Albrecht Eulers
Auflösung
der
Aufgabe

Aus der gegebenen Höhe des Kegels die Figur seiner Grundfläche zu finden, so daß der körperliche Innhalt desselben unter allen andern von gleicher Oberfläche der größte sey.

Auflösung einer geometrischen Aufgabe.

Die Aufgabe welche ich mir hier aufzulösen vorgenommen habe, lautet folgendergestalt:

Die Höhe eines Kegels ist gegeben: man soll die Figur seiner Grundfläche finden, so daß der körperliche Innhalt desselben, unter allen andern, die mit ihm gleiche Oberflächen haben, der größte sey?

I.

Es sey a die gegebene Höhe des Kegels; man ziehe aus der Spitze desselben O auf die Grundfläche CAB die Perpendicularlinie CO, welche also = a seyn wird. Man suche nun die Figur dieser Grundfläche, so daß der Kegel eine gegebene Oberfläche erhalte, und da dieses auf unendlich viel Arten geschehen kann, so soll unter allen diesen Grundflächen diejenige bestimmt werden, welche den größten körperlichen Innhalt giebt. Man kann auch diese Aufgabe also umkehren, daß unter allen Grundflächen, welche Kegel von einem gegebenen körperlichen Innhalt geben, diejenige verlangt werde, so der kleinesten Oberfläche zukömmt. Die Aufgabe aber mag auf diese oder jene Art vorgetragen werden, so bleibt die Auflösung dennoch die nämliche. Eben diejenige Gleichheit; welche uns die Natur einer Grundfläche ausdruckt, so unter allen Kegeln von gleicher Oberfläche demjenigen zukömmt, der den größten kör-

körperlichen Innhalt hat, wird auch zugleich diejenige Grundfläche anzeigen, welche unter allen Kegeln einerley Innhalts demjenigen zukömmt, dessen Oberfläche am kleinsten ist.

Ob nun gleich die Lehre von den Maximis und Minimis auf das vollständigste ausgearbeitet worden, so daß die gegenwärtige Aufgabe von keiner Schwierigkeit zu seyn mehr scheinet, so wird dennoch ein jeder der die Auflösung derselben unternehmen wollte, so große Hindernisse finden, daß er, um dieselben aus dem Wege zu räumen, die feinsten Kunstgriffe der Analyse zu Hülfe zu nehmen gezwungen wird. Ich glaube also nicht eine vergebliche Arbeit unternommen zu haben, wenn ich hiermit die Auflösung der vorgelegten Aufgabe in so fern zu Ende zu bringen trachte, als es theils die Natur derselben Aufgabe, theils auch meine Kräfte, erlauben wollen. Schwere Aufgaben pflegen niemals ohne Nutzen abgehandelt zu werden, und man verfällt gemeiniglich durch die Auflösung derselben auf Dinge, so zur Erweiterung der Analyse nicht wenig beytragen. Unser Verstand wird dabey geschärft, und je länger je mehr tüchtig gemacht, auch schwerere Untersuchungen unternehmen zu können.

2. Da hier also die Figur der Grundfläche CAB bestimmet werden soll, so lasset uns eine gewisse gerade Linie CA, so durch den Punct C gezogen worden, für die Axe annehmen, und auf dieselbe die Applicaten PM senkelrecht ziehen. Man nenne die Coordinaten der Grundfläche $OP = x$; $PM = y$ und setze $dy = p\,dx$, also daß die ganze Auflösung darinnen bestehe, daß eine Verhältniß oder Gleichheit zwischen x und y gefunden werde. Durch die Coordinaten wird man also zu erst sowohl den körperlichen Innhalt des Kegels, als auch seine Oberfläche bestimmen müssen. Und ob gleich dieselben aus der Natur der kegelförmigen Körper leicht hergeleitet werden kann, so wird es hier dannoch besser seyn, sich der

allgemeinen Formuln, welche nämlich allen Körpern gemein sind, zu bedienen: damit man hernach die Rechnung desto leichter, und auf eine ähnliche Art, auf die andere Gattungen der Körper anwenden könne.

3. Laßt uns zu diesem Ende erstlich eine Gleichheit suchen, welche die Natur eines Kegels auf die gewöhnliche Art durch drey auf einander senkelrechte Coordinaten ausdrückt. Nachdem also aus der Spitze O eine grade Linie MO gezogen worden, welche gänzlich auf der Oberfläche des Kegels liegt, so ziehe man aus einem unbestimmten Punct Z in derselben erstlich die Linie ZY, welche auf der Fläche OCA senkelrecht auffällt, und dann wiederum von dem Puncte X die auf die Axe des Kegels OC senkelrechte Linie XY; hernach nehme man diese drey geraden Linien OX, XY und ZY für die Coordinaten an, und setze $OX = X$; $XY = Y$ und $YZ = Z$. Da nun wegen der Aehnlichkeit der drey Ecke OCP und OXY, imgleichen OPM und OYZ sich verhält $a : X = x : Y = y : Z$ so wird $Y = \frac{xX}{a}$ und $Z = \frac{yX}{a}$: und folglich, wenn diese Formuln differentiiret werden und für dy pdx geschrieben wird, so erhält man $dY = \frac{xdX + Xdx}{a}$ und $dZ = \frac{ydX + pXdx.}{a}$

4. Nun wissen wir durch die allgemeinen Formuln, welche zur Natur eines jeden Körpers überhaupt gehören, daß, wenn $dZ = PdX + QdY$ gesetzt wird, der körperliche Innhalt desselben seyn werde $= \int\int ZdXdY$ und die Oberfläche $= \int\int dXdY \sqrt{(1 + PP + QQ)}$. Wenn wir also diese Ausdrücke auf den gegenwärtigen Fall anwenden wollen, so müssen wir zuerst die Werthe von P und Q suchen. Wir müssen also aus denen für dY und dZ gefundenen Formuln das Differentiale dx heraus bringen, dadurch wir dann erlangen werden $pdY - dZ = \frac{(px - y)dX}{a}$

also daß $dZ = pdY + \frac{(y-px)\,dX}{a}$ und folglich $P = \frac{y-px}{a}$; $Q = p$ und hieraus wiederum $\surd(1 + PP + QQ) = \frac{1}{a}\surd(aa(1+pp) + (y-px)^2)$

