© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Abhandlungen
der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
XXV. Band, 3. Abhandlung

Betrachtungen

über die

räumliche Verteilung der Fixsterne

(2. Abhandlung)

von

H. Seeliger.

Vorgelegt am 6. November 1909.

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Den Zusammenhang, in welchem die räumliche Verteilung der Sterne mit der scheinbaren steht, habe ich in einer vor 11 Jahren erschienenen Abhandlung [1]) auf allgemeineren Grundlagen, als früher benutzt worden sind, festgestellt. Dieser Zusammenhang ist durch vier Integralformeln gegeben, welche die Anzahl A_m der Sterne von den hellsten bis zu denen von der Größe m und die mittleren Entfernungen der Sterne in einem festgesetzten Helligkeitsintervall mit der räumlichen Dichtigkeitsverteilung und der Häufigkeitsfunktion der Leuchtkräfte verbindet. Eine Diskussion dieser Formeln führte zu einigen allgemeineren Sätzen und die Art ihrer Verwendung wurde unter gewissen Annahmen durchgeführt. Diese Annahmen waren ziemlich willkürlich, da die zu Grunde liegenden empirischen Daten nicht in erforderlicher Sicherheit und Vollständigkeit zu beschaffen waren.

Die in I begonnenen Untersuchungen sollen nun weitergeführt werden. Es wird dies insofern auf breiterer Basis geschehen, als die Grundgleichungen für die allgemeinsten Formen, die man für die Häufigkeitsfunktion φ der Leuchtkräfte annehmen kann, aufgestellt werden und auch die weiteren Ausführungen immer und nicht bloß anhangsweise, wie in I, mit Berücksichtigung etwaiger im Weltraum stattfindenden Absorptionen des Sternlichts geschehen. In einer anderen Richtung dagegen soll die zahlenmäßige Anwendung eine gewisse Beschränkung erhalten. Während in I die räumliche Dichtigkeit als Funktion der Entfernung und der galaktischen Breite angesehen wurde, soll sie hier nur als von der Entfernung abhängig betrachtet werden. Dadurch wird selbstverständlich die Abweichung von den tatsächlichen Verhältnissen vergrößert, aber die empirischen Daten, die in den letzten 11 Jahren sich nicht bedeutend genug vermehrt haben, um das allgemeinere Problem von neuem verfolgen zu können, werden zu Aussagen von erheblich größerer Zuverlässigkeit bei der genannten, viel weitergehenden, Vereinfachung zusammen-

[1]) Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Fixsterne. Abhandl. der K. Bayer. Akademie d. Wiss., II. Klasse, XIX. Bd. München 1898. Diese Abhandlung wird im folgenden mit I bezeichnet.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

gefaßt. Was die Funktion φ betrifft, so erlauben die zahlreichen Parallaxenbestimmungen an den uns nächsten Sternen der letzten Jahre wenigstens gewisse Mutmaßungen über ihren Verlauf aufzustellen und so die früheren, ganz willkürlichen Annahmen durch voraussichtlich bessere zu ersetzen. Es kann gezeigt werden, daß unter gewissen plausibeln Voraussetzungen die Kenntnis des Verlaufs von φ nur in einem Bereiche nötig ist, der von den direkten Parallaxenbestimmungen, wie sie jetzt ausgeführt werden, umspannt werden kann, um sowohl die Zahlen A_m als auch die mittleren Parallaxen bis zu Sternen von ungefähr der 17. Größe darzustellen. Damit ist in absehbarer Zeit eine wesentliche Förderung des Problems der räumlichen Verteilung der Sterne möglich durch die Untersuchung möglichst vieler Sterne auf wirklich meßbare Parallaxen.

Neue Schwierigkeiten entstehen aber durch Berücksichtigung merkbarer Absorptionen des Sternlichts, deren Vorhandensein kaum geleugnet werden kann. In den Ausdrücken für die Sternanzahlen A_m erscheint die Absorption untrennbar verbunden mit der räumlichen Dichtigkeit in der Sternverteilung. Erst die Heranziehung der mittleren Parallaxen für Sterne verschiedener Helligkeit ergibt die Möglichkeit einer Trennung beider. Für schwächere Sterne sind aber solche Parallaxen, wenigstens nach den bestehenden Methoden, wegen ihrer Kleinheit nicht direkt meßbar und man ist zu Benutzung von hypothetischen Parallaxenwerten gezwungen, deren Sicherheit sich gegenwärtig kaum genügend beurteilen läßt. Dazu kommt noch, daß die Anzahlen A_m nur für $m < 9.2$ und auch hier nur für den nördlichen Himmel hinreichend genau bekannt sind. Die genauere Ermittlung dieser Zahlen für größere m bietet immer noch erhebliche Schwierigkeiten dar. Diese werden sich aber voraussichtlich in allernächster Zeit wesentlich verringern, da die Festlegung der photometrischen und photographischen Helligkeiten genügend vieler und schwacher Sterne von verschiedenen Seiten in Angriff genommen ist und die betreffenden Arbeiten guten Erfolg versprechen. Ist erst diese Aufgabe gelöst, dann wird eine bessere Ermittlung der A_m bis zu Werten von $m = 14$ oder 15 durchgeführt werden können und alle Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Sterne werden auf mehr gesicherter Grundlage ruhen.

