e^{-T^2} \times \\ \left\{ 1 - \frac{a_1}{T^2+1} + \frac{a_2}{(T^2+1)(T^2+2)} - \frac{a_3}{(T^2+1)(T^2+2)(T^2+3)} + \ldots \right\} \end{aligned}\right|$$

wo

$$a_1 = 0.5; \quad a_2 = 0.25; \quad a_3 = 0.625; \quad a_4 = 0.5625 \quad \ldots$$

1) Tables de l'intégrale $\Psi(Z)$. Mémoires der Pariser Sternwarte XVIII.

Setzt man also

$$f(T) = 1 - \frac{a_1}{T^2+1} + \frac{a_2}{(T^2+1)(T^2+2)} - \quad . \quad . \quad .$$

so wird

$$\Theta(T) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-T^2}}{T} f(T)$$

und schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= [0.72700] \left\{ f(T) - \frac{T}{T'} e^{T^2 - T'^2} \cdot f(T') \right\} \\ \log \frac{T}{T'} &= 9.64335; \qquad T'^2 - T^2 = [9.48696] \cdot x \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Mit Hülfe dieser Formeln habe ich nun $\mathfrak{C}$ berechnet. In der folgenden Tabelle ist unter s der frühere in I und auch am Schlusse dieser Abhandlung gegebene Werth von $\log \frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(x)}$ und daneben der Näherungswerth n gegeben. Es genügt bis $x = 300$ zu gehen, da von hier ab die beiden Werthe bis auf 4 Stellen übereinstimmen.

	s	n	Fehler
$x = 1$	0.2700	0.2702	— 2
2	0.2445	0.2453	— 8
3	0.2233	0.2247	— 14
4	0.2055	0.2072	— 17
5	0.1902	0.1924	— 22
6	0.1771	0.1795	— 24
7	0.1657	0.1682	— 25
8	0.1556	0.1582	— 26
9	0.1468	0.1493	— 25
10	0.1389	0.1414	— 25
12	0.1255	0.1279	— 24
14	0.1145	0.1167	— 22
16	0.1054	0.1072	— 18
18	0.0977	0.0993	— 16
20	0.0910	0.0924	— 14
25	0.0780	0.0789	— 9
30	0.0683	0.0690	— 7
40	0.0549	0.0553	— 4
50	0.0460	0.0462	— 2
100	0.0256	0.0256	0
150	0.0178	0.0178	0
300	0.0093	0.0093	0

Durch diese Zahlen ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen, denn die auftretenden Differenzen sind vollständig zu vernachlässigen. Es seien noch zur Uebersicht einige Näherungswerthe Φ_1 von Φ:

$$\Phi_1 = \frac{3}{8\pi} \sin\varphi \left(\frac{\pi}{2} + \sin\varphi\right)$$

den strengen Werthen von Φ gegenübergestellt. Letztere sind in engeren Intervallen am Schlusse dieser Abhandlung angeführt.

φ	$\log \Phi_1$	$\log \Phi$
0^0	$-\infty$	$-\infty$
10	8.5582	8.5581
20	8.8926	8.8918
30	9.0920	9.0897
40	9.2302	9.2255
50	9.3298	9.3222
60	9.4012	9.3905
70	9.4498	9.4360
80	9.4777	9.4620
90	9.4870	9.4704

8.

Es sollen nun die am Anfange des vorigen Artikels in zweiter Linie genannten Untersuchungen in Angriff genommen werden. Die zwei etwas specielleren Annahmen, auf welchen die in den früheren Artikeln und in I entwickelten Formeln beruhen und die zu einer Verallgemeinerung auffordern, waren: 1) wurde vorausgesetzt, dass sich die Staubwolke aus lauter Kugeln von demselben Radius ϱ zusammensetzt, 2) wurde die Lichtquelle punktförmig angenommen. Zuerst soll nunmehr die erste Voraussetzung fallen gelassen werden. Der ganze mit Staubmasse erfüllte Raum R enthalte vielmehr in nahezu gleichförmiger Vertheilung $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n$ Kugeln und zwar N_1 Kugeln mit dem Radius ϱ_1, N_2 solche mit dem Radius ϱ_2 u. s. f. bis N_n Kugeln mit dem Radius ϱ_n. Wenn dann die früheren Bezeichnungen in jeder Richtung beibehalten werden und

$$q' = \Gamma' f(\alpha) \cdot \varrho^2$$

die Lichtmenge einer Kugel mit dem Radius ϱ wäre, wenn diese frei läge, so wird dieselbe in Wirklichkeit sein:

$$q = q' w = \Gamma f(\alpha) \cdot \varrho^2 w$$

wo w die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass keine der N Kugeln ein betrachtetes Element im Innern der Masse weder beschatte noch verdecke. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies mit den Kugeln N_m vom Radius ϱ_m geschehe, sei w_m; dann ist

$$w = w_1 w_2 \ldots w_n$$

und da allgemein

$$w_m = e^{-\frac{N_m}{R} V_m}$$

war, wo V_m das Volumen des aus den oft genannten beiden Kreiscylindern zusammengesetzten Körpers ist, so hat man

$$w = e^{-\frac{N_1 V_1 + N_2 V_2 + \ldots + N_n V_n}{R}}$$

Dieses w ist dasselbe für alle Kugeln, welche in der Tiefe h liegen. In einer sehr dünnen Schicht liegen aber $\frac{N_m}{H} dh$ Kugeln vom Radius ϱ_m. Die Lichtmenge aller dieser Kugeln zusammen ist

$$\frac{N_m}{H} dh \cdot \Gamma f(\alpha) \cdot \varrho_m^2 w$$

und wenn man in Bezug auf alle m summirt, ergiebt sich für die Lichtmenge der ganzen Schicht von der Dicke dh:

$$dQ = \Gamma f(\alpha) \left(\frac{N_1 \varrho_1^2 + N_2 \varrho_2^2 + \ldots + N_n \varrho_n^2}{H}\right) \cdot e^{-\Sigma \frac{NV}{R}} \cdot dh$$

Nennt man $M(x)$ den Mittelwerth aller Werthe, die x annehmen kann, so kann man die letzte Formel auch schreiben

$$dQ = \Gamma f(\alpha) \frac{N}{H} \cdot M(\varrho^2) \cdot e^{-\frac{N}{R} M(V)} dh \tag{1}$$

Für nicht zu kleine Phasenwinkel α ist

$$V = \varrho^2 \pi \frac{h(\sin A + \sin A')}{\sin A \sin A'}$$

also, da die Staubwolke undurchsichtig sein soll, die gesammte Lichtmenge:

$$Q = \Gamma f(\alpha) \frac{N}{H} M(\varrho^2) \int_0^\infty dh \cdot e^{-h\pi \frac{N}{R} M(\varrho^2) \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A \sin A'}}$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$Q = \frac{\Gamma f(\alpha)}{\pi} \frac{R}{H} \cdot \frac{\sin A \sin A'}{\sin A + \sin A'}.$$

Für $\alpha = 0$ ergiebt sich hieraus

$$Q(0) = \frac{\Gamma f(0)}{2\pi} \cdot \frac{R}{H} \sin A \tag{1a}$$

Wenn man aber von vornherein $\alpha = 0$ setzt, so reducirt sich V auf die Hälfte und man findet

$$Q_0(0) = \frac{\Gamma f(0)}{\pi} \cdot \frac{R}{H} \sin A \tag{1b}$$

Diese Formeln zeigen, wie zu erwarten, dass die Lichtmengen $Q(0)$ ganz unabhängig von der Grösse der Kugeln und dem Mischungsverhältniss der verschieden grossen Kugeln ist. Da nun die Formeln (1a) und (1b) die Grösse der ganzen Lichtzunahme in der Nähe der Opposition angeben, so ist die Grösse dieser Lichtvariation auch ganz unabhängig von der speciellen Annahme, dass etwa nur Kugeln von gleichen Radien in der Masse vorkommen. Man sieht aber auch, dass nunmehr in dieser Richtung auch die Voraussetzung nicht mehr erforderlich ist, dass die kleinen Körperchen überhaupt noch die Kugelform haben, denn auch dann müssen die Formeln (1a) und (1b) gelten mit der einzigen ganz belanglosen Aenderung, dass rechts ein anderer Factor auftritt, welcher von der Form dieser Körperchen abhängt, da dies mit der Function $f(\alpha)$ der Fall ist.

Hiernach ist in der Hauptsache die Theorie der Beleuchtung staubförmiger Körper unabhängig von der ersten beschränkenden Voraussetzung. Nun fragt sich aber, wie der Uebergang von (1a) zu (1b) sich im allgemeinen Fall gestaltet, wie sich also die Lichtvariation im Einzelnen vollzieht.