5. Wir werden also folgende Ausdrücke, welche zu unserm Vorhaben eingerichtet sind, erlangen. Nämlich der körperliche Innhalt des Kegels $= \frac{1}{aa}\iint yXdX\,(xdX + Xdx)$ und die Oberfläche desselben $= \frac{1}{aa}\iint dX\,(xdX + Xdx)\,\surd(aa(1+pp) + (y-px)^2)$ Diese gedoppelte Differentialformuln müssen zweymal nacheinander integriret werden, indem man nämlich die beyde Größen x und X, welche darinn enthalten sind, eine nach der andern, als veränderlich betrachtet. Denn hier werden y und p als zwey gegebene Functionen von x angesehen, weil bey der gegenwärtigen Untersuchung die Grundfläche als bekannt angenommen wird, also daß unsere Formuln eigentlich nur die zwey veränderlichen Größen x und X in sich enthalten, welche sonsten miteinander nicht die geringste Gemeinschaft haben.

6. Es muß aber diese zweyfache Integration beyder Formuln also verrichtet werden, daß erstlich nur eine der beyden veränderlichen Größen x und X als veränderlich betrachtet, und die Integration darauf bis auf den ganzen Körper ausgedehnet, hernach aber auch die andere der beyden Größen als veränderlich angenommen, und die Integration auf eine ähnliche Art vollzogen werde. Es ist aber einerley, mit welcher veränderlichen Größe wir die Integration anfangen, da es allezeit nothwendig ist, daß ein und eben derselbe Werth heraus komme. Damit man dieses deutlich einsehe, sintemal dergleichen Rechnungen selten vorkommen, so wollen wir uns hier

hier beyder Arten nacheinander bedienen, also daß wegen ihrer Uebereinstimmung kein Zweifel mehr übrig bleiben könne.

7. Es sey also bey der ersteren Integration nur allein x mit seinen Functionen y und p veränderlich, und unsere Formuln werden folgendermaßen können angedeutet werden. Nämlich

der körperliche Innhalt $= \frac{1}{aa} \int d\mathrm{X} \int dx \left(\frac{xyXdX}{dx} + y\mathrm{XX}\right)$

die Oberfläche $= \frac{1}{aa} \int d\mathrm{X} \int dx \left(\frac{xdX}{dx} + \mathrm{X}\right) \sqrt{(aa(1+pp) + (y-px)^2)}$

da nun die hinteren Theile dieser Formuln zuerst integrirt werden müssen, und dabey X als eine beständige Größe betrachtet wird, folglich $d\mathrm{X} = 0$, so werden dieselben folgender Gestalten erhalten

$$\int y\mathrm{XX}dx \text{ und } \int \mathrm{X}dx \sqrt{(aa(1+pp) + (y-px)^2)}$$

da ferner diese Integration durch die ganze Grundfläche ausgebreitet worden, so laßt uns setzen, weil X eine beständige Größe ist, man hätte erhalten

$$\int ydx = \mathrm{A} \text{ und } \int dx \sqrt{(aa(1+pp) + (y-px)^2)} = \mathrm{B}$$

denn die Werthe dieser Formuln werden gewiß beständig seyn.

8. Wir werden also hieraus bekommen: erstlich den körperlichen Raum $= \frac{A}{aa} \int \mathrm{XX}d\mathrm{X}$, und zweytens die Oberfläche $= \frac{B}{aa} \int \mathrm{X}d\mathrm{X}$ da nun nach der zweyten Integration die veränderliche Größe X auf der Axe von der Spitze O, wo $\mathrm{X} = 0$ ist, angerechnet, bis zum andern Ende derselben C, wo $\mathrm{X} = a$ wird, ausgedehnt werden muß, so wird

$\int \mathrm{XX}d\mathrm{X} = \frac{1}{3}\mathrm{X}^3 = \frac{1}{3} a^3$ und $\int \mathrm{X}d\mathrm{X} = \frac{1}{2} \mathrm{X}^2 = \frac{1}{2} a^2$ folglich der körperliche Raum $= \frac{1}{3} \mathrm{A}a$ und die Oberfläche des Kegels $= \frac{1}{2}$ B welche also beyde durch die Figur der Grundfläche dergestalt bestimmt werden, daß da sey der körperliche Raum $= \frac{1}{3}\, a\int y\,dx$ und die

$$\text{Oberfläche} = \frac{1}{2} \int dx \sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$$

wenn nämlich diese Integralien durch die ganze Grundfläche ausgebreitet werden.

9. Noch ehe ich weiter gehe, so wird es dienlich seyn eine sonderbare Beschaffenheit und Eigenschaft dieser Rechnung genauer zu untersuchen. Wir sehen nämlich bey unsren gedoppelten Integralformuln $\iint y X (x dX^2 + X dx dX)$ und $(\iint x dX^2 + X dx dX) \sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$ daß diejenigen Glieder, welche mit dem Quadrat des Differentialis dX^2 verbunden sind, gar nicht in Betrachtung gekommen sind, und daß eben diejenigen Werthe, welche wir eben erhalten haben, auch entsprungen würden seyn, wenn wir gleich anfänglich diese Glieder weggelassen, und die Formuln folgendergestalt geändert hätten. Nämlich daß da wäre der körperliche Innhalt des Kegels $= \frac{1}{aa} \iint y XX dx dX$ und die Oberfläche desselben $= \frac{1}{aa} \iint X dx dX \sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$ Hier stellt sich also unvermuthet eine neue Art dar, dergleichen gedoppelte Integralformuln weit leichter auszudrücken.

