© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Betrachtungen

über die

räumliche Vertheilung der Fixsterne

von

H. Seeliger.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Seinen

hochverehrten Freund

Herrn Dr. Carl von Orff

k. Generalmajor a. D., o. Mitglied der k. bayer. Akademie der Wissenschaften, Mitglied der k. bayer. Commission für die internationale Erdmessung, etc.

beglückwünscht

zum 70. Geburtstage

in aufrichtiger Anhänglichkeit und Ergebenheit

H. Seeliger.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Man darf wohl als das zur Zeit wichtigste Problem der Stellarastronomie die Ermöglichung etwas besser begründeter Vorstellungen über die räumliche Vertheilung der leuchtenden Weltkörper in dem Fixsternsystem bezeichnen, zu welchem die Sonne gehört. In der That ist diese Frage das Fundament, welches man zu weiteren Betrachtungen nothwendig braucht, die zur Erkenntniss der dynamischen Beziehungen, der Entfernungen u. s. f. in diesem System führen sollen. Nach den bis jetzt allerdings höchst rudimentären Kenntnissen, die wir über die Eigenbewegungen besitzen, scheint die Möglichkeit noch sehr fern zu liegen, in sie einige Ordnung zu bringen und den Ausdruck allgemeiner Gesetze in ihnen zu erkennen. Bis jetzt hat man mit der Annahme ausgereicht, dass der Haupttheil dieser Bewegungen, mit Ausnahme einer erkannten und auch wohl richtig erklärten Gesetzmässigkeit — Vorhandensein eines Apex der Sonnenbewegung — gar keinen Gesetzen unterworfen ist und die sichersten Resultate in dieser Richtung wurden auch erzielt, indem man die den einzelnen Fixsternen eigenthümlichen Eigenbewegungen ausdrücklich als zufällig nach Richtung und Grösse im Raume vertheilt annahm. Diese Annahme kann natürlich nicht als das Endresultat der Stellarastronomie betrachtet werden, man müsste denn das ganze Fixsternsystem in derselben Weise ansehen, wie etwa eine Staubwolke, deren einzelne Theile durch Zufall zusammengeführt und durch zufällige Ursachen in Bewegung gesetzt worden sind. Aber diese Annahme kann sehr wohl dem jetzigen Zustand des Systems entsprechen mit Rücksicht auf die ausserordentliche, kaum vorstellbar geringe Dichtigkeit, mit welcher die leuchtende Materie über den Raum verstreut ist.[1]) Ausserdem darf nicht vergessen werden, dass unsere Kenntnisse der Eigenbewegungen in der Hauptsache sich nur auf die grössten beziehen und dass die Bewegung der grossen Masse der Sterne uns völlig unbekannt ist, da sie durch die Beobachtungen bis jetzt nicht feststellbar war. Es wird deshalb

---

[1]) Vergl. Bemerkungen über die Vertheilung der Sterne im Raume. Astr. Nachr. Nr. 3273.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

noch lange Zeit vergehen, bis man von den Eigenbewegungen ausgehend zu begründeten Vorstellungen über die räumliche Vertheilung der Sterne wird vordringen können. Noch weniger aussichtsvoll scheint eine direkte Beobachtung parallaktischer Verschiebungen zu sein, denn dass unter den Fixsternen solche von messbarer Parallaxe, auch wenn die Genauigkeit der Beobachtung wesentlich vergrössert werden könnte, seltene Ausnahmen sind, dürfte wohl kaum bezweifelt werden können. Ein anderer, längst beschrittener Weg, die räumliche Vertheilung der Fixsterne zu studiren, besteht darin, dass man von der scheinbaren Vertheilung der Fixsterne am Himmel ausgeht, und hieraus Schlüsse auf die räumliche Dichtigkeitsvertheilung zu machen sucht. Schon W. Herschel, um nur einen einflussreichen Namen des vorigen Jahrhunderts zu nennen, dann aber W. Struve und viele andere haben diesen Weg betreten. Ihre Schlüsse haben aber durchaus nicht allgemeinen Beifall gefunden und im Ganzen deshalb mit Recht, weil das ihnen zur Verfügung gestandene Material keineswegs ausreichend war, auch ihren Betrachtungen Voraussetzungen zu Grunde gelegt worden sind, die zum Theil viel zu speciell, zum Theil gewiss gar nicht zutreffend sind. Trotzdem lässt sich auf diesem Wege, den diese — wie man sie wohl nennen darf — statistische Methode darbietet, manche werthvolle und wichtige Einsicht gewinnen, wenn nur erst das nothwendige Material vorliegen würde. Wenn letzteres noch nicht der Fall ist, so liegt der Grund in der offenbaren Unterschätzung dessen, was die genannte Methode leisten kann, nicht in der Schwierigkeit oder in der übergrossen Weitschichtigkeit der Aufgabe, die sie den Beobachtern zumuthet. Bezeichnet man mit $A_m(\omega)$ die Anzahl aller Sterne bis herab zu denen von der Grösse m, welche auf einem Himmelstheil vom Flächeninhalt ω vorkommen, so wäre durch Abzählungen bis zu möglichst grossen m in Intervallen vielleicht von einer halben Grössenklasse der Verlauf von A_m festzustellen. Ist dies erreicht, so wird man sich die Frage vorlegen müssen, ob dann auf die räumliche Vertheilung der Sterne in begründeter Weise geschlossen werden kann. Diese Frage in möglichster Allgemeinheit zu besprechen, wird in diesem Aufsatze, insbesondere im 2. Abschnitte, versucht. Von vornherein ist klar, dass man auf diesem Wege zunächst nicht anstreben wird, ein detaillirtes Bild von der Dichtigkeitsvertheilung im Fixsternsystem zu erhalten, vielmehr wird es in erster Linie darauf ankommen, die etwaigen Gesetzmässigkeiten aufzufinden, die dieses System im Grossen und Ganzen darbietet. Man wird also zunächst den allgemeinen Verlauf der Dichtigkeit D d. i. der Anzahl der Weltkörper in einer passend gewählten grossen Raumeinheit, als Funktion des Ortes aufzusuchen haben, dabei die Stetigkeit dieser Funktion

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

voraussetzen, grössere Theile des Himmels zusammenfassen und die so gewonnene Vorstellung von der Raumausfüllung durch Körper unseres Fixsternsystems als das typische Bild etwa bezeichnen, dem unser Fixsternsystem entspricht. Von diesem typischen Bild wird sich die Wirklichkeit im Einzelnen mehr oder weniger unterscheiden; diese Verschiedenheiten festzustellen werden wir aber dann der Detailarbeit zuweisen, auf welchem Wege auch diese zu leisten sein mag. Schon der flüchtigste Anblick des Himmels gibt für die Anordnung, die zur Erlangung dieses typischen Bildes einzuhalten ist, die deutlichsten Fingerzeige, die auch stets befolgt worden sind. In ganz roher Annäherung bildet die Milchstrasse, trotz der mannigfaltigsten Abweichungen im Einzelnen, eine Symmetrieebene, die den Himmel in zwei im Mittel ungefähr gleich reiche Regionen theilt. Der Sternreichthum in allen Grössenklassen ist hauptsächlich von der galaktischen Breite abhängig. Um nun dieser hervorstechendsten Eigenschaft Rechnung zu tragen, wird man zunächst nur diese Abhängigkeit allein ins Auge fassen. Man wird dann das typische Bild des Sternsystems durch einen von leuchtenden Weltkörpern erfüllten Raum darstellen, in dessen Mittelpunkt die Sonne steht, und der von einer Rotationsfläche begrenzt ist, deren Rotationsaxe durch die Pole der Milchstrasse geht. Die Dichtigkeit ist dann nur Funktion der Entfernung r und der galaktischen Breite α. Dass dieses typische Bild insoweit der Wirklichkeit entspricht, um eine erste Annäherung an sie abgeben zu können, dürfte ebenso fest stehen, wie dass es in wesentlichen Punkten corrigirt werden muss, wie der Anblick des Himmels auf das unzweideutigste zeigt. Indessen wird es doch wohl als eine wichtige Erweiterung unserer Kenntnisse anzusehen sein, wenn das genannte typische Bild mit einiger Sicherheit und aus nicht nur zulässigen sondern auch plausiblen Hypothesen heraus festgestellt werden könnte. Und das ist in gewissem Sinne in der That möglich, wie die folgenden Auseinandersetzungen zeigen sollen. Die allgemeinen Ueberlegungen, die diese Möglichkeit darthun, dürften deshalb einiges Interesse darbieten. In dem Ziele, das sie verfolgen, kommen sie mit dem überein, was W. Herschel und W. Struve versucht haben. Aber die Grundlagen der Betrachtung sind allgemeiner und einwandfreier und das dürfte bei der vorliegenden Frage von ausschlaggebender Bedeutung sein. Wie schon erwähnt, reicht das verfügbare Beobachtungsmaterial keineswegs aus, den Verlauf der A_m als Funktion von m und α genügend genau festzustellen, obwohl eigens zu diesem Zwecke angestellte Beobachtungen durchaus nicht mühevoller und langwieriger wären, als sehr viele andere, deren Durchführung einzelnen Personen gelungen ist. Durch eine allerdings wegen der systematischen Abhängigkeit der Helligkeits-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

grenze, bis zu welcher ein Fernrohr vorzudringen gestattet, von dem Sternreichthum nur bei grosser Umsicht zum Ziele führende Modifikation der Methode, welche die beiden Herschel bei ihren Sternaichungen angewendet haben, wäre das Ziel schon dadurch zu erreichen, dass man ein grosses Fernrohr in vielfachen Abstufungen abblendet und die Sterne in gleichförmig über den Himmel vertheilten Gegenden abzählt. Viel einfacher aber und sicherer würde die Photographie in passender Weise auf diesen Fall angewendet zum Ziele führen. Es ist wohl kaum eine lohnendere und wichtigere Beobachtungsarbeit im Gebiete der Stellarastronomie für solche Beobachter anzugeben, die für Daueraufnahmen eingerichtet sind. Augenblicklich ist es nicht möglich, die vorauszusetzenden empirischen Vorkenntnisse herbeizuschaffen, denn zwischen den Sternen der Bonner Durchmusterung und den Herschel'schen Sternen, von deren Vertheilung eine angenäherte Vorstellung ermöglicht ist, gähnt eine Kluft, die nur durch ganz spärliche Zwischenglieder überbrückt ist. Gerade in dieser Lücke aber liegen die Sterngrössen, von welchen die Bestimmung der Begrenzung des Sternsystems abhängig ist und diese Begrenzung kann in Folge dessen gegenwärtig nur durch Hypothesen vorgenommen werden, deren Wahrscheinlichkeit man nicht darthun kann. Aus diesem Grunde haben die detaillirteren Ausführungen der folgenden Abhandlung kein viel grösseres Gewicht, als ein Beispiel, welches die Durchführung der allgemeinen Vorschriften zu zeigen vermag. Aber soviel scheint mit Sicherheit hervorzugehen, dass das etwa 30 bis 40 Millionen leuchtender Sterne enthaltende System nicht ins Unbegrenzte sich hinerstreckt, sondern eine Ausdehnung besitzt, die gar nicht so ungeheuer gross ist und vielleicht tausend Siriusweiten nirgends überschreitet. Diese den älteren Vorstellungen W. Herschels verwandte Ansicht kann aber nicht etwa durch die Annahme einer Absorption des Lichtes im Sinne von Olbers und W. Struve dahin modificirt werden, dass in Folge dieser Absorption nur ein kleiner Theil der näheren Umgebung der ganzen Fixsternwelt für uns sichtbar bleibt, denn diese Annahme führt zu einer Vertheilung der Sterne, die selbst durch die gegenwärtig verfügbaren spärlichen Beobachtungsresultate nicht bestätigt wird.

Danach würden also die sichtbaren Fixsterne ein für sich bestehendes System bilden. Ob alle himmlischen Objecte, wie Sternhaufen und Nebelflecke zu diesem System gehören, also innerhalb desselben liegen, ist gegenwärtig zu entscheiden unmöglich. Aber sicher ist keine der in neuester Zeit gefundenen Thatsachen geeignet, die Meinung zu erschüttern, dass thatsächlich unsere Beobachtungen über dieses System nicht hinausreichen; dagegen dürften

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

manche Wahrnehmungen an Nebelflecken, wie die Grösse ihrer Eigenbewegungen, ihr offenbarer Zusammenhang mit den Fixsternen, die in ihnen stehen, und vieles andere nur vereinbar sein mit der ausgesprochenen Ansicht. Wie wir nun die Ausdehnung unseres Fixsternsystems als überaus gross ansehen — denn das ist doch einer Entfernung von tausend Siriusweiten entsprechend — müssten wir anderen in ihrer kosmischen Stellung dem unserigen coordinirten Systemen eine überaus grosse Entfernung höherer Ordnung zuerkennen. Dass hier Absorptionen, ob im Olbers'schen Sinne oder in der Art, wie ich sie an anderer Stelle [1]) als annehmbar bezeichnete, zu Tage treten müssen, ist eine zum mindesten zulässige, wenn nicht nothwendige Annahme. Jedenfalls würde sich auf diese Weise das ganze Weltbild in so einfacher Weise gestalten, dass wir schon aus diesem Grunde es so lange als zutreffend ansehen müssen, ehe nicht ganz bestimmte Erfahrungen dagegen sprechen. Dass dergleichen Erfahrungen nicht vorliegen, dass also auch nicht die starken Eigenbewegungen einzelner Sterne hierzu gerechnet werden müssen, möge an dieser Stelle nicht näher erörtert werden. Die folgenden Untersuchungen legten aber die eben gemachten allgemeineren Bemerkungen nahe, im Uebrigen beziehen sie sich nur auf Dinge, die einer strengeren und zwar rechnerischen Behandlung fähig sind.

Kurz zusammengefasst, behandeln die folgenden Seiten diese Fragen:

Im 1. Abschnitt wird die Gesetzmässigkeit, welche in der typischen scheinbaren Vertheilung der Sterne auf Grund des Materiales der Bonner Durchmusterungen, der Abzählungen des Herrn Celoria und der Sternaichungen der beiden Herschel zu Tage tritt, besprochen.

Der 2. Abschnitt beschäftigt sich mit den allgemeinen, zum Theil mathematischen Deductionen, zu denen die vorliegende Aufgabe Veranlassung giebt und enthält die allgemeineren Resultate, zu denen diese führen.

Im 3. Abschnitte schliesslich werden einige Bemerkungen über die Constitution der Milchstrasse gemacht.

---

[1]) Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1896.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

I.

Im Anschluss an meine Abzählungen der in den Bonner Durchmusterungen enthaltenen Sterne soll zunächst die scheinbare Vertheilung der Sterne besprochen werden, soweit sie in dem genannten Materiale zum Ausdrucke gelangt.

Die beiden Durchmusterungen enthalten bekanntlich die Sterne bis zur Grösse 9.0 fast ganz vollständig. Für die zahlreichen beobachteten schwächeren Sterne ist diese Vollständigkeit weder angestrebt noch erreicht worden. Will man demnach ein ganz einwandfreies Material haben, so wird man sich auf die Sterne bis zur Grösse 9.0 beschränken müssen. Die Verwerthung meiner Abzählungen der in den Bonner Durchmusterungen enthaltenen Sterne zu allgemeineren Speculationen kann nur dann mit einiger Sicherheit ausgeführt werden, wenn man das Verhältniss der angewandten Helligkeitsscala zu einer festen — etwa photometrisch bestimmten — kennt. Diese Kenntniss dürfte, wenn es sich um Mittelzahlen aus sehr vielen Sternen handelt, für die nördliche Durchmusterung (*DM*) durch meine Vergleichung mit der Harvard Photometric Revision[1]) (*HR*) gegeben sein. Für die südliche Durchmusterung (*SD*) liegt die Sache minder günstig. Das Material reichte nicht aus, um die Grössenschätzungen der *SD* in gleicher Ausführlichkeit und mit gleicher Zuverlässigkeit zu untersuchen. Indessen zeigt in allen wesentlichen Punkten, auf die es im Folgenden ankommt, die *SD* ein ganz ähnliches Verhalten, wie die *DM*, nur andere Zahlenwerthe treten auf. Aus diesem Grunde sehe ich in dieser Abhandlung von der Hinzuziehung der durch die Bearbeitung der *SD* gewonnenen Zahlen im Allgemeinen ab und beschränke mich nur auf die *DM*.

Bildet man nun mit meinen Abzählungen, die hier ohne jede Verbesserung angenommen werden, was keinen Nachtheil mit sich bringen kann, die Zahlen A_m d. h. die Zahlen aller Sterne von den hellsten bis zur Grössenklasse m, so erhält man:

G_m	A_m	$\log \alpha$	$\log \alpha_0$	
6.5	4 120	—	—	
7.0	8 007	0.289	0.267	
7.5	14 061	245	240	(1)
8.0	25 229	254	253	
8.5	48 127	281	254	
9.0	100 979	322	274	

[1]) Ueber die Grössenklassen der teleskopischen Sterne der Bonner Durchmusterungen. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1898.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Hier ist $\alpha = \frac{A_m}{A_{m-\frac{1}{2}}}$ gesetzt worden. Die $\log \alpha$ sind ungefähr constant, zeigen aber ausgesprochene Schwankungen und es frägt sich zunächst, ob diese auch noch bestehen bleiben, wenn man auf die Ungleichförmigkeit der Bonner Schätzungsscala Rücksicht nimmt. Das Resultat der Vergleichung der DM mit der HR habe ich durch Ausgleichung a. a. O. für jede Sterngrösse G in die Form gebracht

$$DM - HR = h_0 + \beta \cdot \delta$$

wobei die h_0 und β stark mit G veränderlich sind. Es war ferner $\delta = D - 0.7$ und D die Sternfülle, diejenige in der Milchstrasse $= 1$ gesetzt. Da auf grösseren Himmelsräumen im Mittel sich die Anzahl der Sterne und zwar für jedes G zwischen 6.5 und 9.0 ungefähr wie D verhält, wird für die obigen G die Reduction auf die photometrischen Grössen nach der Formel auszuführen sein:

$$DM - HR = h_0 + \beta \frac{\Sigma \delta D}{\Sigma D}$$

D kann hierbei angenähert innerhalb jeder der 9 Zonen, die parallel zur Milchstrasse verlaufend bei allen meinen Abzählungen angenommen wurden (s. später), als constant betrachtet werden. Nimmt man die a. a. O. benutzten Zahlen, so ergiebt sich

$$DM - HR = h_0 - \beta \cdot (0.053)$$

und wenn h_0 und β der Formel F des erwähnten Aufsatzes gemäss angenommen wird, ergiebt sich, dass die folgende Beziehung stattfindet:

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{m}{6.5}\ DM = & \overset{m}{6.517}\ HR \\ 7.0 & 7.059 \\ 7.5 & 7.569 \\ 8.0 & 8.071 \\ 8.5 & 8.625 \\ 9.0 & 9.212 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Um die $\log \alpha$ auf die photometrischen Grössen zu reduciren, wird man am besten von der Bemerkung ausgehen, dass sich die Gleichung aufstellen lässt:

$$\log \left(\frac{A_m}{A_{m_0}}\right) = \lambda\,(m' - m'_0)$$

worin λ wohl mit m' veränderlich, aber dies nur in sehr geringem Maasse, ist und also bei den beabsichtigten Reductionen als constant betrachtet werden darf. m' und m'_0 sind dabei die den geschätzten Grössen m und m_0 entsprechenden photometrischen. Ist $\left(\frac{A_m}{A_{m_0}}\right)_0$ der Werth des Quotienten, wenn

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$m' - m'_0 = \Delta$, wo Δ eine feste, natürlich von der Differenz $m - m_0$ wenig verschiedene Grösse ist, so hat man

$$\log \left(\frac{A_m}{A_{m_0}}\right)_0 = \lambda \cdot \Delta$$

woraus λ eliminirt werden kann. Ist also α_0 der Werth von α für die Annahme, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgender G genau gleich $\frac{1}{2}$ photometrischen Grössenklasse ist, so hat man also:

$$\log \alpha_0 = \log \alpha \cdot \frac{0.5}{m' - m'_0}$$

und mit den unter 1) angeführten Werthen für $m' - m'_0$ ergeben sich die in (1) bereits aufgenommenen $\log \alpha_0$. Diese Werthe sind nun in bemerkenswerther Weise übereinstimmend geworden, so dass man die Abweichung der Einzelwerthe vom Mittel 0.258 in der Hauptsache als irrelevant wird ansehen dürfen.

