Betrachtungen

über

die Spirale

von

Professor Dr. Pfaff

in Erlangen.

Betrachtungen
über
die Spirale.

Die Spirale ist ein Erzeugniss der griechischen Geometrie, an welchem später Archimedes Geist nicht nur durch glänzenden Erfolg sich übte, sondern auch die Grundanschauungen der Geometrie für Quadratur, Tangenten, als in einem einfachen Beispiel, bestimmt entwickelte. Ehe Leibnitz und Newton dieselben in der allgemeinen Abstraction darstellten, wodurch die höhere Geometrie so neue Kraft gewann, und mehrere Formen von Spiralen entstanden, hatten die Geometer sich mit der Familie der Cycloiden beschäftigt. Später stellte auch Leibnitz sein Prinzip auf, über die Entstehung einer krummen Linie durch Berührung einer Reihe anderer Curven, die sich nach einem bestimmten Gesetz entwickeln, welches ein so entschiedenes Werkzeug der neuern Mathematik geworden ist. Der Zweck dieser Blätter ist, durch eine natürliche Erweiterung des Begriffs der archimedischen Spirale einen Mittelpunkt für den obigen ähnliche geometrische Betrachtungen anzudeuten.

Archimedes gibt folgenden Begriff von der durch seine Entdeckungen bekannten Spirale. „Wenn eine gerade, in dem einen Endpunkt unbewegt stehende, Linie auf einer ebenen Fläche kreisweise, und zwar in stäter gleichförmiger Bewegung, herumgeführt wird, bis sie wieder dahin gekommen, wo sie angefangen, indessen aber ein Punkt in derselben Linie auch mit stäter und allezeit gleicher Gechwindigkeit geraden Weges fortläuft, anfangend von dem unbeweglichen Endpunkt, so wird solcher Punkt eine Schneckenlinie auf gedachter Fläche beschreiben."

Man kann diese Definition auf mancherlei Weise geändert ausdrücken, um einige allgemeinere Ansicht von geometrischen Figuren, die auf eine damit verwandte Weise entstehen, zu erhalten. Es liegt darin ein veränderlicher Radius, der sich um einen Punkt im Kreise herumbewegt; oder ein sich erweiternder Kreis, auf dem ein Punkt herumläuft; wenn man die zwei Bewegungen, die hiebei vorkommen, anders vertheilt, so kann man sich auch so ausdrücken: Ein Punkt bewegt sich in einer geraden Linie und die Ebene des Papiers unter ihm weg in einem Kreise; man stellt sich vor, dass der Weg des Punktes auf der beweglichen Ebene bezeichnet werde, so entsteht auf derselben gleichfalls eine Spirale. Man kann statt der geraden Linie irgend eine andere Curve, und statt der drehenden Bewegung jede beliebige nehmen, so hat man eine allgemeinere Klasse von Figuren. Nimmt man sodann an, dass die Curve, auf der sich der zeichnende Punkt bewegt, selbst wieder veränderlich sey, so hat man ein System dreier Bewegungen. Ein bekannter Fall letzterer Art ist die Spirale, welche die Zenithstände des Monds um die Erde beschreiben; die unter ihm weg sich bewegende Erdoberfläche enthält die Zeichnung, der Mond bewegt sich in einer kreisähnlichen Figur, die ihre Lage gegen den Aequator während der Mondknoten-Periode beständig ändert.

In Folge sollen nun mehrere Fälle dieser Curven betrachtet werden. Es sind nämlich drei Bestimmungen zu ihrer Erzeugung anzunehmen; die Art, nach der sich die Ebene (des Papiers) bewegt; die (krumme oder gerade) Linie, in welcher sich der zeichnende Punkt bewegt; das Gesetz, nach welchem sich diese Linie verändert.

Der einfachste Fall ist, wenn die Ebene sich so bewegt, dass alle ihre Punkte den Parallelismus bewahren, also eine fortschreitende, nach irgend einem Gesetze.

