Albrecht Eulers Beantwortung einiger Arithmetischen Fragen.

Abhandlung.

§. I.

Man fraget: Wenn von einer Billion die Zahl hundert nach der gemeinen Weise der Subtraction und zu widerholtenmalen so oft abgezogen wird, bis nichts (o) übrig bleibt, wie viel Ziffern zu schreiben hierzu erfordert werden?

1.

Diese Frage ist von wenig Erheblichkeit und ihre Beantwortung erfordert weder Scharfsinn noch Kunstgriffe: sobald dieselbe aber in einem weitern Verstande genommen wird, so daß die beyden gegebenen Zahlen, welche von einander beständig abgezogen werden sollen, nicht bestimmt, sondern nur durch allgemeine Buchstaben angedeutet werden: so setzet uns eine analytische Auflösung dieser Frage schon in eine größere Verlegenheit. Man sieht sich gezwungeu, auf gewisse Hülfsmittel zu denken, auf welche mau durch andere Untersuchungen nicht so leicht gefallen wäre. Ein Satz folget dem andern, und wir gerathen durch die Auflösung dieser einzigen Aufgabe auf mehrere, welche unsere Aufmerksamkeit nicht weniger verdienen. Neue Schwierigkeiten hemmen bey der Auflösung jeder dieser Aufgaben unsern Fortgang: die Begierde wird größer, und, indem der Verstand alle Mühe anwendet, diese Schwierigkeiten zu heben, so wird derselbe je länger je geschickter auch in nützlichen Untersuchungen mit erwünschtem Fortgange arbeiten zu können. Ob ich also gleich nicht läugnen kann, daß gegenwärtige Schrift ohne Nutzen sey, wenn anderst etwas das den Verstand allein schärft, unter die unnützen Dinge gerechnet werden kann: so schmeichle ich mir dannoch, daß die sonderbare Untersuchungen, auf welche ich bey der Betrachtung eben dieser Frage gefallen bin, der Aufmerksamkeit der Mathematiker nicht gänzlich unwürdig seyn werden. Ich werde mit der Beantwortung der Frage, so wie dieselbe hier vorgelegt worden, den Anfang machen.

2. Da eine Billion 1000000000000 aus 13 Ziffern, und die Zahl 100 aus 3 Ziffern besteht, so müssen gleich vor der ersten Subtraction 13 + 3 das ist 16 Ziffern geschrieben werden.

Da nun ferner der durch die erste Subtraction entstandene Rest 1 Billion — 100 = 999 999 999 900 nur noch aus 12 Ziffern besteht: so wird mau bis zur zweyten Subtraction 12 + 3 das ist 15 Ziffern zu schreiben haben. Und weil der daher entstandene zweyte Rest 999 999 999 800 sowohl als alle folgende, bis man nämlich zu der Zahl 99 999 999 900 das ist 100 000 Millionen — 100 gekommen, gleichfals aus 12 Ziffern bestehen: so wird man so oft 12 + 3 oder 15 Ziffern schreiben müssen, als Subtractionen zwischen 1 Billion und 100000 Millionen enthalten sind: das ist, man wird so oft 15 Ziffern zu schreiben haben, als $\frac{\text{1 Billione} - \text{100 000 Millionen}}{100}$ Einheiten enthält; folglich 9000 Millionen 15 mal oder 135000 Millionen Ziffer.

Auf

Auf eine ähnliche Art wird man leicht begreifen, daß man von dem Rest 100000 Millionen — 100 oder 99 999 999 900 bis zum Rest 10000 Millionen — 100 oder 9 999 999 900

$\frac{100000 \text{ Millionen} - 10000 \text{ Millionen}}{100}$. (11 + 3) Ziffern, das ist,

900 Millionen 14 mal oder 12600 Millionen Ziffern zu schreiben habe.

Ferner wird von dem Rest 10000 Millionen — 100 bis zu dem Rest 1000 Millionen — 100 die Anzahl der zu schreibenden Ziffern seyn, 40 Millionen . (10 + 3) das ist 1170 Millionen. Und so weiter.

Also wird die verlangte Anzahl aller zu schreibenden Ziffern durch die Addition folgender Zahlen gefunden:

1.	— — — 1	. (13+3)	Ziffern — — —	16
2.	9000 Millionen	. (12+3)	Ziffern —	135000000000
3.	- 900 Millionen	. (11+3)	Ziffern —	12600000000
4.	--- 90 Millionen	. (10+3)	Ziffern —	1170000000
5.	— 9 Millionen	. (9+3)	Ziffern — —	108000000
6.	——— 900000	. (8+3)	Ziffern — —	9900000
7.	——— 90000	. (7+3)	Ziffern — —	900000
8.	——— 9000	. (6+3)	Ziffern — — —	81000
9.	——— 900	. (5+3)	Ziffern — — —	7200
10.	——— 90	. (4+3)	Ziffern — — — —	630
11.	——— 9	. (3+3)	Ziffern — — — —	54
	Also in allem	— — —		148888888900 Ziffern.

Wie nun diese Frage beantwortet worden, so können auch alle übrige Fragen von gleicher Art aufgelöset werden. Man wird nämlich durch ähnliche Schlüsse die Anzahl aller deren Ziffern heraus bringen, welche geschrieben werden müssen, wenn eine jegliche

gege-

gegebene Zahl von einer andern gegebenen größern Zahl, nach der gemeinen Weise der Subtraction so oft abgezogen würde, bis entweder, wie in diesem Falle, nichts (0) oder eine Zahl, so kleiner als die zu subtrahirende ist, übrig bleibt. Ich werde nun zeigen, wie auch diese Anzahl der Ziffern könne gefunden werden, wenn die beyden gegebenen Zahlen nicht eigentlich bestimmet, sondern bloß auf eine allgemeine Art durch Buchstaben angedeutet werden.

§. II.

Es werden zwey Zahlen *a* und *b* gegeben: wenn die kleinere derselben *b* von der größern *a* nach der gewöhnlichen Art so oft abgezogen wird, bis eine Zahl die kleiner ist als *b* übrig bleibt, so soll die Anzahl aller hierzu erforderlichen Ziffern durch eine analytische Formul ausgedrückt werden.

3. Man setze zu diesem Ende, die Zahl a bestehe aus n Ziffern, und die zu subtrahirende Zahl b aus m Ziffern. Nun merke ich überhaupt an, daß, weil die größte Zahl von einer bestimmten Menge Ziffern, z. E. von n Ziffern, aus n neben einander gesetzten Neunern (9) besteht, diselbe ganz bequem durch $10^{n} - 1$ angedeutet werden könne. Also wird die allergrößte Zahl von $n - 1$ Ziffern $= 10^{n-1} - 1$: von $n - 2$ Ziffer $= 10^{n-2} - 1$; von $n - 3$ Ziffer, $= 10^{n-3} - 1$, und so weiter seyn. Hernach ist aus dem vorhergehenden offenbar, daß man so oft werde $n - m$ Ziffern zu schreiben haben, bis eine Zahl von $n - 1$ Ziffern übrig bleibt: ingleichen wird man so oft $n + m - 1$; $n + m - 3$ u. s. w. Ziffern schreiben

müssen,

müsse, bis man auf Reste von $n-2$, $n-3$ $n-4$: u. s. w. Ziffern kömmt.