Ebenso interessant ist die Thatsache, dass alle $\log \alpha$ beträchtlich kleiner sind, als unter der Annahme gleicher räumlicher Vertheilung und Leuchtkraft folgen würde. Diese Annahme, die oftmals gemacht und verfolgt worden ist, ergiebt allgemein

$$\frac{A_m}{A_{m'}} = \left(\frac{h_{m'}}{h_m}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{3}$$

worin h_m die Helligkeit eines Sternes von der Grösse m ist. Die photometrische Helligkeitsscala ist definirt durch: $\log h_m - \log h_{m+1} = 0.4$. Daraus würde also folgen $\log \alpha_0 = 0.3$. Es dürfte demnach gar keinem Zweifel unterliegen, dass die Anzahl der Sterne zwischen 6. und 9. Grösse beträchtlich langsamer mit der Sterngrösse zunimmt als die Formel (3) und die ihr zu Grunde liegenden Annahmen erfordern. Die scheinbare Vertheilung der Fixsterne ist sehr ungleichmässig. Sieht man von localen Verschiedenheiten ab und betrachtet man die Vertheilung der Sterne nur in den allgemeinen Zügen, dann gruppirt sich alles um das Phänomen der Milchstrasse. In erster Annäherung — die man bei detaillirteren Studien entsprechend den neueren Festlegungen zu corrigiren haben wird — kann man annehmen, dass sich die Milchstrasse um einen grössten Kreis gruppirt, dessen Nordpol in $12^h\,49^m$ und $+27^0\,30'$ liegt und dass die Sternfülle hauptsächlich nur von der galaktischen Breite abhängt. Die zwei durch die Milchstrasse getrennten Theile des Himmels verhalten sich nun zwar keineswegs gleich, aber auch hier wird man in erster Näherung von dieser Thatsache absehen dürfen und also annehmen können, dass die Sternfülle eine gerade Funktion der galaktischen Breite ist. Die Anzahl der

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Sterne von etwa der 6. Grösse an aufwärts wächst mit der Annäherung an die Milchstrasse fortwährend und dieses Wachsthum beginnt bereits ganz in der Nähe der Pole der Milchstrasse. Daraus folgt, dass die Milchstrasse kein locales Phänomen sein kann, sondern mit der ganzen Constitution unseres Sternsystems zusammenhängen muss. Aber auch die Zahl der helleren, mit freiem Auge sichtbaren Sterne zeigt, wie Herr Schiaparelli eingehend untersucht hat, eine deutliche Zunahme mit der Annäherung an die Milchstrasse.

Um den Einfluss der Milchstrasse auf die scheinbare Vertheilung der Fixsterne zahlenmässig zu untersuchen, habe ich bereits in meiner früheren Abhandlung den Himmel durch zu der Mitte der Milchstrasse gezogene Parallelkreise in 9 Zonen zerlegt. Zone I reicht von 0^0 bis 20^0 galaktischer Nordpolardistanz, Zone II von 20^0—40^0 u. s. f., Zone V enthält die Milchstrasse, Zone IX enthält den Südpol der Milchstrasse und reicht bis 160^0 Nordpolardistanz.

Zunächst bietet sich nun die Frage dar, wie sich die $\log \alpha_m = \log A_m - \log A_{m-\frac{1}{2}}$ mit der Lage zur Milchstrasse ändern. Aus den Abzählungen ergiebt sich:

Zone	$\log \alpha_{7.0}$	$\log \alpha_{7.5}$	$\log \alpha_{8.0}$	$\log \alpha_{8.5}$	$\log \alpha_{9.0}$	Σ
I	0.267	0.255	0.227	0.266	0.297	1.312
II	266	240	235	273	302	316
III	283	247	238	268	305	341
IV	289	250	262	278	327	406
V	319	244	267	284	327	441
VI	287	243	250	281	323	384
VII	257	233	266	301	339	396
VIII	255	235	273	335	387	485
Mittel	0.278	0.243	0.252	0.286	0.326	

Betrachtet man diese Zahlenreihen, so geht zur Evidenz hervor, dass die α ihre grössten Werthe in der Milchstrasse — Zone V — erreichen und von da ab mit grosser Deutlichkeit abnehmen. Noch deutlicher tritt natürlich diese Thatsache in den Summen Σ hervor und nur in Zone VIII zeigen sich merkbare Abweichungen hiervon bei den schwächeren Sternen. Diese Zone ist aber nur mit einem relativ kleinen Areal in der DM vertreten und locale Ungleichmässigkeiten werden deshalb nicht ohne Einfluss sein können. Für die SD ergiebt eine ähnliche Zusammenstellung dasselbe Resultat in fast noch ausgeprägterer Gestalt:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Zone	$\log \alpha_{7.0}$	$\log \alpha_{7.5}$	$\log \alpha_{8.0}$	$\log \alpha_{8.5}$	$\log \alpha_{9.0}$	Σ
II	0.314	0.216	0.254	0.249	0.324	1.357
III	328	252	235	278	335	428
IV	335	247	263	295	325	465
V	304	266	261	319	395	545
VI	281	263	272	299	349	414
VII	265	237	249	296	327	374
VIII	302	202	259	293	324	380
IX	282	222	261	273	319	357
Mittel	0.301	0.232	0.257	0.288	0.337	

Auch hier ist die Zunahme der Zahlen mit der Annäherung an die Milchstrasse so regelmässig, dass ein Zufall gänzlich ausgeschlossen ist.

Ehe indessen diese Erscheinung als unzweifelhaft reell angesehen werden kann, muss zuerst eine naheliegende Vermuthung als nicht zutreffend nachgewiesen werden, dass die genannte Erscheinung nämlich eine Folge der Ungleichförmigkeiten in der Helligkeitsscala der Bonner Grössenschätzungen sei. In der That hat die Vergleichung der Bonner Sterngrössen mit denen der HR ergeben, dass die ersteren in sehr merkbarer Weise von der Lage zur Milchstrasse abhängen. Die Resultate der Vergleichungen, die übrigens hauptsächlich aus dem Grunde angestellt worden sind, um diesen Punkt sicher zu stellen, geben nun aber sofort zu erkennen, dass die erwähnte Vermuthung abzuweisen ist. Die Vergleichungen wurden in der Form

$$DM - HR = h_0 + \beta \cdot \delta$$

dargestellt, woraus folgt, dass nur dann das Wachsthum der Zahlen α mit der Annäherung an die Milchstrasse, also mit wachsendem δ durch die Veränderlichkeit der in Bonn benutzten Helligkeitsscala erklärt werden kann, wenn β mit zunehmender Sterngrösse abnimmt. Sowohl in der DM als auch in der SD war β positiv; es wuchs ausserdem bei DM mit wachsender Sterngrösse so deutlich, dass diese Thatsache als ganz sicher verbürgt angesehen werden kann. Bei SD ist dieses Wachsthum bei den Sternen von der Grösse 9.0 gegenüber den helleren ebenfalls ganz sicher, dagegen nicht zwischen den Sterngrössen 7.0 und 8.0. Wenn aber auch hier eine kleine Abnahme des δ mit der Sterngrösse stattfinden sollte, so ist sie doch in jedem Falle viel zu unbedeutend, um auch nur einen nennenswerthen Beitrag zu der gefundenen Thatsache abgeben zu können. Reducirt man die $\log \alpha$ für die DM auf photometrische Grössen, so dass also $\log \alpha_m^0$ die Differenz der Logarithmen: $\log A_m - \log A_{m-\frac{1}{2}}$ und m nicht mehr geschätzte sondern photometrische Grössen sind, so wird man dasselbe Verfahren, wie oben, anwenden

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

können, welches eine genügend angenäherte richtige Correction ergiebt. So erhält man für die reducirten Werthe folgende Zusammenstellung:

Zone	$\log \alpha^0_{7.0}$	$\log \alpha^0_{7.5}$	$\log \alpha^0_{8.0}$	$\log \alpha^0_{8.5}$	$\log \alpha^0_{9.0}$	Σ	Mittel
I	0.246	0.248	0.222	0.232	0.239	1.187	0.237
II	245	234	230	239	244	192	238
III	261	241	234	236	250	222	244
IV	267	245	262	251	280	305	261
V	294	242	272	267	300	375	275
VI	265	239	247	257	281	289	258
VII	237	228	262	266	279	272	254
VIII	235	230	268	294	315	342	268
Mittel	0.256	0.239	0.250	0.255	0.274		

Bei der *SD* eine ähnlich detaillirte Reduction vorzunehmen, ist, wie bereits erwähnt, gegenwärtig nicht möglich. Doch ist dies auch gar nicht nöthig, um den Satz als wohlbegründet ansehen zu dürfen. Die Zahl der Sterne nimmt mit der Sterngrösse um so stärker zu, je näher die betrachtete Himmelsgegend der Milchstrasse ist.

Die Durchmusterungssterne schwächer als 9.0 zeigen übrigens ein ähnliches Verhalten und es scheint also, dass procentualiter ungefähr dieselbe Zahl schwächerer Sterne in allen Theilen des Himmels mitgenommen worden ist.

Es ergeben sich für die Sterne 9.5 Grösse der *DM* und für diejenigen von der Grösse 9.5 und 10.0 der *SD* die folgenden Zahlen:

Zone	*DM* $\log \frac{A_{9.5}}{A_{9.0}}$	*SD* $\log \frac{A_{9.5}}{A_{9.0}}$	$\log \frac{A_{10.0}}{A_{9.5}}$
I	0.452	—	—
II	454	0.397	0.573
III	470	402	558
IV	493	419	621
V	522	453	619
VI	507	435	585
VII	483	407	589
VIII	463	397	585
IX	—	383	579

Eine nähere Discussion wäre aber wegen der offenbaren Unvollständigkeit des Materiales nicht am Platze.

Die Anzahl *A* aller Sterne von den hellsten bis zu den schwächsten, welche in den vorhergehenden Zusammenstellungen vorkommen, also bis zu denen, die in beiden Bonner Verzeichnissen mit 9.0 bezeichnet sind, ergiebt

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

eine einfache Addition meiner Abzählungen. Ich stelle diese für die einzelnen Zonen zusammen; neben A steht das zugehörige Areal in Quadratgraden, ferner die Sternfülle D d. i. die Sternzahl auf einem Quadratgrad. Darauf folgen unter DM und SD die nach Formeln (F a. a. O.) ausgeglichenen photometrischen Sterngrössen, wie sie den in DM und SD mit 9.0 bezeichneten Grössen entsprechen, schliesslich unter D', die auf die photometrische Grösse 9.20 reducirten Werthe von D. D' ist einfach dadurch gewonnen worden, dass der doppelte Ueberschuss von 9.2 über die unter DM stehenden Zahlen mit den in der letzten Tabelle angegebenen $\log \alpha^0_{9.0}$ multiplicirt, als die Correction angesehen worden ist, welche $\log D$ zu erhalten hat. Für Zone IX wurde $\log \alpha^0_{9.0} = 0.30$ angesetzt. Diese Reduction kann selbstverständlich nur eine ganz beiläufige sein, schon deshalb, weil die α^0 sich nur auf die DM beziehen; sie ist auch nur deshalb zulässig, weil die Sterngrössen DM und SD nur wenig von einander abweichen.

Zone	J	A	D	DM	SD	D'
I	1398.7	4 277	3.06	9.285	—	2.78
II	3146.9	10 185	3.24	280	9.278	3.03
III	5126.6	19 488	3.80	261	256	3.54
IV	4589.8	24 492	5.34	204	174	5.32
V	4519.5	33 267	7.36	125	080	8.17
VI	3971.5	23 580	5.94	183	174	6.07
VII	2954.4	11 790	3.99	256	256	3.71
VIII	1790.6	6 375	3.56	270	278	3.21
IX	468.2	1 644	3.51	—	282	3.14

Die Zahlen D' zeigen, dass die Sternfülle in der That angenähert als eine gerade Funktion der galaktischen Breite angesehen werden kann, dass dies aber, wie natürlich, nur eine ganz rohe Annahme ist.

Vergleicht man den Mittelwerth aller $\log \alpha^0$ für jede Zone mit den Einzelwerthen, so wird man die Abweichungen als klein gegenüber den Variationen des Mittels von Zone zu Zone finden. Da es sich nur um ganz beiläufige Ueberschläge handeln soll, wird man demgemäss behaupten dürfen, dass sich die $\log \alpha$ für die Grössen 6—9 nahezu gleich verhalten und die Abweichungen vom Mittelwerth als zufällige Fehler betrachtet werden können. Giebt man dann den Mittelwerthen Gewichte proportional den betreffenden Sternzahlen, also den Zonen I bis VIII bezw. 4, 9, 14, 19, 27, 18, 8, 2 und vereinigt nach Maassgabe dieser Gewichte die Mittelwerthe von Zone II und VIII, III und VII, IV und VI, so ergiebt sich:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Zone	$\log \alpha^0$	λ
I	0.237	+ 0.63
II u. VIII	243	57
III u. VII	248	52
IV u. VI	260	40
V	275	25

Wären die Sterne gleichförmig vertheilt und von gleicher Leuchtkraft, so müsste $\log \alpha^0 = 0.3$ sein. Stellt man nun aber $\log \alpha^0$ durch die Formel

$$\log \alpha^0 = \log \left(\frac{h_{m-\frac{1}{2}}}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} = \frac{3-\lambda}{10}$$

dar, so kommt für die einzelnen Zonen ein mit der Lage gegen die Milchstrasse beträchtlich variirender Werth von λ heraus, der oben angeführt ist. In erster Näherung kann man also λ als nur von der Lage gegen die Milchstrasse abhängig bezeichnen, thatsächlich wird es selbstverständlich mit der Grösse m variiren; doch soll hiervon abgesehen werden, da nur das typische Verhalten in der scheinbaren Vertheilung der Sterne in allgemeinen Zügen betrachtet werden soll.

Der regelmässige Verlauf der Zahlen $\log \alpha$ geht, was leicht erklärlich ist, immer mehr verloren, je kleiner die Areale sind, in Bezug auf welche Mittelwerthe gebildet werden. Sehr bald zeigen die $\log \alpha$ für die helleren Sterne sehr bedeutende Schwankungen. Aber auch für die Sterne 9.0 sind die Schwankungen vielleicht grösser, als dass sie durch eine Variation der angewandten Helligkeitsscala zu erklären wären.

Die Mittheilung einiger Zusammenfassungen grösserer Areale wird vielleicht nicht ohne Interesse sein.

Zuerst wurden die Abzählungen der Sterne der *D M* in 5 Declinationsgrade umfassende Zonen zusammengezogen und gefunden:

δ	$\log \alpha_{7.0}$	$\log \alpha_{7.5}$	$\log \alpha_{8.0}$	$\log \alpha_{8.5}$	$\log \alpha_{9.0}$
+ 0°— 4°	0.263	0.255	0.301	0.339	0.398
5 — 9	261	240	294	345	387
10 —14	269	231	248	304	346
15 —19	261	216	236	266	325
20 —24	255	236	245	276	326
25 —29	266	258	259	316	318
30 —34	315	258	251	285	312
35 —39	320	260	254	273	315
40 —44	345	267	244	272	305
45 —49	299	250	261	263	304
50 —54	286	274	248	279	305

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

δ	log $\alpha_{7.0}$	log $\alpha_{8.5}$	log $\alpha_{8.0}$	log $\alpha_{8.5}$	log $\alpha_{9.0}$
+ 55°—59°	0.285	0.238	0.264	0.259	0.294
60 — 64	312	238	240	245	283
65 — 69	326	223	256	243	277
70 — 79	295	239	226	227	267
80 — 89	246	220	209	280	319

Hier fällt eine starke Abhängigkeit der α von der Declination auf. In der Hauptsache läuft diese aber parallel der Veränderung, welche die bei der *DM* angewandte Helligkeitsscala mit der Declination zeigt, und der hauptsächlichste Theil der Variationen fällt dieser zur Last, so dass die scheinbare Vertheilung der Sterne, insoweit sie in den Zahlen α zum Ausdruck kommt, wesentlich von der Declination unabhängig ist. Auf diesen Punkt wird später kurz eingegangen werden.

Nebenbei bemerkt, ist eine ähnliche Abhängigkeit von der Declination in Schönfelds *SD* nicht zu constatiren, wie die folgenden Resultate zeigen.

δ	log $\alpha_{7.0}$	log $\alpha_{7.5}$	log $\alpha_{8.0}$	log $\alpha_{8.5}$	log $\alpha_{9.0}$
— 0°— 4°	0.282	0.238	0.271	0.311	0.357
— 5 — 9	300	218	250	293	346
— 10 — 14	307	234	254	297	342
— 15 — 18	293	253	260	289	345
— 19 — 22	305	238	259	293	344
Mittel	0.297	0.236	0.259	0.297	0.347

Schon bei früherer Gelegenheit habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass es Schönfeld trotz der sehr erschwerenden Umstände in hohem Grade gelungen ist, seine Schätzungen ziemlich unabhängig von der Extinction, also auch von der Declination zu gestalten. Dies geht auch aus den angeführten Zahlen hervor.