Unter den gegenwärtigen Verhältnissen muß man sich begnügen, die Beziehungen, die zwischen den Zahlen A_m, den Parallaxenwerten, der Funktion φ, der Absorption und der räumlichen Sternfülle bestehen, möglichst klarzustellen und zu durchschauen und dazu sollen die vorliegenden Untersuchungen einen Beitrag liefern. Der wesentliche Inhalt der folgenden Betrachtungen wird sein:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Art. 1. Aufstellung und Diskussion der Grundformeln in möglichst allgemeiner Form.
Art. 2. Kurze Darlegung der ganzen Fragestellung.
Art. 3. Die empirischen Daten in Bezug auf die Funktion φ.
Art. 4. Die empirischen Daten in Bezug auf die Sternanzahlen A_m.
Art. 5. Die Darstellung der Anzahlen A_m durch die Formeln.
Art. 6. Die Darstellung der mittleren Parallaxen durch die Formeln und die Abhängigkeit dieser Darstellung von der Absorption.
Art. 7. Bemerkungen über das Vorhandensein einer merkbaren Absorption.

Schließlich sei noch bemerkt, daß eine Mitteilung der Hauptresultate dieser Untersuchung in den Astronomischen Nachrichten, Nr. 4359, Bd. 182 erschienen ist.

I.

Als Einheit der Entfernung werde im folgenden stets die „Siriusweite" gewählt; das ist die Entfernung eines Sternes mit der Parallaxe 0.″2. Der Raum, der durch die sichtbaren Sterne erfüllt ist, sei durch zwei Flächen begrenzt. Die äußere sei durch die Entfernung r_1, die innere durch r_0 definiert, wo r_0 und r_1 als Funktionen beliebiger Polarkoordinaten gegeben seien. In I wurden die Bedingungen näher erörtert, unter denen $r_0 = 0$ gesetzt werden darf. Diese Bedingungen sollen hier als erfüllt angesehen werden. Ferner soll A_m die Anzahl der Sterne, von den hellsten bis zur Größe m, bezeichnen, welche auf einem Flächenstück ω des Himmels zu stehen scheinen. Zunächst soll ω sehr klein sein, später wird es den ganzen Himmel umfassen.

Denkt man sich nun alle Sterne, die in der Entfernung r in einem Raumelement $d\tau$ liegen, dessen Projektion das erwähnte ω ist, in die Entfernung 1 versetzt, so werden sie die scheinbare Helligkeit i — ich habe diese Größe in I absolute Leuchtkraft genannt — aufweisen. Diese i werden nach Maßgabe einer Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ verteilt sein, so daß die Anzahl der Sterne im Volumelement $d\tau$, deren Leuchtkraft zwischen i und $i + di$ liegt,

$$D \cdot \varphi(i) \cdot d\tau\, di$$

ist. D ist danach die Anzahl aller Sterne in der Volumeinheit. Über $\varphi(i)$ läßt sich a priori nichts aussagen, da bekanntlich solche Verteilungsfunktionen alle möglichen Formen haben können. Zur Wahrung genügender Allgemeinheit wird man annehmen müssen, daß i alle Werte von Null bis zu einem gewissen endlichen Maximalwert H haben kann. Man muß sich dann $\varphi(i)$ so bestimmt denken, daß

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\int_0^H \varphi(i)\, di = 1$$

ist. Im allgemeinen wird sowohl φ als auch H von den Polarkoordinaten des betrachteten Himmelsteils ω und von der Entfernung r abhängen.

Für ein bestimmtes r wird also $y = \varphi(i)$ eine Kurve darstellen, deren Verlauf für positive y und i definiert ist. $\varphi(H)$ wird also einen positiven Wert, der auch Null sein kann, darstellen. Mit fortschreitender Zeit wird sich diese Kurve ändern und zwar so, daß sich jeder Punkt derselben parallel zur Achse der i verschieben wird und zwar, da im Durchschnitt wohl nur eine fortdauernde Abkühlung der Sterne zu erwarten ist, im Sinne kleiner werdender i. Man kann manches dafür anführen, daß mit fortschreitender Zeit die Kurve an ihrem Ende, d. h. in der Nähe von $i = H$, einen steileren Abfall erhalten wird. Sicherlich ist aber kein Grund vorhanden anzunehmen, daß etwa $\varphi'(H) = 0$ und $\varphi(0) = 0$ sein müßte. Man kann nun selbstverständlich an φ einen solchen Diskontinuitätsfaktor anbringen, daß man $H = \infty$ annehmen dürfte, wodurch sich alle Formeln wesentlich vereinfachen würden. Alle Diskussionen und besonders alle numerischen Anwendungen würden aber dadurch so schwerfällig werden, daß man auf dieses Mittel verzichten wird. Man könnte auch von der Bemerkung ausgehen, daß $\varphi(i)$ doch rein empirisch und damit nur angenähert bestimmt werden kann. Dann wäre eine Darstellung von $\varphi(i)$ durch eine überall stetige Funktion, die für $i > H$ überaus kleine Ordinaten hätte, möglich. Aber auch diese Darstellung wäre im allgemeinen nicht zu empfehlen, da sie sich oft praktisch schwierig gestalten würde, auch eine Abschätzung der begangenen Ungenauigkeiten mit Umständlichkeiten verknüpft wäre. Jedenfalls ist es am besten, die Entwicklungen von Anfang an nicht mehr zu spezialisieren, als unbedingt nötig ist.

Es soll nun gleich auf eine etwaige Absorption des Sternlichtes Rücksicht genommen werden. Wie auch eine solche Absorption zustande kommen mag, sie wird dadurch berücksichtigt, daß ein Stern von der Leuchtkraft i in der Entfernung r nicht die scheinbare Helligkeit $h = \frac{i}{r^2}$, sondern

$$h = \frac{i\,\psi(r)}{r^2} \tag{1}$$

haben wird, wo ψ zunächst eine beliebige Funktion ist, die auch von der Richtung, in der der Himmelsteil ω liegt, abhängen kann.