10. Die Ursache aber, warum in solchen Formuln allezeit diejenigen Glieder, welche durch das Quadrat seines Differentialis vermehret sind, weggeworfen werden können, ist nicht schwer zu ergründen. Denn da die Entwickelung derselben Formuln eine zweyfache Integration erfordert, deren die eine nur allein durch die Veränderlichkeit der Größe x, die andere aber nur allein durch die

Veränderlichkeit der zweyten Größe X verrichtet wird: so ist offenbar, daß die erste Integration nur in sofern die Glieder mit dX, und die zweyte Integration, in sofern dieselben mit dx vermehret sind, statt findet: folglich wird man die gedoppelte Integration nur alsdann unternehmen können, wenn alle Glieder der Formul mit beyden Differentialien dX und dx zugleich, das ist, mit ihrem Produckt $dX.\,dx$ vermehret sind.

Wenn demnach einige Glieder vorkommen, welche nur mit einem der beyden Differentialien mit sich selber vermehret, das ist, entweder mit dX^2 oder dx^2 verbunden sind, so sind dieselben zu einer dergleichen gedoppelten Integration völlig untüchtig. Denn ob sie gleich eine Integration zulassen, welche nämlich durch dasjenige Differentiale verrichtet wird, so dieselben Glieder gedoppelt in sich enthält, so kann dennoch die zweyte Integration nicht statt haben; diese Glieder müssen also als nichts bedeutende angesehen werden, so daß man dieselben gänzlich aus der Rechnung auslassen kann.

11. Ueberhaupt, wenn eine dergleichen gedoppelte Integralformul vorkömmt, als $\int\!\!\int(PdX^2 + QdxdX + RdX^2)$, welche zwey veränderliche Größen X und x in sich enthält, und in der ersteren Integration nur die eine veränderliche Größe X, in der letztern aber nur die andere x als veränderlich betrachtet werden soll, so kann man sogleich diejenigen Glieder derselben PdX^2 und Rdx^2, welche mit dem Quadrat der Differentialien verbunden sind, weglassen, also daß nur diese Formul $\int\!\!\int QdxdX$ zu integriren übrig bleibt, und welche man eben sowohl durch $\int dx\int QdX$ als durch $\int dX\int Qdx$ andeuten kann. Man wird sich nämlich des ersten Ausdrucks bedienen müssen, wenn zuerst nur allein X, hernach aber x als veränderlich betrachtet wird;

der zweyte Ausdruck aber wird statt finden, wenn die beyden Integrationen nach einer umgekehrten Ordnung verrichtet werden.

12. Nachdem nun dieser allgemeine Lehrsatz bewiesen worden, so lasset uns unsere Formuln, welche wir schon oben §. 9. nach derjenigen Ordnung entwickelt haben, nach welcher der körperliche

Raum $= \frac{1}{aa} \int dX \int y XX dx$

und die Oberfläche $= \frac{1}{aa} \int dX \int X dx \surd(aa(1+pp)+(y-px)^2)$ ist, anjetzo nach der verkehrten Ordnung der beyden veränderlichen Größen x und X aus einander setzen, so daß wir nun den körperlichen Raum

$= \frac{1}{a} \int dx \int y XX dX$ und die Oberfläche

$= \frac{1}{aa} \int dx \int X dX \surd(aa(1+pp)+(y-px)^2)$ erhalten.

Es ist eben das Integrale der Formul $\int y XX dX$, weil hier y, in sofern dieselbe eine Function von x ist, als beständig betrachtet wird $= \frac{1}{3} y X^3$ und folglich wenn dieses Integrale durch die ganze Höhe a ausgebreitet wird, so ist $\int y XX dX = \frac{1}{3} a^3 y$. Auf eine ähnliche Art wird in der zweyten Formul, weil bey der ersten Integration $\surd(aa(1+pp)+(y-px)^2)$ einerley bleibt, oder beständig ist, seyn

$$\int X dX \surd(aa(1+pp)+(y-px)^2) = \frac{1}{2} XX \surd(aa(1+pp)+(y-px)^2)$$
$$= \frac{1}{2} aa \surd(aa(1+pp)+(y-px)^2)$$

13. Wir erhalten also durch die erste Integration den körperlichen Raum des Kegels $= \frac{1}{3} a \int y dx$

und desselben Oberfläche $= \frac{1}{2} \int dx \surd(aa(1+pp)+(y-px)^2)$

Wel-

Welche jetzt nur noch einmal integriret werden müssen, und zwar also, daß die Größe x mit ihren Functionen y und p veränderlich genommen werden. Die Integration dieser Formuln geht nämlich nur allein auf die Grundfläche des Kegels, und muß auch auf dieselbe ganz ausgebreitet werden. Und auf diese Weise werden wir den körperlichen Raum sowohl als auch die Oberfläche vollkommen so heraus bringen, als wir dieselben schon oben §. 8. durch die erste Art gefunden haben. Man sieht auch zugleich aus dieser Uebereinstimmung die Nothwendigkeit ab, warum bey dergleichen gedoppelten Integralformuln beyde Gattungen, dieselben zu integriren, beständig auf eine und eben dieselbe Werthe leiten müssen.

14. Nunmehro ist also gegenwärtige Frage nur allein auf die Figur der Grundfläche gebracht worden, und dieselbe kann derohalben in diesen Worten eingekleidet werden, daß **unter allen Figuren, oder unter allen krummen Linien AMB, welche einen und eben denselben Werth für die Formul $\int y dx$ geben, das ist, welche eine gleich große Fläche einschließen, diejenige bestimmet werde, in welcher der Werth dieser andern Formul $\int dx \surd (aa(1+pp)+(y-px)^2)$ ein Minimum oder am kleinsten sey.** Um nun diese Frage aufzulösen, so nehme ich für bewiesen an, daß erstlich der Differentialwerth, oder wie man dieselben sonsten zu nennen pfleget, die Variationen der beyden gezeigten Formuln gesucht, und denn zweytens die Variation der erstern einem Multiplo der Variation des andern gleich gesetzt werden muß.