Ferner habe ich die Declinationsgrade 0°—9°, 20°—39°, 40°—49° und 60°—69° in Abtheilungen von $1^h\,20^m$ *AR* zusammengefasst. Es ergab sich:

Declination 0°—9°.

h m	log $\alpha_{7.0}$	log $\alpha_{7.5}$	log $\alpha_{8.0}$	log $\alpha_{8.5}$	log $\alpha_{9.0}$
0.0	0.34	0.23	0.31	0.31	0.39
1.20	24	30	26	36	40
2.40	31	21	37	36	34
4.0	26	18	22	32	39
5.20	20	28	31	36	39
6.40	31	24	36	44	45
8.0	28	44	33	36	41
9.20	31	25	27	35	37

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

h m	$\log \alpha_{7.0}$	$\log \alpha_{7.5}$	$\log \alpha_{8.0}$	$\log \alpha_{8.5}$	$\log \alpha_{9.0}$
10.40	0.10	0.26	0.28	0.37	0.36
12.0	24	26	39	34	36
13.20	28	21	28	29	41
14.40	19	31	23	30	40
16.0	35	18	20	32	40
17.20	36	21	29	29	38
18.40	38	23	29	32	39
20.0	29	25	30	32	41
21.20	20	28	35	34	40
22.40	18	21	28	35	37
Mittel	0.27	0.25	0.30	0.34	0.39

Declination 20^0—29^0.

h m	$\log \alpha_{7.0}$	$\log \alpha_{7.5}$	$\log \alpha_{8.0}$	$\log \alpha_{8.5}$	$\log \alpha_{9.0}$
0.0	0.21	0.25	0.22	0.31	0.33
1.20	18	25	24	28	30
2.40	26	19	25	27	27
4.0	16	18	19	23	35
5.20	38	27	30	30	36
6.40	25	28	24	29	35
8.0	28	28	22	29	30
9.20	34	25	27	24	32
10.40	41	26	24	23	29
12.0	20	25	18	23	27
13.20	26	27	27	28	29
14.40	25	24	26	31	30
16.0	18	24	24	30	30
17.20	18	28	29	31	34
18.40	31	25	27	30	33
20.0	25	24	32	30	35
21.20	34	27	23	31	33
22.40	34	23	24	28	31
Mittel	0.27	0.25	0.25	0.28	0.32

Declination 40^0—49^0.

h m	$\log \alpha_{7.0}$	$\log \alpha_{7.5}$	$\log \alpha_{8.0}$	$\log \alpha_{8.5}$	$\log \alpha_{9.0}$
0.0	0.31	0.27	0.24	0.24	0.31
1.20	39	27	27	31	31
2.40	25	26	24	28	29
4.0	36	22	29	25	33
5.20	46	35	23	25	29
6.40	34	31	28	24	28

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

h m	log $\alpha_{7.0}$	log $\alpha_{7.5}$	log $\alpha_{8.0}$	log $\alpha_{8.5}$	log $\alpha_{9.0}$
8.0	0.22	0.33	0.27	0.29	0.31
9.20	39	30	24	26	29
10.40	29	25	25	24	27
12.0	27	30	25	23	28
13.20	28	19	27	24	30
14.40	31	21	21	30	28
16.0	27	27	22	26	30
17.20	33	27	24	27	29
18.40	38	21	24	29	34
20.0	29	26	25	26	31
21.20	34	27	27	29	33
22.40	31	24	28	28	29
Mittel	0.32	0.27	0.25	0.27	0.30

Declination 60^0—69^0.

h m	log $\alpha_{7.0}$	log $\alpha_{7.5}$	log $\alpha_{8.0}$	log $\alpha_{8.5}$	log $\alpha_{9.0}$
0.0	0.35	0.20	0.27	0.30	0.31
1.20	34	26	20	29	30
2.40	31	22	23	25	30
4.0	55	17	25	25	29
5.20	35	23	26	25	30
6.40	44	28	27	25	30
8.0	18	22	31	27	26
9.20	24	25	21	23	28
10.40	37	18	23	20	27
12.0	23	28	20	22	24
13.20	29	33	21	22	27
14.40	27	23	21	21	29
16.0	22	21	36	20	25
17.20	36	21	21	25	30
18.40	28	30	27	30	31
20.0	32	16	29	25	29
21.20	31	26	23	24	25
22.40	35	16	27	24	26
Mittel	0.32	0.23	0.25	0.25	0.28

Die unregelmässigen Schwankungen innerhalb der einzelnen Rubriken wurden schon oben besprochen. Sie sind zum Theil in den Veränderungen der photometrischen Scala, zum Theil jedoch auch in wirklichen Schwankungen der scheinbaren Vertheilung der Sterne begründet; doch stellt sich im Allgemeinen, namentlich bei den schwächeren Sternen mit bemerkenswerther Annäherung der mittlere Zustand ein, wenn auf die Veränderung der Hellig-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

keitsscala Rücksicht genommen wird. Leider ist dies natürlich nur mit einer gewissen Annäherung möglich, denn selbst bei der grossen Anzahl von Sternen, welche bei der Vergleichung der *DM* mit der *HR* benutzt werden konnte, kann die Beziehung zwischen den beiderlei Sterngrössen nur in ganz rohen Zügen ermittelt werden, wenn es darauf ankommt, nicht bloss auf die Lage zur Milchstrasse, sondern auch auf eine zweite Coordinate z. B. die Declination Rücksicht zu nehmen. Besonders auffallend ist es, dass die oben angeführten Mittelwerthe für die einzelnen Declinationsabtheilungen zum Theil sehr stark von den auf den ganzen nördlichen Himmel bezogenen Mittelwerthen (1) (S. 574) abweichen. Stellt man diese Mittelwerthe und die Werthe (1) zusammen, so hat man:

	0^0—9^0	20^0—29^0	40^0—49^0	60^0—69^0	(1)
$\log \alpha_{7.0}$	0.27	0.27	0.32	0.32	0.29
$\log \alpha_{7.5}$	25	25	27	23	25
$\log \alpha_{8.0}$	30	25	25	25	25
$\log \alpha_{8.5}$	34	28	27	25	28
$\log \alpha_{9.0}$	39	32	30	28	27

Mit Rücksicht auf die grosse Anzahl der Sterne sind diese Abweichungen doch recht beträchtlich. Es ist deshalb interessant zu bemerken, dass diese zum grössten Theil verschwinden, wenn man auf photometrische Grössen reducirt. Nach meiner Vergleichung der *DM* mit der *HR* (S. 170) ergiebt sich, wenn im allgemeinen drei aufeinanderfolgende Werthe, welche die Declinationen 5^0, 25^0 etc. einschliessen, zu einem Mittel vereinigt werden (mit Ausnahme der Abtheilung 0^0—9^0, wo eine andere, leicht erkennbare Gruppirung vorgenommen wurde):

	0^0—9^0	20^0—29^0	40^0—49^0	60^0—69^0
DM 6.5^m = phot.	6.34^m	6.48^m	6.53^m	6.56^m
7.0	6.82	7.05	7.10	7.16
7.5	7.38	7.58	7.66	7.63
8.0	7.89	8.06	8.18	8.13
8.5	8.52	8.66	8.71	8.67
9.0	9.14	9.25	9.30	9.18

und wenn das frühere Reductionsverfahren, in Ermangelung eines einwurfsfreieren, angewendet wird, ergiebt sich jetzt für die reducirten $\log \alpha^0$:

	0^0—9^0	20^0—29^0	40^0—49^0	60^0—69^0	(1)
$\log \alpha^0_{7.0}$	0.28	0.29	0.28	0.27	0.27
$\log \alpha^0_{7.5}$	22	24	24	24	24
$\log \alpha^0_{8.0}$	30	26	24	25	25
$\log \alpha^0_{8.5}$	27	23	25	23	25
$\log \alpha^0_{9.0}$	31	26	25	27	27

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Nimmt man darauf Rücksicht, dass die Reduction auf photometrische Grössen in den äquatorealen Gegenden besonders unsicher zu sein scheint, so wird man in der Uebereinstimmung der letzten Zahlen einen Beweis für die angenäherte Richtigkeit der Reductionselemente sehen und auch die Thatsache als erwiesen anerkennen müssen, dass in grösseren Arealen des Himmels sich die log α überall um dieselben Mittelwerthe gruppiren. Inwieweit in besonderen Himmelsgegenden, so namentlieh in der Milchstrasse selbst, sich die Sache ebenso verhält, darauf soll erst später eingegangen werden. [1])

Für die südliche Himmelshalbkugel ähnliche Zusammenstellungen zu machen, wie im Vorgehenden für die nördliche gegeben sind, ist gegenwärtig nicht möglich. Es fehlt hier an den allernöthigsten Vorarbeiten. Selbst wenn die in Cordoba ausgeführte Fortsetzung der Bonner Durchmusterung publicirt sein wird, wären erst die langwierigen Abzählungen vorzunehmen und die Vergleichung mit einer photometrischen Helligkeitsscala auszuführen. Doch wird man erwarten dürfen, dass das typische Verhalten der Sternvertheilung auf der Südhalbkugel ähnlich dem auf der Nordhalbkugel sich gestalten wird. Wichtiger wäre deshalb eine genauere Kenntniss über die Vertheilung der schwächeren Sterne als 9.0 auf der Nordhalbkugel zu besitzen. In nicht ferner Zeit wird man in der im Werke begriffenen photographischen Aufnahme des Fixsternhimmels ein grosses und vollständiges und hoffentlich auch einwandfreies Material bis zu den Sternen von etwa der 11. Grösse besitzen, welches alle Fragen die hier zum Theil nur angedeutet werden können genauer zu betrachten erlauben wird, wenn erst das Verhalten der photographischen Grössen zu den photometrischen festgestellt und die nöthigen Abzählungen gemacht worden sind. Gegenwärtig könnten nur vereinzelte Aufnahmen einzelner Himmelsgegenden benutzt werden und auch das nur mit Einschränkungen, weil zuverlässige Angaben über die photometrischen Helligkeiten der Sterne meistens fehlen.

---

[1]) Die Thatsache, dass schon auf kleineren Arealen für alle Grössen in der Durchmusterung zwischen $m = 6$ und $m = 9.0$ die Beziehung stattfindet:

$$A_m : A_{m-1} = \left(\frac{h_{m-1}}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}$$

worin λ verhältnissmässig nicht gar sehr variirt (zwischen 0.63 und 0.25) erklärt vollkommen das in meinen Abzählungen der Sterne der nördlichen DM S. 548 angeführte Resultat, dass die Coordinaten der Schwerpunkte aller Sterne derselben Sternklasse $\frac{R_n}{r_n}$, A_n und D_n ungefähr dieselben Werthe für alle n haben.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Für Fragen, wie sie im Folgenden berührt werden, wäre indessen das bei weitem einfachste und directeste Mittel, wenn man in der Art wie es J. Herschel in seinen Capbeobachtungen gethan hatte, die scheinbare Vertheilung der Sterne durch Sternaichungen systematisch zu erforschen trachten würde.

Die einzelnen ausgewählten Felder müssten nahezu gleichmässig am Himmel vertheilt sein und die Abzählungen müssten nicht nur mit einem grossen, etwa dem von Herschel angewandten an Lichtstärke gleichkommenden, sondern gleichzeitig auch mit kleineren Fernröhren ausgeführt werden, welch' letztere natürlich durch passende Abblendungen des grossen Objectives ersetzt werden können. Die photometrischen Lichtstärken derjenigen Sterne, welche noch als solche deutlich gezählt werden können, liessen sich mit der hier erforderlichen Genauigkeit wohl leicht, allerdings nur durch eigens zu diesem Zwecke angestellte Untersuchungen ermitteln und damit würde das Bedenken, das ich bei Gelegenheit der Mittheilung[1]) der Abzählung der in der südlichen Durchmusterung vorkommenden Sterne gegen die Bedeutung ausgesprochen habe, die man den sogenannten Sternaichungen zuerkennen kann, Berücksichtigung finden. Dass solche Beobachtungen, wenn mit gehöriger Vorsicht angestellt, auch bei Detailstudien z. B. über die Constitution der Milchstrasse von hohem Werthe wären, geht unter Anderm aus einer interessanten Notiz des Herrn Easton[2]) hervor.

Gegenwärtig steht nur ein recht dürftiges Material zur Verfügung. Für die Vertheilung der schwächeren Sterne kommen ausser den später zu besprechenden Sternaichungen der beiden Herschel in Betracht: die Eclipticalkarten von C. H. F. Peters und des Pariser Observatoriums, deren Verwendung für die hier zu behandelnden Fragen indessen, wie noch näher begründet werden soll, kaum rathsam ist. Ausserdem liegt nur noch eine einzige, sehr sorgfältige und darum besonders wichtige Arbeit von Herrn Celoria[3]) vor. Herr Celoria hat mit einem Plössl'schen Fernrohre von 10 cm Oeffnung die Sterne zwischen den Declinationen $+ 0^0$ und $+ 6^0$ abgezählt und die von ihm gewonnenen Zahlen, die vorderhand das einzige Zwischenglied zwischen den Bonner Durchmusterungen und den Herschel'schen Sternaichungen darstellen, müssen ihrer hohen Wichtigkeit wegen näher betrachtet werden.

Um die Abhängigkeit der Anzahl C der Celoriasterne von der Lage zur Milchstrasse festzustellen, genügt es in rohem Ueberschlage anzugeben, welcher Zone II—VIII jede Rectascensionsstunde zugehört. Diese gewiss ausreichenden

---

[1]) S. 235.

[2]) Sur la distribution apparente des étoiles dans une partie de la Voie lactée. Astr. Nachr. No. 3270.

[3]) Celoria, Supra alcuni scandagli del Cielo etc. Pubblicazioni del Osservat. d. Brera, XIII, Milano 1877.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Abschätzungen sind nach den schon öfter erwähnten Diagrammen in meiner Abzählung der Sterne der *SD* vorgenommen worden und unter der Rubrik „Zone" in der folgenden Tabelle angegeben. Die zweite Rubrik *C* giebt die Zahl der Celoriasterne, welche in der in der ersten Verticalreihe angeführten Rectascensionsstunde enthalten sind. Unter *B* ist die Zahl der auf demselben Areale vorkommenden Bonner Durchmusterungssterne 1^m bis $9^m.0$ angegeben.

AR	*C*	*B*	Zone	*AR*	*C*	*B*	Zone
0^h	6561	334	VIII	12^h	5706	274	II
1	5766	349	VIII	13	5915	253	II
2	6121	371	$\frac{1}{2}$(VII + VIII)	14	6486	278	II
3	5938	346	VII	15	7159	240	III
4	7171	448	$\frac{1}{2}$(VI + VII)	16	8932	283	$\frac{1}{3}$(2 III + IV)
5	8959	491	VI	17	11171	455	IV
6	14947	692	V	18	10525	472	V
7	13747	685	$\frac{1}{2}$(IV + V)	19	14212	490	$\frac{1}{3}$(2 V + VI)
8	8447	596	IV	20	11591	469	VI
9	6424	361	III	21	8498	375	$\frac{1}{3}$(VI + 2 VII)
10	6027	285	$\frac{1}{2}$(II + III)	22	7369	337	VII
11	6232	283	II	23	6877	316	VIII

Um nach den Zonen II bis VIII zu ordnen, wurden die einzelnen *C* nach Maassgabe der letzten Rubrik gleichmässig vertheilt. So entstand folgende Zusammenstellung:

Zone	*C*	*B*	*J*	C_I	B_I	B_0	$\log \frac{C_I}{B_I}$	$\log \frac{C_I}{B_0}$	$\log \left(\frac{C_I}{B_I}\right)_0$
II	27352.5	1230.5	404.4	67.6	3.04	3.20	1.347	1.325	1.386
III	22551.2	932.2	284.6	79.3	3.28	3.80	384	320	415
IV	29468.8	1487.8	254.6	115.7	5.83	5.45	297	327	299
V	41820.2	1833.2	284.6	146.9	6.44	7.48	358	293	315
VI	31705.5	1472.3	284.6	111.4	5.22	5.96	333	272	324
VII	25618.3	1342.5	329.5	77.7	4.07	3.85	281	305	312
VIII	22264.5	1184.5	314.5	70.8	3.77	3.54	274	301	319

J ist das Areal in Quadratgraden, C_I und B_I die Zahl der Celoria- und Durchmusterungssterne auf einem Quadratgrad. Die Zahlen $\log \frac{C_I}{B_I}$ zeigen eine bemerkenswerthe Constanz, wenigstens sind die Variationen so klein, dass man sie durch die verhältnissmässig kleine Anzahl der *DM*-Sterne im betrachteten Areal vollständig erklären könnte. Nimmt man für B_I B_0 d. i. die Anzahl der Sterne 1—9.0 Grösse auf dem Quadratgrad im Mittel aus der ganzen *DM*, so ändert sich wenig an der Sache, aber die Andeutung, die vielleicht vorher für ein Anwachsen von $\log \frac{C_I}{B_I}$ zur Milchstrasse hin gefunden werden konnte,

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

ist jedenfalls ganz verschwunden. Schliesslich habe ich noch unter $\log\left(\frac{C_I}{B_I}\right)_0$ die in ähnlicher Weise wie früher auf die Annahme reducirten Werthe angegeben, wenn in allen Zonen für B die Zahl der Sterne der DM von der photometrischen Grösse $9^m.2$ angesetzt wird. Die ungefähre Uebereinstimmung zwischen allen diesen Zahlen gestattet mit einiger Wahrscheinlichkeit die Annahme, dass die Resultate der Abzählung Herrn Celorias nicht weit von den Mittelzahlen entfernt sein werden, die man erhielte, wenn man den ganzen nördlichen Himmel in Betracht hätte ziehen können. Ueber die photometrische Grösse der schwächsten von Herrn Celoria gesehenen Sterne ist nichts bekannt. Es ist aber wohl anzunehmen, dass diese Sterne etwa von der $11^1/_2$ Grösse sein werden. Ist diese Annahme richtig, dann würden auch quantitativ die Werthe von $\log\frac{C_I}{B_I}$ sich den Werthen von $\log\alpha$ in (1) gut anschliessen. Doch mag dies zunächst zweifelhaft bleiben; in jedem Falle zeigen die obigen Zusammenstellungen, dass sich die Celoriasterne in ihrer Vertheilung in Bezug auf die Milchstrasse sehr nahe ebenso verhalten, wie die Durchmusterungssterne von der Grösse 1—9.0.

Das Gesagte gilt nur für Mittelzahlen, die sich auf ein grösseres Areal beziehen. Einzelne Gegenden kleineren Umfanges zeigen manchmal ein ganz anderes Verhalten und besonders scheint dies in der Milchstrasse selbst der Fall zu sein. So hat z. B. Herr Easton a. a. O. 4 nahe bei einander stehende Gegenden im Adler untersucht. Für diese Gegenden A, B, C und D finden sich die Sternanzahlen:

	Bonn 1—9.0	Celoria	$\log\frac{C}{B}$
A	147	1189	0.908
B	175	1735	0.996
C	132	1818	1.139
D	186	2658	1.155

Hier sind die $\log\frac{C}{B}$ unter einander ziemlich verschieden, mehr noch aber weichen sie nach derselben Richtung von den obigen Mittelwerthen ab.

Es ist schon oben bemerkt worden, dass das in den bekannten Ecliptical-karten in Beziehung auf die schwachen Sterne enthaltene Material bei den hier behandelten Fragen zu benutzen nicht rathsam ist, wenigstens müsste eine sehr eingehende Discussion vorhergehen. In der That ist es kaum zweifelhaft, dass die Kartenwerke im Allgemeinen nicht jene Vollständigkeit bis zu einer bestimmten Grössenklasse hinab aufweisen, die als eines der

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Haupterfordernisse bei den vorliegenden Betrachtungen angesehen werden muss. Ueber die Karten von C. H. F. Peters kann man sich nach dieser Richtung — nur die Rücksicht auf Vollständigkeit, die die sonstige Vortrefflichkeit des ganzen Werkes ganz unberührt lässt, ist dabei maassgebend — verhältnissmässig leicht ein Urtheil verschaffen, da Herr Holden[1]) eine Abzählung der in den Peters'schen Karten enthaltenen Sterne ausgeführt hat. Mit Hülfe der oft erwähnten Curven für die Begrenzungen der einzelnen Zonen II, III, IV, VI, VII, VIII — die andern sind in den Karten nicht vertreten — habe ich die Anzahlen *P* der Peters'schen Sterne auf dem Areale eines Quadratgrades abgeleitet. Zur Vergleichung sind die analogen Zahlen *C* bei Celorias Abzählung hinzugefügt.

Zone	*P*	*C*
II	60	68
III	72	79
IV	94	116
VI	112	111
VII	82	78
VIII	60	71

Danach ist es nicht wahrscheinlich, dass die Peters'schen Karten im Allgemeinen schwächere Sterne enthalten sollten, als Celoria gezählt hat. Von einer auch nur angenäherten Vollständigkeit der Peters'schen Karten bis zur 13. Grösse, wie Herr Holden glaubt, kann gar keine Rede sein. Das bestätigt auch ein nur flüchtiger Vergleich mit dem Himmel. So hat Herr Dr. Villiger auf mein Ersuchen einige Peters'sche Karten verglichen und gefunden, dass nur selten Sterne in ihnen vorkommen, die schwächer als $11\frac{1}{2}$ Grösse sind und dass jedenfalls von einer einigermaassen vollständigen Anführung wesentlich schwächerer Sterne nicht gesprochen werden kann. Die schönen und werthvollen Pariser Karten gehen in manchen Abtheilungen weiter als die Peters'schen. Hier tritt aber der Umstand hemmend in den Weg, dass die einzelnen Blätter zu sehr verschiedenen Zeiten und von verschiedenen Beobachtern angefertigt worden und offenbar sehr verschieden in Bezug auf die schwächsten noch mitgenommenen Sterne sind. Eine genauere Untersuchung nach dieser Richtung ist aber sehr schwer auszuführen und sie ist absolut nothwendig, wenn man nicht zu ganz falschen Schlüssen verleitet werden soll.

Wie schon oben erwähnt, bilden nach wie vor das schätzbarste Material für das Studium der scheinbaren Vertheilung der Sterne die von W. und J. Herschel ausgeführten Sternaichungen, welche in der That ein ziemlich

[1]) Publications of the Washburn Observatory Vol. II, 1884.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

zuverlässiges Bild des Fixsternhimmels bis zu einer der 13. oder 14. photometrischen Sterngrösse entsprechenden Helligkeit abgeben.

Die Resultate der Sternaichungen von W. Herschel sind durch die bereits citirte Publication Herrn Holdens[1]) leicht zugänglich, während die am Cap von J. Herschel ausgeführten Abzählungen in dem Capwerke[2]) übersichtlich zusammengestellt sind. Herr Holden war in der glücklichen Lage, den bekannten 683 „Star-Gauges" von W. Herschel 405 bisher unveröffentlichte hinzufügen zu können und die folgenden Zahlen beziehen sich auf das ganze Material. W. Herschels Aichungen sind nicht nach einem festen, von vornherein aufgestellten Plane ausgeführt und deshalb sind die einzelnen Felder leider keineswegs gleichförmig über den Himmel vertheilt; bei J. Herschel ist dies aber in hohem Grade der Fall, was seine Abzählungen besonders werthvoll macht. Von Bedeutung ist auch der Umstand, dass J. Herschel dasselbe Instrument wie sein Vater benutzte und offenbar alle von dem letzteren getroffenen Vorsichtsmaassregeln und Beobachtungsmethoden genau befolgte. Man kann deshalb von vornherein die Sternaichungen J. Herschels direct als eine Fortsetzung der älteren Arbeit ansehen.