Um diesen Punkt zu untersuchen, müssen wir auf die Entwicklungen in I (Art. 12) zurückgreifen. Es sollen hierbei der Einfachheit wegen die Glieder, welche von den zweiten und höheren Potenzen von α abhängen, fortgelassen werden, also

$$\frac{(\sin A + \sin A')^2}{4 \sin A \sin A'} = 1\,; \qquad \cos\alpha = 1$$

gesetzt werden. Dann haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden

$$h \lesseqgtr h_1 = \varrho \, \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha}$$

Für den ersten Fall ist (I, S. 479)

$$V = V_0 + V_1 - G + \Sigma \tag{2}$$

und für den zweiten Fall

$$V = V_0 + V_1 - G$$

und es war

$$V_0 + V_1 - G = \frac{4\pi}{\sin\alpha}\left\{ a\,\varrho^2 - \frac{2}{3\pi}\,\varrho^3 \right\}$$

$$\Sigma = \frac{4\varrho^3}{\sin\alpha}\left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2}{\varrho^2}} - \tfrac{1}{3}\left(1 - \frac{a^2}{\varrho^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{2}\,\frac{a}{\varrho} + \frac{a}{\varrho} \arcsin\frac{a}{\varrho} \right\}$$

wobei gesetzt worden ist

$$a = \frac{h \sin\alpha}{\sin A + \sin A'}$$

Um nun nach (1) Q wirklich zu bilden, werde $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 \cdots < \varrho_n$ angenommen.

Bei der Integration von

$$d\,Q = \Gamma f(\alpha)\,\frac{N}{H}\,M(\varrho^2)\,e^{-\frac{N}{R}M(V)} \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin\alpha} \cdot d\,a \tag{3}$$

in Bezug auf a zwischen den Grenzen 0 und ∞ muss man nun offenbar das Integrationsintervall zerlegen.

Es ist zu nehmen

für $0 < a < \varrho_1 \quad M_1(V) = \frac{4\pi}{\sin\alpha}\left\{a\,M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi}M(\varrho^3)\right\} + \underset{\varrho_1}{M}(\Sigma)$

„ $\varrho_1 < a < \varrho_2 \quad M_2(V) = \frac{4\pi}{\sin\alpha}\left\{a\,M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi}M(\varrho^3)\right\} + \underset{\varrho_2}{M}(\Sigma)$

. . . .

für $\varrho_{n-1} < a < \varrho_n \quad M_n\ (V) = \frac{4\pi}{\sin\alpha}\left\{a\,M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi}M(\varrho^3)\right\} + \underset{\varrho_n}{M}(\Sigma)$

„ $\varrho_n < a \quad M_{n+1}(V) = \frac{4\pi}{\sin\alpha}\left\{a\,M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi}M(\varrho^3)\right\}$

und dann hat man

$$\left.\begin{array}{c} Q = \Gamma f(\alpha)\dfrac{N(\sin A + \sin A')\,M(\varrho^2)}{H\sin\alpha} \times \\ \left\{\displaystyle\int_0^{\varrho_1} e^{-\frac{N}{R}M_1(V)}\,d\,a + \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} e^{-\frac{N}{R}M_2(V)}\,d\,a + \ldots + \int_{\varrho_n}^{\infty} e^{-\frac{N}{R}M_{n+1}(V)}\,d\,a\right\} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Hierin bedeutet $\underset{\varrho_1}{M}$ das Mittel aus allen den einzelnen ϱ entsprechenden Werthen von Σ; $\underset{\varrho_2}{M}$ denselben Ausdruck, wenn in ihm der Werth Σ für $\varrho = \varrho_1$ gleich Null gesetzt wird, $\underset{\varrho_3}{M}(\Sigma)$ wenn Σ für $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ gleich Null gesetzt wird etc.

Die Gleichung (4) löst die gestellte Aufgabe ganz allgemein und man hätte nur noch Hülfsmittel aufzusuchen, um die wirkliche Berechnung von (4) zu erleichtern. Es wird dies unten unter gewissen Voraussetzungen weiter ausgeführt werden.

Zuerst soll (4) auf den einfachen Fall angewendet werden, in welchem die Masse nur aus zweierlei Kugeln besteht, nämlich aus solchen vom Radius ϱ_1 und solchen vom Radius ϱ_2. Es werde dann, wie in I, die Function eingeführt:

$$\Phi(\varphi) = \frac{3}{8\pi}\left\{\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\sin\varphi - \frac{2}{3}\right\}$$

Setzt man dann im ersten Integrale in (4) $a = \varrho_1 \sin \varphi_1$ und im zweiten $a = \varrho_2 \sin \varphi_2$ so wird:

$$\Sigma = \frac{4\varrho^3}{\sin \alpha} \cdot \left\{ \frac{8\pi}{3} \, \Phi(\varphi) + \tfrac{2}{3} - \pi \sin \varphi \right\}$$

Wenn nun weiter die folgenden Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\delta_1 = \frac{32}{3} \frac{\varrho_1^3 \pi}{R}, \qquad \delta_2 = \frac{32}{3} \frac{\varrho_2^3 \pi}{R}$$

$$x_1 = \frac{N_1 \delta_1}{\sin \alpha}, \qquad x_2 = \frac{N_2 \delta_2}{\sin \alpha}$$

so ergiebt sich für die 3 hier auftretenden Mittelwerthe von V:

$$(1) = \frac{N}{R} M_1(V) = x_1 \Phi(\varphi_1) + x_2 \Phi(\varphi_2)$$

$$(2) = \frac{N}{R} M_2(V) = x_2 \Phi(\varphi_2) + \tfrac{3}{8} x_1 \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \sin \varphi_2 - \frac{x_1}{4\pi}$$

$$(3) = \frac{N}{R} M_3(V) = \frac{3}{8} \left(\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_2}{\varrho_2} \right) a - \frac{1}{4\pi} (x_1 + x_2)$$

und die Formel (4) gestaltet sich so:

$$\left. \begin{aligned} Q = \Gamma f(\alpha) \cdot \frac{(\sin A + \sin A')(N_1 \varrho_1^2 + N_2 \varrho_2^2)}{H \sin \alpha} \times \\ \left\{ \varrho_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(1)} \cdot \cos \varphi_1 \, d\varphi_1 + \varrho_2 \int_{\sin \varphi_2 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(2)} \cos \varphi_2 \, d\varphi_2 + \int_{\varrho_2}^{\infty} e^{-(3)} \, da \right\} \end{aligned} \right\}$$

Das letzte Integral kann natürlich sofort ausgeführt werden. Dasselbe ist

$$\frac{8}{3\left(\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_2}{\varrho_2} \right)} \, e^{-\frac{3}{8\pi} \left[x_1 \left(\frac{\pi \varrho_2}{\varrho_1} - \frac{2}{3} \right) + x_2 \left(\pi - \frac{2}{3} \right) \right]}$$

Eine wesentliche weitere Reduction der Ausdrücke ist im Allgemeinen nicht möglich. Man wird hierin aber, gemäss den Auseinandersetzungen in Art. 7, an Stelle des strengen Werthes von Φ den Näherungswerth:

$$\Phi = \frac{3}{8\pi} \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} + \sin \varphi \right)$$

einsetzen dürfen. Dann kann man die beiden ersten Integrale als Kramp'sche darstellen, was natürlich für ihre Auswerthung von grossem Nutzen ist. Das Resultat dieser sehr leicht auszuführenden Reduction ist folgendes: Setzt man:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \lambda; \qquad \frac{x_2}{x_1} = \lambda^3 \cdot \frac{N_2}{N_1} = \mu; \qquad x_1 = x$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \Gamma f(\alpha)(\sin A + \sin A') \cdot \frac{3}{32\pi} \cdot \frac{R}{H} \cdot \frac{\lambda+\mu}{\lambda} \cdot I \\ I &= x\left\{\frac{e^{T^2}}{\sqrt{b_1}} \int_T^{T'} e^{-\xi^2} d\xi + \frac{e^{A}}{\sqrt{b_2}} \int_{T_1}^{T_1'} e^{-\xi^2} d\xi\right\} + \frac{8}{3}\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-\frac{3}{8}\frac{x}{\pi}\left\{\pi(\lambda+\mu) - \frac{2}{3}(1+\mu)\right\}} \end{aligned}\right\} (5)$$

und die hier vorkommenden Buchstaben haben folgende Bedeutung:

$$a_1 = \frac{3}{16} \cdot \frac{\lambda+\mu}{\lambda} x \qquad T = \frac{a_1}{2\sqrt{b_1}} = (\lambda+\mu)\sqrt{\frac{3\pi x}{128(\lambda^2+\mu)}}$$