Wenn wir also diese Differentialwerthe oder Variationen durch den Buchstaben δ der der Formul vorgesetzt wird, andeuten, so werden wir für die verlangte Figur der Grundfläche diese Gleichheit erhalten

$$\alpha \delta \int y dx = \delta \int dx \surd (a^2(1+pp)+(y-px)^2)$$

15. Da

15. Da nun die ganze Auflösung auf der einzigen Bestimmung dieser Variationen beruhet, so laßt uns aus der Lehre der Maximorum und Minimorum diese allgemeine Formul $\int Zdx$ betrachten, in welcher Z eine jegliche Function beydes der veränderlichen Größen x und y als auch ihrer Differentialien, oder, wenn $dy = pdx$ gesetzt wird, der Größe p andeutet: also daß diese Form $\int Zdx$ unsere beyde Formuln in sich begreift. Weil demnach Z eine Function der drey endlichen Größen x, y und p ist, so wird das Differentiale derselben folgende Gestalt haben $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$, und wo die Größen M, N und P in einem jeglichen Fall leicht erhalten werden. Wenn nun dieselben gefunden worden, so ist aus der Lehre der Maximorum und Minimorum bekannt, daß die Variation der Formul $\int Zdx$, oder sein Differentialwerth sich verhalte wie $N - \frac{dP}{dx}$

16. Dieses voraus gesetzt, so wird für unsre erstere Formul $\int ydx$ (weil hier $Z = y$) $M = 0$; $N = 1$ und $P = 0$ seyn; folglich der Differentialwerth derselben, wie 1.

Für unsere zweyte Formul $\int dx \sqrt{(aa(1+pp) + (y-px)^2)}$ aber weil hier $Z = \sqrt{(aa(1+pp) + (y-px)^2)}$ so wird

$$M = \frac{p(y-px)}{Z}; \quad N = \frac{y-px}{Z} \text{ und } P = \frac{aap - x(y-px)}{Z}$$

Wenn wir also der Kürze halben diese Buchstaben Z, M, N, P anstatt der gefundenen und weitläufigen Werthe derselben beybehalten, so wird der Differentialwerth unsern zweyten Formul sich wie $N - \frac{dP}{dx}$ verhalten; wobey zu merken, daß da sey $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$: folglich werden wir für die Figur der Grundfläche des Kegels diese Gleichheit erhalten $m = N - \frac{dP}{dx}$, wo m eine nach Belieben angenommene Zahl andeutet. Die ganze Arbeit lauft also darauf hinaus

aus, daß die gehörigen Werthe für N, P und Z in dieser Gleichheit $m = N - \frac{dP}{dx}$ eingeführet, und dieselben hernach entwickelt, und also auseinander gesetzt werde, daß dadurch die gesuchte Figur der Fläche erkannt und verzeichnet werden kann. Da aber P die Größe $p = \frac{dy}{dx}$ und unsere Gleichheit hinwiederum dP in sich begreift, so erhellet, daß dieselbe eine Differentialgleichheit von der zweyten Ordnung seyn müsse, und folglich eine doppelte Integration erfordere.

17. Wenn wir aber die Glieder unserer gedoppelten Differentialgleichung genauer erwägen, so werden wir finden, daß da sey $M = -Np$, und folglich weil $dy = pdx$, $Mdx + Ndy = o$, also ist $dZ = Pdp$, oder da $P = \frac{aap - x(y - px)}{Z}$ so wird

$$dZ = \frac{aap - x(y - px)\,dp}{Z}$$

Ferner, wenn wir den Werth von P differentiiren, so werden wir bekommen

$$dP = \frac{aadp - dx(y - px) + xxdp}{Z} - \frac{(aap - x(y - px))\,dZ}{ZZ}$$

und also, wenn wir hier den eben gefundenen Werth für dZ schreiben,

$$dP = \frac{(aa + xx)\,dp - dx(y - px)}{Z} - \frac{(aap - x(y - px))^2\,dp}{Z^3}$$

folglich wird unsere Gleichheit $m = N - \frac{dP}{dx}$ weil $N = \frac{y - px}{Z}$ ist, in diese Form übergehen $mdx = \frac{2(y - px)\,dx}{Z} - \frac{(aa + xx)\,dp}{Z}$

$$+ \frac{(aap - x(y - px))^2\,dp}{Z^3},$$ wo $Z = \sqrt{(aa(1 + pp) + (yp - x)^2)}$ ist.

18. Die zwey letztern Glieder der Gleichheit können auf diese Art in eines gebracht werden

$$\frac{dP}{Z^3}\left(\left(aap - x(y - px)\right)^2 - (aa + xx)\left(aa(1 + pp) + (y - pz)^2\right)\right)$$

und welches durch die Entwicklung in das folgende verwandelt wird $-\frac{aadp}{Z^3}(aa+xx+yy)$. Unsere Gleichheit wird also hierdurch eine weit kürzere Gestalt bekommen, sie wird nämlich seyn $mdx=\frac{2(y-px)dx}{Z}-\frac{aa(aa+xx+yy)\,dp}{Z^3}$. Wie dieselbe aber integriret werden kann, ist nicht so leicht einzusehen: denn es kommen hier drey veränderliche Größen x, y und p vor, deren letztere $p=\frac{dy}{dx}$ zwar die Verhältniß zwischen den Differentialien dy und dx andeutet, aber die Arbeit deswegen nicht erträglicher macht; überdas ist auch die Formul Z sehr verwickelt, und aus allen diesen dreyen veränderlichen Größen zusammen gesetzt.