Die gefundenen Sternanzahlen wurden nun wieder nach Maassgabe der Zonen I—IX vereinigt, wobei eine rohe Abgrenzung der einzelnen Zonen nach den stets benutzten Diagrammen völlig ausreichend ist. Dabei wurde jeder Nummer des Holden'schen Verzeichnisses dasselbe Gewicht beigelegt. Nur an wenigen Stellen, wo sich viele einzelne Felder in sehr nahe gelegenen Himmelsgegenden stark zusammendrängten, wurden diese Felder zusammengezogen in ein Resultat mit dem Gewichte 1, um einzelnen unregelmässigen und auffallenden Anhäufungen und sternarmen Gegenden, die übrigens von W. Herschel bevorzugt worden zu sein scheinen, nicht einen allzu grossen Einfluss einzuräumen. Indessen bin ich in diesen Zusammenziehungen wahrscheinlich zu wenig weit gegangen und es wäre vielleicht angebracht gewesen, von Anfang an auf eine regelmässigere Vertheilung der Felder am Himmel Bedacht zu nehmen. Doch wird schliesslich bei der grossen Anzahl der einzelnen Resultate in den Mittelwerthen eine genügende Compensation stattgefunden haben. Bei den Angaben J. Herschels konnten durchweg einfache Mittel genommen werden, da er auf eine fast ganz regelmässige Vertheilung der Felder von vornherein geachtet hat. An einigen wenigen Stellen der Milchstrasse ist die Sternanzahl bei J. Herschel nicht angegeben, sondern als

---

[1]) Publications of the Washburn Observatory II.

[2]) Results of Astronomical Observations at the Cape of good Hope. London 1847, S. 373 ff.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

„innumerable“ bezeichnet. Nach Andeutungen des Beobachters wird man im Durchschnitt die entsprechende Anzahl etwa mit 200—300 anzugeben haben. Ich habe 250 angesetzt. Ein selbst beträchtlicher Fehler in dieser Annahme würde indessen wenig ausmachen.

In der folgenden Zusammenstellung ist unter Anzahl die Zahl der zum Mittel vereinigten „Star-Gauges“, unter *A* die mittlere Anzahl der im Gesichtsfeld des Fernrohres, welches 15′ 4″ im Durchmesser hatte, gezählten Sterne.

Zone	W. Herschel		J. Herschel		Mittel	1 Quadr.-Gr.
	Anzahl	*A*	Anzahl	*A*		
I	20	5.3	—	—	5.3	107
II	53	7.7	11	7.0	7.6	154
III	116	14.0	63	13.7	13.9	281
IV	105	30.0	208	26.5	27.7	560
V	334	139.2	391	66.7	100.0	2019
VI	212	38.9	505	30.9	33.3	672
VII	132	12.5	395	13.0	12.9	261
VIII	62	6.3	217	8.0	7.6	154
IX	25	4.2	70	6.0	5.5	111

Die Zahlen von W. und J. Herschel zeigen im Allgemeinen eine sehr befriedigende Uebereinstimmung. Nur die Zone V, in welcher die Milchstrasse liegt, macht eine auffällige Ausnahme. Zum Theil liegt dies wohl darin, dass W. Herschel recht helle Partien der Milchstrasse, deren Structur zu erforschen er sich zur Hauptaufgabe stellte, bevorzugte; auch eine Correctur der Annahme, dass die Milchstrasse längs eines grössten Kreises verläuft, kann möglicherweise die beiden Angaben einander nähern. Dann ist aber auch durchaus nicht ausgeschlossen, dass die Milchstrasse am südlichen Himmel thatsächlich im Durchschnitt nicht so sternreich ist, wie am Nordhimmel. Wenn man aber den typischen Verlauf der Sternvertheilung ins Auge fassen will, so wird man umsomehr berechtigt sein, auch für Zone V, die mit Rücksicht auf die „Anzahlen“ genommenen Mittelwerthe als die den einzelnen Zonen zugehörigen Sternfüllen anzusehen. Diese Mittel enthält die vorletzte Columne, während die letzte die hieraus berechnete Sternanzahl auf dem Areale eines Quadratgrades angiebt. Nebenbei bemerkt, würde aus den letzten Zahlen folgen, dass in dem Herschel'schen Teleskope am ganzen Himmel rund 27 Millionen Sterne zu sehen sind.

Stellt man nun die Zahl der auf einem Quadratgrad befindlichen Sterne zusammen, wie sie nach Herschel (*H*), Celoria (*C*, nach Seite 588) und der ganzen Durchmusterung (*D*, Seite 580) gefunden worden ist, so ergiebt sich:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Zone	H	C	D	$\frac{H}{D}$	$\frac{H}{C}$	$\frac{C}{D}$
I	107	—	3.06	35.0	—	—
II	154	67.6	3.24	47.5	2.28	20.9
III	281	79.3	3.80	73.9	3.54	20.8
IV	560	115.7	5.34	104.9	4.84	21.7
V	2019	146.9	7.36	274.3	13.74	20.0
VI	672	111.4	5.94	113.1	6.03	18.8
VII	261	77.7	3.99	65.4	3.36	19.5
VIII	154	70.8	3.56	43.3	2.18	19.9
IX	111	—	3.51	31.6	—	—

Diese Zahlen geben, auch wenn die grosse Unsicherheit in Betracht gezogen wird, welche mit der Ausdehnung der Gültigkeit der Zahlen C auf den ganzen Himmel verknüpft ist, doch mit fast absoluter Sicherheit zu erkennen, dass die Vertheilung der Sterne, welche wesentlich schwächer sind als die Celoriasterne, völlig andere Gesetze zeigt, wie die der helleren. Während die $\frac{C}{D}$ fast constant sind, wachsen die $\frac{H}{D}$ ganz regelmässig von den Milchstrassenpolen zu der Milchstrasse und werden hier mehr als 7 Mal so gross. Die Anzahl der schwächeren Sterne wächst in Regionen fern von der Milchstrasse sehr langsam und in einem überaus viel langsameren Verhältnisse, wie dies bei den helleren Sternen der Fall ist. Aber auch in der Milchstrassenzone V dürfte das Verhältniss $\frac{H}{C}$ kleiner sein — gewiss ist es nicht grösser — als man annehmen müsste, wenn die Herschel'schen Sterne noch dieselben Gesetze räumlicher Vertheilung erfüllen würden, die von den hellsten Sternen bis zu denen von etwa $11^1/_2$ Grösse angezeigt werden.

II.

Um die gewonnenen Zahlen des ersten Abschnittes zu weiteren Schlüssen verwenden zu können, muss der Zusammenhang zwischen den Anzahlen A_m, den scheinbaren Helligkeiten h_m und der Dichtigkeit D, mit welcher die Weltkörper den Raum erfüllen, aufgesucht werden. Wäre die Leuchtkraft aller Sterne gleich und besässen sie in der Entfernung $r_0 = 1$ die scheinbare Helligkeit h_0, so wäre die Anzahl $A_m(\omega)$ aller Sterne von den hellsten bis herab zur Grösse m, welche auf dem Areale ω liegen:

$$A_m(\omega) = \omega \int_{r_0}^{r_0\sqrt{\frac{h_0}{h_m}}} D \cdot r^2 \, dr.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Diese Formel gilt solange $\frac{h_0}{h_m} < \frac{h_0}{h_n} = r_1^2$, wo r_1 die Entfernung der Grenze des Fixsternsystemes ist. Für kleinere m ist constant $m = n$ zu setzen, schwächere Sterne, als von der Grösse n, kommen überhaupt nicht vor. Die Unrichtigkeit und Unzulässigkeit der Voraussetzung gleicher Leuchtkraft aller Sterne hat man schon längst betont und in der That ist sie vor allem durch angemessenere Annahmen zu ersetzen.

In der Entfernung 1 soll ein Stern die scheinbare Helligkeit i haben und es sollen alle Helligkeiten zwischen $i = H_0$ und $i = H$ vorkommen, nach Maassgabe der Häufigkeitsfunction $\varphi(i)$, so dass also die Anzahl der Sterne, welche eine zwischen den Grenzen i und $i + di$ liegende Helligkeit besitzen, $\varphi(i)\,di$ ist, die Gesammtzahl aller Sterne $= 1$ gesetzt, so dass also

$$\int_{H_0}^{H} \varphi(i)\,di = 1$$

zu setzen ist. Es hätte keinen Zweck, die folgenden Formeln auf Grund dieser allgemeinsten Annahme aufzustellen, vielmehr werden wir von vornherein $H_0 = 0$ annehmen dürfen. Es entspricht das unseren sonstigen Vorstellungen, im Uebrigen könnte man sich durch Anbringung eines Discontinuitätsfactors helfen. Man kann also setzen

$$\int_{0}^{H} \varphi(i)\,di = 1.$$

Für die scheinbare Helligkeit h eines Sternes in der Entfernung r ist dann:

$$i = h r^2.$$

Man bezeichne nun die Anzahl aller leuchtenden Sterne in einem Volumelement $d\tau$ mit $D\,d\tau$. Dieses Volumelement $d\tau$ wird man einestheils als sehr klein betrachten, anderntheils in Wirklichkeit sehr gross wählen müssen. Dergleichen ist aber nicht zu umgehen und die Zulässigkeit dieses Verfahrens beruht darauf, dass man nur mit Mitteln aus sehr grossen Anzahlen rechnen darf, wenn die abzuleitenden Formeln genügend genau bleiben sollen. Die Anzahl $A(d\tau)$ der Sterne, welche in einem Volumelement $d\tau$ liegen und eine Helligkeit zwischen den Grenzen i und $i + di$ haben, ist demnach

$$A(d\tau) = D \cdot d\tau \cdot \varphi(i)\,di.$$

Befindet sich $d\tau$ in der Entfernung r vom Beobachter, so wird:

$$A(d\tau) = D \cdot d\tau\,\varphi(h r^2) \cdot r^2\,dh.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Nennt man ω den scheinbaren Flächeninhalt des Himmelsstriches, welchen $d\tau$ darstellt, so wird $d\tau = \omega \cdot r^2 dr$ zu setzen sein und

$$A(d\tau) = D\omega \cdot r^4 \varphi(hr^2) dr dh \tag{1}$$

wird also die Anzahl der Sterne sein, welche auf dem Areale ω vorkommen, sich in der Entfernung r befinden und eine scheinbare Helligkeit besitzen, die zwischen den Grenzen h und $h + dh$ liegt. Die hellsten Sterne in diesem Volumen werden die scheinbare Helligkeit $\frac{H}{r^2}$ haben. Will man demnach die Zahl $A_m(d\tau)$ aller Sterne haben, die in $d\tau$ vorkommen, von den hellsten herab bis zu denen von der Grössenklasse m, welcher die Helligkeit h_m entspricht, so hat man (1) zu integriren zwischen den Grenzen h_m und $\frac{H}{r^2}$. Es ist also:

$$A_m(d\tau) = D\omega r^4 dr \int_{h_m}^{\frac{H}{r^2}} \varphi(hr^2) dh.$$

Um schliesslich A_m zu erhalten d. h. die Anzahl aller Sterne auf dem scheinbaren Flächenraum ω von den hellsten bis zu denen von der Grösse m, so hat man in Bezug auf r zu integriren. Die Grenze des Sternsystems sei in der Richtung ω durch $r = r_1$ gegeben. Ist dann $r_1 > \sqrt{\frac{H}{h_m}}$, so hat man zu integriren, von einem gewissen relativ kleinen Werth von $r = r_0$ an, welcher die Entfernung der nächsten Fixsterne ausdrückt, bis zu $r = \sqrt{\frac{H}{h_m}}$. Setzt man noch in dem inneren Integrale $x = hr^2$, so wird

$$A_m = \omega \cdot \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} D \cdot r^2 dr \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x) dx, \qquad r_1 > \sqrt{\frac{H}{h_m}} \tag{I}$$

während im zweiten Falle sich ergiebt:

$$A_m = \omega \int_{r_0}^{r_1} D \cdot r^2 dr \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x) dx, \qquad r_1 < \sqrt{\frac{H}{h_m}}. \tag{II}$$

Es wird sich empfehlen statt H die scheinbare Helligkeit h_0 der hellsten Sterne in der Entfernung r_0, also die Helligkeit der hellsten Sterne überhaupt einzuführen. Es ist dann:

$$h_0 r_0^2 = H. \tag{2}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

h_0 wird vielleicht etwa die Helligkeit eines Sternes von der Grösse minus 2 sein, es könnte aber auch eine grössere Helligkeit bedeuten. Wir werden im Folgenden nach Bedarf $r_0 = 1$ setzen und diese Einheit als eine Siriusweite, h_0 eine Siriushelligkeit nennen, ohne natürlich damit etwas specielleres zu meinen.

Die mittlere Entfernung ϱ_m der Sterne von der Grösse m in der Richtung ω ergiebt sich sofort:

$$\varrho_m = \frac{\int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} D \cdot r^5 \varphi(h_m r^2)\, dr}{\int_{0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} D \cdot r^4 \varphi(h_m r^2)\, dr}, \qquad r_1 > \sqrt{\frac{H}{h_m}} \tag{III}$$

und

$$\varrho_m = \frac{\int_{r_0}^{r_1} D \cdot r^5 \varphi(h_m r^2)\, dr}{\int_{r_0}^{r_1} D \cdot r^4 \varphi(h_m r^2)\, dr}, \qquad r_1 < \sqrt{\frac{H}{h_m}}. \tag{IV}$$

D wird eine Function von r und der Richtung nach ω sein und zwar, da nur das typische Verhalten in Frage kommen soll, wie in der Einleitung auseinandergesetzt worden ist, eine stetige Function. Von φ wäre ein gleiches vorauszusetzen, um den allgemeineren Fall zu haben. Damit wäre aber eine Allgemeinheit eingeführt, die vielleicht später sich als nöthig erweisen wird, die aber weiteres Verfolgen des Gegenstandes zunächst nicht gestattet. Zudem ist es wünschenswerth, aus möglichst einfachen Voraussetzungen die räumliche Vertheilung der Fixsterne abzuleiten. Diese möglichst einfache und deshalb wenigstens zunächst wichtigste Annahme besteht darin, dass $\varphi(i)$ nicht auch von r abhängt. Eine Abhängigkeit von der Richtung nach ω, die man vielleicht bestehen lassen könnte, würde so specielle Voraussetzungen über die Constitution des Sternsystems in sich schliessen, dass ein Gewinn aus dieser Annahme nicht abzusehen ist. Deshalb soll für das Folgende durchaus daran festgehalten werden, dass $\varphi(i)$ in allen Gegenden dieselbe Form hat und also nicht Function des Ortes sondern nur von i abhängig ist.

Das Studium der räumlichen Vertheilung der Fixsterne kommt mit den hervorgehobenen Einschränkungen auf eine Discussion der Gleichungen I bis IV hinaus.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ich betrachte zunächst die Formeln (III) und (IV). Die untere Grenze der Integrale ist, da naturgemäss nur solche h_m in Betracht kommen können, die gegen h_0 klein sind, sehr klein, weil nur Mittelwerthe aus grossen Anzahlen berücksichtigt werden sollen. Es entsteht nunmehr die Frage, ob man diese untere Grenze nicht gleich Null setzen darf, ohne wesentliche Ungenauigkeiten einzuführen, denn es ist leicht einzusehen, dass hierdurch alle Betrachtungen viel einfacher sich gestalten werden.

Setzt man $D r^\nu \varphi(h_m r^2) = \chi$, wo ν eine der Zahlen 4 oder 5 ist und bezeichnet man die obere Grenze mit A, so ist

$$\int_{r_0}^{A} \chi \, dr = \int_0^A \chi \, dr - \int_0^{r_0} \chi \, dr = (1) - (2).$$

Wenn man nun das Intervall 0 bis A in die endlichen Intervalle 0, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ zerlegt und den kleinsten Werth von χ innerhalb eines solchen Intervalles mit χ_m bezeichnet, so ist

$$(1) > {}^m\Sigma \, \chi_m (\alpha_m - \alpha_{m-1}).$$

Ist weiter der grösste Werth von χ im Intervalle 0 bis r_0, χ_0, wobei das durch eine analytische Formel für $r > r_0$ gegebene D, durch dieselbe Formel auch im Intervall $0 < r < r_0$ dargestellt wird, so ist

$$(2) < \chi_0 r_0$$

und demnach

$$\frac{(1)}{(2)} > \frac{\Sigma \chi_m (\alpha_m - \alpha_{m-1})}{\chi_0 r_0}. \tag{3}$$

Ist der Bruch genügend gross, so wird man in den obigen Integralen $r_0 = 0$ setzen dürfen. Das wird der Fall sein, wenn sowohl $\varphi(x)$ als auch $D(x)$ nicht über ein gewisses Maass für sehr kleine x mit der Annäherung an $x = 0$ wachsen. $D(x)$ und $\varphi(x)$ können dabei für $x = 0$ sehr wohl unendlich werden, aber das Integral selbst darf es nicht. Man kann die Sache auch so aussprechen. Wenn nicht die in der allernächsten Umgebung der Sonne vorkommenden Sterne vorzugsweise den Anblick des Fixsternhimmels bestimmen, dann wird es erlaubt sein, näherungsweise $r_0 = 0$ anzunehmen, soweit es sich nur um gegen h_0 kleine h_m handelt. Daraus dürfte die Berechtigung zur Annahme $r_0 = 0$ ohne Weiteres folgen. Man wird also, $x = h_m r^2$ gesetzt, haben:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\varrho_m = \frac{1}{\sqrt{h_m}} \cdot \frac{\int_0^H D\left(\sqrt{\frac{x}{h_m}}\right) x^2 \cdot \varphi(x)\, dx}{\int_0^H D\left(\sqrt{\frac{x}{h_m}}\right) x^{\frac{3}{2}} \cdot \varphi(x)\, dx} \tag{IIIa}$$

$$\varrho_m = \frac{1}{\sqrt{h_m}} \cdot \frac{\int_0^{h_m r_1^2} D\left(\sqrt{\frac{x}{h_m}}\right) x^2 \cdot \varphi(x)\, dx}{\int_0^{h_m r_1^2} D\left(\sqrt{\frac{x}{h_m}}\right) x^{\frac{3}{2}} \cdot \varphi(x)\, dx}. \tag{IVa}$$

Ist beispielsweise

$$D = \gamma \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\lambda}$$

so wird

$$\text{III)} \quad \varrho_m = \frac{1}{\sqrt{h_m}} \cdot \frac{\int_0^H x^{\frac{4-\lambda}{2}} \cdot \varphi(x)\, dx}{\int_0^H x^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \varphi(x)\, dx}; \qquad \text{IV)} \quad \varrho_m = \frac{\int_0^{r_1} r^{5-\lambda} \cdot \varphi(h_m r^2)\, dr}{\int_0^{r_1} r^{4-\lambda} \cdot \varphi(h_m r^2)\, dr}.$$

Wenn sich nun etwa λ mit dem Ort am Himmel z. B. mit der galaktischen Breite α ändert, was sich thatsächlich in Abschnitt I als zutreffend gezeigt hat, so wird für dasselbe α allerdings, mit der gewöhnlich gebrauchten Beziehung übereinstimmend, nach Formel (IIIa) $\varrho_m h_m^{\frac{1}{2}}$ für alle m constant sein, es hängt aber die mittlere Entfernung ϱ_m von der Lage am Himmel ab. Ist z. B. auch $\varphi(x) = c x^\nu$, so findet man:

$$\text{III)} \quad \varrho_m = r_0 \sqrt{\frac{h_0}{h_m}} \cdot \frac{5 + 2\nu - \lambda}{6 + 2\nu - \lambda}; \qquad \text{IV)} \quad \varrho_m = r_1 \frac{5 + 2\nu - \lambda}{6 + 2\nu - \lambda}.$$

Man kann nach Abschnitt I annehmen, dass λ in der Milchstrasse etwa 0.25, an den Polen derselben 0.63 ist. Daraus würde folgen

$$\frac{\varrho_m \text{ (Milchstrasse)}}{\varrho_m \text{ (Pol)}} = 1.015.$$

Die Formel IV zeigt dagegen, dass für die schwächsten Sterne, welche wahrscheinlich lichtschwächer sind als von der 11—12. Grösse, die Helligkeit in einem gänzlich anderen Zusammenhang mit der Entfernung steht. Für das letzte Beispiel z. B. ist ϱ_m constant und ganz unabhängig von der Helligkeit. Es ist nur von der Dimension r_1 des Sternsystems in der betreffenden Richtung abhängig.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Der Satz, dass

$$\varrho_m = \frac{\Gamma}{h_m^{\frac{1}{2}}} \tag{4}$$

ist für den Fall homogener Dichtigkeit ($\lambda = 0$) übrigens bereits von Herrn Schiaparelli [1]) auf sehr einfachem Wege abgeleitet worden, während denselben C. A. F. Peters [2]) für die specielle Annahme $\varphi =$ constans angemerkt hatte.