$$b_1 = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{\lambda^2+\mu}{\lambda^2} x \qquad T' = \frac{a_1}{2\sqrt{b_1}} + \sqrt{b_1} = T + \sqrt{\frac{3(\lambda^2+\mu)x}{8\pi\lambda^2}}$$

$$a_2 = \frac{3}{16} \cdot \frac{2\lambda+\mu}{\lambda} x \qquad T_1 = \frac{a_2}{2\sqrt{b_2}} + \sqrt{b_2} = (2\lambda+\mu)\sqrt{\frac{3\pi x}{128\mu}} + \sqrt{\frac{3\mu x}{8\pi\lambda^2}}$$

$$b_2 = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{\mu}{\lambda^2} x \qquad T_1' = \frac{a_2}{2\sqrt{b_2}} + \lambda\sqrt{b_2} = (2\lambda+\mu)\sqrt{\frac{3\pi x}{128\mu}} + \sqrt{\frac{3\mu x}{8\pi}}$$

$$A = \frac{x}{4\pi} + \frac{a_2^2}{4 b_2} = x\left[\frac{1}{4\pi} + \frac{3\pi(2\lambda+\mu)^2}{128\mu}\right]$$

Mit Hülfe der vorhandenen Tafeln für die Kramp'schen Integrale und, wo diese nicht ausreichen, mit Hülfe der in Art. 7 erwähnten Reihen kann nunmehr (5) leicht berechnet werden. Beispielsweise sei $\lambda = 2$; $\mu = 1$. Setzt man dann:

$$x = \frac{3\pi - 2}{9\pi - 4} \cdot y$$

$$\nu^2 = \frac{24}{5} \cdot \frac{3\pi - 2}{9\pi - 4} \cdot \pi$$

so wird

$$\frac{3}{2} I = \nu\sqrt{y}\left\{ e^{T^2} \int_T^{T'} e^{-\xi^2} d\xi + e^{A}\sqrt{5} \int_{T_1}^{T_1'} e^{-\xi^2} d\xi \right\} + \frac{8}{3} e^{-y\frac{3\pi-2}{8\pi}}$$

Um einen Ausdruck zu bekommen, der mit $\frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(x)}$ in der Abhandlung I direct vergleichbar ist, muss gebildet werden

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{32}{9I}$$

Es ergab sich nun für

		R
$y = 2$	$\log \mathfrak{C}_1 = 0.265$	0.267
5	0.226	0.227
10	0.182	0.182
15	0.153	0.152
100	0.043	0.042

Geht man aber mit dem Argumente 0.56 y in die Tafel für $\log \frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(x)}$ ein, so ergeben sich die Werthe R. Diese wenigen Werthe reichen aus, um die Ueberzeugung zu verschaffen, dass bis auf völlig unmerkliche Abweichungen die alte Tafel die Lichtvariationen in ihrem ganzen Umfange für den soeben betrachteten Fall wiederzugeben im Stande ist, wenn das Argument mit dem constanten Factor 0.56 multiplicirt wird. Ganz ähnliches findet noch bei sehr vielen andern Werthen von λ und μ statt. So z. B. bekommt man einen vollständigen Anschluss an die wahre Lichtvariation für den Fall $\mu = 9$, $\lambda = 2$, wenn man mit dem Argumente $9.5 \cdot x$ statt x in die alte Tafel eingeht. Es ist nun um so wichtiger zu zeigen, dass in diesem Vorkommniss nicht etwa ein Satz von allgemeinerer Geltung zum Vorscheine kommt, als wir etwas ganz ähnliches weiter unten bei einer ganzen Classe von Vertheilungen der Kugeln verschiedener Grössen finden werden. Um dies auszuführen und zugleich den Grund des bemerkten Vorkommnisses besser zu erkennen, wollen wir im Gegentheile solche Werthe von λ und μ aufsuchen, bei denen die Lichtmenge Q nicht durch die alte Tafel für $\log \frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(x)}$ näherungsweise dargestellt werden kann dadurch, dass man das Argument dieser Tafel mit einem constanten Factor multiplicirt. Der Ausdruck $I \frac{\lambda + \mu}{\lambda}$ in (5) kann selbstverständlich für specielle Werthe der beiderseitigen Argumente x und z dem früheren $\mathfrak{C}(z)$ d. i.

$$\mathfrak{C} = \sqrt{\frac{8\pi z}{3}}\, e^{T_0^2} \int_{T_0}^{T_0'} e^{-\xi^2} d\xi + \tfrac{8}{3}\, e^{-z \cdot \frac{3\pi - 2}{8\pi}}; \quad T_0 = \sqrt{\frac{3\pi z}{128}}; \quad T_0' = T_0\left(\frac{\pi + 4}{\pi}\right)$$

gleichgemacht werden. Für äusserst kleine x und z findet sich nun:

$$I\frac{\lambda+\mu}{\lambda} = \frac{8}{3} + \frac{2\,x}{3\,\pi}(1+\mu)$$

$$\mathfrak{C} = \frac{8}{3} + \frac{2\,z}{3\,\pi}$$

Es müsste also sein:

$$x = \frac{z}{1+\mu}$$

Für äusserst grosse x und z andererseits ist, wenn $f(T)$ dieselbe Bedeutung wie in Art. 7 hat:

$$I\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda} = \frac{16}{3}f(T)$$

$$\mathfrak{C} = \frac{16}{3}f(T_0)$$

Es müsste also sein:

$$T = T_0$$

oder

$$x = \frac{\lambda^2+\mu}{(\lambda+\mu)^2}\cdot z$$

Man wird demnach im Allgemeinen nur dann eine nahe Darstellung des Ausdruckes I durch $\mathfrak{C}$ im ganzen Umfange erwarten dürfen, wenn die beiden Factoren

$$\frac{1}{\mu+1} \text{ und } \frac{\lambda^2+\mu}{(\lambda+\mu)^2}$$

nicht sehr verschieden von einander sind. In den beiden angeführten Beispielen $\lambda = 2$, $\mu = 1$, und $\lambda = 2$, $\mu = 9$ findet aber etwas ähnliches thatsächlich statt, denn die beiden Factoren sind

$$\frac{1}{2} \text{ und } \frac{5}{9} \text{ bezw. } \frac{1}{10} \text{ und } \frac{13}{121}$$

Um also ein Beispiel zu erhalten, in welchem die neue Lichtcurve nicht dadurch näherungsweise bestimmt wird, dass man mit dem mit einem constanten Factor multiplicirten Argumente in die Tafel für $\frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(x)}$ eingeht, muss man suchen, für jene beiden Factoren wesentlich verschiedene

Werthe zu erhalten. Setzt man z. B. $\mu = \lambda = 100$, so werden diese Factoren $\frac{1}{101}$ und $\frac{101}{400}$. In der That findet man in diesem Falle

	$\log \mathfrak{C}_1$
$x = \frac{1}{2}$	0.166
1	0.150
2	0.126
3	0.110

und wenn man aus der mehrerwähnten Tafel die Werthe von z heraussucht, welche obige Tafelwerthe ergeben, findet man:

$$z = 7.0,\ 8.6,\ 12.0,\ 15.0$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{z}{x} = 14.0,\ 8.6,\ 6.0,\ 5.0$$

die also sehr wesentlich von einander abweichen.

9.

Ich gehe nun dazu über, die allgemeinen Formeln (4) des letzten Artikels in eine für die numerische Rechnung brauchbare Form zu bringen.