Ferner wird es nicht schwer seyn einzusehen, daß die Anzahl aller Subtractionen bis zum ersten Rest von $n-1$ Ziffern durch den nächst größten Quotienten von $\frac{a-10^{n-1}+1}{b}$ ausgedrückt werde. Deuten wir nun diesen nächst größten Quotienten von $\frac{a-10^{n-1}+1}{b}$ durch $Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b}$ an, so werden bis zu dem ersten Rest von $n-1$ Ziffern $(n+m)\,Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b}$ Zahlen geschrieben werden müssen.

Da auf eine gleiche Weise die Anzahl aller Subtractionen vom Anfang an bis zu dem ersten Rest von $n-2$ Ziffern durch den nächst größten Quotienten von $\frac{a-10^{n-2}+1}{b}$ oder durch $Q\frac{a+1-10^{n-2}}{b}$ angedeutet wird: so muß die Anzahl aller Subtractionen von dem ersten Rest von $n-1$ Ziffern bis zu dem ersten Rest von $n-2$ Ziffern seyn $= Q\frac{a+1-10^{n-2}}{b} - Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b}$ Und da man auch eben so oft $n+m-1$ Ziffern zu schreiben hat, so werden in allem bis zu dem ersten Rest von $n-2$ Ziffern $(n+m)\,Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b}$ $+(n+m-1)\,Q\frac{a+1-10^{n-2}}{b} - (n+m-1)\,Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b}$ Zahlen erfordert werden.

Auf eine ähnliche Art wird man leicht gewahr werden, daß die Anzahl aller Subtractionen von dem ersten Rest von n — 2 Ziffern bis zu dem ersten Rest von n — 3 Ziffern seyn werd $Q\frac{a+1-10^{n-3}}{b} - Q\frac{a+1-10^{n-2}}{b}$ Und da man auch wiederum eben so oft n + m — 2 Ziffern zu schreiben hat, so wird vom Anfang an bis zu dem ersten Rest von n — 3 Ziffern, die Anzahl der zu schreibenden Ziffern also ausgedrückt werden:

$$(n+m)\,Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b} + (n+m-1)\,Q\frac{a+1-10^{n-2}}{b} - (n+m-1)\,Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b} + (n+m-2)\,Q\frac{a+1-10^{n-2}}{b} - (n+m-2)\,Q\frac{a+1-10^{n-2}}{b}.$$

Wann man nun diese Schlüsse weiter fort setzet, so wird man sich leicht überführen, daß die verlangte Anzahl aller zu schreibenden Ziffern, nämlich von Anfang an, bis daß man zu einem Rest kömmt, so weniger als m Ziffern hat, seyn werde,

$$+(n+m)\,Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b} + (n+m-1)\,Q\frac{a+1-10^{n-2}}{b}$$
$$+(n+m-2)\,Q\frac{a+1-10^{n-3}}{b} + (n+m-3)\,Q\frac{a+1-10^{n-4}}{b}$$
$$-(n+m-1)\,Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b} - (n+m-2)\,Q\frac{a+1-10^{n-2}}{b} -$$

(n+m-2)

$$(n+m-3)\,Q\frac{a+1-10^{n-3}}{b} \quad -(n+m-4)\,Q\frac{a+1-10^{n-4}}{b}$$

und so weiter bis zum Gliede $+\,(n+m+m-n)\,Q\frac{a+1-10^{n-n+m-1}}{b}$

Oder da man außer dem letzten, allezeit je zwey und zwey Glieder bequem zusammen bringen kann, so wird die begehrte Anzahl aller zu schreibenden Ziffern also ausgedrückt werden:

$$Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b} + Q\frac{a+1-10^{n-2}}{b} + Q\frac{a+1-10^{n-3}}{b}$$

$$+\,Q\frac{a+1-10^{n-4}}{b} + \&c. \ldots\ldots + Q\frac{a+1-10^{m}}{b} + 2m\,Q\frac{a+1-10^{m-1}}{b}$$

Oder besser, wann diese Reihe umgekehrt geschrieben wird,

$$2m\,Q\frac{a+1-10^{m-1}}{b} + Q\frac{a+1-10^{m}}{b} + Q\frac{a+1-10^{m+1}}{b}$$

$$+\,Q\frac{a+1-10^{m+2}}{b} + Q\frac{a+1-10^{m+3}}{b} + \&c. \ldots\ldots + Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b}$$

Und die Anzahl aller Glieder dieser Reihe belauft sich auf $n-m+1$.

4. Da in der Ausgabe eigentlich vorausgesetzt worden, daß b von a so oft abgezogen wird, als es die Zahl a zulassen will, und wir in der Auflösung nur gesetzt haben, daß b so oft unter den Resten geschrieben werde, bis eine Zahl heraus kömmt, die aus weniger Ziffern besteht, als die zu subtrahirende Zahl b hat: so wird unsere gefundene Formul, wenn sie den Bedingungen der Aufgabe gänzlich ein Gnügen leisten soll, noch einige Zusätze und Verände-

rungen nöthig haben. Man wird zu diesem Ende auf den letzten Rest Achtung geben müssen, und wenn befunden wird, daß dieselbe so wie die subtrahirende Zahl b noch aus m Ziffern besteht, so wird man von der angezeigten Anzahl aller zu schreibenden Ziffern die Zahl m abziehen müssen. Und wenn dieser letzte Rest aus weniger als m Ziffern besteht, so wird man zu der gefundenen Formul die Anzahl der Ziffer eben dieses Rests noch hinzu zu thun haben. Der letzte Rest aber wird, wie bekannt, durch die wirkliche Theilung der Zahl a durch b gefunden.

Da nun aus der Natur der Division erhellt, daß der Rest von $\frac{a}{b}$ der zu theilenden Zahl a weniger dem Theiler b mit dem nächst kleinsten Quotient von $\frac{a}{b}$ vermehrt gleich sey, wenn wir diesen nächst kleinsten Quotienten von $\frac{a}{b}$ durch $q\frac{a}{b}$ andeuten, so werden wir auch die eben erwähnte Bedingungen mit in der analytischen Formul folgender Weise eintragen können.

Wenn nämlich der letzte Rest $a - b.\ q\frac{a}{b}$ aus m Ziffern besteht, so wird die verlangte Anzahl aller zu schreibenden Ziffern also ausgedrückt werden,

$$2m\,Q\frac{a+1-10^{m-1}}{b} + Q\frac{a+1-10^{m}}{b} + Q\frac{a+1-10^{m+1}}{b}$$

$$+ Q\frac{a+1-10^{m+2}}{b} + \&c. \dots + Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b} - m$$

und wenn $a - b.\ q\frac{a}{b}$ aus weniger als m Ziffern, zum Exempel aus r Ziffern besteht, so wird die verlangte Anzahl aller zu schreibenden Ziffern seyn;

$$2\,m\,Q\,\frac{a+1-10^{m-1}}{b} + Q\,\frac{a+1-10^{m}}{b} + Q\,\frac{a+1-10^{m+1}}{b}$$

$$+\,Q\,\frac{a+1-10^{m+2}}{b} + \&c. \ldots\ldots + Q\,\frac{a+1-10^{n-1}}{b} + r$$