Die Verhältnisse der Geschwindigkeiten für die Ebene und den Punkt können auf verschiedene Weise angegeben werden, und machen gleichfalls eine Hauptbestimmung aus.

Es seyen nun die Gleichungen für die zwei Curven, in welchen sich die Ebene und der zeichnende Punkt bewegen

$$y = P\,x; \text{ und } \eta = f\,\xi \text{ und}$$

die Coordinaten der entstehenden gesuchten Curve, Y und X. Nimmt man eine gleichförmige Geschwindigkeit längs der Achse der x an, so erhält man sogleich

$$Y = y - \eta \text{ und } X = x - \xi.$$

Denn es ist deutlich, dass, wenn die Ebene nach einer gewissen Richtung fortschreitet, der zeichnende Punct relativ die entgegengesetzte Bewegung auf seiner Bahn erhalten hat. Wenn man annimmt, dass eine durch die Bogen der Curve ausgedrückte Geschwindigkeit sich auf die Geschwindigkeit längs der Coordinaten-Achse zurückführen liesse, so ist obige Gleichung allgemein. Man kann übrigens für beide Curven, in diesem Fall, eine gemeinschaftliche Achse und Anfangspunkt setzen, oder nach dem Princip der Coordinaten-Transformation herstellen.

Eine sehr berühmte hieher gehörige Curve ist die C y c l o i d e. Nach unserer jetzigen Betrachtungsweise könnte man sie eine umgekehrte Spirale nennen. Denn hiebei bewegt sich die Ebene in g e r a d e r L i n i e und der zeichnende Punkt in e i n e m K r e i s e, und die Geschwindigkeiten sind gleich und gleichförmig.

Man kann dieses Problem auch, nach mechanischen Rücksichten, nach den Gesetzen der Zusammensetzung der Bewegung behandeln. Es seyen nämlich MA (Tab. I. Fig. I.) die Curve, in welcher sich die Ebene bewegt, A M′ die ihr entgegengesetzte gleiche; A N die Curve, in welcher sich der beschreibende Punkt bewegt; und R ein correspondirender Punkt der gesuchten; zieht man in denselben zwei Linien parallel mit den Tangenten an M und N, so wird der Punkt nach diesen zwei Richtungen bewegt und also der mittleren Bewegung folgen, diess ist Folge des Parallelismus, den alle Punkte der Ebene gemeinschaftlich haben, in dem jetzt betrachteten Falle.

---

2) Der zweite Fall ist, wenn die Ebene (des Papiers) eine drehende Bewegung um einen gegebenen Punkt hat, und der zeichnende Punkt sich in irgend einer gegebenen Linie bewegt. In diesem Fall ist die archimedische Spirale; eine Menge anderer Fälle liefert die Drehbank.

Das einfachste wäre hier, die Gleichung für die gegebene Linie in eine Gleichung für Polar-Coordinaten zu verwandeln, und den Drehungspunkt als Pol zu nehmen. Die Gleichung für die gegebene Curve wird dann zwischen Radius vector ρ, zwischen dem veränderlichen Winkel α, oder auch dem dazu gehörigen Bogen S stattfinden. Wenn nun die Ebene des Papiers sich um den Winkel A dreht, während der Punkt auf der Curve den Winkel α durchlaufen hat, so ist ein Verhältniss zwischen α und A, also auch α und $(\alpha - A)$ gegeben. Der Winkel $(\alpha - A) = \alpha'$ ist nun in der gesuchten Curve der Winkel, der zum Radius ρ gehört.