Wenn die im Früheren wiederholt benutzte Function Φ eingeführt wird, so ist:

$$\Sigma = \frac{4\varrho^3}{\sin\alpha} \cdot \left\{ \frac{8}{3}\pi\,\Phi(\varphi) + \frac{2}{3} - \pi \sin\varphi \right\}$$

Setzt man:

$$x_1 = \frac{32}{3}\varrho_1^3\pi \cdot \frac{N_1}{R\sin\alpha}$$

$$x_2 = \frac{32}{3}\varrho_2^3\pi \cdot \frac{N_2}{R\sin\alpha}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a = \varrho_1 \sin\varphi_1 = \varrho_2 \sin\varphi_2 = \ldots = \varrho_n \sin\varphi_n$$

so wird, wenn unter $\Sigma(\varrho_1)$ der Werth von Σ für $\varrho = \varrho_1$ verstanden wird:

$$\frac{N_1}{R}\Sigma(\varrho_1) = x_1\,\Phi(\varphi_1) + \frac{x_1}{4\pi} - \frac{3}{8}x_1 \sin\varphi_1$$

$$\frac{N_2}{R}\Sigma(\varrho_2) = x_2\,\Phi(\varphi_2) + \frac{x_2}{4\pi} - \frac{3}{8}x_2 \sin\varphi_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Weiter hat man

$$\frac{4\pi N}{R \sin \alpha}\left\{ a\ M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\}$$

$$= \tfrac{3}{8}\,(x_1 \sin \varphi_1 + x_2 \sin \varphi_2 + \ldots + x_n \sin \varphi_n) - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{4\pi}$$

Bei der Bildung von (4) hat man noch zu berücksichtigen, dass

$$\underset{\varrho_1}{M}(\Sigma) = \frac{N_1\, \Sigma(\varrho_1) + N_2\, \Sigma(\varrho_2) + \ldots + N_n\, \Sigma(\varrho_n)}{N_1 + N_2 + \ldots + N_n}$$

$$\underset{\varrho_1}{M'}(\Sigma) = \frac{N_2\, \Sigma(\varrho_2) + \ldots + N_n\, \Sigma(\varrho_n)}{N_1 + N_2 + \ldots + N_n} \quad \text{u. s. f.}$$

Die einzelnen Integrale, aus denen sich (4) zusammensetzt, lauten also in expliciter Form:

$$\int_0^{\varrho_1} e^{-\frac{N}{R} M_1(V)}\, da = \varrho_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_1\, d\varphi_1\, e^{-[x_1\, \Phi(\varphi_1) + x_2\, \Phi(\varphi_2) + \ldots + x_n\, \Phi(\varphi_n)]}$$

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} e^{-\frac{N}{R} M_2(V)}\, da = \varrho_2 \int_{\arcsin \frac{\varrho_1}{\varrho_2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_2\, d\varphi_2\, e^{-[x_2\, \Phi(\varphi_2) + \ldots + x_n\, \Phi(\varphi_n) - \frac{x_1}{4\pi} + \frac{3}{8} x_1 \sin \varphi_1]}$$

. . . .

$$\int_{\varrho_{n-1}}^{\varrho_n} e^{-\frac{N}{R} M_n(V)}\, da = \varrho_n \int_{\arcsin \frac{\varrho_{n-1}}{\varrho_n}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_n\, d\varphi_n\, e^{-[x_n\, \Phi(\varphi_n) - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{4\pi} + \frac{3}{8}(x_1 \sin \varphi_1 + \ldots + x_{n-1} \sin \varphi_{n-1})]}$$

$$\int_{\varrho_n}^{\infty} e^{-\frac{N}{R} M_{n+1}(V)}\, da = \frac{8}{3\left(\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_2}{\varrho_2} + \ldots + \frac{x_n}{\varrho_n}\right)}\, e^{+\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{4\pi}} \cdot e^{-\frac{3}{8}\left(\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_2}{\varrho_2} + \ldots + \frac{x_n}{\varrho_n}\right)\varrho_n}$$

Dies sind die allgemeinen Formeln, nach denen die numerische Rechnung stets ausführbar ist. Begnügt man sich, was wohl stets erlaubt sein wird, den Näherungswerth anzusetzen:

$$\Phi = \frac{3}{8\pi} \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} + \sin \varphi\right)$$

so reduciren sich selbstverständlich die obigen Integrale wieder auf die Kramp'sche Form. Bezeichnet man allgemein

$$J_m = \int_{\varrho_{m-1}}^{\varrho_m} e^{-\frac{N}{R} M_m (V)} d\,a$$

und setzt man noch

$$x_1 = x; \quad x_m = \mu_m x_1; \quad \varrho_m = \lambda_m \varrho_1$$

$$a_m = \frac{3}{16} x \left\{ \left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3} + \ldots + \frac{\mu_n}{\lambda_n}\right) + \left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\mu_{m-1}}{\lambda_{m-1}}\right) \right\}$$

$$b_m = \frac{3}{8\pi} x \left\{ \frac{\mu_m}{\lambda_m^2} + \frac{\mu_{m+1}}{\lambda_{m+1}^2} + \ldots + \frac{\mu_n}{\lambda_n^2} \right\}$$

so wird

$$J_m = \frac{\varrho_1}{\sqrt{b_m}} e^{\frac{x}{4\pi}[1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_{m-1}]} \cdot e^{+\frac{a_m^2}{4 b_m}} \cdot \int_{T_m}^{T'_m} e^{-\xi^2} d\,\xi$$

worin:

$$T_m = \frac{a_m}{2\sqrt{b_m}} + \lambda_{m-1} \cdot \sqrt{b_m}$$

$$T'_m = \frac{a_m}{2\sqrt{b_m}} + \lambda_m \cdot \sqrt{b_m}$$

Anzumerken wäre vielleicht noch

$$\lambda_0 = \mu_0 = 0; \quad \lambda_1 = \mu_1 = 1$$

Ferner kann gesetzt werden

$$\frac{N M(\varrho^2)}{H \sin\alpha} = \frac{3}{32\pi} \frac{R}{H} \frac{x}{\varrho_1} \left[1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3} + \ldots + \frac{\mu_n}{\lambda_n} \right]$$

Dann ist schliesslich

$$\left.\begin{aligned} Q &= \Gamma f(\alpha)(\sin A + \sin A') \frac{3}{32\pi} \frac{R}{H} \cdot \frac{x}{\varrho_1} \left[1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3} + \ldots + \frac{\mu_n}{\lambda_n}\right] \cdot I \\ I &= \sum_{m=1}^{m=n} J_m + \frac{8}{3} \frac{\varrho_1}{x\left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\mu_n}{\lambda_n}\right)} e^{-\frac{3}{8}\frac{x}{\pi}\left[\pi\lambda_n\left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\mu_n}{\lambda_n}\right) - \frac{2}{3}\left(1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n\right)\right]} \end{aligned}\right\} (1)$$

Setzt man hierin $n = 2$, so gelangt man, wie es sein muss, genau zu dem Ausdruck (5) des vorigen Artikels.

10.

Als Beispiel einer stetigen Vertheilung der Kugeln in Bezug auf ihre Grösse soll der Fall betrachtet werden, dass ϱ alle möglichen Werthe zwischen 0 und ϱ haben möge und zwar alle Werthe mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Die letzte einschränkende Bedingung könnte selbstverständlich auch fort bleiben, ohne das Wesen der nachfolgenden Betrachtungen zu treffen, nur lassen sich dann natürlich die Formeln nicht bis zur numerischen Verwendung zurecht legen, ohne speciellere Annahmen zu machen. Es ist von selbst klar, dass man auch jetzt die allgemeinen Formeln (1) des vorigen Artikels verwenden kann, es soll aber ein ganz directer Weg eingeschlagen werden. Für den vorliegenden Fall wird man in Formel (4) des Art. (8) nur das erste und letzte Integral beibehalten dürfen. wenn man im ersten Integrale setzt:

$$\underset{a}{M}(V) = M(V_0 + V_1 - G) + \underset{a}{M}(\Sigma)$$

und es ist offenbar

$$\underset{a}{M}(\Sigma) = \frac{1}{\varrho}\int_a^{\varrho} \Sigma \cdot d\varrho; \quad M(V_0 + V_1 - G) = \frac{4\pi}{\sin\alpha}\left\{\frac{a}{3}\varrho^2 - \frac{1}{6\pi}\varrho^3\right\}$$

Mit Hülfe der Integralformeln

$$\int\left\{\varrho^2\sqrt{\varrho^2 - a^2} - \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{\varrho^2 - a^2}\right)^3\right\}d\varrho$$
$$= \frac{1}{6}\varrho\left(\sqrt{\varrho^2 - a^2}\right)^3 + \frac{a^2}{4}\varrho\sqrt{\varrho^2 - a^2} - \frac{a^4}{4}\log\left(\varrho + \sqrt{\varrho^2 - a^2}\right)$$

$$\int \varrho^2 \arcsin\frac{a}{\varrho}\,d\varrho$$
$$= \frac{a^3}{3}\left\{\frac{\varrho^3}{a^3}\arcsin\frac{a}{\varrho} + \frac{\varrho}{2a^2}\sqrt{\varrho^2 - a^2} + \frac{1}{2}\log\left(\varrho + \sqrt{\varrho^2 - a^2}\right)\right\}$$

und wenn man setzt: $a = \varrho\sin\varphi$, erhält man leicht:

$$M(V) = \frac{\varrho^3}{\sin\alpha}\times$$
$$\left\{\tfrac{5}{3}\cos\varphi - \cos^3\varphi + \tfrac{4}{3}\sin\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}\sin^4\varphi\log\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}\right\}$$