Die Anzahl $A(d\tau)$ der Sterne, welche auf ω stehen, die Entfernung r und die Leuchtkraft i haben, wird demnach sein:

$$A(d\tau) = D\varphi(i.\, r)\, di\, d\tau.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Setzt man $d\tau = \omega r^2 dr$, so wird

$$A(d\tau) = \omega D \frac{r^4}{\psi(r)} \varphi\left(\frac{h r^2}{\psi(r)}, r\right) dr\, dh$$

die Anzahl der Sterne sein, deren Entfernung zwischen r und $r + dr$ und deren Helligkeit zwischen h und $h + dh$ liegt. Die Anzahl $A_m(d\tau)$ aller dieser Sterne von den hellsten bis zu denen der Helligkeit h_m, die der Größe m entspricht, wird so:

$$A_m(d\tau) = \omega \frac{D r^4}{\psi(r)} dr \int_{h_m}^{\frac{H\psi(r)}{r^2}} \varphi\left(\frac{h r^2}{\psi(r)}, r\right) dh.$$

A_m ergibt sich dann:

$$A_m = \omega \int \frac{D r^4}{\psi(r)} dr \int_{h_m}^{\frac{H\psi(r)}{r^2}} \varphi\left(\frac{h r^2}{\psi(r)}, r\right) dh, \tag{Ia}$$

wo in Bezug auf alle r zu integrieren ist, für welche

$$\frac{H\psi(r)}{r^2} > h_m.$$

Besonders einfach läßt sich die letzte Formel schreiben, wenn $\frac{H(r)\psi(r)}{r^2}$ eine stets abnehmende Funktion von r ist. Dann hat man offenbar die beiden Fälle $r_1 \gtrless \sigma$ zu unterscheiden, wenn σ aus der Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{H(\sigma)\psi(\sigma)}{\sigma^2} = h_m. \tag{2}$$

Es ergibt sich auf diese Weise:

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \omega \int_0^{\sigma} D r^2 dr \int_{h_m \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x, r)\, dx; \quad r_1 > \sigma \\ A_m &= \omega \int_0^{r_1} D r^2 dr \int_{h_m \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x, r)\, dx; \quad r_1 < \sigma \end{aligned}\right\}. \tag{Ib}$$

In gleicher Weise kann man die mittlere Entfernung $\varrho_{m m_1}$ aller Sterne, die zwischen den Größen m und $m_1 < m$ liegen, erhalten:

$$\varrho_{m m_1}(A_m - A_{m_1}) = \omega \int D r^3 dr \int_{h_m \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x, r)\, dx - \omega \int D r^3 dr \int_{h_{m_1} \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x, r)\, dx$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

worin das erste bzw. das zweite Integral über alle r zu erstrecken ist, welche den Bedingungen genügen:

$$\frac{H(r)\,\psi(r)}{r^2} > h_m; \qquad \frac{H(r)\,\psi(r)}{r^2} > h_{m_1}.$$

Führt man statt $\varrho_{m m_1}$ die mittleren Parallaxen $\pi_{m m_1}$ ein, so wird:

$$\frac{\pi_{m m_1}}{0''.2}(A_m - A_{m_1}) = \omega \int D\,r\,dr \int_{h_m \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x, r)\,dx - \omega \int D\,r\,dr \int_{h_{m_1} \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x, r)\,dx. \quad \text{(IIa)}$$

Bei monotoner Abnahme der Funktion $\frac{H(r)\,\psi(r)}{r^2}$ kann man diese Formel schreiben:

$$\frac{\pi_{m m_1}}{0''.2}(A_m - A_{m_1}) = \omega \int_0^{\sigma} D\,r\,dr \int_{h_m \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x, r)\,dx - \omega \int_0^{\sigma_1} D\,r\,dr \int_{h_{m_1} \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x, r)\,dx, \quad \text{(II)}$$

wobei neben (2) noch die Gleichung

$$\frac{H(\sigma_1)\,\psi(\sigma_1)}{\sigma_1^2} = h_{m_1}$$

besteht. Die Formel (II) gilt offenbar, solange $r_1 > \sigma > \sigma_1$. Die übrigen Fälle erledigen sich leicht. Ist $\sigma > r_1 > \sigma_1$, dann ist im ersten Integral r_1 an Stelle von σ zu setzen und das zweite bleibt ungeändert. Ist schließlich $\sigma > \sigma_1 > r_1$, dann sind beide Grenzen σ und σ_1 gleich r_1.

Führt man weiter eine Konstante H_1 ein derart, daß:

$$H(r) = H_1 F(r),$$

ersetzt ferner die Integrationsvariable x durch y und r durch ϱ, wobei:

$$x = y \cdot F(r); \quad \frac{r^2}{F(r) \cdot \psi(r)} = \varrho^2; \quad r = f(\varrho), \quad (3)$$

und führt die Bezeichnung ein:

$$\left.\begin{aligned} \Delta(\varrho) &= D\,[f(\varrho)] \cdot \left(\frac{f(\varrho)}{\varrho}\right)^2 f'(\varrho) \\ F\,[f(\varrho)] \cdot \varphi\,\{y \cdot F f(\varrho), f(\varrho)\} &= \Phi(y, \varrho) = F(r)\,\varphi\,[y \cdot F(r), r] \end{aligned}\right\}, \quad (4)$$

so wird schließlich:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \omega \int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_m}}} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^2 \, d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H_1} \Phi(y, \varrho) \, dy; \quad m < n \\ A_m &= \omega \int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_n}}} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^2 \, d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H_1} \Phi(y, \varrho) \, dy; \quad m > n \end{aligned}\right\}, \tag{III}$$

wenn man nämlich die Sterngröße n definiert durch:

$$\frac{r_1^2}{F(r_1)\,\psi(r_1)} = \frac{H_1}{h_n} \text{ oder } \frac{r_1^2}{H(r_1)\,\psi(r_1)} = \frac{1}{h_n}.$$