5. Einige Exempel sollen dieses noch deutlicher machen.

I. Die Zahl 12. wird von der Zahl 1763 so oft abgezogen, bis eine Zahl die kleiner ist als 12 übrig bleibt; man verlangt zu wissen, wieviel Ziffern zu schreiben hierzu erfordert werden? Hier ist also $a = 1763$; $n = 4$; $b = 12$; $m = 2$

$$a+1 = 1764$$

$$a+1-10 = 1754 \quad Q\,\frac{1754}{12} = 147 ; 4\,Q\,\frac{1754}{12} = 588$$

$$a+1-100 = 1664 \quad - \; - \; - \quad Q\,\frac{1664}{12} = 139$$

$$a+1-1000 = 764 \quad - \; - \; - \quad Q\,\frac{764}{12} = 64$$

Summa - - 791 Zif. Rest $11 = a - b\,q\frac{a}{b}$

$$\begin{array}{l} b \quad a \quad q\frac{a}{b} \\ 12)\,1763\,(146 \\ \quad\;\; 12 \\ \quad\;\; \overline{\;\;56} \\ \quad\;\;\;\; 48 \\ \quad\;\;\;\; \overline{83} \\ \quad\;\;\;\; 72 \\ \quad\;\;\;\; \overline{\;\;} \end{array}$$

Ziehen wir nun ferner den in dem vorhergehenden §. gedachten Umstand in Erwägung: weil der letzte Rest $a - b\,q.\frac{a}{b} = 11$ aus 2 das ist aus eben soviel Ziffern besteht, als die Zahl $b = 12$ hat, so werden von der eben gefundenen Zahl 791 noch diese 2 abgezogen werden müssen. Also ist die verlangte Anzahl aller zu schreibenden Ziffern 791 — 2 das ist 789.

II. Man setze die Zahl 12 werde von 1765 so oft abgezogen, bis eine Zahl, die kleiner ist als 12, übrig bleibt, und es wird gefragt: wie viel Ziffern hierzu zu schreiben erfordert werden? Da also $a = 1765$; $n = 4$; $b = 12$; $m = 2$ so wird

$$a + 1 = \underline{1766}$$

$$a + 1 - 10 = 1756 \quad 4Q\frac{1756}{12} = 588 \qquad b = 12)\ \overset{a=}{1765}\ (147 = q\frac{a}{b}$$

$$a + 1 - 100 = 1666 \quad Q\frac{1666}{12} = 139$$

$$a + 1 - 1000 = 766 \quad Q\frac{766}{12} = 64$$

$$\begin{array}{r} 1765 \\ \underline{12} \\ 56 \\ \underline{48} \\ 85 \\ \underline{84} \end{array}$$

Summa - - 791 Ziffern, der Rest $1 = a - bq\frac{a}{b}$

Nun zeigt uns die wirkliche Theilung, daß der letzte Rest nur aus einem Ziffer besteht, folglich muß zu der gefundenen Anzahl der Ziffern 791 noch 1 hinzu gethan werden. Also wird die verlangte Anzahl aller zu schreibenden Ziffern in diesem Fall seyn $791 + 1$ das ist 792.

III. Wann die Zahl 10^q von der Zahl 10^p so oft abgezogen wird, bis nichts übrig bleibt, so fragt man; wie viel Ziffern zu schreiben hierzu erfordert werden? Weil hier $q < p$ und also 10^p durch 10^q theilbar ist, so kann der im 4. §. erwähnte Umstand nicht Statt finden, und die im 3. §. gegebene Formul wird uns die verlangte Anzahl aller zu schreibenden Ziffern folgendermaßen geben.

Es sey also $a = 10^p$; $n = p + 1$: $b = 10^q$; $m = q + 1$, so wird

$$Q\frac{a + 1 - 10^{m-1}}{b} = Q\frac{10^p - 10^q + 1}{10^q} = 10^{p-q} - 1 + 1 = 10^{p-q};$$

Da

$$Q\frac{a+1-10^{m}}{b}=10^{p-q}-10+1:Q\frac{a+1-10^{m+1}}{b}=10^{p-q}-10^{2}+1;$$

$$Q\frac{a+1-10^{m+2}}{b}=10^{p-q}\quad 10^{3}+1 \text{ \&c.}$$

Da nun die Anzahl aller dieser Glieder $n-m+1=p-q+1$ ist, so wird, wenn das erste Glied $2m=2q+2$ mal genommen wird, die Summa aller Glieder seyn $(2+p+q)\,10^{p-q}+p-q$ $-10-10^{2}-10^{3}-10^{4}-\ldots\ldots-10^{p-q}$. Folglich weil $10+10^{2}+10^{3}+10^{4}+10^{5}+\ldots+10^{p-q}=10\times\frac{10^{p-q}-1}{10-1}$ so wird die Anzahl aller zu schreibenden Ziffern seyn

$$(2+p+q)\,10^{p-q}-10\times\frac{10^{p-q}-1}{10-1}+p-q$$

Wann demnach, wie in der vorgelegten Frage $a=1$ Billion und $b=100$ so wird $a=10^{12}$; $b=10^{2}$; $p=12$; $q=2$. folglich die verlangte Anzahl aller zu schreibenden Ziffern seyn

$$16.\,10^{10}-10\times\frac{10^{10}-1}{9}+10=148888888900$$

so wie dieselbe oben gefunden worden.

6. Man erlaube mir hier einige Sätze, den nächst größten und nächst kleinsten Quotienten der Brüche betreffend, anzuführen; da ich zumalen ins künftige öfter werde Gelegenheit haben, dieselben mit Vortheile zu gebrauchen.

I. Wann

I. Wenn $a - b.\, q\frac{a}{b} = 0$ oder wenn a durch b theilbar ist,

so wird $Q\frac{a}{b} = q\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

II. Wenn $a - b.\, q\frac{a}{b} \neq 0$ oder wenn a durch b nicht theilbar ist,

so wird $Q\frac{a}{b} = q\frac{a}{b} + 1$

III. $Q\frac{bc+a}{b} = c + Q\frac{a}{b}$ oder $= c + 1 + q\frac{a}{b}$;

IV. $Q\frac{bc+a}{b} = c + q\frac{a}{b}$ oder $= c - 1 + q\frac{a}{b}$

V. $Q\frac{bc-a}{b} = c - Q\frac{a}{b}$ oder $= c + 1 - Q\frac{a}{b}$;

VI. $Q\frac{bc-a}{h} = c + Q\frac{a}{b}$ oder $= c + 1 + q\frac{a}{b}$

VII. Also $Q\frac{bc+a}{b} = q\frac{bc-a}{b}$ und $q\frac{bc+a}{b} = 2c - q\frac{bc-a}{b}$

VIII. Wenn $a + c - b\,(q\frac{a}{b} + q\frac{c}{b}) > b$

so ist $Q\frac{a+c}{b} = Q\frac{a}{b} + Q\frac{c}{b}$ oder $= q\frac{a}{b} + q\frac{c}{b} + 2$

IX. Wenn $a + c - b\,(q\frac{a}{b} + q\frac{c}{b}) < b$

so ist $Q\frac{a+c}{b} = Q\frac{a}{b} + Q\frac{c}{b} - 1$ oder $= q\frac{a}{b} + Q\frac{c}{b}$

X. Wenn $a - c - b\,(q\frac{a}{b} - q\frac{c}{b}) > b$

so ist $Q\frac{a-c}{b} = Q\frac{a}{b} - Q\frac{c}{b} + 2$ oder $= Q\frac{a}{b} - q\frac{c}{b} + 1$

XI. Wenn $a - c - b\,(q\frac{a}{b} - q\frac{c}{b}) < b$

so ist $Q\frac{a-c}{b} = Q\frac{a}{b} - Q\frac{c}{b} + 1$ oder $= Q\frac{a}{b} - q\frac{c}{b}$

Ich

Ich hätte können noch mehrere dergleichen Sätze anführen, da aber diese wenige zu meinem Vorhaben schon überflüssig sind, so will ich es nur immee hierbey bewenden lassen. Ich glaube auch nicht, daß es nöthig seyn möchte, die Beweise dieser Sätze beyzulegen, weil dieselben mit leichter Mühe aus der Natur der Theilung heraus gebracht werden können. Ich fahre fort meinen Untersuchungen freyen Lauf zu lassen.