Dies ist in das erste Integral in (4) Art. 8 einzusetzen. In das letzte, wo also $\varrho < a$, hat man dagegen zu substituiren:

$$M(V) = \frac{4\pi}{\sin\alpha} \cdot \left\{ \frac{a\varrho^2}{3} - \frac{1}{6\pi}\varrho^3 \right\}$$

Setzt man nun:

$$\delta = \frac{32}{3} \cdot \frac{\varrho^3 \pi}{R}; \qquad \frac{N\delta}{\sin\alpha} = x$$

$$\Phi_1 = \frac{3}{32\pi} \left\{ \tfrac{5}{3}\cos\varphi - \cos^3\varphi + \tfrac{4}{3}\sin\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}\sin^4\varphi \log\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} \right\} \quad (1)$$

$$\Gamma' = \frac{3\,\boldsymbol{\Gamma} f(\alpha)\,\varrho\, M(\varrho^2)}{H\delta}$$

so wird

$$Q = \Gamma'(\sin A + \sin A') \left\{ \tfrac{1}{3}\, x \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\Phi_1} \cos\varphi\, d\varphi + \tfrac{8}{3}\, e^{-x\frac{2\pi-1}{16\pi}} \right\}$$

Es werde nun noch gesetzt:

$$x = 2y \cdot \frac{3\pi - 2}{2\pi - 1}$$

$$\Psi = 2 \cdot \frac{3\pi - 2}{2\pi - 1} \cdot \Phi_1.$$

Dann kann man schliesslich schreiben:

$$Q = \Gamma'(\sin A + \sin A') \left\{ \tfrac{2}{3} \cdot \frac{3\pi - 2}{2\pi - 1}\, y \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-y\Psi} \cos\varphi\, d\varphi + \tfrac{8}{3}\, e^{-y\frac{3\pi-2}{8\pi}} \right\} \quad (2)$$

Die Klammergrösse, welche $\mathfrak{C}'(y)$ heissen möge, habe ich nun unter wesentlicher Beihülfe des Herrn Dr. Anding nach der Gauss'schen Methode der mechanischen Quadraturen berechnet. Für grosse Werthe von y, wo man sich nach einer anderen Methode umsehen muss, und eine ähnliche halbconvergente Reihe, wie in I für $\mathfrak{A}$ abgeleitet worden ist, nur für sehr grosse y brauchbar ist, wurde wieder durch Weglassen der höheren Potenzen von $\sin\varphi$ in Ψ die Reduction auf die Kramp'sche Form durchgeführt.

Ich lasse zunächst zur Uebersicht einige Werthe von Ψ folgen, welche bei den mechanischen Quadraturen von Nutzen sind.

φ	$\log \Psi$	Ψ		φ	$\log \Psi$	Ψ		φ	$\log \Psi$	Ψ	
0^0	$-\infty$	0	63	30^0	9.0986	0.1255	94	60^0	9.3952	0.2484	60
2	7.8014	0.0063	68	32	9.1301	0.1349	94	62	9.4054	0.2544	55
4	8.1162	0.0131	71	34	9.1593	0.1443	93	64	9.4148	0.2599	52
6	8.3050	0.0202	75	36	9.1863	0.1536	91	66	9.4234	0.2651	48
8	8.4419	0.0277	78	38	9.2115	0.1627	91	68	9.4311	0.2699	44
10	8.5499	0.0355	81	40	9.2349	0.1718	88	70	9.4381	0.2743	40
12	8.6395	0.0436	84	42	9.2567	0.1806	86	72	9.4444	0.2783	35
14	8.7161	0.0520	87	44	9.2769	0.1892	84	74	9.4500	0.2818	32
16	8.7830	0.0607	89	46	9.2958	0.1976	82	76	9.4549	0.2850	27
18	8.8423	0.0696	90	48	9.3133	0.2058	79	78	9.4590	0.2877	24
20	8.8955	0.0786	92	50	9.3297	0.2137	76	80	9.4625	0.2901	19
22	8.9437	0.0878	94	52	9.3449	0.2213	72	82	9.4654	0.2920	15
24	8.9875	0.0972	94	54	9.3590	0.2285	70	84	9.4676	0.2935	11
26	9.0277	0.1066	94	56	9.3720	0.2355	67	86	9.4692	0.2946	6
28	9.0646	0.1160	95	58	9.3841	0.2422	62	88	9.4701	0.2952	2
30	9.0986	0.1255		60	9.3952	0.2484		90	9.4705	0.2954	

Die Grösse $\log \dfrac{\mathfrak{C}'(\infty)}{\mathfrak{C}'(y)}$, auf 3 Decimalstellen abgekürzt, ergiebt die folgende Zusammenstellung:

y		R	y		R
1	0.279	0.280	40	0.077	0.076
2	0.259		45	0.071	
3	0.243		50	0.065	0.065
4	0.228		55	0.061	
5	0.215	0.219	60	0.057	
6	0.204		65	0.054	
7	0.194		70	0.051	
8	0.184		75	0.048	
9	0.176		80	0.046	
10	0.169	0.171	85	0.043	
12	0.155		90	0.042	
14	0.144		95	0.040	
16	0.135		100	0.038	0.037
18	0.126		150	0.027	0.026
20	0.119	0.120	200	0.021	0.020
25	0.104		300	0.015	0.015
30	0.093	0.093	400	0.011	0.011
35	0.084		500	0.009	0.009
40	0.077	0.076			

In dieser Tabelle sind unter R Zahlen angeführt, die folgendermassen entstanden sind. In die Tafel für $\log \frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(x)}$ wurde mit dem Argumente $x = 0.65 \cdot y$ eingegangen und wurden aus ihr die zugehörigen Werthe entnommen. Diese stimmen mit den direct berechneten Werthen, wie man sieht, für practische Zwecke vollkommen überein. Es ist dies ein ganz ähnliches Vorkommniss, wie das, welches schon oben bemerkt worden ist. Wenn man also $N\delta$ nur aus dem Verlaufe der Lichtvariation bestimmen will, so wird dies, wenn man nur die Abhängigkeit von α in Betracht zieht, nicht möglich sein, da man die wahre Lichtcurve aus der Tafel für $\log \frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(x)}$ erhält, indem man nur das Argument x in einem anderen Maassstabe angiebt, also die Grösse $N\delta$ mit einem constanten Factor zu multipliciren hat.

Auch die Betrachtung des nächst allgemeineren Falles, in dem ϱ alle Werthe zwischen ϱ_0 und ϱ_1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit besitzt, lässt sich verhältnissmässig einfach durchführen. Es soll dies im Folgenden geschehen. Setzt man in der Formel (4) Art. 8

$$\Gamma' = \Gamma f(\alpha) \frac{N M(\varrho^2)}{H} (\sin A + \sin A')$$

so wird

$$Q = \frac{\Gamma'}{\sin\alpha} \cdot \left\{ \int_0^{\varrho_0} e^{-\frac{N}{R} M_1(V)} da + \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} e^{-\frac{N}{R} M_2(V)} da + \int_{\varrho_1}^{\infty} e^{-\frac{N}{R} M_3(V)} da \right\}$$

und hierin ist

$$M_1(V) = \frac{4\pi}{\sin\alpha} \left\{ a\, M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\} + M(\Sigma)$$

$$M_2(V) = \frac{4\pi}{\sin\alpha} \left\{ a\, M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\} + \underset{a}{M}(\Sigma)$$

$$M_3(V) = \frac{4\pi}{\sin\alpha} \left\{ a\, M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\}$$

und im vorliegenden Falle:

$$M(\Sigma) = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_0} \cdot \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \Sigma\, d\varrho; \qquad \underset{a}{M}(\Sigma) = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_0} \cdot \int_{a}^{\varrho_1} \Sigma\, d\varrho$$

Durch Einführung der oben benutzten Function Φ_1 und wenn man setzt

$$a = \varrho_0 \sin \varphi_0 = \varrho_1 \sin \varphi$$

hat man

$$\int_a^{\varrho_1} \Sigma \, d\varrho = \frac{\varrho_1^4}{\sin \alpha} \cdot \left\{ \frac{32\pi}{3} \Phi_1(\varphi) - \frac{4\pi}{3} \sin \varphi + \tfrac{2}{3} \right\}$$

$$\int_a^{\varrho_0} \Sigma \, d\varrho = \frac{\varrho_0^4}{\sin \alpha} \cdot \left\{ \frac{32\pi}{3} \Phi_1(\varphi_0) - \frac{4\pi}{3} \sin \varphi_0 + \tfrac{2}{3} \right\}$$