Es ist also, nach (1), n die scheinbare Größe der hellsten Sterne, die sich in der Entfernung r_1 befinden. In ganz gleicher Weise wird man (II) umformen können:

$$\frac{\pi_{m m_1}}{0''.2}(A_m - A_{m_1}) = \omega \int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_m}}} \Delta(\varrho) \frac{\varrho^2}{f(\varrho)} d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H_1} \Phi(y, \varrho) \, dy - \omega \int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_{m_1}}}} \Delta(\varrho) \cdot \frac{\varrho^2}{f(\varrho)} d\varrho \int_{h_{m_1} \varrho^2}^{H_1} \Phi(y, \varrho) \, dy, \tag{IV}$$

wo also, wie oben bemerkt, eventuell m oder m und m_1 in den oberen Grenzen der ersten Integrale durch n zu ersetzen sind.

In vielen Fällen der numerischen Anwendung wird es genügen, einen speziellen Fall von (IV) zu nehmen, nämlich den, wo m und m_1 unendlich wenig von einander verschieden sind. $\pi_{m m_1}$ wird dann die mittlere Parallaxe der Sterne von der scheinbaren Größe m und mit π_m zu bezeichnen sein, und es wird:

$$\left.\frac{\pi_m}{0''.2} = \frac{\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_m}}} \Delta(\varrho) \cdot \frac{\varrho^4}{f(\varrho)} \cdot \Phi(h_m \varrho^2, \varrho) \, d\varrho}{\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_m}}} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^4 \cdot \Phi(h_m \varrho^2, \varrho) \, d\varrho}\right\}. \tag{IVa}$$

Diese Formel gilt für $m < n$. Für $m > n$ ist in den Grenzen der beiden Integrale m durch n zu ersetzen. Es ist vorausgesetzt, daß die Häufigkeitsfunktion $\varphi(x, r)$ für jedes r die Gleichung (1) erfüllt, also:

$$\int_0^{H(r)} \varphi(x, r) \, dx = 1,$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Mit den Bezeichnungen von (3) und (4) ergibt sich hieraus:

$$F(r) \cdot \int_0^{H_1} \varphi\,[y \cdot F(r), r]\, dy = \int_0^{H_1} \Phi(y, \varrho)\, dy = 1. \tag{5}$$

Die Gesamtzahl aller Sterne A_∞ auf dem Areale ω ergibt sich aus der zweiten Gleichung (III), wenn $m = \infty$ gesetzt wird. Also mit Hilfe von (5)

$$A_\infty = \omega \int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_n}}} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^2\, d\varrho$$

und die Gesamthelligkeit H_0 aller Sterne findet man leicht, wenn man $A(d\tau)$ mit h multipliziert und in Bezug auf alle $i = x$ von 0 bis $H(r)$ und dann in Bezug auf r von 0 bis r_1 integriert:

$$H = \omega \cdot \int_0^{r_1} D \cdot \psi(r)\, dr \int_0^{H(r)} \varphi(x, r) \cdot x \cdot dx$$

oder:

$$H = \omega \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_n}}} \Delta(\varrho) \cdot d\varrho \int_0^{H_1} \Phi(y, \varrho)\, y\, dy. \tag{V}$$

In (III) und (IVa) liegen vier Integralformeln vor, in denen die drei unbekannten Funktionen Δ, f, Φ und die ebenfalls zunächst unbekannte Größe h_n vorkommen und diese Funktionen mit den Abzählungsresultaten A_m und den mittleren Parallaxen π_m verbinden. Man sieht aus den Formeln (III), daß hier nur Δ und Φ vorkommen. Selbst wenn also die letztere Funktion bekannt wäre, kann man aus den Abzählungsresultaten allein nicht die räumliche Dichtigkeitsverteilung der Sterne bestimmen, sondern nur die Funktion $\Delta(\varrho)$, welche außer $D(r)$ noch vom Produkt der beiden Funktionen $F(r)$ und $\psi(r)$ abhängt. Es ist also unmöglich, in den Zahlen A_m den Einfluß der Absorption $\psi(r)$ von der Dichtigkeit $D(r)$ zu trennen und beide Funktionen zu bestimmen, was in der Tat versucht worden ist.

Faßt man die Gleichungen (III) und (IVa) als Bestimmungsgleichungen für Δ und Φ aus den gegebenen A_m und π_m auf, so liegt ein System von sogenannten simultanen Integralgleichungen vor. Um diesen theoretischen Zusammenhang besser hervortreten zu lassen, wird es sich empfehlen, mit (III) und (IVa) solche Umformungen vorzunehmen, daß nur einfache Integrale mit festen Grenzen vorkommen. Differentiiert man (III) nach h_m, so wird:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\frac{\partial A_m}{\partial h_m} = -\omega \int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_m}}} \Delta(\varrho)\, \varrho^4\, \Phi(h_m \varrho^2, \varrho)\, d\varrho; \quad m < n$$

$$\frac{\partial A_m}{\partial h_m} = -\omega \int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_n}}} \Delta(\varrho)\, \varrho^4\, \Phi(h_m \varrho^2, \varrho)\, d\varrho; \quad m > n.$$