19. Da nun, um die gegenwärtige und andere dergleichen Gleichheiten zu behandeln, kein sicheres Mittel bekannt ist, so wird diese Arbeit durch einige gewagte Versuche unternommen werden müssen. Und weil diese Gleichheit nur die zwey Differentialien dx und dp in sich enthält, so wird dieselbe, wenn sie durch p vermehret, und für pdx dy geschrieben wird, sich in eine andere verwandeln, so die beyden Differentialien dy und dp in sich begreift. Laßt uns also diese beyden Gleichungen, welche zwar völlig miteinander übereinstimmen, und nur eine ausmachen, zusammen betrachten. Hier sind sie

$$\text{I. } mdx=\frac{2(y-px)\,dx}{Z}-\frac{aa(aa+xx+yy)\,dp}{Z^3}$$

$$\text{II. } mdy=\frac{2(y-px)\,dy}{Z}-\frac{aap(aa+xx+yy)\,dp}{Z^3}$$

Nun wage man einige Versuche, ob aus einer gewissen Vereinigung dieser beyden Gleichheiten nicht eine neue heraus gebracht werden kann, deren Integrale von freyen Stücken in die Augen fällt. Und ich merke hier sogleich an, daß der Theil $aa+xx+yy$ des letzten Grades einen nicht schlechten Grund zu vermuthen geben, daß diejenige Vereinigung, wodurch die erste Seite der neuen Gleich-

heit

heit $m(xdx+ydy)$ wird, nicht ohne Nutzen angestellt werden möchte.

20. Auf diese Art werden wir aber auf folgende Gleichheit verfallen,

$$m(xdx+ydy)=\frac{2(xdx+ydy)(y-px)}{Z}-\frac{aa(x+py)(aa+xx+yy)dp}{Z^3}$$

ob dieselbe nun integrabel sey oder nicht? möchte wohl der Mühe werth seyn, näher untersucht zu werden. Weil aber das Integrale des ersten Gliedes $=\frac{1}{2}m(xx+yy)$ ist, so müßte das Integrale der beyden übrigen Glieder nothwendig folgende Gestalt haben, $\frac{(xx+yy+C)(y-px)}{Z}$. Und wenn dieses angeht, so fragt man, was für den Buchstaben C gesetzt werden muß? Wenn man aber hinwiederum die oben angezeigte Formul differentiiret, so erhält man

$$\frac{2(xdx+ydy)(y-px)}{Z}+(xx+yy+C)\,d.\frac{y-px}{Z}$$

Nun ist, weil $Z=\surd(aa(1+pp)+(y-px)^2)$

$$d.\frac{y-px}{Z}=\frac{-aax(1+pp)dp-aapdp(y-px)}{Z^3}$$ und folglich

$$d.\frac{y-px}{Z}=\frac{-aa(x+py)dp}{Z^3}$$

21. Hieraus erhellet also, daß wenn $C=aa$ genommen wird, das Differentiale der Formul $\frac{(xx+yy+aa)(y-px)}{Z}$ genau die beyden übrigen Glieder unserer Gleichheit geben; folglich, wenn für $\frac{1}{m}$ der Buchstaben n geschrieben, und eine neue willkührliche und beständige Größe bey der Integration eingeführt wird, so werden wir die folgende Gleichheit erhalten, welche die Natur der gesuchten krummen Linien näher zu erkennen giebt, da sie nunmehro schon einmal integrirt worden ist.

$n(xx+yy+ab)=\frac{(aa+xx+yy)(y-px)}{Z}$ oder, wenn für Z sein

Werth gesetzt wird, $n(ab+xx+yy)=\frac{(aa+xx+yy)(y-px)}{\sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}}$ Es ist aber diese Gleichheit noch eine Differentialgleichheit von der ersten Ordnung, daher man also leicht eine Verzeichnung der gesuchten krummen Linie herleiten könnte; wenn man sich nur erinnert das $p=\frac{dy}{dx}$ ist.

22. Bevor wir aber die Integration dieser Gleichheit auf eine allgemeine Art unternehmen, so wird es nicht undienlich seyn, einen besonders merkwürdigen Fall vorhero entwickelt zu haben; derjenige Fall nemlich wo $b=a$ ist.

Denn weil alsdann die Gleichheit durch $aa+xx+yy$ theilbar wird, so erhalten wir $n=\frac{y-px}{\sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}}$ und folglich $nnaa(1+pp)=(1-nn)(y-px)^2$ Es kann aber diese Gleichheit nur alsdann möglich seyn, wenn $nn<1$. Laßt uns derohalben setzen $\frac{nn}{1-nn}=kk$, und nachdem beyderseits die Quadratwurzel ausgezogen worden, so wird $y-px=ka\sqrt{(1+pp)}$. Wenn man hier aber für p seinen Werth $\frac{dy}{dx}$ setzen wollte, so würde man finden, daß die Integration sehr großen Schwierigkeiten unterworfen wäre.

23. Man wird demnach auf andere Kunstgriffe bedacht seyn müssen. Wenn aber die gefundene Gleichung etwas sorgfältiger betrachtet wird, so wird man wahrnehmen, daß dieselbe glücklicher Weise zu derjenigen Gattung von ganz besondern Differentialgleichheiten gehöre, deren Integrale durch Hülfe einer Differentiation heraus gebracht wird. Denn weil $dy=pdx$: so wird das Differentiale unserer Gleichung seyn $-xdp=\frac{kapdp}{\sqrt{(1+pp)}}$, welche keiner

Schwie-

Schwierigkeit mehr unterworfen ist. Da diese Gleichheit aber durch dp theilbar ist, so sehen wir daß erstlich $p = \alpha$ der Aufgabe ein Genügen leisten müsse, also daß wir hier für die Figur der Grundfläche eine grade Linie erhalten, so in dieser Gleichheit $y = \alpha x + ka\surd(1+\alpha\alpha)$ begriffen ist. Weil hier aber α und k von unserm Gutdünken abhängen, so ist klar, daß gar alle gerade Linien, sie mögen eine Lage haben, wie man will, hierzu gehören. Aber da auf diese Weise der Kegel nicht geschlossen ist, so werden unsere Bedingungen hierdurch auch nicht eigentlich erfüllet, dieweil wir nämlich angenommen haben, daß die Grundfläche des Kegels eine allenthalben eingeschlossene Figur habe.