Setzt man nun noch

$$\frac{\varrho_0}{\varrho_1} = \lambda$$

$$\delta = \frac{32\pi}{3R} \frac{\varrho_1^3}{1-\lambda}; \qquad \frac{N\delta}{\sin \alpha} = x$$

so findet man

$$\left.\begin{aligned} Q = \frac{\Gamma' \varrho_1}{N\delta} \Bigg\{ x \int_0^{\sin\varphi = \lambda} \cos \varphi \, d\varphi \, e^{-x[\Phi_1(\varphi) - \lambda^4 \Phi_1(\varphi_0)]} \\ + x \int_{\sin\varphi=\lambda}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \, e^{-x\left[\Phi_1(\varphi) - \frac{1}{8}\lambda^3 \sin\varphi + \frac{1}{16\pi}\lambda^4\right]} + \frac{8}{1-\lambda^3} e^{-\frac{x}{16\pi}\left[2\pi(1-\lambda^3) - (1-\lambda^4)\right]} \Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Eine an sich belanglose, aber für die numerische Rechnung zu empfehlende Umgestaltung erhält man, wenn man setzt

$$\mu = \frac{2\pi - 1}{2\pi(1-\lambda^3) - (1-\lambda^4)}; \qquad \nu = \frac{6\pi - 4}{6\pi - 3} \cdot (1-\lambda^3); \qquad x = \frac{3\mu\nu}{1-\lambda^3} y$$

$$\Psi = 2 \cdot \frac{3\pi - 2}{2\pi - 1} \cdot \Phi_1 = \frac{3\nu\Phi_1}{1-\lambda^3}; \quad \text{also } \mu y \Psi = x \Phi_1$$

Dann wird

$$Q = \frac{3\Gamma' \varrho_1}{(1-\lambda^3) N\delta} \left\{ y\mu\nu [I + II] + \tfrac{8}{3} e^{-y\frac{3\pi-2}{8\pi}} \right\} \quad (4)$$

worin:

$$I = \int_{0}^{\sin\varphi=\lambda} \cos\varphi \, d\varphi \cdot e^{-y\mu\left[\Psi(\varphi) - \lambda^4 \Psi(\varphi_0)\right]}$$

$$II = \int_{\sin\varphi=\lambda}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \cdot e^{-y\mu\left[\Psi(\varphi) - \frac{3\nu\lambda^3}{16\pi(1-\lambda^3)}(2\pi\sin\varphi - \lambda)\right]}$$

Man kann schliesslich schreiben:

$$I = \int_{0}^{\sin\varphi=\lambda} \cos\varphi \, d\varphi \cdot e^{-y\mu X}$$

$$II = \int_{\sin\varphi=\lambda}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \cdot e^{-y\mu Y}$$

$$X = \Psi(\varphi) - \lambda^4 \Psi(\varphi_0); \quad Y = \Psi(\varphi) - \frac{\lambda^3(3\pi - 2)}{4(2\pi - 1)}\left[\sin\varphi - \frac{\lambda}{2\pi}\right]$$

Man kann auch die obigen Integrale auf die Kramp'sche Form zurückführen, wenn man in Ψ die höheren als die dritten Potenzen von $\sin\varphi$ vernachlässigt. Doch habe ich, um den abzuleitenden Satz in aller Strenge aufstellen zu können, von dieser Reduction nur bei dem Integrale I und zwar für sehr grosse y Gebrauch gemacht, da hier irgend welche Bedenken über die allgemeine Zulässigkeit derselben nicht entstehen können. Eine einfache Rechnung ergiebt nun:

$$X = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{3\pi - 2}{2\pi - 1}\left\{\frac{\pi}{3}(1 - \lambda^3)\sin\varphi + (1 - \lambda^2)\sin^2\varphi\right\}$$

und hiermit

$$y\mu\nu I = \frac{32}{3} T e^{T^2} \cdot \int_{T}^{T'} e^{-\xi^2} d\xi$$

wobei:

$$\beta = \frac{3}{\pi}\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^3}; \qquad T = \sqrt{\frac{3\mu\nu y}{64\beta}}; \qquad T' = T(1+2\beta\lambda) \tag{5}$$

Die strengen Werthe (4) wurden nun auf mechanischem Wege und zwar wieder nach der Gauss'schen Methode mit Rücksicht auf die in der Abhandlung I ausführlicher erörterten Vorsichtsmaassregeln berechnet. Diese zum Theil nicht einfachen Rechnungen hat grösstentheils Herr Dr. Anding ausgeführt. Man nenne $\mathfrak{C}(y)$ die in (4) vorkommende Klammergrösse, und es möge im Folgenden, wie früher, die Grösse $\log\frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(y)} = \log\mathfrak{C}_1$ eingeführt werden. Für λ wurden die 3 Werthe angenommen:

1) $\lambda = \sin 24^0$; 2) $\lambda = \sin 38^0$; 3) $\lambda = \sin 54^0$

Hiermit ergab sich

	1)	2)	3)
$\log\mu$	0.03378	0.12514	0.34550
$\log\nu$	9.94145	9.85629	9.64424

Von den weiteren Rechnungen theile ich nur einen Auszug der auf 4 Stellen abgekürzten Tafeln der Grössen Ψ, X und Y mit.

Ψ

φ	Ψ	Δ	φ	Ψ	Δ	φ	Ψ	Δ	φ	Ψ	Δ	φ	Ψ	Δ
0°	0.0000	63	20°	0.0786	92	40°	0.1718	88	60°	0.2484	59	80°	0.2901	19
2	0.0063	68	22	0.0878	94	42	0.1806	86	62	0.2543	56	82	0.2920	15
4	0.0131	71	24	0.0972	94	44	0.1892	84	64	0.2599	52	84	0.2935	11
6	0.0202	75	26	0.1066	94	46	0.1976	82	66	0.2651	48	86	0.2946	6
8	0.0277	78	28	0.1160	95	48	0.2058	79	68	0.2699	44	88	0.2952	2
10	0.0355	81	30	0.1255	94	50	0.2137	76	70	0.2743	40	90	0.2954	
12	0.0436	84	32	0.1349	94	52	0.2213	72	72	0.2783	35			
14	0.0520	87	34	0.1443	93	54	0.2285	70	74	0.2818	32			
16	0.0607	89	36	0.1536	91	56	0.2355	67	76	0.2850	27			
18	0.0696	90	38	0.1627	91	58	0.2422	62	78	0.2877	24			
20	0.0786		40	0.1718		60	0.2484		80	0.2901				

$\lambda = \sin 24^0$

φ	X		φ	X		φ	Y		φ	Y		φ	Y		φ	Y	
0°	0.0000	59	12°	0.0401	76	24°	0.0891	86	44°	0.1743	78	64°	0.2402	48	84°	0.2715	11
2	0.0059	62	14	0.0477	80	26	0.0977	88	46	0.1821	76	66	0.2450	45	86	0.2726	5
4	0.0121	66	16	0.0557	81	28	0.1065	87	48	0.1897	74	68	0.2495	41	88	0.2731	2
6	0.0187	68	18	0.0638	83	30	0.1152	87	50	0.1971	71	70	0.2536	37	90	0.2733	
8	0.0255	72	20	0.0721	84	32	0.1239	87	52	0.2042	68	72	0.2573	33			
10	0.0327	74	22	0.0805	86	34	0.1326	86	54	0.2110	64	74	0.2606	30			
12	0.0401		24	0.0891		36	0.1412	85	56	0.2174	62	76	0.2636	26			
						38	0.1497	84	58	0.2236	59	78	0.2662	22			
						40	0.1581	82	60	0.2295	55	80	0.2684	17			
						42	0.1663	80	62	0.2350	52	82	0.2701	14			
						44	0.1743		64	0.2402		84	0.2715				

$\lambda = \sin 38^0$

φ	X		φ	X		φ	Y		φ	Y		φ	Y	
0°	0.0000	48	18°	0.0514	67	38°	0.1203	68	58°	0.1807	48	78°	0.2156	18
2	0.0048	51	20	0.0581	67	40	0.1271	67	60	0.1855	45	80	0.2174	14
4	0.0099	53	22	0.0648	68	42	0.1338	65	62	0.1900	42	82	0.2188	12
6	0.0152	56	24	0.0716	69	44	0.1403	64	64	0.1942	40	84	0.2200	8
8	0.0208	57	26	0.0785	70	46	0.1467	62	66	0.1982	37	86	0.2208	5
10	0.0265	60	28	0.0855	70	48	0.1529	60	68	0.2019	33	88	0.2213	2
12	0.0325	61	30	0.0925	70	50	0.1589	58	70	0.2052	31	90	0.2215	
14	0.0386	63	32	0.0995	70	52	0.1647	55	72	0.2083	27			
16	0.0449	65	34	0.1065	69	54	0.1702	54	74	0.2110	25			
18	0.0514		36	0.1134	69	56	0.1756	51	76	0.2135	21			
			38	0.1203		58	0.1807		78	0.2156				