Ein Beispiel ist folgendes, das der Spirale des Archimedes am nächsten kommt. Der zeichnende Punkt bewegt sich in irgend einer gegebenen geraden Linie. Zieht man aus dem Mittelpunkt der drehenden Bewegung einen Perpendikel auf diese gerade, und nennt ihn R, so hat man die Polargleichung für dieselbe

$$\rho = R \sqrt{1 + tg^2\,\alpha} \text{ und}$$

$$\alpha = \text{Bogen tg}\frac{S}{R} \text{ oder tg } \alpha = \frac{S}{R}$$

Man nehme nun an, dass, bei gleichförmiger Bewegung, die Geschwindigkeit der Drehung für den Bogen S′ durch die Gleichung bestimmt sey

$$S' = m\,S;\ \text{so wird}$$

$$A = \frac{m\,S}{R} = m\,tg\,\alpha.$$

Hiebei wird die Relation zwischen A und α transcendent, indem man $A = m\,tg\,\alpha$ hat; man könnte $\frac{S}{R}$ nach Potenzen von α, also auch A entwickeln und dann durch Umkehrung der Reihe eine Gleichung zwischen α und $(A - \alpha)$ oder α' finden; daraus also, wenn $\alpha = F\alpha'$ gesetzt wird, endlich die gesuchte Gleichung.

$$\rho = R\ (s + tg^2\ F\alpha')$$

Ein anderes Beispiel ist einfacher. Ein Punkt bewegt sich gleichförmig auf einem Kreise, der Mittelpunkt der Drehung ist auf dem Endpunkt seines Durchmessers. Wenn ρ der Radius des Kreises so erhält man

$\rho = 2\ r\ \text{Sin}\ \frac{1}{2}\ \alpha$ setzt man wieder $S' = mS$; so wird

$\rho = 2\ r\ \alpha$ $A = m\ \alpha$, und die Gleichung der Curve

$$\rho = 2\ r\ \text{Sin}\ \frac{\alpha'}{m - 1}.$$

Fig. 2 ist eine andere solcher Curven; A ist der Mittelpunkt der Drehung des Papiers, M der auf dem Kreise CM umlaufende Punkt, MPN die entstandene Curve.

3) Ein Punkt bewegt sich auf einer krummen Linie, die nach einem Gesetze sich erweitert oder ändert.

Nach der von Leibnitz in die höhere Geometrie eingeführten *)

*) S. La Grange Leçons Nro. 17.

Theorie lässt sich die Curve angeben, welche alle jene veränderlichen berührt. Es sey mir erlaubt, bei diesem Princip, das so grosse Früchte getragen, zu verweilen.

Leibnitz hat folgendes Problem gestellt:

Ein Kreis bewegt sich auf einer geraden Linie mit seinem Mittelpunkt; das Verhältniss m seines Radius zur Distanz seines Mittelpunktes von einem, auf jener Linie genommenen Anfangspunkte sey bekannt; man verlangt die Curve, welche alle jene auf jener gerade fortschreitenden veränderlichen Kreise berührt.

Die Distanz des Mittelpunktes sey x, die Gleichung des Kreises $\rho^2 = \eta^2 + (x - \xi)^2$, wo η, ξ rechtwinklige Coordinaten sind; die Bedingung ist $\rho^2 = m\ x$; daraus die Gleichung

$$\eta^2 + \xi^2 + x^2 - (2\ \xi + m)\ x = o$$

das Princip giebt η und ξ constant, während der bewegliche Kreis unendlich wenig sich ändert; aus dem Differential also der Gleichung erhält man demnach eine neue für x;

$x = \frac{m + 2\xi}{2}$ und nach der Substitution

in die vorhergehende, die Gleichung für die gesuchte Curve

$$\eta^2 - m\ \xi - \tfrac{1}{4}\ m^2 = o$$

die Gleichung einer Parabel.

Ein ähnliches Problem ist folgendes:

Ein Kreis bewegt sich mit seinem Mittelpunkte auf einem andern gegebenen Kreise, so dass jener aber beständig mit seiner Peripherie durch einen gegebenen Punkt gehet.