24. Nachdem wir also hier die gerade Linie ausgeschlossen haben, so wird unsere gefundene Gleichung, wenn dieselbe durch dp getheilet worden, folgende Auflösung darreichen $x = \frac{-kap}{\surd(1+pp)}$

folglich $y = \int pdx = \frac{-kapp}{\surd(1+pp)} + ka\surd(1+pp) = \frac{ka}{\surd(1+pp)}$

und also $xx + yy = kkaa = cc$; wenn nämlich $ka = c$ gesetzt wird. Hieraus sehen wir also, daß alle aufrechte Kegel, deren Grundflächen Zirkel sind, der Aufgabe ein Genügen leisten. Folglich wird für eine jegliche gegebene Höhe a der gemeine aufrechte Kegel, dessen Grundfläche ein Zirkel von beliebigem Durchmesser ist, diese sehr merkwürdige Eigenschaft besitzen, daß demselben unter allen andern Kegeln, so mit ihm einerley Höhe haben, und einerley körperlichen Raum einschließen, die kleinste Oberfläche zukomme.

25. Es scheinet zwar, daß diese Auflösung der vorgelegten Aufgabe dergestalt ein Genügen leiste, daß dadurch alle andere Auflösungen völlig ausgeschlossen sind. Denn die gegebene Höhe, und dergleichen körperlicher Raum, so dem Kegel zukommen soll, mag beschaffen seyn wie man will, so kann man allemal einen gemeinen

aufrechten Kegel finden, der eben dieselbe Höhe und eben denselben körperlichen Raum hat, weil derselbe Raum durch den Innhalt der Grundfläche bestimmt wird. Unterdessen wenn wir die Natur der vorgelegten Frage etwas genauer erwägen, so werden wir dennoch befinden, daß die eben gefundene Auflösung nicht für allgemein gehalten werden kann. Denn es ist bekannt, daß alle dergleichen Aufgaben, welche, wie die vorgelegte, zu den Maximis und Minimis gehören, noch verschiedene andere und willkührliche Bestimmungen in sich begreifen, so in der Aufgabe selbsten nicht eigentlich enhalten sind. Nämlich, da hier die Figur der Grundfläche bestimmt werden soll, so wird nicht nur ihre Größe in Betrachtung gezogen, sondern man kann noch überdas allezeit zwey Puncten nach Belieben annehmen, durch welche die verlangte krumme Linie durchgehen soll. Und es kommen sogar bey den Maximis und Minimis auch solche Aufgaben vor, in deren Auflösung noch weit mehrere Puncten, durch welche eine krumme Linie gezogen werden soll, unserer Willkuhr überlassen werden.

26. Wenn demnach gegenwärtige Aufgabe, nach der Beschaffenheit und Natur ihrer Auflösung, also vorgetragen wird, daß für eine gegebene Höhe $OC = a$ unter allen Kegeln, welche nicht nur einerley körperlichen Raum einschließen, sondern deren Grundfläche noch überdas durch zwey nach Belieben angenommene Puncte gehen solle, derjenige Kegel zu bestimmen sey, dessen Oberfläche am kleinsten, oder ein Minimum ist. Wenn man, sage ich, die Aufgabe also einkleidet, so ist offenbar, daß eine zirkelrunde Grundfläche nicht allezeit, und nur in denen Fällen der Aufgabe ein Genügen leisten könne, wenn die angenommenen zwey Puncten genau in die Peripherie des jenigen Zirkels, so dem gegebenen Raum des Kegels zukömmt, einfallen. Und so oft dieses nicht geschieht, so wird man allezeit ganz andere krumme Linie suchen müssen, welche aber alle in

unseren

unserer allgemeinen Gleichung enthalten sind. Denn weil durch die zweyfache Integration auch zwey willkührliche Größen in die Rechnung kommen, und überdas schon eine dritte, nämlich n vorhanden ist, so kann eine derselben durch den vorgeschriebenen körperlichen Raum, die anderen beyden aber aus der Lage der beyden angenommenen Puncten, bestimmt werden.

27. Die Gleichung aber, welche die allgemeine Auflösung unserer Aufgabe enthält, ist $n(ab+xx+yy) = \frac{(aa+xx+yy)(y-px)}{\sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}}$ deren Entwicklung ohne einige ganz besondere Kunstgriffe gewiß die größte Schwierigkeit verursachen könnte. Laßt uns aber folgender Substitution bedienen: es sey $y-px = u\sqrt{(1+pp)}$ so daß wir hierdurch diese Gleichheit bekommen $\frac{n(ab+xx+yy)}{au+xx+yy} = \frac{u}{\sqrt{(aa+uu)}}$: und unser Endzweck sey hierbey alles durch die neue veränderliche Größe u zu bestimmen. Es giebt aber die angenommene Substituiion, wenn dieselbe differentiirt wird $x = -\frac{du}{dp}\sqrt{(1+pp)} - \frac{pu}{\sqrt{(1+pp)}}$ und hierdurch erhält man auch $y = -\frac{pdu}{dp}\sqrt{(1+pp)} + \frac{u}{\sqrt{(1+pp)}}$ also daß da sey $xx+yy = \frac{du^2}{dp^2}(1+pp)^2 + uu$

28. Man setze der Kürze halber $\frac{u}{\sqrt{(aa+uu)}} = nU$, also daß U eine gegebene Function von u sey, und folglich hinwiederum $u = \frac{naU}{\sqrt{(1-nnUU)}}$ eine gegebene Function von U.