$\lambda = 54^0$

φ	X		φ	X		φ	X		φ	Y		φ	Y	
0°	0.0000	30	20°	0.0350	40	40°	0.0760	40	54	0.1020	32	72°	0.1253	16
2	0.0030	31	22	0.0390	40	42	0.0800	39	56	0.1052	31	74	0.1269	15
4	0.0061	32	24	0.0430	41	44	0.0839	38	58	0.1083	30	76	0.1284	13
6	0.0093	33	26	0.0471	42	46	0.0877	37	60	0.1113	27	78	0.1297	11
8	0.0126	35	28	0.0513	42	48	0.0914	37	62	0.1140	26	80	0.1308	9
10	0.0161	36	30	0.0555	41	50	0.0951	35	64	0.1166	25	82	0.1317	7
12	0.0197	37	32	0.0596	42	52	0.0986	34	66	0.1191	22	84	0.1324	5
14	0.0234	37	34	0.0638	41	54	0.1020		68	0.1213	21	86	0.1329	3
16	0.0271	39	36	0.0679	41				70	0.1234	19	88	0.1332	1
18	0.0310	40	38	0.0720	40				72	0.1253		90	0.1333	
20	0.0350		40	0.0760										

Die mechanische Quadratur ergab nun für $\log \mathfrak{E}_1$

	$\lambda = \sin 24^0$		$\lambda = \sin 38^0$		$\lambda = \sin 54^0$	
y	$\log \mathfrak{E}_1$	R	$\log \mathfrak{E}_1$	R	$\log \mathfrak{E}_1$	R
1	0.278	0.279	0.276	0.276	0.273	0.273
2	0.257	0.259	0.254	0.255	0.250	0.250
5	0.213	0.214	0.206	0.206	0.198	0.198
10	0.164	0.165	0.156	0.156	0.148	0.148
15	0.134	0.135	0.126	0.126	0.118	0.118
20	0.113	0.114	0.106	0.106	0.099	0.098
30	0.087	0.088	0.081	0.081	0.074	0.074
40	0.071	0.072	0.066	0.066	0.060	0.061
50	0.061	0.061	0.056	0.056	0.050	0.050
60	0.052	0.052	0.048	0.048	0.043	0.044
80	0.042	0.042	0.038	0.038	0.034	0.034
100	0.035	0.035	0.032	0.031	0.029	0.028

Neben den $\log \mathfrak{E}_1$ stehen unter R die Werthe von $\log \frac{\mathfrak{E}(\infty)}{\mathfrak{E}(z)}$ welche aus der früheren in I mitgetheilten Tafel entnommen sind mit dem Argumente z:

$$\begin{aligned} \text{für } \lambda &= \sin 24^0 \ \ldots \ z = 0.704 \cdot y \\ &= \sin 38 \ \ldots \ \ = 0.79 \cdot y \\ &= \sin 54 \ \ldots \ \ = 0.89 \cdot y \end{aligned}$$

Wie man sieht ist die Uebereinstimmung eine vollkommene. Wenn noch die 4. Stelle berücksichtigt wird, so sind die Differenzen zwar, wie zu erwarten, von systematischem Character, aber für practische Zwecke völlig belanglos. Dem ist noch hinzuzufügen, dass nach dem früheren (S. 61) etwas ganz ähnliches für $\lambda = 0$ gefunden worden ist. Man hatte dort nur zu setzen:

$$z = 0.65 \cdot y$$

und für $\lambda = 1$ ist dasselbe selbstverständlich der Fall, wenn man $z = y$ nimmt. Man erhält diese Quotienten $\frac{z}{y}$ sehr nahe, wenn die betreffenden Ausdrücke für $\mathfrak{E}_1$ und $\frac{\mathfrak{E}(\infty)}{\mathfrak{E}(z)}$ für sehr grosse Werthe von z und y mit Hülfe der Kramp'schen Form berechnet und den Quotienten der beiderseitigen Argumente so bestimmt, dass man dieselben Werthe für die genannten Grössen erhält. Es ergiebt sich so, fast vollkommen übereinstimmend mit den obigen Werthen

$$\begin{array}{lll}
\text{für } \lambda = 0 & \ldots & z = 0.63 \cdot y \\
\lambda = \sin 24^0 & \ldots & \;\; = 0.70 \cdot y \\
\lambda = \sin 38^0 & \ldots & \;\; = 0.78 \cdot y \\
\lambda = \sin 54^0 & \ldots & \;\; = 0.87 \cdot y \\
\lambda = \cdot\, 1 & \ldots & \;\; = 1.00 \cdot y
\end{array}$$

Aus den vorstehenden Rechnungen geht der Satz hervor:

Wenn die Radien ϱ der Kugeln, welche die staubförmige Masse bilden, alle möglichen Werthe zwischen ϱ_0 und ϱ_1 haben und zwar alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit, so wird die Lichtvariation in der Nähe der Opposition vollständig durch die alte Tafel dargestellt, wenn man in sie mit einem Argumente z eingeht, welches sich von dem früheren nur durch einen constanten Factor unterscheidet.

Wenn man nun die Lichtvariation mit Hülfe der alten Tafel für $\frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(z)}$ berechnet, hierauf $z = \frac{N_0\, \delta_0}{\sin \alpha}$ setzt und hieraus aus den Vergleichungen mit den Beobachtungen $N_0\, \delta_0$ berechnet, so hängt dieses $N_0 \delta_0$ mit dem obigen $N\delta$ auf folgende Weise zusammen. Da näherungsweise nach (5) dieses und (2) des Artikels 7, nämlich für sehr grosse z und x, der Zusammenhang besteht

$$z = \frac{2}{9}\,\frac{(1-\lambda^3)^2}{1-\lambda^2} \cdot x \tag{6}$$

so ist also, da $\frac{N\delta}{\sin \alpha} = x$ gesetzt worden ist,

$$N_0\, \delta_0 = \frac{2}{9}\,\frac{(1-\lambda^3)^2}{1-\lambda^2} \cdot N\delta; \qquad \delta = \frac{32\,\pi}{3\,R}\,\frac{\varrho_1^3}{1-\lambda}$$

Berechnet man aber δ_1 nach derselben Formel, welche in dem Falle, wo alle Kugeln denselben mittleren Radius ϱ_m haben, gilt, nämlich:

$$\delta_1 = \frac{32\,\pi}{3\,R} \cdot \varrho_m^3$$

so hat man zunächst zu berücksichtigen, dass:

$$\varrho_m^3 = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_0}\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho_1} \varrho^3\, d\,\varrho = \frac{1}{4}\cdot\frac{\varrho_1^3\,(1-\lambda^4)}{1-\lambda}$$

und demzufolge

$$\delta_1 = \frac{1}{4}\,\delta\; 1 - \lambda^4)$$

und es ergiebt sich also:

$$N_0\,\delta_0 = \frac{8}{9}\,\frac{(1-\lambda^3)^2}{(1-\lambda^2)\,(1-\lambda^4)}\cdot N\,\delta_1$$

Der Factor von $N\,\delta_1$ liegt nun, wie gleich gezeigt werden soll, zwischen 1 und $\frac{8}{9}$ und man hätte demgemäss, innerhalb dieser Genauigkeit, in roher Annäherung:

$$N_0\,\delta_0 = N\,\delta_1$$

Um das eben Gesagte zu beweisen, differentiirt man die Function

$$\varphi\,(\lambda) = \frac{(1-\lambda^3)^2}{(1-\lambda^2)\,(1-\lambda^4)}$$

nach λ. So ergiebt sich

$$\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\lambda} = \frac{2\,\lambda\,(1-\lambda^3)\,(1-\lambda)^3}{(1-\lambda^2)\,(1-\lambda^4)^2}$$

Da nun $\lambda < 1$, so ist $\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\lambda}$ stets positiv, d. h. φ wächst fortwährend, wenn sich λ von 0 bis 1 ändert. Nun ist für $\lambda = 0$, $\varphi = 1$ und für $\lambda = 1$, $\varphi = \frac{9}{8}$, also liegt der Werth des genannten Factors in der That zwischen $\frac{8}{9}$ und 1.