7. Durch Hülfe des zweyten Satzes $Q\frac{a}{b} = q\frac{a}{b} + 1$ können wir sogleich die in dem 5. §. gefundene Formul in eine andere verwandeln, worinnen, anstatt der nächst größten, die nächst kleinsten Quotienten der Brüche vorkommen.

$$2\,m\,Q\frac{a+1-10^{m-1}}{b} + Q\frac{a+1-10^{m}}{b} + Q\frac{a+1-10^{m+1}}{b}$$

$$+\,Q\frac{a+1-10^{m+2}}{b} + \ldots\ldots + Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b} + m + n$$

wird nämlich die Anzahl aller Ziffern andeuten, welche geschrieben werden müssen, wenn die Zahl b von m Ziffern von der Zahl a von n Ziffern so oft subtrahiret würde, bis nichts übrig bleibt. Hier setzen wir nämlich zum voraus, daß die Zahl a durch b theilbar sey.

Wenn aber die Zahl a durch b nicht theilbar ist, und der letzte Rest $a - b\,q\frac{a}{b}$ noch aus m, das ist, aus eben soviel Ziffern besteht, als die zu subtrahirende Zahl b hat, so wird die Anzahl dieser Ziffern seyn

$$2m\,Q\frac{a+1-10^{m-1}}{b}+Q\frac{a+1-10^{m}}{b}+Q\frac{a+1-10^{m+1}}{b}$$
$$+\,Q\frac{a+1-10^{m+2}}{b}+\ldots\ldots+Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b}+n$$

und wenn der letzte Rest $a - b\,q\frac{a}{b}$ nur aus r, das ist, aus weniger Ziffern, als die zu subtrahirende Zahl b hat, besteht, so wird die verlangte Anzahl aller zu schreibenden Ziffern seyn

$$2m\,Q\frac{a+1-10^{m-1}}{b}+Q\frac{a+1-10^{m}}{b}+Q\frac{a+1-10^{m+1}}{b}$$
$$+\,Q\frac{a+1-10^{m+2}}{b}\ldots+Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b}+m+n+r$$

III.

Wenn einer von der Zahl *c* bis zur Zahl *a* mit eingeschlossen, alle mittlere Zahlen, ihrer natürlichen Reihe nach schreiben wollte, so wird gefragt, wie viel Ziffer hierzu erfordert werden?

8. Meine Absicht ist hier eigentlich, die vorgelegte Frage durch Hülfe der im 3. §. gegebenen Formul zu beantworten, und dieses wird auf folgende Art sehr leicht geschehen können. Wir wollen erstlich suchen, wieviel Ziffern erfordert werden, alle Zahlen der natürlichen Ordnung nach von 1 bis a mit eingeschlossen zu schreiben: und da eben dieser Ausdruck uns auch dienen wird, die Anzahl aller zuschreibenden Ziffern von 1 bis c — 1 mit eingeschlossen anzugeben, so wird uns die Differenz dieser beyden Ausdrücke die ver-

verlangte Anzahl aller Ziffern von c bis a mit eingeschlossen darreichen.

Wenn wir nun in der Formul des 3. §. b = 1 setzen, so wird auch m = 1 und wenn die Zahl a aus n Ziffern besteht, so wird uns diese Formul

$$2\,Q\frac{a+1-1}{1} + Q\frac{a+1-10}{1} + Q\frac{a+1-10^{2}}{1}$$

$$+\,Q\frac{a+1-10^{3}}{1} + \ldots\ldots + Q\frac{a+1-10^{n-1}}{1}$$

die Anzahl aller Ziffern andeuten, welche geschrieben werden müssen, wenn von der Zahl a die Zahl 1 so oft abgezogen werden würde, bis nichts (0) übrig bleibt. Nun sieht man leicht ein, daß hierzu nicht nur alle Zahlen von 1 bts a zu schreiben erfordert werden, sondern man wird auch über das die Zahl 1 so oft schreiben müssen, als Subtractionen zwischen a und 1 enthalten sind. Das ist, unsere eben jetzt gegebene Formul wird die Anzahl aller Ziffern, welche zwischen 1 und a mit eingeschlossen enthalten sind, andeuten, und noch über das a Ziffern: folglich wird diese Anzahl aller Ziffern von 1 bis zur einer Zahl a von n Ziffern mit eingeschlossen seyn

$$2\,Q\frac{a+1-1}{1} + Q\frac{a+1-10}{1} + Q\frac{a+1-10^{2}}{1}$$

$$+\,Q\frac{a+1-10^{3}}{1} + \ldots\ldots + Q\frac{a+1-10^{n-1}}{1} - a$$

da nun jederzeit $Q\frac{M}{1} = M$ ist, so wird eben diese Anzahl also ausgedruckt werden, $(n+1)a+n-1(1+10^{2}+10^{3}+\ldots\ldots+10^{n-1})-a$

oder kürzer $n\,(a+1) - \frac{10^{n}-1.}{10-1}$

 Se-

Setzen wir nun die Zahl c — 1 bestehe aus m Ziffern, so wird auf eine ähnliche Weise die Anzahl aller Ziffern, velche von 1 bis c — 1 mit eingeschlossen enthalten siud, folgender massen ausgedruckt werden $m\,c - \frac{10^m - 1}{10 - 1}$

folglich wird die verlangte Anzahl aller Ziffern, welche erfordert werdeu, um von der Zahl c bis a mit eingeschlossen, alle Zahlen ihrer natürlichen Reihe nach zu schreiben, seyn

$$n\,(a+1) - \frac{10^n - 1}{10 - 1} - m\,c + \frac{10^m - 1}{10 - 1}$$

$$\text{oder } n\,(a+1) - m\,c - \frac{10^n - 10^m}{10 - 1}$$

9. Wenn wir also a = 1 Billion, und folglich n = 13 setzen, so wird die Anzahl aller Ziffern von 1 bis einer Billion mit eingeschlossen seyn $13\,(1 \text{ Billion} + 1) - \frac{10^{13} - 1}{10 - 1}$ das ist

$$13\,000\,000\,000\,013 - 111\,111\,111\,111 \text{ oder } 11\,888\,888\,888\,902$$

und die Anzahl aller Ziffern von 1700 bis 1763 mit eingeschlossen ist

$$4 \times 1764 - \frac{10^4 - 1}{10 - 1} - 4 \times 1700 + \frac{10^4 - 1}{20 - 1}$$

oder $4 \times 1764 - 4 \times 1700$ das ist $4 \times 64 = 256$

und die Anzahl aller Ziffern von 12 bis 1763 mit eingeschlossen wird seyn

$$4 \times 1764 - 2 \times 12 - \frac{10^4 - 10^2}{10 - 1} \text{ das ist } 7056 - 24 - 1100 \text{ oder } 5932$$

§. IV.