Weil nun $\frac{ab+xx+yy}{au+xx+yy} = U$ so wird

$$xx+yy = \frac{aaU-ab}{1-U} = \frac{du^2}{dp^2}(1+pp)^2 + uu.$$

Hier-

Hieraus muß also p durch u oder durch U bestimmt werden

da nun $\frac{du^2}{dp^2}(1+pp)^2 = \frac{aaU - ab - uu + Uuu}{1-U}$

so wird $\frac{dp}{1+pp} = \frac{du\sqrt{(1-U)}}{\sqrt{(aaU - ab - uu(1-U))}}$

29. Wenn wir hier für u seinen Werth $\frac{naU}{\sqrt{(1-nuUU)}}$ und also $du = \frac{nadU}{(1-nnUU)^{\frac{3}{2}}}$ setzen, so werden wir erhalten

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{nadU\sqrt{(1-U)}}{(1-nnUU)\sqrt{(nn(ab-aa)UU + aaU - ab)}}$$

Es kann aber durch Hülfe dieser Gleichheit die Größe p durch U bestimmt, und hieraus wiederum die zwey veränderlichen Größen x und y durch die in 27ten §. gegebene Formuln angezeigt werden. Und es werden diese Werthe also beschaffen seyn, daß da sey

$$xx + yy = \frac{aaUU - ab}{1-U} \text{ und } y - px = \frac{aaU\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(1-nnUU)}}$$

daraus wir ersehen, daß man aus diesen Formuln den oben entwickelten Fall, wo $b = a$ ist, nicht herleiten können; es wird hier nämlich $U = 1$, so daß diese Größe aufhöret veränderlich zu seyn. Nichts destoweniger erhellet, daß in dem Fall wo $b = a$ ist, die Formul $\frac{naU - ab}{1-U}$ einen beständigen Werth erhalten müsse, und durch welche Eigenschaft die Natur des Zirkels auf das deutlichste angedeutet wird.

30. Die Construction der krummen Linie wird sich demnach also verhalten. Man wird nämlich zu erst die Verhältniß zwischen p und U aus folgender Gleichung bestimmen

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{nadU\sqrt{(1-U)}}{(1-nnUU)\sqrt{(nn(ab-aa)UU + aaU - ab)}}$$

Und

und wenn dieselbe gefunden worden, so werden die beyden Coordinaten x und y der verlangten Grundfläche seyn

$$x = -\frac{napU}{\surd(1+pp)(1-nnUU)} + \frac{\surd(nn(ab-aa)UU+aaU-ab)}{\surd(1+pp)(1-U)(1-nnU)}$$

$$y = +\frac{naU}{\surd(1+pp)(1-nnUU)} + \frac{p\surd(nn(ab-aa)UU+aaU-ab)}{\surd(1+pp)(1-U)(1-nnUU)}$$

so oft also das Integrale $\int \frac{nadU\surd(1-U)}{(1-nnUU)(\surd(aa(ab-aa)UU+aaU-ab)}$ durch einen Zirkelbogen angedeutet werden kann, so durch einen Zirkelbogen dessen Tangens gleich p ist, abgemessen wird, so oft wird auch die Figur der Grundfläche eine algebraische krumme Linie seyn.

Da wir aber diese Formul in ihrer allgemeinen Gestalt von der Irrationalität nicht befreyen können, so wird es auch nicht möglich seyn, die Integration derselben durch die bloße Quadratur des Zirkels zu vollenden.

31. Derjenige Fall, wo $n = 1$ ist, hat nun diese Bequemlichkeit, daß die Irrationalität weggeschaft werden kann, und derowegen wollen wir denselben anch besonders entwickeln: Es wird aber

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{adU}{(1-UU)\surd(aaU-abU-ab)} \text{ und folglich}$$

$$x = \frac{-apU+\surd(aaU-abU-ab)}{\surd(1+pp)(1-UU)} \text{ und}$$

$$y = \frac{+aU+p\surd(aaU-abU-ab)}{\surd(1+pp)(1-UU)}$$

Laßt uns also setzen $\surd(aaU-abU-ab) = v$ so wird

$$U = \frac{vv+ab}{aa-ab};\ dU = \frac{-2vdv}{aa-ab} \text{ und } 1-UU = \frac{(aa+vv)(aa-2ab-vv)}{(aa-ab)^2}$$

$$\text{folglich } \frac{dp}{1+pp} = \frac{2a(aa-ab)dv}{(aa+vv)(aa-2ab-vv)}$$

welche Gleichheit folgendermaßen zergliedert wird:

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{adv}{aa+vv} + \frac{adv}{aa-2ab-vv}.$$

32. Hieraus sehen wir also, daß wenn $2ab > aa$ wäre, beyde Theile Zirkelbögen geben würden: weil aber alsdann die Formul $\surd(1-UU)$ unmöglich wird, so würde auch die krumme Linie selbsten unmöglich werden. Folglich wird hier nothwendig erforderet, daß $aa > 2ab$ sey. In welchem Fall aber das letzte Glied durch die Logarithmen integrabel wird. Wenn wir also setzen $aa - 2ab = 2c$ oder $ab = \frac{aa - cc}{2}$ so erhalten wir

$$\text{Ang. tang. } p = \text{Ang. tang. } \frac{v}{a} + \frac{a}{2c}\, l\frac{c+v}{c-v} + \alpha \text{ und folglich}$$

$$p = \text{tang. } (\alpha + \text{Ang. tang. } \frac{v}{a} + \frac{a}{2c}\, l\frac{c+v}{c-v})$$

Nachdem aber auf diese Weise die Größe p durch v bestimmt worden, so werden die Coordinaten x und y der krummen Linie seyn

$$x = \frac{-ap(aa-cc+2vv)+(aa+cc)v}{2\surd(1+pp)(aa+vv)(cc-vv)};\ y = \frac{+a(aa-cc+2vv)+(aa+cc)pv}{2\surd(1+pp)(aa+vv)(cc-vv)}$$

33. Diese letztere Auflösung aber öfnet uns den Weg zu einer andern, die weit kürzer und schöner ist. Wir sehen nämlich daß die gerade Linie CM $= \surd(xx+yy)$ in unsern Formuln zum öftern vorkömmt. Laßt uns dieselbe also anstatt der Coordinaten in der Rechnung einführen, und mit derselben noch einen Winkel verknüpfen; es sey derohalben CM$=z$ und PCM$=\phi$ also daß $xx+yy=zz$ und $x = z \text{ cos}. \phi$; $y = z \text{ sin}. \phi$ ist: da nun $U = \frac{ab+zz}{aa+zz}$ ist,

$$\text{so wird } y - px = \frac{na(ab+zz)\surd(1+pp)}{\surd((aa+zz)^2 - nn(ab+zz)^2)}$$

weil ferner $dx = dz \text{ cos}. \phi - zd\phi \text{ sin}. \phi$ und $dy = dz \text{ sin}. \phi + zd\phi \text{ cos}. \phi$

$$\text{so wird } p = \frac{dz \text{ sin}. \phi + zd\phi \text{ cos}. \phi}{dz \text{ cos}. \phi - zd\phi \text{ sin}. \phi}$$

$$\text{folglich } y - px = \frac{-zzd\phi}{dz\text{cos}.\phi - zd\phi\text{sin}.\phi} \text{ und } \surd(1+pp) = \frac{\surd(dz^2 + zzd\phi^2)}{dz\text{cos}.\phi - zd\phi\text{sin}.\phi}$$