Ich gehe nun zu der Betrachtung der Formel I über. Setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^x \varphi(x)\, dx = F(x)$$

so wächst $F(x)$ fortwährend mit wachsendem x von 0 bis 1, denn es ist $F(0) = 0$; $F(H) = 1$. Durch Einführung von F kann man schreiben:

$$\frac{A_m}{\omega} = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} D r^2\, dr - \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} D r^2 \cdot F(h_m r^2)\, dr.$$

Mit Benutzung von 2) ergiebt sich für homogene Dichtigkeit $D = \Gamma$:

$$\frac{A_m}{\Gamma\omega} = \tfrac{1}{3} r_0^3 \left[\left(\frac{h_0}{h_m}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] - \frac{1}{2\, h_m^{\frac{3}{2}}} \int_{h_m r_0^2}^{h_0 r_0^2} F(x) \cdot \sqrt{x} \cdot dx.$$

In Bezug auf das Integral lassen sich ähnliche Betrachtungen wie oben ausführen, aus denen hervorgeht, dass man für genügend kleine $\frac{h_m}{h_0}$ die untere Grenze $= 0$ setzen darf. Es entspricht das dem Vorgehen, gleich von Anfang an in (I) $r_0 = 0$ zu setzen. Unter dieser Annahme und da 1 gegen $\left(\frac{h_0}{h_m}\right)^{\frac{3}{2}}$ sehr klein ist, findet man also für homogene Dichtigkeit und beliebige φ:

$$A_m = \Gamma' \cdot h_m^{-\frac{3}{2}}. \tag{5}$$

Das Bestehen dieser Formel unter den erwähnten speciellen Voraussetzungen hat auch bereits Herr Schiaparelli a. a. O. durch einfache Ueberlegungen nachgewiesen. Man kann übrigens dieses Resultat auch leicht ganz direct ableiten, wenn man in der Formel

---

[1]) Schiaparelli, Sulla distribuzione apparente delle stelle visibili ad occhio nudo, Pubbl. d. Osservatorio in Milano, No. 34.

[2]) C. A. F. Peters, Astr. Nachr. Band 28.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$A_{m-1} = \Gamma\omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_{m-1}}}} r^2\, d\,r \int_{h_{m-1}\, r^2}^{H} \varphi(x)\, d\,x$$

setzt:

$$h_{m-1} = \alpha \cdot h_m, \quad \varrho = r\sqrt{\alpha}.$$

Dann wird:

$$A_{m-1} = \frac{\Gamma\omega}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_{r_0\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \varrho^2\, d\,\varrho \int_{h_m\, \varrho^2}^{H} \varphi(x)\, d\,x$$

also, solange es erlaubt ist $r_0 = 0$ zu setzen: $A_{m-1} = A_m \cdot \alpha^{-\frac{3}{2}}$. Die Bedingungen, unter welchen $r_0 = 0$ gesetzt werden darf, stellen sich so vielleicht noch deutlicher dar.

Die Formel (II) wird für dieselbe Annahme: $D = \Gamma$:

$$\frac{A_m}{\Gamma \cdot \omega} = \int_{r_0}^{r_1} r^2\, d\,r - \int_{r_0}^{r_1} r^2\, F(h_m r^2)\, d\,r.$$

Da F mit abnehmenden h_m abnimmt, so wird sich A_m umsoweniger mit m ändern, je kleiner h_m wird. Von einem gewissen h_m ab wird die Anzahl A_m nur sehr langsam mit m zunehmen. Die näheren Umstände hängen von der Beschaffenheit der Function φ ab. Ist z. B., um die einfachste Annahme zu machen $\varphi = \frac{1}{H} = \frac{1}{h_0 r_0^2}$, so wird $F(x) = \frac{x}{H}$ und

$$A_m = \Gamma\, \omega \cdot \left\{ \tfrac{1}{3}(r_1^3 - r_0^3) - \frac{h_m}{H} \cdot \frac{r_1^5 - r_0^5}{5} \right\}.$$

Nennt man h_n die Helligkeit der hellsten Sterne, wenn dieselben in die Entfernung r_1, also an die Grenze des Sternsystemes gesetzt werden, so ist:

$$h_n\, r_1^2 = H \tag{6}$$

und wenn man noch r_0 gegen r_1 vernachlässigt

$$A_m = \frac{\Gamma\omega}{3}\, r_1^3 \left\{ 1 - \tfrac{3}{5}\, \frac{h_m}{h_n} \right\}.$$

Bekanntlich ist nach der photometrischen Helligkeitsscala $h_m = h_n \cdot \alpha^{m-n}$, worin $\log \alpha = -0.4$ ist. Hiermit ergiebt sich:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$A_{n+1} = 1.903 \cdot A_n$$
$$A_{n+2} = 2.262 \cdot A_n$$
$$A_{n+3} = 2.405 \cdot A_n$$
$$A_{n+4} = 2.464 \cdot A_n$$
$$A\infty = 2.5 \quad \cdot A_n$$

woraus die überaus langsame Abnahme von A_m für grössere m ersichtlich ist.

Die Anzahl aller vorhandenen Sterne ist also $2^1/_2$ mal so gross als A_n. A_∞ kann man ganz allgemein aus (II) finden:

$$A_\infty = \omega \cdot \int_{r_0}^{r_1} D \cdot r^2 \, dr. \tag{7}$$

In Wirklichkeit ist nun aber D keineswegs constant. In diesem allgemeinen Falle kann man I in eine Form bringen, die für das Folgende bequemer ist. Es soll dabei gleich von vornherein die untere Grenze $r_0 = 0$ gesetzt werden. Dann kann man schreiben:

$$A_m = \omega \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} D \cdot r^2 u \, dr; \qquad u = \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x) \, dx.$$

Daraus folgt:

$$\frac{du}{dh_m} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{r}{2h_m}$$

und hiermit:

$$\frac{dA_m}{dh_m} = \frac{\omega}{2h_m} \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} D \cdot r^3 \frac{du}{dr} \, dr$$

durch theilweise Integration geht hieraus hervor:

$$\frac{dA_m}{dh_m} = -\frac{\omega}{2h_m} \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} u \frac{d(Dr^3)}{dr} \cdot dr$$

was man auch schreiben kann:

$$\frac{dA_m}{dh_m} = -\frac{3}{2h_m} A_m - \frac{\omega}{2h_m} \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} r^3 \frac{dD}{dr} \, dr \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x) \, dx. \tag{8}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Das Doppelintegral J kann man, abgesehen von constanten Factoren, wenn man $h_m r^2 = y$ und $\frac{dD}{dr} = D'(r)$ setzt, so darstellen:

$$J = \int_0^H D'\left(\sqrt{\frac{y}{h_m}}\right) \cdot y\, dy \int_y^H \varphi(x)\, dx.$$

Das innere Integral stellt eine positive Grösse dar. Nennt man θ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch, dessen Werth aber von h_m abhängt, und bezeichnet

$$\Phi(H) = \int_0^H y\, dy \int_y^H \varphi(x)\, dx$$

so ist nach dem sogenannten ersten Mittelwerthsatz:

$$J = \Phi(H) \cdot D'\left(\sqrt{\frac{\theta H}{h_m}}\right).$$

Soll nun J für alle Werthe von h_m zwischen dem kleinsten h_m, für welches Formel I gilt bis zum grössten $\frac{H}{r_0^2}$ negativ bleiben, so wird gleiches für alle Werthe von r, welche die beiden Grenzwerthe

$$r_0 \sqrt{\theta} \text{ und } \sqrt{\frac{\theta H}{h_m}}$$

stetig verbinden, stattfinden müssen bei $D'(r)$. θ ändert sich aber ebenfalls stetig mit h_m, so dass man nur sagen kann, dass $D'(r)$ innerhalb einer gewissen endlichen Strecke in der Gegend der uns näheren Sterne negativ sein, also $D(r)$ abnehmen muss. Wenn also, wie S. 576 wenigstens für die Sterne bis zur 9. Grösse nachgewiesen worden ist, A_m sich langsamer ändert, wie das erste Glied der Formel (8) angiebt und wie bei homogener Dichtigkeitsvertheilung geschieht, dann muss $D'(r)$ die oben ausgesprochene Eigenschaft besitzen.

Nach den Angaben des Abschnittes I ist es besonders wichtig, den Fall zu betrachten, wo

$$A_m = c \cdot h_m^{\frac{\lambda-3}{2}}, \qquad 0 < \lambda < 1 \tag{9}$$

und λ von h_m unabhängig ist.

Denn sehr nahe genügen die Abzählungen der Sterne bis zur 9. Grösse der Gleichung (9). Dann aber ist $D(r)$ eindeutig bestimmt. Aus (9) folgt

$$\frac{dA_m}{dh_m} = -\frac{3}{2h_m} A_m + \frac{\lambda}{2h_m} A_m = -\frac{3}{2h_m} A_m + \frac{\lambda\omega}{2h_m} \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} D \cdot r^2\, dr \int_{h_m r^2}^H \varphi(x)\, dx.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Durch Vergleichung mit (8) ergiebt sich:

$$Z = \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \left(\lambda \cdot D r^2 + r^3 \frac{dD}{dr}\right) dr \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x)\, dx = 0.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen:

$$\lambda D r^2 + r^3 \frac{dD}{dr} = 2 r \psi(r^2)$$

$$\int_x^H \varphi(x)\, dx = F(x)$$

so wird also:

$$Z = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} r \psi(r^2) F(h_m r^2)\, dr = \int_0^{\frac{H}{h_m}} \psi(\xi) \cdot F(h_m \xi)\, d\xi.$$

$F(x)$ ist eine Function, die im in Frage kommenden Intervall positiv ist und mit wachsendem x stets abnimmt. Ist demnach θ ein positiver echter Bruch, dessen Werth von h_m abhängt, so folgt, da $F(0) = 1$ ist:

$$Z = 0 = \int_0^{\frac{\theta H}{h_m}} \psi(\xi)\, d\xi.$$

θ ändert sich stetig mit h_m, dasselbe thut auch $\frac{\theta}{h_m}$. Wenn also $Z = 0$ sein soll, so ist das nur möglich, wenn in einem endlichen Bereich $\psi(\xi) = 0$ ist und wegen der Stetigkeit, wenn ψ eine analytische Function ist, muss dann überhaupt $\psi(\xi) = 0$ sein. Die Gleichung (9) kann also nur bestehen, wenn:

$$\lambda D r^2 + r^3 \frac{dD}{dr} = 0$$

woraus sich durch Integration ergiebt:

$$D = \gamma r^{-\lambda}. \tag{10}$$

Hierdurch wäre also D eindeutig gegeben, wenn (9) stattfindet. Um Unendlichkeiten zu vermeiden, wird man um die Sonne wieder einen masseleeren Raum mit dem relativ kleinen Radiusvector r_0 beschreiben; von da ab ist aber die Dichtigkeit durch (10) gegeben.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Es seien, des Folgenden wegen, noch einige Formeln angemerkt. Für den Fall (10) wird Formel (I):

$$A_m = \frac{\gamma\,\omega}{2\,h_m^{\frac{3-\lambda}{2}}} \cdot \int_0^H y^{\frac{1-\lambda}{2}} \cdot dy \int_y^H \varphi(x)\,dx. \tag{11}$$

Während Formel (II) sich so darstellt:

$$A_m = \frac{\gamma\,\omega}{2\,h_m^{\frac{3-\lambda}{2}}} \cdot \int_0^{h_m r_1^2} y^{\frac{1-\lambda}{2}} \cdot dy \int_y^H \varphi(x)\,dx. \tag{12}$$

Hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\left(h_m^{\frac{3-\lambda}{2}} A_m\right)}{d\,h_m} = \frac{\gamma\,\omega}{2}\, h_m^{\frac{1-\lambda}{2}}\, r_1^{3-\lambda} \cdot \int_{h_m r^2}^H \varphi(x)\,dx = \text{positiv} \\ \text{und} \quad &\frac{d}{d\,h_m}\left\{h_m^{\frac{\lambda-1}{2}} \cdot \frac{d}{d\,h_m}\left(h_m^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot A_m\right)\right\} = \text{negativ.} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Unter denselben Voraussetzungen wird ferner:

$$A_\infty = \gamma\,\omega \int_0^{r_1} r^{2-\lambda}\,dr = \frac{\gamma\,\omega}{3-\lambda} \cdot r_1^{3-\lambda}$$

und für die Sterngrösse n, die durch $h_n = \frac{H}{r_1^2}$ gegeben ist, nach (11)

$$A_n = \frac{\gamma\,\omega}{2\,H^{\frac{3-\lambda}{2}}} \cdot r_1^{3-\lambda} \cdot \int_0^H y^{\frac{1-\lambda}{2}} \cdot dy \int_y^H \varphi(x)\,dx$$

und hieraus:

$$A_\infty = A_n \cdot \frac{2\,H^{\frac{3-\lambda}{2}}}{3-\lambda} \cdot \frac{1}{\int_0^H y^{\frac{1-\lambda}{2}}\,dy \int_y^H \varphi(x)\,dx}. \tag{14}$$

Schliesslich ist bei der einfachsten Annahme $\varphi(x) = \frac{1}{H}$

$$A_\infty = A_n \cdot \frac{5-\lambda}{2}. \tag{15}$$

Wie in Abschnitt (I) erwähnt, zeigen die Anzahlen der Sterne bis zur 9. Grösse nahezu ein Verhalten, wie (9) vorschreibt. Es ist aber natürlich nicht daran zu denken, dass diese Gleichung strenge erfüllt wird und dass

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

in Folge dessen auch (10) genau stattfindet. Wäre das der Fall, so würden die Zahlen A_m von den hellsten Grössen bis zur Grösse $m = n$ nur die Function $D(r)$ bestimmen, da die Function φ keinen Einfluss ausübt. Für Grössen $m > n$, wo n durch Gleichung (6) bestimmt wird, wird aber A_m durch den Verlauf von φ wesentlich bestimmt und man könnte den letzteren angeben, wenn der Verlauf von A_m vollständig gegeben wäre. Ist im Allgemeinen A_m als Function von h_m in allen Details bekannt für Werthe von h_m von den grössten bis zu möglichst kleinen, so kann man, und das ist selbstverständlich sehr wichtig, die Functionen $D(r)$ und $\varphi(x)$ bestimmen. Thatsächlich wird es sich hierbei um ein Interpolationsverfahren handeln, das nun näher betrachtet werden soll.

Denkt man sich A_m als Function von h_m etwa als Curve dargestellt, so wird diese für $m \leq n$ durch Formel (I), für $m \geq n$ durch (II) definirt. Die Curve verläuft stetig und steigt gleichmässig an und auch im Punkte $m = n$ ist noch der erste Differentialquotient $\frac{d A_m}{d h_m}$ stetig, schon der zweite Differentialquotient macht aber hier einen Sprung. Es ergiebt sich nämlich nach Formel (I):

$$\frac{1}{\omega}\left(\frac{d A_m}{d h_m}\right)_{m=n} = -\int_0^{r_1} D \cdot r^4 \varphi(h_m r^2)\, d r$$

$$\frac{1}{\omega}\left(\frac{d^2 A_m}{d h_m^2}\right)_{m=n} = \frac{r_1^7}{H} D(r_1)\, \varphi(H) - \int_0^{r_1} D r^6 \varphi'(h_m r^2)\, d r.$$

Andererseits giebt die Formel II:

$$\frac{1}{\omega}\left(\frac{d A_m}{d h_m}\right)_{m=n} = -\int_0^{r_1} D \cdot r^4 \varphi(h_m r^2)\, d r$$

$$\frac{1}{\omega}\left(\frac{d^2 A_m}{d h_m^2}\right)_{m=n} = -\int_0^{r_1} D \cdot r^6 \varphi'(h_m r^2)\, d r.$$

Nach dem früheren ist zu vermuthen, dass für D der folgende interpolatorische Ansatz:

$$D = D\left(\frac{r}{r_1}\right) = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-\lambda} \left\{ b_0 + b_1 \left(\frac{r}{r_1}\right) + b_2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \ldots + b_p \left(\frac{r}{r_1}\right)^p \right\} \tag{16}$$

zweckmässig sein wird. Für $\varphi(h)$ soll der Ansatz gemacht werden:

$$-\varphi(x) = \frac{1}{H} \cdot \left\{ a_1 + 2 a_2 \frac{x}{H} + 3 a_3 \left(\frac{x}{H}\right)^2 + \ldots + q a_q \left(\frac{x}{H}\right)^{q-1} \right\}. \tag{17}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$F x = \int_x^H \varphi(x)\, d x = a_0 + a_1 \left(\frac{x}{H}\right) + \ldots + a_q \left(\frac{x}{H}\right)^q,$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

worin

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_q = 0 \text{ und } a_0 = 1 \tag{18}$$

sein muss, weil $\int_0^H \varphi(x)\,dx = 1$. In (17) kommen demnach nur $q - 1$ unbekannte Coëfficienten a vor. Setzt man diese Ansätze in die Formeln I und II ein, so findet man leicht folgendes:

Man setze zur Abkürzung $3 - \lambda = \lambda_1$, ferner setze man $r_0 = 1$, nehme also eine Siriusweite zur Einheit, dann wird $H = h_0$ gleich der Helligkeit der hellsten vorkommenden Sterne sein. Es sei noch

$$D_\mu = b_\mu \left\{ \frac{a_0}{\mu + \lambda_1} + \frac{a_1}{\mu + \lambda_1 + 2} + \ldots + \frac{a_q}{\mu + \lambda_1 + 2q} \right\}$$

$$C_\nu = a_\nu \left\{ \frac{b_0}{\lambda_1 + 2\nu} + \frac{b_1}{\lambda_1 + 2\nu + 1} + \ldots + \frac{b_p}{\lambda_1 + 2\nu + p} \right\}.$$

Dann wird nach Formel (I):

$$\frac{1}{\omega} A_m = \left(\frac{h_0}{h_n}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{h_n}{h_m}\right)^{\frac{\lambda_1}{2}} \cdot \sum_{\mu=0}^{\mu=p} D_\mu \left(\frac{h_n}{h_m}\right)^{\frac{\mu}{2}}$$

und nach Formel (II):

$$\frac{1}{\omega} A_m = \left(\frac{h_0}{h_n}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=q} C_\nu \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\nu}.$$