Man soll zwey Zahlen finden, eine größere *a* von *n* Ziffern, und eine kleinere *b* von *m* Ziffern, dergestalt, daß wenn die kleinere *b* von der größern *a* so oft abgezogen wird, bis entweder nichts oder eine Zahl die kleiner ist *b* übrig bleibt: die Anzahl aller hierzu erforderlichen Ziffern der größern Zahl *a* gleich sey.

10. Laßt uns erstlich zwey solche Zahlen a und b suchen, da zugleich a durch b theilbar ist, und weil solchergestalt bey dem beständigen subtrahiren zuletzt nichts übrig bleibt, so erfordert unsere Aufgabe, daß da sey

$$2\,m\,Q\frac{a+1-10^{m-1}}{b} + Q\frac{a+1-10^{m}}{b} + Q\frac{a+1+10^{m+1}}{b}$$

$$+\,Q\frac{a+1+10^{m+2}}{b} \;.\;.\;.\;.\;.\; + Q\frac{a+1+10^{n-1}}{b} = a$$

Um nun in dieser Gleichung die nächst größten Quotienten von der Größe a zu befreyen, als welche man hauptsächlich zu suchen hat, so nehme man den V Satz des 6 §. zu Hülf, und setze für

$$Q\frac{a+1-10^{m-1}}{b} = Q\frac{a-(10^{m-1}-1)}{b} = \frac{a}{b} - q\,\frac{10^{m-1}-1}{b}$$

imgleichen $Q\dfrac{a+1-10^{m}}{b} = \dfrac{a}{b} - q\,\dfrac{10^{m}-1}{b}$;

$Q\dfrac{a+1-10^{m+1}}{b} = \dfrac{a}{b} - q\,\dfrac{10^{m+1}-1}{b}$ und so weiter für alle übrige nechst größte Quotienten.

Hierdurch wird nun unsere Gleichung in die folgende verwandelt

$$(m+n)\frac{a}{b} - 2mq\frac{10^{m-1}-1}{b} - q\frac{10^{m}-1}{b} - q\frac{10^{m+1}-1}{b} -$$

$$q\frac{10^{m+2}-1}{b} \;.\;.\;.\;.\;.\; - q\frac{10^{n-1}-1}{b} = a$$

Man setze der Kürze halber

$$2mq\frac{10^{m-1}-1}{b} + q\frac{10^{m}-1}{b} + q\frac{10^{m+1}-1}{b} \;.\;.\;.\;.\; + q\frac{10^{m-1}-1}{b} = R$$

so wird $(m+n)\frac{a}{b} - R\ a =$ folglich $a = \frac{Rb}{m+n-b}$ Wobey fol-gende Stücke zu beobachten sind: erstlich $b < m+n$: *zweytens* Rb *muß* durch $m+n-b$ theilbar seyn: drittens a muß aus n Ziffern, so wie viertens b aus m Ziffern bestehen.

Der ersten und zweyten Bedingung wird am leichtesten ein Gnüge geleistet, wenn $b = m+n-1$ gesetzt wird: es wird aber in diesem Falle

$$R = 2mq\frac{10^{m-1}-1}{m+n-1} + q\frac{10^{m}-1}{m+n-1} + q\frac{10^{m+1}-1}{m+n-1}$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\; Q\frac{10^{m-1}-1}{m+n-1}$$

und die verlangte Zahl $a = Rb$, welche aber aus n Ziffern beste-hen muß. Da nun $b < m+n$, so kann die Zahl b nicht wohl aus mehr als einer Ziffer bestehen, die Zahl a bestünde dann aus 9 oder mehrern Ziffern; wenn wir also keine allzugroße Zahlen für a verlangen, so können wir immer setzen b bestehe aus einem Ziffer,

Das

das ist m wäre = 1; folglich in unserm Fall $b = m + n - 1 = 1 + n - 1 = n$;

$$R = 2q\frac{10^{0} - 1}{n} + q\frac{10 - 1}{n} + q\frac{10^{2} - 1}{n}$$

$$+ q\frac{10^{3} - 1}{n} \cdots\cdots + q\frac{10^{m-1} - 1}{n}$$

oder weil $2q\frac{10^{0} - 1}{n} = 2q\frac{0}{n} = 0$

so wird $R = q\frac{10 - 1}{n} + q\frac{10^{2} - 1}{n} + q\frac{10^{3} - 1}{n} \cdots + q\frac{10^{m-1} - 1}{n}$

und die beyde verlangte Zahlen $a = nR$ und $b = n$; wo also $n < 90$ und a aus n Ziffern besteht.

Laßt uns also für n alle Zahlen von 2 bis 9 setzen, und wir werden folgende Zahlen für a und b erhalten, welche alle der Aufgabe ein Gnügen leisten.

n =	2	3	4	5	6	7	8	9
R =	4	36	275	2218	18515	158727	1388883	12345678
a =	8	108	1100	11090	111090	1111089	11111064	111111102
b =	2	3	4	5	6	7	8	9

Wo alle Zahlen für a aus n Ziffern bestehen, die allerersten 8 ausgenommen, welche aber nichts destoweniger der Aufgabe ein Gnüge leistet. Ueberdem so ist hier allenthalben die kleinere Zahl b der Anzahl der Ziffern der größern a gleich, und diese a hinwiederum durch jene b theilbar.

Wir können nun auch, um der 1ten Bedingung $b < m + n$ ein Gnügen zu leisten, setzen $b = m + n - 2$; oder $b = m + n - 3$,

oder

oder noch $b = m + n - 4$ und so weiter; aber man wird sich leichte überführen können, daß wenn alsdann auch $R\,b$ durch $m + n - b$ theilbar wird, die für a gefundene Zahl allemal aus weniger als n Ziffern, wider die 3te Bedingung bestehen würde.

11. Nun laßt uns solche Zahlen für a und b suchen, daß $a + 1$ durch b theilbar werde. Weil alsdann vermöge des V Satzes (§. 6) $Q\frac{a+1-10^{m-1}}{b} = \frac{a+1}{b} - q\frac{10^{m-1}}{b}$ so wird man folgende Gleichung aufzulösen haben

$$\frac{(n+m)(a+1)}{b} - 2m\,q\frac{10^{m-1}}{b} - q\frac{10^{m}}{b} - q\frac{10^{m+1}}{b} \ldots - q\frac{10^{n-1}}{b} \pm 1 = a$$

Wo nämlich das Zeichen + gilt, wenn b aus mehr als einer Ziffer besteht, und das Zeichen — wird allemal Statt haben, wenn b nur eine Ziffer ist. Nun setze man wiederum der Kürze halber

$$2m\,q\frac{10^{m-1}}{b} + q\frac{10^{m}}{b} + q\frac{10^{m+1}}{b} + q\frac{10^{m+1}}{b} \ldots + q\frac{10^{n-1}}{b} = R;$$

so wird $\frac{(n+m)(a+1)}{b} - R \pm 1 = a$ und folglich der gesuchte Werth von $a = \frac{b(R \mp 1) - n - m}{n + m - b}$ wo nunmehro aber das Zeichen — gilt, wenn b aus mehr als eine Ziffer und +, wenn b nur aus einer Ziffer besteht.