Wenn

Wenn wir demnach diese gefundenen Werthe an ihre gehörige Oerter schreiben, so werden wir folgende Gleichung zwischen z und Φ bekommen.

$$\frac{-zzd\Phi}{\sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}} = \frac{na(ab+zz)}{\sqrt{((aa+zz)^2 - nn(ab+zz)^2)}}$$

34. Man nehme beyderseits die Quadrate, und man wird endlich auf diese Gleichung verfallen

$$(aa+zz)^2 z^4 d\Phi^2 - nn(ab+zz)^2 z^4 d\Phi^2 = nnaa(ab+zz)^2 dz^2 + nnaa(ab+zz)^2 zzd\Phi^2$$

daraus wir dann sogleich erhalten

$$d\Phi = \frac{na(ab+zz)\,dz}{z\sqrt{(aa+zz)(zz(aa+zz) - nn(ab+zz)^2)}}$$

Sobald man aber durch Hülfe dieser Gleichheit die Verhältniß zwischen der geraden Linie z und dem Winkel Φ gefunden, so wird daraus die Verzeichniß der gesuchten krummen Linie unmittelbar hergeleitet. Es erhellet ferner aus dieser Auflösung sogleich, daß man der gefundenen Gleichheit ein völliges Genügen leiste, wenn für z eine solche beständige Größe angenommen wird, daß dadurch der Nenner vernichtet werde; oder wenn man $zz(aa+zz) = nn(ab+zz)^2$ setzt. In diesem Fall wird aber die schon oben gefundene Auflösung durch die zirkelrunde Grundflächen herausgebracht.

35. Man kann auch aus dieser Gleichheit den Innhalt der Grundfläche selbsten, dadurch dann weiter der körperliche Raum des Kegels bestimmt wird, ganz leichte finden. Dann weil der Innhalt der Grundfläche auf eine allgemeine Art durch $\frac{1}{2}\int zzd\Phi$ angedeutet wird, in sofern man nämlich nach der Integration den Winkel Φ bis zu vier rechten Winkeln ausbreitet, so wird der Innhalt unserer gesuchten Grundfläche seyn

$$\frac{1}{2}\int zzd\Phi = \int \frac{na(ab+zz)\,zdz}{2\sqrt{(aa+zz)(zz(aa+zz) - nn(ab+zz)^2)}}$$

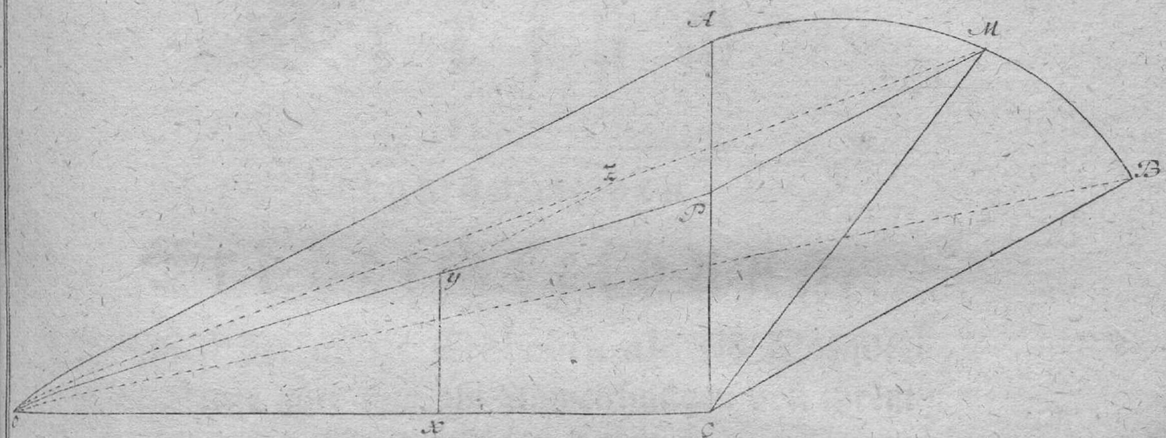
Endlich da die Oberfläche des Kegels durch $\frac{1}{2}\int dx\sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$ ausgedrückt wird, so werden wir erstlich, wenn wir für x, y und p die eben angezeigten Werthe durch z und Φ schreiben, die Oberfläche eines jeglichen Kegels auf eiue allgemeine Art also ausgedrückt finden: nämlich

$= \frac{1}{2}\int\sqrt{(aadz^2 + zz\,(aa+zz)\,d\Phi^2)}$. Setzen wir nun hier ferner für $d\Phi$ seinen gefundenen Werth, so wird die Oberfläche unsers verlangten Kegels seyn

$$\frac{1}{2}\int dx\sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)} = \frac{a}{2}\int\frac{zdz\sqrt{(aa+zz)}}{\sqrt{(zz(aa+zz)-nn(ab+zz)^2)}}$$

Carl

2. Th. ad pag. 60.



Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1764

Band/Volume: 2-2-1764

Autor(en)/Author(s): Euler Johann Albrecht

Artikel/Article: Albrecht Eulers Auflösung der Aufgabe Aus der gegebenen Höhe des Kegels die Figur seiner Grundfläche zu finden, so daß der körperliche Innhalt desselben unter allen andern von gleicher Oberfläche der größte sey 37-61