Führt man noch die neuen Funktionen χ und Φ_1 ein:

$$\chi\left(\varrho \sqrt{\frac{h_n}{H_1}}\right) = \Delta(\varrho) \cdot \varrho^4$$

$$\Phi_1\left(\varrho \sqrt{\frac{h_m}{H_1}},\ \varrho \sqrt{\frac{h_n}{H_1}}\right) = \Phi(h_m \varrho^2, \varrho),$$

und als Integrationsvariable:

$$x = \varrho \sqrt{\frac{h_m}{H_1}},$$

dann wird die erste Gleichung:

$$\frac{\partial A_m}{\partial h_m} = -\omega \sqrt{\frac{H_1}{h_m}} \int_0^1 \chi\left(x \sqrt{\frac{h_n}{h_m}}\right) \cdot \Phi_1\left(x, x \sqrt{\frac{h_n}{h_m}}\right) dx; \quad \frac{h_n}{h_m} < 1.$$

Führt man neben denselben Bezeichnungen die Integrationsvariable $x = \varrho \sqrt{\frac{h_n}{H_1}}$ in die zweite Gleichung ein, so wird:

$$\frac{\partial A_m}{\partial h_m} = -\omega \sqrt{\frac{H_1}{h_n}} \int_0^1 \chi(x) \cdot \Phi_1\left(x \sqrt{\frac{h_m}{h_n}}, x\right) dx; \quad \frac{h_m}{h_n} < 1.$$

Als bekannte Funktionen sind also anzusehen:

$$-\frac{1}{\omega} \frac{\partial A_m}{\partial h_m} \sqrt{\frac{h_m}{H_1}} = f_1(\zeta); \quad \zeta = \sqrt{\frac{h_n}{h_m}} < 1; \quad m < n$$

$$-\frac{1}{\omega} \frac{\partial A_m}{\partial h_m} \sqrt{\frac{h_n}{H_1}} = f_2(\zeta); \quad \zeta = \sqrt{\frac{h_m}{h_n}} < 1; \quad m > n$$

und es ergeben noch die beiden Integralgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f_1(\zeta) &= \int_0^1 \chi(\zeta x)\ \Phi_1(x, \zeta x)\, dx \\ f_2(\zeta) &= \int_0^1 \chi(x) \cdot \Phi_1(\zeta x, x)\, dx \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Der Verlauf beider bekannten Funktionen f_1 und f_2 erstreckt sich auf dasselbe Intervall der Variablen $0 \leq \zeta \leq 1$.

In derselben Weise kann man die beiden Gleichungen (IVa) schreiben:

$$-\frac{\partial A_m}{\partial h_m} \cdot \frac{\pi_m}{0.2} \sqrt{\frac{h_m}{H_1}} = f_3(\zeta) = \int_0^1 \frac{\chi(\zeta x)}{f\left(\zeta x \sqrt{\frac{H_1}{h_n}}\right)} \cdot \Phi_1(x, \zeta x)\, dx, \tag{7}$$

wobei $\zeta = \sqrt{\frac{h_n}{h_m}}$ gesetzt worden ist und $m < n$.

Ebenso:

$$-\frac{\partial A_m}{\partial h_m} \cdot \frac{\pi_m}{0.2} \sqrt{\frac{h_n}{H_1}} = f_4(\zeta) = \int_0^1 \frac{\chi(x)}{f\left(x \sqrt{\frac{H_1}{h_n}}\right)} \cdot \Phi_1(\zeta x, x)\, dx, \tag{7*}$$

wo $\zeta = \sqrt{\frac{h_m}{h_n}}$ und $m > n$. In beiden Fällen ist also auch in den Gleichungen (7) $0 \leq \zeta \leq 1$. Die Funktion Φ_1 erfüllt nach (5) noch die Gleichung:

$$2 H_1 \int_0^1 \Phi_1\left(x, \varrho \sqrt{\frac{h_n}{H_1}}\right) x\, dx = 1.$$

Die vier Integralgleichungen (6) und (7) stellen die allgemeinste Lösung des gestellten Problems dar. In ihnen kommen die drei unbekannten Funktionen vor: χ, Φ_1 und

$$\psi(x) = \frac{\chi(x)}{f\left(x \sqrt{\frac{H_1}{h_n}}\right)}$$

und außerdem noch $\frac{h_n}{H_1}$. Ob die Theorie der Integralgleichungen jetzt schon imstande ist, darüber etwas auszusagen, inwieweit eine Bestimmung der Unbekannten möglich ist und ob sie allgemeinere Sätze, die astronomisch von Bedeutung werden können, liefern kann, müssen die Mathematiker entscheiden. Indessen ist zu bemerken, daß wohl für absehbare Zeiten die vierte Integralgleichung (7*) unverwendbar bleiben muß, da die π_m für so schwache Größenklassen kaum bestimmbar sein werden.

Zunächst wird es sich aber zum Zwecke der wirklichen Anwendung der vorstehenden Formeln auf das Fixsternsystem empfehlen, die allgemeinen Ansätze zu spezialisieren und in dieser Richtung möglichst einfache Voraussetzungen zu machen. Da liegt nun eine Annahme sehr nahe, die ich bereits