Gleichung des gegebenen Kreises $y^2 + x^2 = A$,

Gleichung des beweglichen Kreises $x^2 + (b - y)^2$,

weil er durch den gegebenen Punkt geht, dessen Distanz vom Anfang der Coordinaten, d. h. dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises b ist;

die Gleichung des beweglichen Kreises, weil er durch den Punkt geht, dessen Coordinaten ξ und η sind, ist allgemein

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2;$$

daraus $X^2 + (b - y)^2 = (\xi - X)^2 + (\eta - y)^2.$

Nach Leibnitz's Prinzip erhält man daraus die Differential-Gleichung, nach kurzer Reduction

$$\xi = (b - \eta) \frac{dy}{dx}; \text{ oder}$$

$$\frac{\xi}{\eta - b} = \frac{dy}{dx}$$

Diese Gleichung drückt auf eine höchst einfache Weise die Natur der gesuchten Curve aus, und gibt eine allgemeine Relation zwischen den Coordinaten derselben und dem ersten Differential-Verhältnisse der Curve, auf welcher sich ein beweglicher Kreis fortschreitend bewegt; denn es ist offenbar, dass die gefundene Gleichung allgemein und von der Gleichung $x^2 + y^2 = A^2$ ganz unabhängig ist. Sie gibt auch zugleich auf eine einfache Weise eine Construction für irgend eine zu Grunde liegende unbewegliche Curve. (Fig. 3.) Es sey M irgend ein Punkt auf der Curve LMR, welchen der bewegliche Zirkel erreicht hat, der immer durch den Punkt A geht; man ziehe an M die Tangente, und darauf die Normale MO, so wird der Triangel MPO nach der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{\xi}{b - \eta}$ immer ähnlich seyn müssen dem Dreiecke, dessen Seite ξ die Abscisse an den correspondirenden Punkt der gesuchten Curve n, und die andere Seite $b - \eta$. Liegen nun diese Dreiecke gleichartig, wie in unserm Falle die Dreiecke Anp, OMP, so ist An blos parallel mit OM zu ziehen, weil bei dem Kreise $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ ist. In allen andern Fällen, wo diess nicht der Fall ist, muss das Dreieck in eine umgekehrte Lage gebracht oder so gestellt werden, dass MP auf die Abscissen-Achse gelegt wird, und hierauf wird wie vorhin verfahren.

Fig. 3 ist RNL die Curve, welche entsteht, wenn ein veränderlicher Kreis sich auf dem Halbzirkel CMD so bewegt, dass er immer durch den Punkt A geht. Die Anwendung dieses Princips war, wie es scheint, nicht so allgemein zu Leibnitz's Zeit, als bei den spätern Fortschritten der Geometrie. So wendet es Bernoulli nicht auf die Bestimmung der Brennlinien (die Causticas) an. Das Problem über die Curve, welche eine gegebene gerade Linie beschreibt, die sich innerhalb eines rechten Winkels bewegt *), löst er nicht durch das allgemeine Princip auf.

Und diess Problem enthält in sich die allgemeine Ansicht über die Entstehung der Curven überhaupt durch Bewegung einer geraden Linie; denn eine Curve ist dann nichts als eine krumme Linie, die alle ihre Tangenten berührt, oder überhaupt ein System von geraden Linien berührt, die nach irgend einem Gesetz ihre Lage ändern.

Bernoulli's eben angeführtes Problem zeigt diess sehr deutlich, wenn es analytisch, mit Anwendung der bisherigen Methode behandelt wird.

Es sey nämlich $\eta = K\,\xi + b$
die Gleichung für einen Punkt der geraden, innerhalb des rechten Winkels fortschreitenden Linie, wo die Curve von ihr berührt wird, die Länge dieser geraden Linie sey a; und α sey der Winkel, welchen dieselbe in dieser Lage mit der Abscissen-Achse, als welche der eine Schenkel des rechten Winkels betrachtet wird, macht; so ist $K = \operatorname{tg} \alpha$; an dem Berührungspunkt theilt sich die gerade Linie in zwei Stücke, für welche man unmittelbar die Gleichung erhält

*) S. Joa. Bernoulli Opera omnia III. 447.