Da nun hier wiederum $b < m + n$ seyn muß, so laßt uns setzen b bestehe nur aus einer Figur, das ist m sey $= 1$; $R = 2\,q\frac{1}{b}$

$$+ q\frac{10}{b} + q\frac{10^{2}}{b} + q\frac{10^{3}}{b} \ldots\ldots + q\frac{10^{n-1}}{b}$$

oder

oder weil $q\frac{1}{b}=0$; $R = q\frac{10}{b} + q\frac{10^2}{b} + q\frac{10^3}{b} + q\frac{10^4}{b} \dots + q\frac{10^{n-1}}{b}$,

da wir dann erhalten $a = \dfrac{b(R+1) - n - 1}{n+1 - b}$

Wobey wohl zu merken, daß 1^lich^ b aus einer und a aus n Ziffern bestehen muß: 2^tens^ $b < n+1$, folglich $n < 10$: 3^tens^ muß $b(R+1) - n - 1$ durch $n+1-b$ theilbar seyn.

Wir wollen also sogleich den Nenner $n+1-b = 1$ setzen, oder es sey wie in dem vorhergehenden §. $b = n$, so wird $R = q\frac{10}{b} + q\frac{10^2}{b} + q\frac{10^3}{b} \dots + q\frac{10^{n-1}}{b}$ und die gesuchte Zahl $a = nR - 1$.

Wenn wir also für n alle Zahlen unter 10 setzen, so werden wir aus dieser Quelle folgende Zahlen für a und b finden, die der Aufgabe in so fern ein Gnüge leisten, als die Zahl a wirklich aus n Ziffern besteht.

Wenn	n =	2	3	4	5	6	7	8	9
	R =	5	36	277	2222	18515	158727	1388888	12345678
so wird	a =	9*	107	1107	11109	111089	1111088	11111103	111111101
	b =	2	3	4	5	6	7	8	9

Wo die Zahlen 9 und 2 nichts destoweniger der Aufgabe kein Genügen leisten, ob gleich hier 9 nicht aus 2 Ziffern, wie es seyn sollte, besteht.

Endlich so würde es uns hier eben so wenig, als in dem vorhergehenden §. helfen, wenn wir nun ferner $b = n + m - 2 = n - 1$; oder $b = n + m - 3 = n - 2$ und so weiter setzen wollten; wir würden dadurch keine Werthe für a und b erlangen, so der Aufgabe ein Genügen leisten könnten, weil die Zahl a allezeit aus weniger als n Ziffern bestehen würde.

12. Nun sey drittens $a + 2$ durch b theilbar, und die Zahlen, welche in dieser Hypothese der Aufgabe ein Genügen leisten, werden folgender Gestalt gefunden. Da wir immer voraus setzen können, daß die Zahl b nicht wohl aus mehr als einer Ziffer bestehen kann, es sey dann, daß die Zahl a sehr groß seyn soll, so laßt uns setzen $m = 1$: und weil der letzte Rest von $\frac{a}{b}$ hier 2 ist, und folglich so, wie die Zahl b, aus einer Ziffer besteht, so wird man folgende Gleichung aufzulösen haben:

$$2Q\frac{a+1-1}{b} + Q\frac{a+1-10}{b} + Q\frac{a+1-10^2}{b} \dots + Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b} - 1 = a$$

oder, weil $Q\frac{a+1-10^m}{b} = Q\frac{a+2-(10^m+1)}{b} = \frac{a+2}{b} - q\frac{10^m+1}{b}$

und $q\frac{2}{b} = 0$ (wenn nämlich $b > 2$) $\frac{(n+1)(a+2)}{b} . * - q\frac{10+1}{b}$

$$- q\frac{10^2+1}{b} - q\frac{10^3+1}{b} \dots\dots - q\frac{10^{n-1}+1}{b} - 1 = a$$

Es sey wiederum $q\frac{10+1}{b} + q\frac{10^2+1}{b} + q\frac{10^3+1}{b}$

$+ q\frac{10^4+1}{b} \dots q\frac{10^{n-1}+1}{b} = R$: so wird $\frac{(n+1)(a+2)}{b} - R - 1 = a$

und folglich die gesuchte Zahl $a = \frac{b(R+1) - 2n - 2.}{n+1 - b}$

Damit nun der Zehler $b(R+1) - 2n - 2$ gewiß durch den Nenner $n + 1 - b$ theilbar werde, und dabey die Zahl a aus n Ziffern bestehe, so laßt uns, wie bey den vorhergehenden Hypothesen, setzen: $n + 1 - b = 1$ oder $b = n$: und wir werden bekommen:

$R =$

$$R = q\frac{10+1}{n} + q\frac{10^{2}+1}{n} + q\frac{10^{3}+1}{n} \;\ldots\ldots + q\frac{10^{n-1}+1}{n};$$

$a = n\,(R-1) - 2$ und $b = n$; folglich

Wenn	$n =$	3	5	6	7	8	9
so wird	$R =$	36	2222	18515	158728	1388888	12345678
und	$a =$	103	11103	111082	1111087	11111094	111111091
	$b =$	3	5	6	7	8	9

13. Die Zahl b bestehe noch immer aus einer einzigen Ziffer, oder es sey $m = 1$: Man setze aber jetzo auf eine allgemeinere Art daß $a + f$ durch b theilbar sey. Da nun der letzte Rest f in diesem Fall auch nur aus einer einzigen Ziffer bestehen kann, so wird man folgender Gleichung ein Gnügen zu leisten haben:

$$2\,Q\frac{a+f-10^{0}-f+1}{b} + Q\frac{a+f-10-f+1}{b}$$

$$+\,Q\frac{a+f-10^{2}-f+1}{b} \;\ldots\ldots + Q\frac{a+f-10^{n-1}-f+1}{b} - 1 = a$$

oder weil $Q\dfrac{a+f-10^{m}-f+1}{b} = \dfrac{a+f}{b} - q\dfrac{10^{m}+f-1}{b}$

$$\frac{(n+1)\,(a+f)}{b} - 2q\frac{f}{b} - q\frac{10+f-1}{b} - q\frac{10^{2}+f-1}{b}$$

$$-\,q\frac{10^{3}+f-1}{b} \;\ldots\ldots - q\frac{10^{n-1}+f-1}{b} - 1 = a.$$

Man setze nun der Kürze willen $2\,q\frac{f}{b} + q\frac{10+f-1}{b}$

$$+\,q\frac{10^{2}+f-1}{b}\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;+\,q\frac{10^{n-1}+f-1}{b} = R$$

so wird $a = \frac{(n+1)(a+f)}{b} - R - 1 = a$ folglich $a = \frac{b(R+1)-nf-f}{n+1-b}$

Wo wiederum a aus n Ziffern bestehen und $b(R+1)-nf-f$ durch $n+1-b$ theilbar seyn muß. Nun setze man zu diesem Ende wie in den vorhergehenden §.§. $b=n$: so wird $R = 2\,q\frac{f}{b} + q\frac{10+f-1}{b}$

$$+\,q\frac{10^{2}+f-1}{b} + q\frac{10^{3}+f-1}{b}\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;+\,q\frac{10^{n-1}+f-1}{b}$$

oder weil f allezeit kleiner als b, und $q\frac{f}{b} = 0$

$$R = q\frac{10+f-1}{b} + q\frac{10^{2}+f-1}{b} + q\frac{10^{3}+f-1}{b}\;\cdot\cdot\cdot\cdot\;q\frac{10^{n-1}+f-1}{b}$$

und die verlangte beyde Zahlen a und b werden seyn
$a = n(R+1) - nf - f = n(R+1-f) - f$ und $b = n$
wo a aus n Ziffern, b aber nur aus einer Ziffer bestehen muß.