Für die Anwendung empfiehlt sich eine Schreibweise in extenso:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)} \quad \frac{1}{\omega} A_m = \left(\frac{h_0}{h_n}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{h_n}{h_m}\right)^{\frac{\lambda_1}{2}} \left\{ D_0 + D_1 \left(\frac{h_n}{h_m}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots + D_p \left(\frac{h_n}{h_m}\right)^{\frac{p}{2}} \right\} \\ &\text{II)} \quad \frac{1}{\omega} A_m = \left(\frac{h_0}{h_n}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ C_0 + C_1 \left(\frac{h_m}{h_n}\right) + \ldots + C_q \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{q} \right\} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= b_0 \left\{ \frac{a_0}{\lambda_1} + \frac{a_1}{\lambda_1 + 2} + \ldots + \frac{a_q}{\lambda_1 + 2q} \right\} \\ D_1 &= b_1 \left\{ \frac{a_0}{\lambda_1 + 1} + \frac{a_1}{\lambda_1 + 3} + \ldots + \frac{a_q}{\lambda_1 + 2q + 1} \right\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_p &= b_p \left\{ \frac{a_0}{\lambda_1 + p} + \frac{a_1}{\lambda_1 + p + 2} + \ldots + \frac{a_q}{\lambda_1 + p + 2q} \right\} \\ C_0 &= a_0 \left\{ \frac{b_0}{\lambda_1} + \frac{b_1}{\lambda_1 + 1} + \ldots + \frac{b_p}{\lambda_1 + p} \right\} \\ C_1 &= a_1 \left\{ \frac{b_0}{\lambda_1 + 2} + \frac{b_1}{\lambda_1 + 3} + \ldots + \frac{b_p}{\lambda_1 + p + 2} \right\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_q &= a_q \left\{ \frac{b_0}{\lambda_1 + 2q} + \frac{b_1}{\lambda_1 + 2q + 1} + \ldots + \frac{b_p}{\lambda_1 + p + 2q} \right\} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die gewöhnlichen Methoden der Interpolationsrechnung geben die in (19) vorkommenden Coefficienten C und D, darauf sind aus dem System (20) die gesuchten a und b zu bestimmen. Das letztere besteht aus $p+q+2$ nicht-linearen Gleichungen zwischen den $p+q+2$ Unbekannten a und b. Die letzteren sind allerdings im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt und da imaginäre Werthe ausgeschlossen sind auch nicht für alle Werthe von C und D. Es ist indessen noch folgendes zu berücksichtigen. Durch (18) sind nicht $p+q+2$, sondern nur $p+q$ Unbekannte zu bestimmen, was nicht möglich wäre, wenn nicht zwischen C und D zwei Bedingungsgleichungen stattfänden, worauf schon bei der interpolatorischen Berechnung dieser Coefficienten Rücksicht zu nehmen ist. Diese zwei Bedingungsgleichungen lassen sich leicht ableiten. Die erste erhält man aus der Ueberlegung, dass die Formeln I und II denselben Werth für $m=n$ liefern müssen. Hieraus folgt, wie auch die Gleichungen (20) direct ergeben

$$C_0 + C_1 + \ldots + C_q = D_0 + D_1 + \ldots + D_p. \tag{21}$$

Zweitens muss auch aus beiden Formeln derselbe Werth für $\frac{dA_m}{dh_m}$ für $m=n$ hervorgehen, woraus folgt:

$$2(C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \ldots + qC_q) + [\lambda_1 D_0 + (\lambda_p + 1) D_1 + \ldots + (\lambda_1 + p) D_p] = 0 \tag{22}$$

Will man nur von einander unabhängige Gleichungen haben, so wird man mit Hülfe von (18) a_0 und a_q fortschaffen und die beiden Gleichungen für C_0 und C_q fortlassen. Setzt man dann noch:

$$a_n \cdot \frac{q-n}{q} = x_n; \qquad \delta_n = \frac{\lambda + 2q + n}{2q} D_n; \qquad y_n = b_n; \qquad \gamma_n = C_n \frac{q-n}{q} \tag{23}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \delta_\mu &= y_\mu \left\{ \frac{1}{\lambda_1 + \mu} + \frac{x_1}{\lambda_1 + \mu + 2} + \ldots + \frac{x_{q-1}}{\lambda_1 + \mu + 2q - 2} \right\}; \quad \mu = 0,\ 1 \ldots p \\ \gamma_\nu &= x_\nu \left\{ \frac{y_0}{\lambda_1 + 2\nu} + \frac{y_1}{\lambda_1 + 2\nu + 1} + \ldots + \frac{y_p}{\lambda_1 + 2\nu + p} \right\}; \quad \nu = 1,\ 2 \ldots q-1 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

wozu als überschüssige Gleichung noch

$$C_0 = \frac{y_0}{\lambda_1} + \frac{y_1}{\lambda_1 + 1} + \ldots + \frac{y_p}{\lambda_1 + p}$$

hinzutritt.

Nach demselben Ansatze ergiebt sich dann für die mittleren Entfernungen der Sterne von der Grösse m nach Formeln III und IV:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$m < n,\quad \varrho_m = \sqrt{\frac{h_0}{h_m}} \cdot \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=p} b_\mu \left[\frac{a_1}{\mu+\lambda_1+3} + \frac{2\,a_2}{\mu+\lambda_1+5} + \ldots + \frac{q\,a_q}{\mu+\lambda_1+2q+1}\right]}{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=p} b_\mu \left[\frac{a_1}{\mu+\lambda_1+2} + \frac{2\,a_2}{\mu+\lambda_1+4} + \ldots + \frac{q\,a_q}{\mu+\lambda_1+2q}\right]}$$

$$m > n,\quad \varrho_m = \sqrt{\frac{h_0}{h_n}} \cdot \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=p} b_\mu \left[\frac{a_1}{\mu+\lambda_1+3} + \frac{2\,a_2}{\mu+\lambda_1+5}\left(\frac{h_m}{h_n}\right) + \ldots + \frac{q\,a_q}{\mu+\lambda_1+2q+1}\left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{q-1}\right]}{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=p} b_\mu \left[\frac{a_1}{\mu+\lambda_1+2} + \frac{2\,a_2}{\mu+\lambda_1+4}\left(\frac{h_m}{h_n}\right) + \ldots + \frac{q\,a_q}{\mu+\lambda_1+2q}\left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{q-1}\right]}$$

und für die Anzahl aller Sterne im Sternsystem:

$$A_\infty = \int d\omega \int\limits_0^{\sqrt{\frac{h_0}{h_n}}} D \cdot r^2\, d\,r = \left(\frac{h_0}{h_n}\right)^{\frac{3}{2}} \int C_0\, d\,\omega \tag{25}$$

wo die erste Summation auf alle Elemente $d\,\omega$ der Kugeloberfläche auszudehnen ist, wobei aber zu beachten ist, dass D und C_0 von der galaktischen Breite α abhängen.

Nicht alle Lösungen des Systems (24) geben brauchbare Werthe für die x und y, denn es muss sowohl $F(\xi)$ als auch $D(\xi)$ positiv und von Null verschieden sein für alle $0 \leq \xi \leq 1$, dagegen $F'(\xi)$ stets negativ. Hieraus lässt sich ableiten, dass sämmtliche Klammerausdrücke auf der rechten Seite von (24) positiv und von Null verschieden sein müssen.

Aus $F(\xi) > 0$ folgt nämlich, dass auch

$$\int\limits_0^\xi F(\xi) \cdot \xi^{\frac{\lambda_1+\mu-2}{2}} \cdot d\,\xi > 0$$

und hieraus

$$\frac{1}{\lambda_1+\mu}\,a_0 + \frac{1}{\lambda_1+\mu+2}\,a_1\,\xi + \ldots + \frac{1}{\lambda_1+\mu+2q} \cdot a_q\,\xi^q > 0$$

und durch Einführung der Bezeichnungen (23):

$$\frac{1}{\lambda_1+\mu} + \frac{1}{\lambda_1+\mu+2}\,x_1\,\xi + \ldots + \frac{1}{\lambda_1+\mu+2q-2}\,x_{q-1}\,\xi^{q-1} > 0.$$

Setzt man hierin $\xi = 1$, so erhält man die Klammergrösse der ersten Gleichung (24). In gleicher Weise muss

$$\Phi(\xi) = y_0 + y_1\,\xi + \ldots + y_p\,\xi^p > 0$$

und demzufolge auch $\int\limits_0^\xi \Phi(\xi) \cdot \xi^{\lambda_1+2\nu-1}\,d\,\xi > 0$, woraus sich ergiebt

$$\frac{1}{\lambda_1+2\nu}\,y_0 + \frac{1}{\lambda_1+2\nu+1}\,y_1\,\xi + \ldots + \frac{1}{\lambda_1+2\nu+p}\,y_p\,\xi^p > 0.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Für $\xi = 1$ steht links die Klammergrösse der zweiten Gleichung (24).

Die wirkliche Ausrechnung von (24) und die Betrachtung der Anzahl der brauchbaren Wurzeln wird nach den Regeln der Eliminationstheorie überaus complicirt, sobald p und q nicht kleine ganze Zahlen sind, und ich bin augenblicklich nicht in der Lage, den allgemeineren Fall in genügend einfacher Weise zu erledigen. Es liegt übrigens auch gegenwärtig keine directe Veranlassung dazu vor. Bei wirklichen Anwendungen wird man ausserdem durch Näherungsmethoden zum Ziele zu gelangen suchen.

Sehr einfach gestaltet sich aber die bisher immer verfolgte Annahme, deren näherungsweise Richtigkeit wahrscheinlich ist, dass nämlich Gleichung (10) gilt. Dann ist

$$D_1 = D_2 = \ldots = D_p = 0$$

Da die Klammerausdrücke (24) positiv und von Null verschieden sein müssen, tritt eine eindeutige Bestimmung der Unbekannten ein und es muss sein:

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_p = 0$$

ferner hat man

$$y_0 = \lambda_1 C_0$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{C_1(\lambda_1 + 2)}{C_0 \lambda_1}, \quad a_2 = \frac{C_2(\lambda_1 + 4)}{C_0 \lambda_1}, \quad \ldots \; a_{q-1} = \frac{C_{q-1}(\lambda_1 + 2q - 2)}{C_0 \lambda_1}$$

und hieraus

$$a_q = -(1 + a_1 + \ldots + a_{q-1}) = \frac{C_q(\lambda_1 + 2q)}{C_0 \lambda_1}.$$

Die Bedingungsgleichung, welche zwischen den C und D eingehalten werden muss, ist

$$D_0 = C_0 + \ldots + C_q.$$

Diese Bestimmung der Coefficienten a ist nur dann brauchbar, wenn für jedes $0 < \xi < 1$

$$a_0 + a_1 \xi + \ldots + a_q \xi^q = \frac{1}{C_0 \lambda_1} (C_0 \lambda_1 + C_1(\lambda_1 + 2)\xi + \ldots + C_q(\lambda_1 + 2q)\xi^q) > 0.$$

Man kann dies auch so ausdrücken: wenn aus der Formel 19 II der Ausdruck für A_m eingeführt wird, wobei $\xi = \frac{h_m}{h_n}$, so ist:

$$\frac{d\left(A_m \xi^{\frac{\lambda_1}{2}}\right)}{d\xi} > 0.$$

Das bedeutet aber nur, was wir bereits wissen, dass die Anzahlen A_m für $m > n$ weniger stark mit m anwachsen als für $m < n$. Die weitere Bedingung

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$a_1 + 2\,q_2\,\xi + \ldots + q\,a_q\,\xi^{q-1} = \text{negativ}$$

findet sich leicht identisch übereinstimmend mit der S. 604 angeführten Formel (13).

Indessen muss hier noch ein wesentlicher Punkt zur Sprache kommen. $\lambda_1 = 3 - \lambda$ ist, insoweit man überhaupt gegenwärtig von einer Bestätigung der Formel (9) reden kann, jedenfalls von der galaktischen Breite α abhängig. Gleiches wird von D und C gelten und im Allgemeinen also auch von a. Nur wenn sich φ als unabhängig von α darstellt, wenigstens insoweit dies die immerhin wahrscheinlich wenig grosse Sicherheit, mit der eine solche Rechnung ausgeführt werden kann, beurtheilen lässt, wird man sich im Allgemeinen mit dieser Feststellung von φ begnügen. Im anderen Falle wird man, wenigstens im Allgemeinen, die Annahme fallen lassen müssen, dass φ überall im Sternsystem dieselbe Form besitzt, denn wenn man φ nicht von r sondern bloss von α abhängig sein liesse, würde dies eine fächerförmig angeordnete Regelmässigkeit bedeuten, die doch an sich überaus unwahrscheinlich ist. Der allgemeine Fall wurde aber von vornherein von unserer Betrachtung ausgeschlossen.

Noch ist zu erwähnen, wie man h_n, die Helligkeit der hellsten Sterne in der Entfernung r_1, d. i. an der Grenze des Sternsystemes bestimmen kann. Aus dem ganzen Verlauf der Zahlen A_m nach Formeln I und II wird sich die Grenze, wo zwei verschiedene analytische Formeln mit ihren Gültigkeitsbereichen zusammenstossen, stets bezeichnen lassen, wenn auch zunächst mit ziemlich geringer Sicherheit. Hat man aber erst einen Näherungswerth erlangt, so wird die Verbesserung desselben, gleichzeitig mit der Verbesserung der näherungsweise bekannten anderen Grössen, die genauer bestimmt werden sollen, auszuführen sein. h_n wird natürlich ebenso wie D auch von der galaktischen Breite α abhängen.

Aus all den gemachten Bemerkungen geht jedenfalls die Möglichkeit hervor, auf Grund der Abzählungen der Sternanzahlen einen Einblick in die Constitution des Sternsystems zu gewinnen. Ob die auszuführenden Rechnungen schwierig auszuführen sind oder nicht, hat von einem prinzipiellen Standpunkte aus keine grosse Bedeutung. Ob aber die gemachten Annahmen in Bezug auf φ ausreichend sind, das wäre natürlich eine sehr wichtige Frage, zu deren Beantwortung wir gegenwärtig noch keinen Anhalt besitzen. Ich glaube aber, dass man die Entscheidung dieser Frage erst abzuwarten hat, ehe man sich entschliesst, die Annahme, dass dasselbe φ für das ganze Sternsystem zulässig sei, fallen zu lassen.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Wie schon öfter bemerkt und wie aus den im 1. Abschnitt mitgetheilten Zahlen ersichtlich ist, reicht das vorhandene Material, das sich wesentlich aus den Angaben der Bonner Durchmusterungen und aus den Herschel'schen Zahlen zusammensetzt, nicht entfernt hin, um A_m in genügender Ausdehnung als Function von h_m darzustellen. Namentlich ist dies ganz unmöglich für $m > n$. Die Herschel'schen Aichungen in Verbindung mit dem wenigen, was aus den Abzählungen Herrn Celoria's geschlossen werden konnte, dürften aber mit grosser Sicherheit darauf hinweisen (s. S. 593), dass die Grenze des Sternsystems jenseits der $h_n = 11^m$ entsprechenden Entfernung liegt. Diese Grenze liegt umso entfernter, je geringer die galaktische Breite α ist und entspricht in der Milchstrasse einer Helligkeit, die um etwa 1—2 Grössenklassen geringer ist. Wenn man also zur Zeit nicht in der Lage ist, die typische Dichtigkeitsvertheilung in unserem Sternsystem und seine Grenzen zu bestimmen, so wird es sich doch empfehlen, beispielsweise diese Bestimmung unter recht einfachen Annahmen durchzuführen und dies soll nunmehr wirklich geschehen. Die Annahmen, die zu Grunde gelegt werden sollen, sind im Anschluss an den 1. Abschnitt folgende:

1) Für Sterngrössen $m \leqq n$ gilt die Formel (9) und demzufolge auch (10); für die λ sollen die auf Seite 581 abgeleiteten typischen Werthe acceptirt werden.

2) Für $m \geqq n$ ist der Verlauf von A_m zur Zeit gänzlich unbekannt. Es genügt aber, um diesen festzustellen, eine bestimmte Annahme über $\varphi(x)$. Es soll nun die möglichst einfache Annahme gemacht werden, nämlich $\varphi(x) = \frac{1}{H}$.

Diese Annahmen in Verbindung mit den im ersten Abschnitt abgeleiteten Zahlen genügen, um sowohl die Grenzen des Sternsystems, als auch den Verlauf der Dichtigkeit festzustellen.

Es ergeben sich nun aus dem Vorhergehenden die folgenden Formeln.

Für $m \geqq n$:

$$A_m = \gamma\, d\omega \cdot \left(\frac{h_0}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{(3-\lambda)(5-\lambda)} \left\{5 - \lambda - (3-\lambda)\frac{h_m}{h_n}\right\}$$

$$A_\infty = \gamma\, d\omega \cdot \left(\frac{h_0}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{3-\lambda}$$

Andrerseits für Sterngrössen $m' \leqq n$:

$$A_{m'} = \gamma\, d\omega \cdot \left(\frac{h_0}{h_{m'}}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \frac{2}{(3-\lambda)(5-\lambda)}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

und hieraus:

$$\frac{A_m}{A_{m'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_{m'}}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \left\{(5-\lambda) - (3-\lambda)\frac{h_m}{h_n}\right\}$$

$$\frac{A_\infty}{A_m} = \frac{5-\lambda}{(5-\lambda) - (3-\lambda)\frac{h_m}{h_n}}$$

Für m' wird man etwa 9.0 der photometrischen Scala setzen können, m wäre die Grösse der schwächsten Herschel'schen Sterne in derselben Scala. Diese Gleichungen können dazu dienen, die Grenzen des Sternsystems anzugeben. Diese werden durch $x = \frac{h_{m'}}{h_n}$ bestimmt. Es ist aber

$$\frac{A_m}{A_{m'}} = \frac{1}{2}\, x^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \left\{(5-\lambda) - (3-\lambda)\frac{h_m}{h_{m'}}\, x\right\}$$

woraus sich x bestimmen lässt, wenn die Helligkeit der schwächsten Herschel'schen Sterne bekannt ist. Das ist leider nicht der Fall und man wird also verschiedene Annahmen machen müssen.

$\frac{h_m}{h_n}$ liegt zwischen 0 und 1, also:

$$1 < \frac{A_\infty}{A_m} < \frac{5-\lambda}{2} < 2.375$$

da nach Seite 581 $\lambda > 0.25$. Die Anzahl aller leuchtenden Sterne des Systems liegt demnach zwischen der Anzahl der Herschel'schen Sterne, welche rund zu 27 Millionen gefunden wurde und etwa 64 Millionen. Die obere Grenze erniedrigt sich sofort durch eine Abschätzung, nach welcher wohl als sicher angenommen werden kann, dass $\frac{h_m}{h_n} < 0.6$, was einer Grössendifferenz $m - n = 0.55$ entspricht. Wir erhalten so:

$$1 < \frac{A_\infty}{A_m} < 2.5\left(\frac{5-\lambda}{8-\lambda}\right)$$

und da $0.25 < \lambda < 0.63$ war, stellt sich die obere Grenze nur noch zu 41 Millionen.

Wie schon erwähnt, ist die photometrische Helligkeit der Herschel'schen Sterne nicht bekannt. Die Feststellung derselben würde sich übrigens voraussichtlich dadurch erschweren, dass sie in gleicher Weise wie die geschätzten Helligkeiten der Durchmusterungssterne von dem Sternreichthum der betreffenden Gegend, also im typischen Bilde von α, abhängig sein wird.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Dieser Unkenntniss soll dadurch Rechnung getragen werden, dass die Sterngrössen m — die BD-Sterne von 9.0 geschätzter Grösse auch zu 9.0 photometrischer Grösse angenommen — der Reihe nach

$$\text{a) } 13.5^{\mathrm{m}}, \quad \text{b) } 14.0^{\mathrm{m}}, \quad \text{c) } 14.5^{\mathrm{m}}, \quad \text{d) } 15.0^{\mathrm{m}}$$

angenommen werden, was wohl ein genügend weiter Spielraum sein dürfte. Nach der photometrischen Scala ist dann $\log x = 0.4\,(n - m)$ zu setzen. Nimmt man nun die den Mitteln aus je zwei zur Milchstrasse symmetrisch gelegenen Zonen zugehörigen Werthe λ nach S. 581 an und die entsprechenden Mittelwerthe des Quotienten $\frac{H}{D}$ der Anzahlen der Herschel'schen Sterne und der DM-Sterne bis zur Grösse 9.0 (nach S. 593), so ergiebt sich

Zone	λ	$\frac{H}{D}$
I u. IX	0.63	33.3
II u. VIII	57	45.4
III u. VII	52	69.7
IV u. VI	40	109.0
V	25	274.3

und nach der obigen Formel für n in angenäherter Rechnung:

Zone	a	b	c	d
	m	m	m	m
I u. IX	11.58	11.55	11.53	11.51
II u. VIII	11.81	11.76	11.73	11.72
III u. VII	12.17	12.10	12.06	12.04
IV u. VI	12.42	12.33	12.29	12.27
V	13.22	12.95	12.86	12.81

Nennt man, wie oben festgesetzt worden ist, eine Siriusweite jene Entfernung, in welcher die hellsten überhaupt vorkommenden Sterne eine scheinbare Helligkeit h_0 haben und setzt man die dieser Helligkeit entsprechende Sterngrösse zu — 2 fest, so würde den angeführten Zahlen gemäss die Grenze des Sternsystems an den Polen der Milchstrasse rund 500, in der Milchstrasse etwa 1100 Siriusweiten betragen. Ferner wird sich leicht die Zahl aller leuchtenden Sterne in jeder Zone und dann durch Addition die Zahl aller Sterne überhaupt berechnen lassen. Nimmt man für die Anzahl der Herschel'schen Sterne 27.1 Millionen, so ergiebt sich in den 4 Fällen:

a	b	c	d	
41.8	32.8	30.1	28.9	Millionen.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ist D als Function von r und der galaktischen Breite α bekannt, so kann man natürlich leicht die Curven gleicher Dichtigkeit construiren. Den festgesetzten Annahmen gemäss werde gesetzt:

$$r_0 = 1, \qquad D = \gamma r^{-\lambda}.$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass sowohl λ als auch γ Functionen von α sind.