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

in I gemacht habe, nämlich die, daß die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ die Entfernung r nicht enthält, mithin nur als Funktion der einen Variablen i anzusehen ist. Diese Annahme verdient jedenfalls zuerst eingehend verfolgt zu werden und sie soll nun auch dem Folgenden zu Grunde liegen. Dann ist $H = H_1$ eine Konstante, $F(r) = 1$, $\Phi(y, \varrho) = \varphi(y)$. Die Vereinfachungen, welche hierdurch die Hauptformeln (III) und (IV) erfahren, sind so leicht zu übersehen, daß die Formeln nicht erst umgeschrieben werden sollen. Es sei nur noch bemerkt, daß in (6) und (7)

$$\Phi_1(x) = \varphi(x^2 H)$$

wird. Die so vereinfachten Integralgleichungen habe ich in I zum Teil in noch weiter getriebener Spezialisierung nach einigen Richtungen diskutiert, indem teilweise von der Absorption abgesehen wurde, also $\psi(r) = 1$, $r = \varrho$ gesetzt worden ist. Diese Diskussion ist, wenigstens was die Gleichungen (III) oder (6) betrifft, auf die vorliegende erweiterte Form direkt übertragbar und soll hier nicht wiederholt werden. Es sei nur erwähnt, daß die mittleren Entfernungen ϱ_m selbstverständlich nicht unabhängig von der Lage des in Betracht gezogenen Himmelsteils sind, sich also mit der Lage zur Milchstraße ändern. Ferner wurde ein ganz spezieller Satz abgeleitet, der sich bei der tatsächlichen Anwendung als wichtig herausstellt. Hierauf soll hier eingegangen werden, da die Betrachtung sich einfacher und strenger gestalten läßt. Für die vereinfachten Annahmen gestalten sich die Formeln (6) und (7) so:

$$\left.\begin{aligned} f_1(\zeta) &= \int_0^1 \chi(\zeta x)\, \Phi_1(x)\, dx \\ f_2(\zeta) &= \int_0^1 \chi(x)\, \Phi_1(\zeta x)\, dx \\ f_3(\zeta) &= \int_0^1 \Psi(\zeta x)\, \Phi_1(x)\, dx \\ f_4(\zeta) &= \int_0^1 \Psi(x)\, \Phi_1(\zeta x)\, dx \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Die f sind bekannte, χ, Φ_1 und Ψ unbekannte Funktionen und ζ ist auf das Intervall $0 \leqq \zeta \leqq 1$ beschränkt, außerdem haben χ, Ψ und Φ_1 stets positive Werte. Der erwähnte Satz bezieht sich auf die erste Formel und sagt aus, daß wenn zufällig $\chi(x)$ die Form einer Potenz von x hat, für jedes Φ_1 auch f_1

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

dieselbe Form annehmen muß und umgekehrt, wenn $f_1(\zeta)$ eine Potenz von ζ ist, muß $\chi(x)$ ebenfalls eine Potenz von x sein. Der erste Satz ist selbstverständlich. Denn wenn:

$$\chi(x) = c \cdot x^\nu,$$

dann ist:

$$f_1(\zeta) = c\zeta^\nu \int_0^1 x^\nu \cdot \Phi_1(x)\, dx = \gamma \cdot \zeta^\nu.$$

Es sei umgekehrt $f_1(\zeta) = \gamma \cdot \zeta^\nu$, dann ist also:

$$\gamma \zeta^\nu = \int_0^1 \chi(\zeta x) \cdot \Phi_1(x)\, dx.$$

Wird nach ζ differentiert:

$$\nu \gamma \zeta^{\nu-1} = \int_0^1 \chi'(\zeta x) \cdot x \Phi_1(x)\, dx.$$

Es ist demnach:

$$0 = \int_0^1 [\nu \chi(\zeta x) - \zeta x \chi'(\zeta x)]\, \Phi_1(x)\, dx.$$

Führt man die Funktion σ ein:

$$\sigma(\xi) = \nu \chi(\xi) - \xi \frac{d\chi(\xi)}{d\xi},$$

so wird:

$$0 = \int_0^1 \sigma(\zeta x) \cdot \Phi_1(x)\, dx, \tag{9}$$

wobei also $\varphi_1(x)$ nur positive Werte hat. Es läßt sich nun beweisen, daß aus der letzten Gleichung $\sigma(\xi) = 0$ folgt. Dann gibt aber die Definitionsgleichung für σ:

$$\frac{d\chi}{\chi} = \nu \cdot \frac{d\xi}{\xi} \quad \text{oder} \quad \chi(\xi) = c\xi^\nu.$$

Hätte die Funktion $\sigma(\xi)$ innerhalb des Intervalls $0 \leqq \xi \leqq 1$ Werte vom selben Vorzeichen, dann müßte σ, da Φ_1 stets positiv sein soll, offenbar im ganzen Intervall Null sein. Hat im allgemeinen $\sigma(\xi)$ abwechselndes Vorzeichen in endlichen Intervallen, und dies ist die nötige Voraussetzung,

$$0 \leqq \xi \leqq \lambda_1$$
$$\lambda_1 \leqq \xi \leqq \lambda_2 \text{ etc.},$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

dann nehme man $\zeta = \lambda_1$. Die Gleichung (9) wird dann:

$$\int_0^1 \sigma(\lambda_1 x)\, \Phi_1(x)\, dx = 0.$$

Da nunmehr $0 \leqq \lambda_1 x \leqq \lambda_1$, hat $\sigma(\lambda_1 x)$ dasselbe Vorzeichen und es muß $\sigma(\xi)$ im ersten Intervall $= 0$ sein. Jetzt setze man $\zeta = \lambda_2$. Dann wird:

$$\int_0^1 \sigma(\lambda_2 x)\, \Phi_1(x)\, dx = 0 = \int_{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}^1 \sigma(\lambda_2 x)\, \Phi_1(x)\, dx.$$

$\lambda_2 x$ liegt nunmehr zwischen λ_1 und λ_2 und da in diesem Intervalle σ das gleiche Vorzeichen hat, muß es in diesem Intervalle verschwinden. Die Fortsetzung des Verfahrens ergibt also, daß $\sigma(\xi)$ im ganzen Intervall $0 \leqq \xi \leqq 1$ gleich Null sein muß.