14. Wenn aber b aus mehr als aus einer Ziffer besteht, und $a+f$ durch b theilbar ist, so wird man vor allen Dingen auf die Anzahl der Ziffern des letzten Rests f Achtung zu geben haben, ob derselbe nämlich aus m oder aus weniger als m, z. E. aus n Ziffern bestehe. Im ersten Fall wird man dieser Gleichung

$$2mQ\frac{a+f-10^{m-1}-f+1}{b}+Q\frac{a+f-10^{m}-f+1}{b}$$

$$+Q\frac{a+f-10^{m+1}-f+1}{b}\ldots\ldots+Q\frac{a+f-10^{n-1}-f+1}{b}-m=a$$

und im andern Fall folgender Gleichung

$$2mQ\frac{a+f-10^{m-1}-f+1}{b}+Q\frac{a+f-10^{m}-f+1}{b}$$

$$+Q\frac{a+f-10^{m+1}-f+1}{b}\ldots\ldots+Q\frac{a+f-10^{n-1}-f+1}{b}+n=a$$

ein Genügen leisten müssen.

Wir wollen diese beyden Gleichungen zusammen durch die folgende vorstellen:

$$2mQ\frac{a+f-10^{m-1}-f+1}{b}+Q\frac{a+f-10^{m}-f+1}{b}$$

$$+Q\frac{a+f-10^{m+1}-f+1}{b}\ldots\ldots+Q\frac{a+f-10^{n-1}-f+1}{b}\left\{\begin{matrix}-m\\+\mu\end{matrix}\right\}=a$$

oder weil $a+f$ durch b theilbar und $Q\frac{a+f-10^{m}-f+1}{b}=\frac{a+f}{b}$

$-q\frac{10^{m}+f-1}{b}$ so wird $\frac{(n+m)(a+f)}{b}-2mq\frac{10^{m-1}+f-1}{b}$

$$-q\frac{10^{m}+f-1}{b}-q\frac{10^{m+1}+f-1}{b}\ldots\ldots q\frac{10^{n-1}+f-1}{b}\left\{\begin{matrix}-m\\+\mu\end{matrix}\right\}=a$$

Man setze nun $2mq\frac{10^{m-1}+f-1}{b} + q\frac{10^{m}+f-1}{b}$

$+ q\frac{10^{m+1}+f-1}{b} \ \cdots\cdots + q\frac{10^{n-1}+f-1}{b} = R$

so wird $a = \frac{(n+m)(a+f)}{b} - R\begin{bmatrix}-m\\+\mu\end{bmatrix}$ folglich die verlangte

Zahl $a = \frac{\begin{Bmatrix}R+m\\R-\mu\end{Bmatrix} b-(n+m)f}{n+m-b}$ welche mit der Zahl b so nach Belieben genommen worden, der Aufgabe ein völliges Genügen leisten müssen.

Wo aber a aus n Ziffern bestehen, und $\begin{Bmatrix}R+m\\R-\mu\end{Bmatrix} b-(n+m)f$ durch $n+m-b$ theilbar seyn, und noch über dem $b < n+m$ seyn muß, so wird, wie aus dem vorhergehenden erhellet, erfordert, daß man setze $n+m-b = 1$ oder $b = n+m-1$

Es ist also $R = 2mq\frac{10^{m-1}+f-1}{n+m-1} + q\frac{10^{m}+f-1}{n+m-1}$

$+ q\frac{10^{m+1}+f-1}{n+m-1} \ \cdots\cdots + q\frac{10^{n-1}+f-1}{n+m-1}$

und die beyden gesuchten Zahlen $a = \begin{bmatrix}R+m\\R-\mu\end{bmatrix}(n+m-1)(n+m)f$

und $b = n+m-1$. Wo der Factor $R+m$ gilt, wenn der letzte Rest f aus m Ziffern, und der Factor $R-\mu$, wenn der letzte Rest f aus μ, das ist, aus weniger als m Ziffern besteht.

Endlich so sind bey dieser letzten Auflösung, welche mit allem Recht eine allgemeine genannt werden kann, noch folgende Stücke, die Wahl der Zahlen m, n, f und μ betreffend, zu beobachten.

Erstlich weil $b = n + m - 1$ aus m Ziffern bestehen muß, so wird, wenn wir die Anzahl der Ziffern der Zahl b zu 2 annehmen, n, das ist, die Anzahl der Ziffern m Zahl a zum wenigsten q seyn: imgleichen wenn wir setzen wollen, daß die Zahl b aus 3 Ziffern bestehen soll, so muß die Zahl a nothwendig aus 98 oder mehrern Ziffern bestehen, und so weiter. Oder kürzer, wenn wir annehmen, $m = 2$: so muß $n > 8$, und wenn wir setzen $m = 3$, so muß $n > 97$, und wenn $m = 4$, so muß $n > 997$, also überhaupt, wenn wir setzen daß die Zahl b aus m Ziffern bestehet, so muß n > als $10^{m-1} + 1 - m$, oder die Zahl a muß alsdann nothwendiger Weise aus mehr als $10^{m-1} + 1 - m$ Ziffern bestehen.

Zweytens muß f < seyn als b: und der Buchstaben μ deutet uns die Anzahl der Ziffern dieses letzten Rest f an: wenn aber $\mu = m$ so wird $a = (R + m)(a + m - 1) - (n + m) f$ und wenn $\mu < m$ so ist $a = (R - \mu)(n + m - 1)(n + m) f$.

Ich will diese Auflösung mit einem Exempel beschließen.

Exempel: Es sey $m = 2$, und weil alsdann $n > 8$, so laßt uns setzen $n = 9$: ferner so sey $f = 5$ und also $\mu = 1$: folglich, weil in diesem Fall $\mu < m$, so werden die gesuchten Zahlen seyn $a = (R - \mu)(n + m - 1) - (n + m) f$, und $b = n + m - 1 = 10$

Es ist aber $R = 4\, q\frac{14}{10} + q\frac{104}{10} + q\frac{1004}{10} \ldots\ldots q\frac{100000004}{10}$

folglich $R = 1111114$; $R - \mu = 1111113$: und die beyden Zahlen $a = 111\,111\,075$, und $b = 10$: welche der Aufgabe ein völliges Genügen leisten.

15. Ich

15. Ich kann nicht umhin noch eine besondere Auflösung der vorgelegten Aufgabe beyzufügen, welche, ob sie gleich nicht so allgemein als die kurz vorhergehende ist, dennoch mit leichter Mühe unendlich viel Zahlen für a und b giebt, so der Aufgabe ein Gnügen leisten. Es sey $m = 1$, oder die Zahl b bestehe allezeit nur aus einer Ziffer, die Zahl a aber aus n Ziffern. Nun wird entweder a durch b theilbar seyn, oder nicht.