Zum Schlusse habe ich noch auf den zweiten Punkt zurückzukommen, der nach den Bemerkungen am Anfange des Art. 8 einer kurzen Darlegung bedürftig ist. Es ist also noch der Einfluss, den eine nicht punctförmige Gestalt der Lichtquelle ausübt, einer Betrachtung zu unterziehen. Es ist sehr leicht, die Modificationen anzugeben, welche die im Vorstehenden entwickelten Formeln erfordern, wenn eine ausgedehnte Lichtquelle vorliegt, wenngleich die vollkommene Durchführung derselben auch Verwicklungen mit sich führt, die indessen hier zu entwickeln keine Veranlassung vorliegt. Es möge die Lichtquelle eine gleichmässig helle Kreisscheibe sein, die der beleuchteten Substanz unter dem scheinbaren Radius r erscheint. Ist dann Q die nach den im Vorstehenden aufgestellten Formeln berechnete Lichtmenge, die also einer punctförmigen Lichtquelle entspricht, so wird man für die wirklich beobachtete Lichtmenge haben

$$Q_1 = \frac{1}{\pi \sin^2 r} \cdot \int Q \, ds$$

Hierbei ist die Integration auszudehnen auf alle Elemente ds der leuchtenden Scheibe. Sind α_0 und α die Winkel zwischen den Richtungen nach dem Beobachter und dem Mittelpunkte der Scheibe beziehungsweise nach einem Elemente ds derselben, und φ der Winkel, den die beiden Ebenen, in denen α beziehungsweise α_0 liegt, mit einander bilden, so ist

$$ds = \sin \alpha \, d\alpha \cdot d\varphi$$

Ferner ist nach dem Früheren Q näherungsweise dargestellt worden in der Form

$$Q = (\sin A + \sin A') \cdot F(\alpha)$$

wo F eine bekannte Function von α ist. Es ist also

$$Q = \frac{1}{\pi \sin^2 r} \cdot \int\int (\sin A + \sin A') \, F(\alpha) \cdot \sin \alpha \, d\alpha \, d\varphi$$

Wenn nun der Einfachheit wegen wieder die Verhältnisse des Saturnringes festgehalten werden und wenn (wie in I) δ den Winkel bezeichnet, den die Ebene Saturn — Erde — Sonnenelement mit der auf dem Saturnringe senkrechten Ebene bildet, in welcher die Erde liegt und δ_0 dasselbe für den Mittelpunkt der Sonne, so ist

$$\delta = \delta_0 + \varphi$$

und

$$(\sin A + \sin A') = 2 \sin A \cos^2 \tfrac{1}{2} \alpha + \cos A \sin \alpha \cos (\delta_0 + \varphi)$$

Die vollständige Integration auszuführen, wäre complicirt. Es ist dies aber nicht nöthig, um zu erkennen, dass bei Saturn die Lichtcurve nur wenig geändert werden kann. Vom Saturn aus gesehen erscheint der Sonnenradius unter einem Winkel von 1ʹ7. Es kann sich demnach die Lichtcurve nur um kleinere Beträge ändern als entstehen, wenn man in den nach dem Argumente α geordneten Tabellen das α um 1.'7 ändert. Es werden sich dann nur diejenigen Theile der Curve etwas ändern, für welche α sehr klein ist, und dies auch nur dann, wenn $N\delta$ klein ist, die Masse also dünn vertheilt ist. In diesem Falle, was beim dunklen Saturnring eintreten kann, wird die Ausdehnung der Sonne eine merkbare Wirkung auf die berechnete Lichtvariation ausüben. Diese Wirkung ist ausgleichender Natur, indem die schnellen Uebergänge gemildert werden. Bemerkbar wird dies sein bei der eigenthümlichen fast plötzlich eintretenden Lichtzunahme, die in Art. 5 (S. 33) besprochen worden ist.

Druckfehler:

Seite 16 in Formel (1) im Factor vor der Klammer
lies $\sin A$ statt $\sin \alpha$.

Tabellen.

I.

φ	Φ		φ	Φ		φ	Φ	
0°	0.00000	331	30°	0.12296	456	60°	0.24576	314
1	331	338	31	12752	455	61	24890	305
2	669	345	32	13207	455	62	25195	296
3	1014	352	33	13662	455	63	25491	286
4	1366	359	34	14117	453	64	25777	276
5	1725	365	35	14570	452	65	26053	267
6	2090	372	36	15022	450	66	26320	258
7	2462	378	37	15472	447	67	26578	247
8	2840	385	38	15919	445	68	26825	238
9	3225	390	39	16364	443	69	27063	227
10	3615	396	40	16807	439	70	27290	216
11	4011	401	41	17246	435	71	27506	206
12	4412	407	42	17681	432	72	27712	195
13	4819	412	43	18113	427	73	27907	185
14	5231	417	44	18540	423	74	28092	175
15	5648	421	45	18963	419	75	28267	163
16	6069	426	46	19382	413	76	28430	152
17	6495	430	47	19795	408	77	28582	141
18	6925	433	48	20203	402	78	28723	131
19	7358	437	49	20605	396	79	28854	119
20	7795	440	50	21001	390	80	28973	108
21	8235	444	51	21391	383	81	29081	96
22	8679	446	52	21774	377	82	29177	85
23	9125	448	53	22151	369	83	29262	74
24	9573	451	54	22520	362	84	29336	63
25	10024	452	55	22882	355	85	29399	51
26	10476	453	56	23237	347	86	29450	40
27	10929	455	57	23584	339	87	29490	29
28	11384	456	58	23923	331	88	29519	17
29	11840	456	59	24254	322	89	29536	6
30	12296		60	24576		90	29542	

II.

x	$\mathfrak{A}(x)$	$\mathfrak{B}(x)$	x	$\mathfrak{A}(x)$	$\mathfrak{B}(x)$
0.0	0.0000	2.6667	10	3.7345	0.1390
0.5	0.4684	2.3005	12	3.9178	0.0770
1.0	0.8796	1.9846	14	4.0547	0.0426
2	1.5604	1.4770	16	4.1605	0.0236
3	2.0902	1.0992	18	4.2458	0.0131
4	2.5048	0.8180	20	4.3179	0.0072
5	2.8332	0.6088	22	4.3783	0.0040
6	3.0942	0.4531	24	4.4308	0.0022
7	3.3045	0.3372	26	4.4780	0.0012
8	3.4764	0.2509	28	4.5189	0.0007
9	3.6168	0.1868	30	4.5568	0.0004
10	3.7345	0.1390			

III.

$$M = \frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(z)}$$

z	$\log M$		z	$\log M$		z	$\log M$		z	$\log M$		z	$\log M$	
0.0	0.3010	163	10.0	0.1389	37	20	0.0910	29	80	0.0311	16	200	0.0136	43
0.5	0.2847	147	10.5	0.1352	35	21	0.0881	28	85	0.0295	15	300	0.0093	22
1.0	0.2700	134	11.0	0.1317	32	22	0.0853	25	90	0.0280	13	400	0.0071	14
1.5	0.2566	121	11.5	0.1285	30	23	0.0828	25	95	0.0267	11	500	0.0057	9
2.0	0.2445	111	12.0	0.1255	29	24	0.0803	23	100	0.0256	20	600	0.0048	7
2.5	0.2334	101	12.5	0.1226	28	25	0.0780	22	110	0.0236	18	700	0.0041	5
3.0	0.2233	93	13.0	0.1198	27	26	0.0758	20	120	0.0218	15	800	0.0036	4
3.5	0.2140	85	13.5	0.1171	26	27	0.0738	19	130	0.0203	13	900	0.0032	3
4.0	0.2055	79	14.0	0.1145	24	28	0.0719	19	140	0.0190	12	1000	0.0029	14
4.5	0.1976	74	14.5	0.1121	23	29	0.0700	17	150	0.0178	10	2000	0.0015	8
5.0	0.1902	68	15.0	0.1098	22	30	0.0683	74	160	0.0168	8	4000	0.0007	2
5.5	0.1834	63	15.5	0.1076	22	35	0.0609	60	170	0.0160	8	6000	0.0005	1
6.0	0.1771	59	16.0	0.1054	21	40	0.0549	49	180	0.0152	8	8000	0.0004	1
6.5	0.1712	55	16.5	0.1033	19	45	0.0500	40	190	0.0144	8	10000	0.0003	
7.0	0.1657	52	17.0	0.1014	19	50	0.0460	34	200	0.0136				
7.5	0.1605	49	17.5	0.0995	18	55	0.0426	30						
8.0	0.1556	45	18.0	0.0977	17	60	0.0396	25						
8.5	0.1511	43	18.5	0.0960	17	65	0.0371	22						
9.0	0.1468	40	19.0	0.0943	17	70	0.0349	20						
9.5	0.1428	39	19.5	0.0926	16	75	0.0329	18						
10.0	0.1389		20.0	0.0910		80	0.0311							