1) $\frac{a - \xi}{\cos \alpha} + \frac{\eta}{\sin \alpha} = a$; durch Einführung von K erhält man

2) $\eta = K (\xi - a) + \frac{K}{\sqrt{1 + K^2}} a$

daraus die Differential-Gleichung, wenn man blos K veränderlich setzt, nach der Reduction

3) $\left(\frac{a - \xi}{a}\right)^2 \left(1 + K^2\right)^3 = 1$

welches sich in Worte so übersetzen lässt: der Kubus der Secante des Winkels, welchen die Tangente mit der Achse macht, ist gleich dem Verhältniss der ganzen Länge der Linie, zur Distanz des berührten Punktes vom andern Schenkel des rechten Winkels.

Sucht man den Werth von K aus obiger dritter Gleichung, so erhält man die Gleichung zwischen η und ξ und a für die gesuchte Curve. Bernoulli erhält aus seiner geometrischen Betrachtung und den Relationen der Differentiale, in unserer Sprache ausgedrückt, die Gleichung zwischen K und η, nämlich

$$\eta \frac{\sqrt{1 + K^2}}{K} = \frac{a K^2}{1 + K^2}$$

deren Uebereinstimmung mit der unsrigen sich leicht ergiebt.

Wenn überhaupt eine Curve gesucht wird, welche alle geraden Linien berührt, die durch die Gleichung $\eta = K \xi + b$ gegeben sind, so muss K, b als veränderlich angenommen werden, und eine Relation zwischen K und b gegeben seyn. Man differentiirt nur die obige Gleichung in Beziehung auf K und b; woraus eine Gleichung für K und b durch ξ und η ausgedrückt erhalten wird, deren Substitution dann die Gleichung der Curve gibt.

Da alle möglichen Relationen zwischen K und b gedacht werden können, so ist die Entstehung aller Curven auf diese Weise denkbar.

Es ist übrigens klar, dass $K = \frac{d\eta}{d\xi}$ ist und $b = \eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi}$ also ist das Prinzip: die Entstehung der Curven auf diese Weise auszusprechen, eine Relation höherer Art, da das erste Differential darin erscheint; es ist auch beschränkt, da es die Beziehung der Curven auf eine Weise und rechtwinklige Coordinaten voraussetzt.

Wenn man die Relation annimmt,

$$K\, b = L$$

so erhält man die Gleichung

$$\eta^2 = 4 L \xi$$

die Parabel wäre nach diesem Princip die einfachste Curve. Die Relation $r^2 \; K b = r^2 - b^2$, gibt die Gleichung

$$\eta^2 = 2\, r\, \xi - \xi^2$$

welches die Gleichung des Kreises wäre; der einfachsten Curve ihrer Entstehung nach. Die Relation

$$2\, r\, K\, b = r^2 + a\, K^2$$

gäbe eine Curve vom dritten Grad.

Soll nun, um auf unser Problem zurück zu kommen, die Curve bestimmt werden, welche ein Punkt beschreibt, der auf einer veränderlichen Curve sich bewegt, so könnte man also verfahren, wie sich an dem Beispiele vom beweglichen Kreise, das nach Leibnitz oben angegeben wurde, zeigen lässt.