Wendet man diesen Satz auf die Sternanzahlen A_m an, so ergibt sich: „Wenn $A_m = c\, h_m^{\frac{1-\nu}{2}}$, dann ist $\Delta(x) = \gamma \cdot x^{\nu-4}$ und umgekehrt."

Im speziellen wird der Satz im folgenden für $\nu = 4 + \lambda$ gebraucht und er sagt also aus, daß die Werte

$$A_m = c\, h_m^{\frac{\lambda-3}{2}} \text{ und } \Delta(x) = \gamma \cdot x^{-\lambda} \tag{10}$$

einander korrespondieren. Wenn also die Sternanzahlen A_m für $m < n$ durch die Formel (10) ausdrückbar sind, dann folgt eindeutig der angeführte Wert für Δ und zwar ganz unabhängig von dem Verlaufe der Funktion φ. Tatsächlich scheinen die Sternanzahlen dieser Bedingung ohne nachweisbare Abweichung zu folgen. Wenn aber $\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ ist, dann folgt aus (IV a), wenn keine Absorption stattfindet:

$$\frac{\pi_m}{0''.2} = \frac{\int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \varrho^{3-\lambda} \cdot \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho}{\int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \varrho^{4-\lambda} \cdot \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho} = \frac{h_m^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{H}} x^{3-\lambda} \cdot \varphi(x^2)\, dx}{\int_0^{\sqrt{H}} x^{4-\lambda}\, \varphi(x^2)\, dx} = \Gamma h_m^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

d. h. dann sind die mittleren Parallaxen für Sterngrößen $m < n$ proportional der Wurzel aus den Helligkeiten. Solche Parallaxenwerte sollen „normale" heißen. Diese treten immer auf, wenn die Anzahlen A_m der Formel (10) entsprechen und keine Absorptionen stattfinden. Haben die mittleren Parallaxen

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

andere Werte, dann können nicht alle genannten Bedingungen bestehen. Diese Sätze stellen strenge mathematische Beziehungen dar. Folgt aber A_m nur mit mehr oder weniger großer Annäherung der ersten Gleichung (10), so brauchen nicht für jedes φ die zweite Gleichung (10) und die daraus folgende (11) mit entsprechender Annäherung erfüllt sein. Im Gegenteil ist zu erwarten, daß man innerhalb gewisser Grenzen gegebenen A_m und π_m durch passende Wahl von Δ und φ, auch ohne die Annahme einer Absorption machen zu müssen, genügen und also die Darstellung etwa gegebener π_m erzwingen kann. Das ist aber immer nur möglich, wenn die A_m für $m < n$ bemerkbar von der Formel (10) abweichen und wenn der Verlauf von φ gar keinen Beschränkungen unterliegt.

Im allgemeinen Fall gestatten, mathematisch gesprochen, die Abzählungen der Sterne also die Feststellung des Verlaufs der A_m bis zu sehr großen m, also sowohl für $m < n$ als auch für $m > n$, eine Bestimmung beider Funktionen Δ und φ. Denn aus den ersten beiden Gleichungen (8)

$$\left.\begin{aligned} f_1(\zeta) &= \int_0^1 \chi(\zeta x)\, \Phi_1(x)\, dx \\ f_2(\zeta) &= \int_0^1 \chi(x)\, \Phi_1(\zeta x)\, dx \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

ist χ und Φ_1 bestimmbar, insoweit man die Sterngröße n angeben kann. Diese Bestimmung ist im allgemeinen nicht eindeutig, wie ich schon in I angegeben habe. Die Möglichkeit derselben beruht auf der Annahme endlicher Werte für H und die numerische Durchführbarkeit wird von der Sicherheit abhängen, mit der sich die genannte Eigenschaft von φ ausspricht. Man mag den Fall, daß $\varphi(H) = 0$ ist, als besonders wahrscheinlich betrachten. Die Kurve $y = \varphi(i)$ wird also die Abszissenachse im Punkte $i = H$ schneiden. Nun ist ersichtlich, daß man nur dann auf eine numerische Verwendbarkeit bei der Gleichung (12) rechnen wird können, wenn die Tangente der Kurve im Punkte $i = H$ eine wesentlich von Null verschiedene Neigung gegen die Abszissenaxe hat und natürlich auch der analytische Ausdruck für y, für größere i fortgesetzt, sehr kleine Werte hat. Darüber oder etwaige andere Kriterien kann man aber a priori kaum etwas aussagen, weshalb die praktische Brauchbarkeit von (12) zur gleichzeitigen Bestimmung von χ und Φ_1 dahingestellt bleiben muß.

Wie schon erwähnt worden ist, enthalten die Ausdrücke für A_m nur Δ und nicht die Dichtigkeit D. Man kann also die Dichtigkeit D nicht aus Ab-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

zählungsresultaten allein bestimmen, vielmehr müssen dabei noch die mittleren Parallaxenwerte benutzt werden. Kennt man $\varDelta(r)$, so ergibt sich aus (4), indem dort $F(r) = 1$ zu setzen ist:

$$D(r) = \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{\psi^{\frac{5}{2}}(r)} \cdot \varDelta\left(\frac{r}{\sqrt{\psi r}}\right). \tag{13}$$

Ist z. B. $\varDelta(\varrho) = \varrho^{-\lambda}$, so wird:

$$D(r) = r^{-\lambda} \cdot \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{\psi^{\frac{5-\lambda}{2}}(r)}.$$

und wenn man noch den einfachsten Fall der Absorption, die man dann als allgemeine Absorption bezeichnen kann, dadurch definiert, daß

$$\psi(r) = e^{-\nu r}$$

angenommen wird, dann ist:

$$D(r) = r^{-\lambda}\left(1 + \frac{\nu}{2} r\right) e^{\frac{3-\lambda}{2}\nu r}, \tag{14}$$

woraus sich ergiebt, daß selbst für relativ sehr kleine ν die Dichtigkeit D mit r überaus stark anwachsen muß. Denn λ wird sich als ein echter Bruch ergeben.