Setzt man noch der Kürze wegen $\omega = 1$, so ist die Anzahl $A_{m'}$, hier die Anzahl der Bonner Durchmusterungssterne bis zur Grösse $m' = 9.0$,

$$A_{m'} = \gamma \left(\frac{h_0}{h_{m'}}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \frac{2}{(3-\lambda)(5-\lambda)}$$

Bezeichnet man:

$$\Phi(\alpha) = A_{m'} \left(\frac{h_{m'}}{h_0}\right)^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \frac{(3-\lambda)(5-\lambda)}{2} = \gamma \left(\frac{h_0}{h_{m'}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

so wird:

$$D = \left(\frac{h_{m'}}{h_0}\right)^{\frac{3}{2}} r^{-\lambda} \Phi(\alpha)$$

und die Curven constanter Dichtigkeit sind dann gegeben durch

$$r^{-\lambda} \Phi(\alpha) = \Gamma$$

oder

$$\lambda \log r = \log \Phi(\alpha) - \log \Gamma$$

und wenn einem speciellen Werth von $\alpha = \alpha_1$ die Werthe $\lambda = \lambda_1$, $r = r_1$ entsprechen, so wird die Curvengleichung:

$$\log r = \frac{\lambda_1}{\lambda} \log r_1 + \frac{1}{\lambda} \log \frac{\Phi(\alpha)}{\Phi(\alpha_1)}.$$

Nimmt man für r_1 verschiedene Werthe — Siriusweite $r_0 = 1$ gesetzt — so kann man mit den obigen Werthen von λ und dem Resultate der Abzählung der DM-Sterne einzelne Punkte von beliebig vielen Curven gleicher Dichtigkeit construiren.

Die Abhängigkeit der Werthe λ von α ist nur durch 5 Punkte gegeben. Um eine einigermaassen regelmässig verlaufende Werthreihe zu bekommen, habe ich durch diese 5 Punkte eine möglichst einfach verlaufende Curve gezeichnet und aus dieser die λ entnommen, welche den $\alpha = 80^0$, 70^0, 60^0 und von da ab bis $\alpha = 0$ von 5^0 zu 5^0 fortschreitend entsprechen. Die grosse Ungenauigkeit dieser Werthe, die ausserdem nur auf zwei Decimalstellen angegeben werden können, verursacht Unregelmässigkeiten in vergrössertem

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Maassstabe in dem Verlaufe der Curven. Ebenso wurden zur Gewinnung der $A_{m'}$ die Zahlen D' auf S. 580 zu Mitteln vereinigt, durch eine Curve ausgeglichen und dieser Curve die den einzelnen α entsprechenden Werthe entnommen. Hierdurch ist eine neue Ungenauigkeit hinzugekommen und die gezeichneten Curven zeigen in Folge dessen im Einzelnen kleinere Ausbiegungen, die zweifellos den Character völliger Willkür besitzen. Indessen kann es hier nur auf eine ganz beiläufige Wiedergabe des den zu Grunde gelegten Daten entsprechenden Bildes ankommen, weshalb die genannten Ungenauigkeiten belanglos sind. Ferner wurde, wie schon erwähnt, $\log \frac{h_0}{h_{9.0}} = 4.4$ angenommen, so dass h_0 die Helligkeit eines Sternes von der Grösse minus 2 ist. Ich habe die nun berechneten Curven in in den beiden nachstehenden Figuren abgebildet.

Fig. 1.

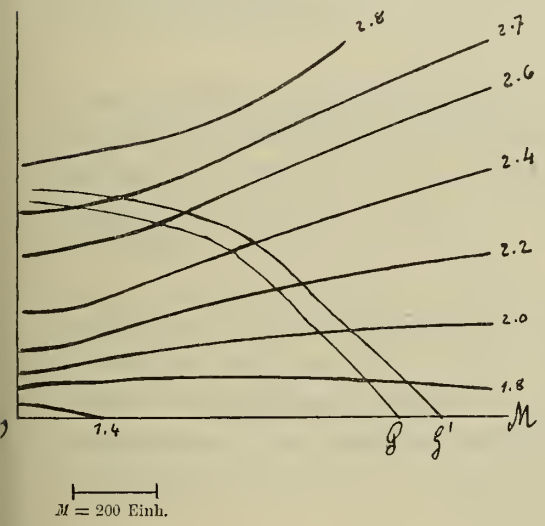
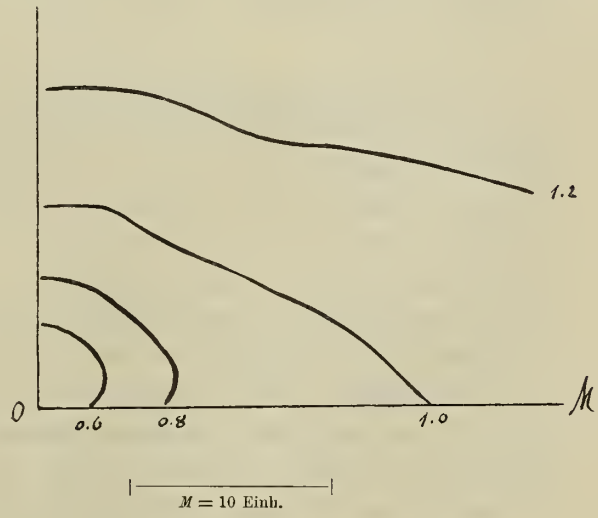


Fig. 2.



Die neben den Curven stehenden Zahlen sind die $\log r_1$, wo r_1 dem Winkel $\alpha = 80^0$ entspricht. Als Einheit der Entfernung gilt die Siriusweite. Die Curven drängen sich für kleinere r_1 in sehr kleine Räume zusammen. Deshalb wurde der innere Theil in Figur 2 in einem etwa 50 Mal so grossen Maassstab gezeichnet. Die Curven G und G' sind die den Annahmen a und d (S. 613) entsprechenden Grenzen des Sternsystems. Setzt man die Sterndichtigkeit D in der Entfernung 1 für $\alpha = 80^0$, also nahe dem Pol der Milchstrasse, $= 1$, so entsprechen den mit der Zahl C bezeichneten Curven die Dichtigkeiten D in folgender Tabelle:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

C	D
0.6	0.42
0.8	0.31
1.0	0.23
1.2	0.18
1.4	0.13
1.8	0.07
2.0	0.05
2.2	0.04
2.4	0.03
2.6	0.02
2.7	0.02
2.8	0.02

Das typische Bild des Sternsystems, für welches nur ein Quadrant gezeichnet ist, wird durch die Milchstrasse OM in zwei gleiche Theile getheilt und entsteht durch Rotation um die durch den Pol der Milchstrasse gehende Axe.

Zum Schluss möge noch die früher, insbesondere von Olbers [1]) und W. Struve [2]) geäusserte Ansicht kurz besprochen werden, nach welcher das Aussehen des Fixsternhimmels, der doch eine vergleichsweise sehr geringe Flächenhelligkeit aufweist, auch beim Vorhandensein eines unbegrenzten Systemes leuchtender Fixsterne erklärt werden kann, wenn man eine Absorption des Lichtes im Weltraume annimmt. Die Annahme einer solchen Absorption, sei es in dem Sinne von Olbers, sei es in dem von mir [3]) als wahrscheinlicher betrachteten, ist gewiss eine naturgemässe und plausible. Nur wird man diese Absorption erst als wirksam betrachten, wenn man weit über das Fixsternsystem hinausgeht, zu welchem alle sichtbaren Sterne gehören, so dass man zu der in der Einleitung skizzirten Ansicht gelangt, nach welcher unsere Beobachtung über dieses System überhaupt nicht hinausreicht.

Die Annahme einer Absorption ist natürlich, wie leicht zu zeigen, geeignet, die geringe Flächenhelligkeit des Fixsternhimmels zu erklären, sie ist aber nicht geeignet, die Vertheilung der Sterne von verschiedener Helligkeit darzustellen, wenn man nicht zugleich ein begrenztes System d. h. ein System, dessen Dichtigkeit D nur innerhalb eines bestimmt begrenzten Raumes endliche, merkbare Beträge erreicht, annimmt. Dann ist aber die Annahme einer solchen Absorption innerhalb des Fixsternsystemes vorläufig ganz unnöthig,

---

[1]) Olbers, Ueber die Durchsichtigkeit des Weltraumes. Werke I, S. 133.

[2]) W. Struve, Etudes d'astronomie stellaire.

[3]) Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz. Münchener Sitzungsberichte 1896.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

denn sie erleichtert in keiner Weise die Aufgabe, ein Weltbild zu construiren, wie besonders W. Struve vergeblich zu beweisen sich bemüht hat.

Es soll, um dies zu zeigen, der Ausdruck für die Zahl A_m unter der Annahme einer Absorption und eines ins Unendliche sich erstreckenden Fixsternsystemes abgeleitet werden. Hält man an den zu Anfang dieses Abschnittes eingeführten Bezeichnungen fest, so wird nach wie vor

$$A(d\tau) = D\,d\tau \cdot \varphi(h)\,di; \qquad \int_0^H \varphi(i)\,di = 1.$$

Die scheinbare Helligkeit h in der Entfernung r ist jetzt aber:

$$\frac{i\,e^{-\nu r}}{r^2} = h; \qquad i = h \cdot r^2 e^{\nu r}$$

wenn ν den Absorptionscoefficienten und e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet.

Die der Formel (1) entsprechende wird jetzt:

$$A(d\tau) = D\,\omega\,r^4\,\varphi(h\,r^2 e^{\nu r})\,e^{\nu r}\,d\,r\,d\,h.$$

Die grösste in der Entfernung r vorkommende Helligkeit ist:

$$\frac{H\,e^{-\nu r}}{r^2}$$

und demzufolge:

$$A_m(d\tau) = D\,\omega\,r^4 e^{\nu r}\,d\,r \int_{h_m}^{\frac{H e^{-\nu r}}{r^2}} \varphi(h\,r^2 e^{\nu r})\,d\,h$$

und schliesslich ergiebt sich die Anzahl aller Sterne, welche auf ω zu stehen scheinen, von den hellsten bis zur Grösse m:

$$A_m = \omega \int_0^\sigma D\,r^4 e^{\nu r}\,dr \cdot \int_{h_m}^{\frac{H e^{-\nu r}}{r^2}} \varphi(h\,r^2 e^{\nu r})\,d\,h$$

wo σ bestimmt wird aus der Gleichung

$$\frac{H\,e^{-\nu\sigma}}{\sigma^2} = h_m.$$

Setzt man noch

$$x = h\,r^2 e^{\nu r}$$

an Stelle von h, so wird:

$$A_m = \omega \int_0^\sigma D\,r^2\,d\,r \cdot \int_{h_m r^2 e^{\nu r}}^{H} \varphi(x)\,d\,x.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Führt man schliesslich ϱ statt r ein:

$$\varrho = r e^{\frac{\nu r}{2}},$$

woraus $r = f(\varrho)$ hervorgeht, so wird

$$A_m = \omega \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} D(f(\varrho)) \cdot (f(\varrho))^2 f'(\varrho)\, d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H} \varphi(x)\, dx.$$

Das ist genau die Formel (I) wenn in ihr $D(\varrho)$ ersetzt wird durch

$$D(f(\varrho))(f(\varrho))^2 f'(\varrho) \cdot \frac{1}{\varrho^2}.$$

Es müsste also durch Formel (I) allein die scheinbare Vertheilung aller Sterne bis zu den schwächsten dargestellt werden können und das ist doch trotz der Mangelhaftigkeit des vorliegenden Materiales als ganz unmöglich nachgewiesen worden. Will man, um den bekannten Olbers'schen Nachweis zu completiren, noch die gesammte Helligkeit haben, oder besser gesagt, die ganze Lichtmenge Q_m, die alle Sterne auf dem Areale ω bis zur Grösse m uns zusenden, so hat man $A(d\tau)$ mit h zu multipliciren und es ergiebt sich so:

$$Q_m = \omega \int_0^{\sigma} D\, e^{-\nu r}\, dr \int_{h_m r^2 e^{\nu r}}^{H} \varphi(x) \cdot x\, dx.$$

Der fragliche Satz besteht darin, dass Q_m für $m = \infty$ oder also für $h_m = 0$ einem endlichen Grenzwerth zustrebt. Diesen Grenzwerth kann man in der That leicht ableiten.

Nennt man ε eine beliebig kleine Zahl, so dass aber $\varepsilon\sigma$ sehr gross bleibt, wie z. B. $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$, und zerlegt das Integral rechts im Ausdrucke für Q_m in

$$\int_0^{(1-\varepsilon)\sigma} dr + \int_{(1-\varepsilon)\sigma}^{\sigma} dr$$

so wird im ersten Integrale die untere Grenze des inneren Integrales in Bezug auf x offenbar kleiner oder höchstens gleich sein:

$$h_m (1-\varepsilon)^2 \sigma^2 e^{\nu(1-\varepsilon)\sigma} = H(1-\varepsilon^2) e^{-\nu\varepsilon\sigma}$$

d. h. beliebig klein und da σ schliesslich unendlich gross wird, gleich Null. Bezeichnet man noch die Constante

$$B = \int_0^{H} x\, \varphi(x)\, dx$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

so wird also

$$\lim (Q_m)_{m=\infty} = \omega B \int_0^{(1-\varepsilon)\sigma} D \cdot e^{-\nu r}\, dr + \omega \int_{(1-\varepsilon)\sigma}^{\sigma} D \cdot e^{-\nu r}\, dr \int_{h_m r^2 e^{\nu r}}^{H} x\, \varphi(x)\, dx.$$

Das zweite innere Integral in Bezug auf x ist eine endliche Grösse. $D(r)$ soll der Voraussetzung gemäss allenthalben endlich bleiben, und es wird also für unendlich grosse r, $D \cdot e^{-\nu r}$ unendlich klein sein müssen, d. h. also das ganze zweite Doppelintegral convergirt mit ins Unendliche wachsendem σ zur Null. Es ist also schliesslich

$$\lim (Q_m)_{m=\infty} = \omega B \int_0^{\infty} D \cdot e^{-\nu r}\, dr$$

und dieser Ausdruck hat einen endlichen Werth.

III.

Aus den vorhergehenden Zusammenstellungen und Betrachtungen ergiebt sich von selbst, dass die Milchstrasse kein für sich allein bestehendes Phänomen sein kann, sondern mit der ganzen Constitution des Fixsternsystemes zusammenhängen muss, weil sich ihr Einfluss in der scheinbaren Vertheilung der Sterne schon in der Nähe ihrer Pole beginnend in immer stärkerem Maasse zeigt, je mehr man sich ihr nähert.

Nach dem Gange der Zahlen $\log \alpha$ (S. 577) für die einzelnen Zonen I—IX, welche doch nur als einzelne Fixpunkte in einer continuirlichen Reihe von Werthen zu betrachten sind, wird man erwarten dürfen, dass die einzelnen $\log \alpha$ und in noch deutlicherer Weise natürlich die Zahlen Σ innerhalb der eigentlichen Milchstrasse noch etwas grössere Werthe annehmen werden, weil in Zone V auch schon einige ausserhalb der Milchstrasse gelegene Gegenden enthalten sind. Um diese Frage zu untersuchen, habe ich noch einige Gegenden herausgegriffen, die nach Houzeau's[1]) Zeichnungen der Milchstrasse noch sicher in dieser liegen und für sie die einzelnen $\log \alpha$ gebildet.

Diese beliebig herausgegriffenen Gegenden sind folgende:

Decl.	Nr.	AR	Nr.	AR
		h m h m		h m h m
0°—1°	1)	6.20 — 7.20	1)′	18.40 — 19.20
4 —5	2)	6.0 — 7.0	2)′	19.0 — 19.20
9 —10	3)	5.40 — 7.0	3)′	19.20 — 19.40
14 —15	4)	5.40 — 6.40	4)′	19.20 — 20.0

[1]) Houzeau, Uranométrie Générale. Annales de l'Observatoire de Bruxelles. Nouvelle Série I. 1878.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Decl.	Nr.	*AR* h m h m	Nr.	*AR* h m h m
19—20	5)	5.20 — 6.40	5)′	19.40 — 20.20
24—25	6)	5.0 — 6.20	6)′	20.0 — 20.40
29—30	7)	4.40 — 6.20	7)′	19.20 — 20.40
34—35	8)	4.20 — 5.40	8)′	20.20 — 21.0
39—40	9)	4.0 — 5.20	9)′	20.40 — 21.20
44—45	10)	3.40 — 5.0	10)′	20.40 — 22.0
49—50	11)	0.0 — 4.40	11)′	21.0 — 0.0
54—55	12)	0.0 — 3.30	12)′	22.40 — 0.0
59—60	13)	0.0 — 3.0	13)′	23.20 — 0.0

Die einzelnen log α, die Grössen Σ sowie die Mittelwerthe ergiebt die folgende Zusammenstellung:

Nr.	log $\alpha_{7.0}$	log $\alpha_{7.5}$	log $\alpha_{8.0}$	log $\alpha_{8.5}$	log $\alpha_{9.0}$	Σ	Δ
1)	0.477	0.087	0.390	0.444	0.489	1.887	7.7
2)	523	279	277	417	439	935	8.6
3)	208	140	246	301	413	308	6.7
4)	176	222	213	283	365	259	7.5
5)	160	301	293	337	399	490	7.4
6)	301	158	401	301	377	538	7.6
7)	512	176	278	289	319	574	6.9
8)	452	217	289	309	311	578	6.6
9)	230	201	354	287	319	391	8.0
10)	477	236	225	153	319	410	5.4
11)	277	216	239	289	370	391	7.6
12)	301	301	284	283	277	446	7.7
13)	345	301	272	226	293	437	8.5
Summe	4.439	2.835	3.761	3.919	4.690	19.644	
Mittel	0.341	0.218	0.289	0.301	0.361	1.511	
1)′	0.255	0.222	0.286	0.182	0.305	1.250	4.5
2)′	222	204	118	155	301	000	6.0
3)′	—	176	301	426	403	(306)	8.2
4)′	273	146	197	273	305	194	6.5
5)′	176	301	452	350	307	586	8.2
6)′	079	368	269	356	396	468	8.0
7)′	301	253	248	339	338	479	10.4
8)′	067	331	286	351	388	423	9.6
9)′	564	189	289	320	295	657	8.8
10)′	374	198	238	260	365	435	9.8
11)′	364	295	280	260	358	557	9.9
12)′	301	279	323	327	350	580	8.2
13)′	439	073	141	250	364	267	7.4
Summe	3.415	3.035	3.428	3.849	4.475	(18.202)	
Mittel	0.285	0.233	0.264	0.296	0.344	1.422	

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Gesammtmittel den bei Zone V gefundenen gegenübergestellt sind:

0.314	0.221	0.277	0.299	0.353	1.464	Milchstrasse
319	244	267	284	327	441	Zone V.