Man bestimmt die entstandene Curve nach der vorhergehenden Methode. Man hat sodann für irgend einen Punkt seine Normale, und ihren Durchschnittspunkt mit der Achse; diess ist der Ort des Mittelpunktes des längs der Achse fortgeschrittenen Kreises, für den Punkt der Curve, dessen Ordinaten x, y sind, ist er also $x + y \frac{dy}{dx}$

Diess ist auch der Weg, den der Mittelpunkt-Kreis parallel mit sich selbst vom Anfang an durchlaufen hat. Ist nun die Winkelgeschwindigkeit des Punktes auf dem Kreise während der Zeit gegeben, so trägt man diesen Winkel auf den Kreis unmittelbar auf, und hat so den Ort des Punktes. Ist aber eine Gleichung für die durchlaufenen Räume gegeben, so nehmen die Winkelgeschwindigkeiten ab, wie die Radien zunehmen; wenn man zwei unendlich nahe gelegene Kreise betrachtet, so ist in dem Fall einer gleichförmigen Bewegung die Gleichung für das Element der krummen Linie, welche der Punkt beschreibt, einfach. Nämlich

$$d\,S^2 = d\,r^2 + (d\,s + c)^2$$

d S ist das Element des Bogens (Fig. 4.), e ist der sich gleichbleibende Weg, den nach der Voraussetzung der Punkt, er mag auf irgend einem der beweglichen Kreise sich befinden, beschreibt, wobei d S das Element des Kreisbogens an der Stelle, wo der Radius ✦, bedeutet *).

Bei dem erstern Falle aber von gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit und gleichförmigem Fortschreiten der Kreise, lässt sich die Gleichung für die Curve, von dem Punkte beschrieben, angeben. Es seyen nämlich x, y die Coordinaten eines Punktes der alle Kreise berührenden Curve, so ist

$$\text{Weg des Kreises vom Anfangspunkt an } X + y\frac{d\,y}{d\,x}$$

$$\text{Zeit dazu } x + y\,\frac{d\,y}{d\,x}$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit in derselben Zeit } \left(X + y\,\frac{d\,y}{d\,x}\right)\frac{C'}{C}$$

*) In Fig. 5 ist RANL die Curve, welche entsteht, wenn ein veränderlicher Kreis sich auf dem Halbkreis CMD bewegt, und dabei immer durch den Punkt A geht, RSZL ist die Curve, welche entsteht, wenn auf obengedachtem Kreise sich ein Punkt mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, die der Mittelpunkt des veränderlichen Kreises hat, bewegt.

Diese Winkelgeschwindigkeit auf den Kreis ρ an dieser Stelle reducirt

$$r\left(x + y\,\frac{d\,y}{d\,y}\right)\frac{C'}{C}$$

so sind die Coordinaten der Curve, welche der Punkt beschreibt

$$\eta = \text{Sin Arc. } r\left(x + y\,\frac{d\,y}{d\,x}\right)\frac{C,}{C}$$

$$\xi = x + y\,\frac{d\,y}{d\,x} - \text{Cos Arc } r\left(X + y\right)\frac{d\,y}{d\,x}\,\frac{C'}{C}$$

Da in unserm Falle eine Gleichung zwischen ρ und x gegeben, lässt sich r hier eliminiren.

Bewegen sich die veränderlichen Kreise nicht auf einer geraden Linie, sondern auf einer Curve, so muss statt der Achse der durchlaufene Bogen derselben genommen werden; die eben angegebene Betrachtungsweise gilt noch und wird sich noch so vereinfachen lassen, dass man auch eine Winkelgeschwindigkeit für die Mittelpunkte der bewegten Kreise einführen kann.

Diese so entstandene Reihen gehören in eine höhere Reihe von Cycloiden und Epicycloiden.

---

4) der eigentliche Sitz dieser Probleme ist die Astronomie. Die Planeten-Bahnen sind veränderliche Ellipsen. Die Mond-Spirale um die Erde, und die Spirale auf der Erdoberfläche, in welcher die Punkte liegen, über welchen der Mond nach und nach während seines Laufes senkrecht steht, sind veränderlich, denn die Neigung der Mondsbahn und ihre Lage und ihre Ellipse selbst sind veränderlich. Eine weitere Untersuchung über die Spiralen auf einer Kugeloberfläche liegt nicht im Bereiche dieser Abhandlung.