I. Es sey a durch b nicht theilbar. Wenn man sich demnach vorstellt, daß die Zahl b von der Zahl a so oft abgezogen wird, bis eine Zahl, die kleiner ist als b, übrig bleibt, so erhellet aus dem 4. §. daß die Anzahl aller zu schreibenden Ziffern, welche wir der Kürze halber durch den Buchstaben N andeuten wollen, seyn werde

$$N = 2Q\frac{a}{b} + Q\frac{a+1-10}{b} + Q\frac{a+1-10^2}{b}$$

$$+ Q\frac{a+1-10^3}{b} \;.\;.\;.\;.\;.\; + Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b} - 1$$

Man setze nun, daß $a + ib$ auch noch eine Zahl von n Ziffern sey, und die Anzahl aller zu schreibenden Ziffern, (wenn nämlich b von $a + ib$ so oft abgezogen werden soll, bis eine Zahl die kleiner ist als b übrig bleibt,) wird auf eine ähnliche Weise also ausgedrückt werden

$$2Q\frac{a+ib}{b} + Q\frac{a+1-10+ib}{b} + Q\frac{a+1-10^2+ib}{b}$$

$$+ Q\frac{a+1-10^3+ib}{b} \;.\;.\;.\;.\;.\; + Q\frac{a+1-10^{n-1}+ib}{b} - R$$

Es

Es ist aber vermöge des im 6. §. angeführten III Satzes

$$Q\frac{a+ib}{b} = i + Q\frac{a}{b}\,;\; Q\frac{a+1-10+ib}{b} = i + Q\frac{a+1-10}{b}$$ und so weiter, folglich wird diese letztere Anzahl aller zu schreibenden Ziffern seyn

$$(n+1)\,i + 2Q\frac{a}{b} + Q\frac{a+1-10}{b} + Q\frac{a+1-10^{2}}{b}$$

$$+ Q\frac{a+1-10^{3}}{b} \;\ldots\ldots\; + Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b} - R$$

oder kürzer $(n+1)\,i + N$.

Damit nun solche Zahlen gefunden werden, welche der Aufgabe ein Genügen leisten, so darf für i nur ein solcher Werth gesucht werden, daß da sey

$(n+1)\,i + N = a + ib$: daraus man dann erhält $i = \frac{a-N}{n+1-b}$

Man nehme also 2 Zahlen a von n Ziffern und b von einer Ziffer nach Belieben an: man suche hernach die Anzahl aller zu schreibenden Ziffern in Ansehung eben dieser Zahlen a und b, oder man berechne den Werth von N, so da ist

$$N = 2Q\frac{a}{b} + Q\frac{a+1-10}{b} + Q\frac{a+1-10^{2}}{b}$$

$$+ Q\frac{a+1-10^{3}}{b} \;\ldots\ldots\; Q\frac{a+1-10^{n-1}}{b} - R$$

darauf werde gesucht eine Zahl i welche ist $i = \frac{a-N}{n+1-b}$; und dann werden die verlangten Zahlen, welche der Aufgabe ein Genügen leisten, seyn $a + ib$ und b.

Hierbey aber wird nothwendiger Weise erfordert: erstlich, daß i eine ganze Zahl sey; zweytens, daß a + i b aus n Ziffern (so wie a) bestehe; drittens, daß a durch b nicht theilbar sey; und endlich, daß die Zahl b nur aus einer Ziffer bestehe.

Um nun der ersten Bedingniß am leichtesten ein Genügen zu leisten, so sey beständig b = n also daß da sey

$$N = 2Q\frac{a}{a} + Q\frac{a+1-10}{n} + Q\frac{a+1-10^2}{n}$$

$$+ Q\frac{a+1-10^3}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; + Q\frac{a+1-10^{n-1}}{n} \quad - R$$

$i = a - N$ und die beyden verlangten Zahlen $a + n i$ oder $(n+1)\,a - n\,N$ und n.

II. Wenn aber a durch b theilbar ist, so ist aus dem vorhergehenden offenbar, daß man für N nur zu schreiben habe

$$N = 2Q\frac{a}{n} + Q\frac{a+1-10}{n} + Q\frac{a+1-10^2}{n}$$

$$Q\frac{a+1-10^3}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; + Q\frac{a+1-10^{n-1}}{n}$$

und alsdann wird man wie kurz vorher erhalten $i = a - N$ und die beyden verlangten Zahlen $a + n i$ oder $(n+1)\,a - n\,N$ und n.

Einige Exempel dieser letzten Auflösung sollen diese Abhandlung beschließen.

Exempel.

I. Es sey $a = 100$; $n = 3$; so wird

$N = 2Q\frac{100}{3} + Q\frac{91}{3} + Q\frac{1}{3} - R = 100 - R = 99; i = 100 - 99 = R; ni = 3$ und die gesuchte Zahlen 103 und 3

Es sey $a=200$; $n=3$; so wird $N=232-R=231$; $i=-31$; $ni=-93$, und folglich die beyden verlangten Zahlen 107 und 3 seyn;

Es sey $a=120$; $n=3$, und weil hier a durch b theilbar ist, so wird nach der letzten Formul $N=124$; folglich $i=-4$; $ni=-12$ und die beyden gesuchten Zahlen sind 108 und 3; welche drey paar Zahlen wir auch schon in den 10ten, 11ten und 12ten § gefunden haben.

Ueberhaupt, so lange $n=3$ ist, und für a auch alle mögliche Zahlen von 3 Ziffern gesetzt werden, so wird man dannoch nicht mehr als 3 paar Zahlen, nämlich 103 und 3; 107 und 3; 108 und 3 erhalten, welche der Aufgabe ein Genügen leisten. Dieses ist schon aus der vorhergehenden Auflösung deutlich, und wird durch folgende Tafel noch weiter bekräftiget

Wenn	a =	200	201	202	203	204	205	206	207	208
so wird	N =	231	232	235	235	236	239	239	248	243
und	i =	−31	−31	−33	−32	−32	−32	−34	−33	−35
folglich	a+in =	107	108	103	107	108	103	107	108	103
und	n =	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Exempel.

II. Nun sey $n=4$; und man schreibe für a lauter Zahlen von 4 Ziffern, so wird man viererley paar Zahlen erhalten, welche der Aufgabe ein Genügen leisten.

Man setze	a =	1000	1001	1002	1003	1004
so wird	N =	975	976	977	977	980
und	i =	25	25	25	26	24
folglich	a+in =	1100	1101	1102	1107	1100
und	n =	4	4	4	3	4

III. Es sey n 7, und folglich soll die Zahl a aus 7 Ziffern bestehen: und wir werden hier auch sieben paar Zahlen erhalten, welche der Aufgabe ein Genügen leisten. Nämlich

Wenn a =	so wird N =	i =	und die beyden gesuchten Zahlen
1111111	1111115	— 4	1111083 und 7
1111112	1111116	— 4	1111084 und 7
1111113	1111117	— 4	1111085 und 7
1111114	1111118	— 4	1111086 und 7
1111115	1111119	— 4	1111087 und 7
1111116	1111120	— 4	1111088 und 7
1111117	1111122	— 4	1111089 und 7
1111118	1111123	— 5	1111083 und 7
1111119	1111124	— 5	1111084 und 7

Alb-