Unter Δ ist die Anzahl der Sterne 1—9.0. Grösse auf einem Quadratgrad angegeben. Absichtlich wurde eine Trennung der Gegenden in den ersten und den letzten Rectascensionsstunden vorgenommen, weil sich eine gewisse Asymmetrie der Milchstrasse mit einiger Deutlichkeit herausstellt. Im Mittel aber und das ist vorläufig die Hauptsache, kommen wieder die früheren für Zone V gefundenen Zahlen heraus und auch die erwartete Vergrösserung, wenn auch nur in geringem Grade und nicht in allen Rubriken kommt zum Vorschein. Die Einzelwerthe aber schwanken überaus beträchtlich. Eine Reduction auf photometrische Helligkeiten wäre gegenüber diesen grossen Schwankungen ganz irrelevant. Im Uebrigen dürften bei der complicirten und in verschiedenen Gegenden so verschiedenartigen Structur der Milchstrasse solche Schwankungen nicht überraschen.

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich aus den Abzählungen, die Herr Easton[1]) an 14 Stellen A, B . . . O im Schwane ausgeführt hat. Herr Easton hat die Helligkeit der betreffenden Gegend der Milchstrasse durch die Nummern I (schwach) bis VI (sehr hell) abgeschätzt.

	$\log \alpha_{7.0}$	$\log \alpha_{7.5}$	$\log \alpha_{8.0}$	$\log \alpha_{8.5}$	$\log \alpha_{9.0}$		Δ
A	0.389	0.269	0.141	0.274	0.305	II	11.7
B	176	241	335	315	357	IV	9.6
C	301	238	357	287	427	III	9.8
D	370	111	192	359	382	IV	9.1
E	301	197	135	230	285	V	11.5
F	353	325	265	196	229	VI	10.9
G	227	343	259	278	412	V	11.6
H	301	124	228	258	309	VI	11.8
I	594	435	189	185	370	III	7.7
K	205	096	344	249	358	II	11.2
L	349	047	218	361	379	IV	11.9
M	301	335	261	254	294	II	7.8
N	275	245	167	181	274	I	5.8
O	301	346	242	228	248	II	7.4

Die Mittelwerthe gestalten sich ganz ähnlich, wie früher:

$\log \alpha_{7.0}$	0.317
$\log \alpha_{7.5}$	239
$\log \alpha_{8.0}$	238
$\log \alpha_{8.5}$	261
$\log \alpha_{9.0}$	331

[1]) Astr. Nachr. Nr. 3279.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Auch die grossen Schwankungen der Einzelwerthe sind nicht wesentlich anders, wie in den oben betrachteten Gegenden, ausgefallen.

Mit Recht, wie mir scheint, hat Herr Easton aus seinen Abzählungen den Schluss gezogen, dass zwischen der Helligkeit der betreffenden Milchstrassengegenden, die bekanntlich oft sehr rasch innerhalb kleiner Bezirke wechselt und der Anzahl der Sterne von der Grösse 1—9.0 kein Zusammenhang besteht. Die offenbaren Anhäufungen von Sternen, welche das Phänomen der Milchstrasse unzweifelhaft verursachen, müssen also in der Hauptsache durch schwächere Sterne als 9. Grösse bedingt sein. Herr Easton ist aber noch weiter gegangen und ist zu Resultaten gekommen, die von zu grosser Wichtigkeit sind, als dass sie hier übergangen werden könnten. Aus an einigen Stellen der Milchstrasse ausgeführten Abzählungen kam Herr Easton zur Erkenntniss, dass sich die Helligkeit der einzelnen Partien der Milchstrasse schon in der Anzahl der schwächsten Sterne der Durchmusterung aussprächen, dass also an benachbarten Stellen von grosser, mittlerer und geringer Helligkeit, die Zahl sämmtlicher Durchmusterungssterne relativ gross, mittel oder klein sei. Für die von Herrn Easton untersuchten Stellen ist das gewiss — wie bei der Sorgfalt, die in seinen Untersuchungen zu Tage tritt zu erwarten — zutreffend. Wichtig ist nun aber festzustellen, ob dieselbe Erscheinung auch in andern Theilen auftritt und ob man in ihr eine allgemeine Eigenschaft der Milchstrasse erblicken darf. Diese Frage kann man dadurch beantworten, dass man an möglichst vielen Stellen der Milchstrasse die Anzahl der Bonner Sterne mit den Herschel'schen Sternaichungen vergleicht, da der Reichthum der Herschel'schen Felder wohl sicher in der Hauptsache mit der Helligkeit der Milchstrasse parallel läuft. Ein misslicher Umstand, der indessen auch bei den von Herrn Easton gefundenen Zahlen die gleiche Rolle spielt, besteht darin, dass die Bonner Schätzungen ebenfalls von dem Sternreichthum der betreffenden Gegend abhängen und auch die Anzahl der schwächsten registrirten Sterne, die oftmals in der photometrischen Scala weit unter die 10. Grösse herabsinken.

Ich habe nun fast alle Gegenden der Milchstrasse, die als solche nach den Houzeau'schen Karten festgestellt worden waren und in denen Herschel geaicht hat, abgezählt. Die Oerter, welche Herr Holden für die Herschel'schen „Star-Gauges" angiebt, wurden als Mittelpunkt genommen und von da ein Areal von $\pm 40^s$ und $\pm 8'$ abgesteckt, für welches die Durchmusterungssterne abgezählt worden sind. Es war bei dieser Wahl des Umfanges des Areales die Absicht massgebend, nicht allzu kleine und deshalb unsichere Zahlen für

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

die DM-Sterne zu bekommen und doch wieder genügend kleine Areale zu haben, um in nicht zu grosse Entfernung von den Herschel'schen Feldern zu gelangen. Die beiden DM mussten getrennt werden, weil diese gerade in Bezug auf die schwächsten noch beobachteten Sterne, auf die es hier ankommt, inhomogen sind. Die Zahlen der Durchmusterungssterne wurden gleich auf den Aequator durch Multiplication mit $\sec \delta$ reducirt, so dass sie die Anzahl der Sterne auf einem Areale von $20 \times 16 = 320$ Quadratminuten geben. Die Zahlen H der Herschel'schen Sterne beziehen sich auf das Gesichtsfeld von 176.7 Quadratminuten. Die Vergleichungen sind in folgender Zusammenstellung gleich nach der Grösse der H geordnet und in Gruppen getheilt.

$H > 300$		$200 < H < 300$		$120 < H < 200$	
H	DM	H	DM	H	DM
612	6.3	296	3.4	196	2.0
600	1.0	296	2.2	192	6.1
588	3.1	296	1.1	192	5.8
588	2.1	288	4.8	190	4.8
480	2.5	280	4.4	186	7.2
472	3.1	280	2.2	180	0
440	3.1	272	2.5	178	2.2
424	2.1	268	2.4	172	2.0
384	2.4	260	2.5	160	8.9
360	4.6	260	3.1	160	3.0
360	3.1	256	2.3	156	1.0
352	7.3	248	3.6	152	3.3
352	5.2	248	4.3	150	3.0
344	5.8	240	2.3	142	3.4
340	3.5	240	1.2	140	4.1
328	3.0	232	3.5	136	3.5
320	6.2	224	3.6	130	4.8
320	0.0	220	6.0	120	2.3
312	2.3	212	0.0	120	2.4
312	1.2	208	1.2	120	2.0
306	3.7	256	2.83 (20)	120	1.1
Mittel 409	3.41 (21)			120	5.0
				120	0.0
				154	3.39 (23)

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$80 < H < 120$		$60 < H < 80$		$H < 60$	
H	DM	H	DM	H	DM
118	1.1	77	2.0	58	10.7
116.	4.0	76	4.7	58	3.1
112	3.4	75	2.3	56	4.3
112	2.3	74	3.0	56	2.1
110	5.1	74	2.1	54	0.0
108	3.5	73	3.2	52	3.3
108	1.1	73	2.1	51	1.1
104	5.9	72	1.1	50	5.3
93	5.4	70	2.1	50	2.0
90	3.0	70	1.0	50	2.0
88	2.2	70	2.0	50	1.0
88	4.6	67	4.1	50	2.1
86	0.0	66	4.4	50	1.0
80	2.0	63	1.0	48	1.1
80	3.4	60	3.3	45	4.5
80	1.1	60	0.0	41	1.1
80	4.0	60	2.0	41	0.0
97	3.06 (17)	69	2.38 (17)	36	4.4
				35	3.4
				34	2.2
				30	4.5
				25	4.5
				17	1.6
				15	0.0
				44	2.72 (24)
				43	2.37 (23 mit Ausschluss des ersten Werthes)

Stellt man die Mittelwerthe und die nach der quadratischen Formel berechneten mittleren Fehler ε der Mittel für DM, in welchen Werthen ein Gang gewiss nicht zu bemerken ist, zusammen, so findet sich

H	DM	ε
409	3.41	$\pm$ 0.41
256	2.83	32
154	3.39	46
97	3.06	41
69	2.38	31
43	2.72	42
	2.37	34

In ganz gleicher Weise wurde die südliche Durchmusterung den Sternaichungen J. Herschels gegenübergestellt und die Resultate nach den Anzahlen h bei J. Herschel geordnet.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$h > 160$

	h	SD
	320	1.1
	250	2.0
	232	2.0
	232	1.1
	216	3.0
	212	4.1
	204	1.1
	188	2.0
	184	2.0
	184	3.1
Mittel	222	2.15 (10)

$120 < h < 160$

h	SD
160	2.0
150	3.0
136	5.1
136	2.0
136	3.1
132	4.0
132	4.0
128	4.2
128	3.0
120	2.1
120	1.0
120	4.1
133	3.13 (12)

$80 < h < 120$

h	SD
118	2.1
116	8.2
116	0.0
112	3.1
112	1.0
111	4.0
104	3.0
102	6.0
100	4.1
100	3.2
96	2.0
94	2.0
90	5.2
88	2.0
83	8.5
103	3.63 (15)

$50 < h < 80$

h	SD
74	5.3
72	3.0
70	0.0
67	2.0
62	5.4
62	4.0
60	3.0
60	0.0
60	1.0
59	2.1
58	4.1
58	2.0
52	1.0
50	5.1
62	2.71 (14)

$20 < h < 50$

h	SD
46	5.1
39	1.0
37	4.2
37	1.0
35	4.2
34	3.2
34	7.1
30	1.0
30	0.0
24	2.1
22	3.1
20	2.1
20	1.0
31	2.70 (13)

$h < 20$

h	SD
19	2.1
14	2.1
14	5.0
14	2.0
13	2.1
13	1.0
9	1.0
9	0.0
5	0.0
3	1.0
11	1.63 (10)

Die Zusammenstellung der Mittelwerthe gestaltet sich so:

h	SD	ε
222	2.15	$\pm$ 0.31
133	3.13	35
103	3.63	63
62	2.71	50
31	2.70	56
11	1.63	51

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Fasst man das Resultat, welches die angeführten Zahlen darstellen, zusammen, so dürfte, vielleicht mit Ausnahme der sternärmsten Gegenden in der *SD*, ein Zusammenhang zwischen den Anzahlen der in den einzelnen Milchstrassengegenden vorkommenden Herschel'schen Sterne und aller in denselben Gegenden enthaltenen Durchmusterungssterne nicht vorhanden sein.

Auf Grund von veröffentlichten Abzählungen ist es leider nicht möglich, den Gegenstand weiter zu verfolgen. Man scheint aber doch, wenigstens vorläufig, zu der Annahme berechtigt zu sein, dass sich in Gegenden der Milchstrasse, die sich in grösserem scheinbaren Abstande von einander befinden, auch die Vertheilung der Sterne verschiedener Helligkeiten sehr verschieden verhalten wird. Auch die am Schlusse des Aufsatzes des Herrn Easton gegebene Zahlenreihe deutet darauf hin. Bei Celoria kommen nur 4 Gegenden vor, in denen W. Herschel geaicht hat. Irgendwie ins Gewicht fallende Schlüsse sind daraus natürlich nicht zu ziehen; ich stelle deshalb nur, ohne näheren Nachweis, die Zahlen bei Herschel (*H*), Celoria (*C*) und aller in der *DM* vorkommenden Sterne, reducirt auf ein Areal von 320 Quadratminuten, zusammen:

	H	*C*	*DM*
	217	10.6	5
	272	14.6	3
	311	17.5	2
	398	14.1	6
Mittel	299	14.2	4.0

Ein Parallellaufen von *H* und *C* ist wohl kaum zu constatiren. Die Verhältnisse $H:C:DM$ sind hier wesentlich anders, als sie in den Mittelwerthen der Zone V waren; man wird zu diesem Vergleiche die Anzahl der Sterne *DM* etwa mit 3 zu dividiren haben, um auf die Grösse 9.0 zu reduciren.

Wenn man also zunächst allgemeinere Untersuchungen über die Constitution der Milchstrasse wegen Mangel an Material nicht ausführen kann, so wäre man, wie schon oben bemerkt worden ist, doch in absehbarer Zeit in eine günstigere Position versetzt, wenn recht zahlreiche und sorgfältige photographische Aufnahmen einzelner Gegenden der Milchstrasse, mit verschiedenen Expositionszeiten, die die Herschel'schen Sterne und noch schwächere erreichen, gemacht werden möchten. Ich habe oben diese Arbeiten als solche bezeichnet, die zu den lohnendsten und wichtigsten der Astrophotographie gerechnet werden müssen.

Indessen kann man sich doch auch jetzt schon nicht ohne Berechtigung ein allgemeines Bild vom Wesen der Milchstrasse machen. Diese befindet sich

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

in einer Gegend des Fixsternsystems, wo die einzelnen Weltkörper in grösserer Nähe bei einander stehen, als anderswo. Hier werden nun die Anziehungskräfte zwischen den einzelnen Weltkörpern eine grössere Rolle spielen können, als in andern Theilen des Systemes, in welchen die Materie überaus spärlich verstreut ist. Ob in Folge davon oder nur als zufällige Erscheinung die bekannte zu Haufenbildung neigende Structur der Milchstrasse hervortritt, ist natürlich zweifelhaft, aber vorläufig wird man das eine nicht für wahrscheinlicher halten als das andere. Im Ganzen aber scheint sich zwischen den hellen, weniger hellen und fast sternleeren Gegenden eine sehr angenäherte Compensation einzustellen, denn wenn man die auf grösseren Arealen enthaltenen Anzahlen der Sterne verschiedener Helligkeiten bildet, so treten nahezu überall dieselben Verhältnisszahlen auf, welche im Mittel in Zone V gefunden worden sind.

Näheres über die räumliche Lage dieser Anhäufungen von Sternen, welche die Milchstrasse bilden, anzugeben, ist man gegenwärtig wohl nicht in der Lage. Es wäre eine ziemlich vage Bezeichnung für das, was zuletzt bemerkt worden ist, wollte man diese Anhäufungen als ringförmig um uns gelagert bezeichnen, da nach Allem, was wir wissen, die Sonne nicht gar weit von der Mitte des Fixsternsystems entfernt sein kann, wenn auch deutliche Asymmetrien in der Sternvertheilung beweisen, dass dieser Abstand von der Mitte des Systemes merklich sein muss. Man müsste denn, wie Herr Easton, die Sache so verstehen, dass sich die Sterne, welche in der Hauptsache das Phänomen der Milchstrasse erzeugen, auf einen Raum zusammengedrängt sind, welcher in der Richtung des Visionsradius eine vergleichsweise geringe Ausdehnung besitzt und zwar soll dieser Raum in einem der mittleren Entfernung der schwächsten Sterne der *DM* entsprechenden Abstande von uns sich befinden. Die oben angeführten Zahlen sprechen nicht dafür, dass dies eine von dem mittleren Zustande der Milchstrasse geforderte Annahme ist, wobei sie allerdings für einzelne Gegenden ganz zutreffend sein mag. Diese Anhäufungen befinden sich also nicht überall nahezu in derselben Entfernung von uns, sondern gewiss oft in geringerer, viel öfter aber wahrscheinlich in grösserer Entfernung als den schwächsten *DM*-Sternen im Mittel zukommt. Im Uebrigen wäre auch noch zu berücksichtigen, dass diese schwächsten Sterne der *DM* in verschiedenen Gegenden sehr wohl um fast eine ganze Grössenklasse auseinanderliegen können und also ihre mittleren Entfernungen durchaus nicht nur um kleine Bruchtheile derselben variiren. Ganz abgesehen aber davon, ob die scheinbare Vertheilung der Sterne die Ansicht des Herrn Easton stützt oder nicht — was vorerst dahingestellt bleiben mag —

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

ist gegen diese Ansicht a priori wohl nichts einzuwenden, denn sie enthält wohl kaum etwas, was der Erklärung der Anhäufungen in der Milchstrasse neue Schwierigkeiten bereiten würde und bringt nur eine offenbar mit der ganzen Constitution des Fixsternsystems zusammenhängende, allerdings merkwürdige Eigenthümlichkeit der Dichtigkeitsvertheilung zum Ausdruck. Andrerseits kann man zunächst aber auch keine Gründe allgemeiner Art namhaft machen, welche diese „ringförmige" Anordnung der Haufen in der Milchstrasse von vornherein wahrscheinlicher machen, als andere Anordnungen. Es muss dies besonders hervorgehoben werden, weil von andrer Seite die Meinung ausgesprochen wurde, das so häufige Vorkommen heller also sternreicher Anhäufungen in unmittelbarer Nachbarschaft sternarmer sogar leerer Gegenden, weise mit grosser Wahrscheinlichkeit darauf hin, dass diese Sternanhäufungen in der Richtung des Visionsradius eine verhältnissmässig geringe Ausdehnung haben müssen, weil man sonst röhrenförmige Durchsichten anzunehmen hätte, die alle in der unwahrscheinlichsten Weise zur Sonne gerichtet wären. Diese Begründung stützt sich aber auf ein Versehen, denn es ist leicht einzusehen, dass bei gegebener Anzahl von Sternen die Wahrscheinlichkeit für jede vorgegebene scheinbare Anordnung, also auch für das Vorhandensein von bestimmten Durchsichten, ganz unabhängig von der Dimension des Raumes in der Richtung des Visionsradius ist. Es soll hierauf mit wenigen Worten eingegangen werden, um jede Unklarheit in diesem immerhin wichtigen Punkt zu verhindern.

Es sei N die Anzahl derjenigen Milchstrassensterne, welche auf einem grösseren Theile des Himmels $d\Omega$ zu stehen scheinen, in Wirklichkeit sich also innerhalb eines kegelförmigen Raumes R befinden, dessen Spitze im Beobachter liegt. Ist dann $d\omega$ ein kleinerer innerhalb $d\Omega$ liegender Himmelstheil und K der ihm entsprechende kegelförmige Raum, so wird die Wahrscheinlichkeit W_n dafür, dass bei zufälliger Vertheilung der Sterne, von den N-Sternen gerade n innerhalb $d\omega$ zu liegen scheinen, sein:

$$W_n = \frac{N \cdot N-1 \ldots N-n+1}{1 \cdot 2 \ldots n} \left(\frac{K}{R}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{K}{R}\right)^{N-n}$$

Diese Formel ist umso genauer, je kleiner das Gesammtvolumen der Sterne gegenüber den in Betracht kommenden Räumen ist. Sie kann also bei der überaus dünnen räumlichen Vertheilung der kosmischen Massen als fast absolut genau gelten. R mag, um den allgemeinen Fall ins Auge zu fassen, aus einer Reihe von Kegelstumpfen bestehen, die durch Kugeln mit

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

den Radien r_0 und r_0', r_1 und r_1' etc. und dem Mittelpunkte im Beobachter begrenzt werden; dann ist

$$R = \frac{d\Omega}{3}\left[(r_0'^3 - r_0^3) + (r_1'^3 - r_1^3) + \ldots\right]$$

$$K = \frac{d\omega}{3}\left[(r_0'^3 - r_0^3) + (r_1'^3 - r_1^3) + \ldots\right]$$

und $\frac{K}{R} = \frac{d\omega}{d\Omega}$ ist ebenso wie W_n ganz unabhängig von den Dimensionen in der Richtung des Visionsradius. Auch wenn die Vertheilung der Sterne so ist, dass gewisse Stellen des Raumes bevorzugt werden, wird an der Sache nichts geändert. Es ist deshalb in Bezug auf die Wahrscheinlichkeitsfrage vollkommen gleichgiltig, ob man dieselbe Anzahl von Sternen auf einen in der Richtung des Visionsradius ausgedehnten Raum verstreut oder auf einen kleinen Raum zusammendrängt.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: 19

Autor(en)/Author(s): Seeliger Hugo Johann

Artikel/Article: Betrachtungen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne 565-629