II.

Über die Verwertung der Formeln (III) in der früheren Abhandlung, wobei der Einfluß einer Absorption außer Betracht blieb, möge folgendes bemerkt werden.

Eine eingehende Bearbeitung der früher von mir gegebenen Abzählungsresultate der Bonner Durchmusterungssterne (B. D.) ergab für die A_m bis zu $m = 9.2$ der photometrischen Skala recht zuverlässige Werte. Ferner standen bei Ausarbeitung von I zur Disposition die „Sterneichungen" der beiden Herschel, welche die A_m für m gleich etwa 14 ergaben. Ich hatte das betreffende Material damals (1898) neu zusammengestellt und vervollständigt und Mittelzahlen für 9 Zonen, die nach der Milchstraße orientiert waren, gebildet. Diese 9 Zonen umfassen je 20 Grad galaktischer Breite vom Nordpol der Milchstraße an gezählt, so daß die Mitte der Zone V mit der als größter Kreis angesehenen Mittellinie der Milchstraße zusammenfiel. Diese Methode der Zusammenfassung halte ich auch jetzt noch für die empfehlenswerteste, da zur Einführung galaktischer Breiten das Material noch nicht ausreicht und voraussichtlich noch lange nicht ausreichen wird. Die Einführung von Inter-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

polationsformeln, welche Funktionen der galaktischen Breite enthalten, dürfte deshalb kaum Vorteile darbieten und jedenfalls verfrüht sein, da sie nur über die vorhandenen Unsicherheiten hinwegtäuschen kann. Außerdem sind die Milchstraße und die scheinbare Verteilung der Sterne keineswegs so homogen und stetig verlaufend, um, wenigstens gegenwärtig, eine detailliertere Zusammenfassung zu rechtfertigen. — Mit dem von der B. D. gelieferten Material ergab sich, daß die nach der Formel

$$\log \alpha_m = \log A_m - \log A_{m-\frac{1}{2}}$$

gebildeten Zahlen α_m innerhalb jeder Zone für alle m zwischen 6 und 9 sehr nahe konstant waren und ziemlich gleichmäßig anwuchsen, wenn man von den Polen der Milchstraße ausgehend sich ihr näherte. Daraus ergab sich mit Hilfe des in § 1 (10) gegebenen Satzes, daß man die Abzählungsresultate ganz befriedigend durch die Annahme $D(\varrho) = \gamma \varrho^{-\lambda}$ darstellen konnte, wo λ von Zone I bis V und ebenso von Zone IX bis V regelmäßig abnahm. Diese Abnahme von λ mit der Annäherung an die Milchstraße spricht sich nicht in gleicher Weise bei den mit freiem Auge sichtbaren Sternen aus, worauf Herr Kobold aufmerksam machte, ist vielmehr durch andere Einflüsse verdeckt. Aus den Herschelschen Eichungen ergab sich, daß für sie die Formel (10) nicht mehr gilt. Es müssen also zwischen $m = 9.2$ und $m = 14$ andere Einwirkungen hinzugekommen sein, welche die aufgefundenen Regelmäßigkeiten im Verlaufe der Zahlen A_m vernichten. Diese können darin bestanden haben, daß die Raumerfüllung durch die Sterne in großen Entfernungen sich ziemlich rasch ändert und dann eine größere Einwirkung der speziellen Beschaffenheit der Häufigkeitsfunktion φ entstehen muß. Es lag aber nahe, diese Vorstellung mehr zu spezialisieren und anzunehmen, daß die Grenze des Sternsystems in diesen Regionen zu suchen ist, so daß n zwischen 9 und 14 und zwar näher an der zweiten Zahl zu liegen kommt. Denn die A_m zeigen ein verschiedenes Verhalten, je nachdem $m \lesseqgtr n$ ist und wie nach § 1 leicht zu übersehen ist. Im einzelnen konnte aber die Sachlage auf Grund der verfügbaren Daten nur mit Hilfe mehr oder weniger willkürlicher Annahmen verfolgt werden. Es schien mir aber zur Erläuterung der ganzen Betrachtungsmethode nützlich zu sein, beispielsweise eine Annahme vollständig durchzuführen. Als solche habe ich eine Annahme gewählt, die möglichst einfache algebraische Rechnungen erfordert, ohne damit auch nur das Mindeste darüber aussagen zu wollen, ob sie den tatsächlichen Verhältnissen nahe kommt. Diese Annahme war $\varphi(i) =$ const. innerhalb des Intervalls $0 < i < H$ und $\varphi(i) = 0$ außerhalb. Damit ergab sich das Resultat, daß das Sternsystem in der Richtung

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

der Milchstraße etwa doppelt so ausgedehnt ist, wie in der darauf senkrechten Richtung. Die hellsten Sterne erscheinen an der Grenze des Sternsystems als von der Größe 13 bzw. $11\frac{1}{2}$, was bei dem angenommenen Werte von H 1000 bzw. 500 Siriusweiten entspricht. Wenn auch alle Detailangaben auf den benutzten willkürlichen Annahmen, insbesondere auf dem angesetzten Wert von H beruhen und somit hypothetisch sind, so ergibt doch eine genauere Betrachtung, daß das ganze so gefundene Bild, wie sich das Sternsystem darstellt, in den wesentlichen Zügen durch die Unsicherheit der Hypothesen kaum gelitten hat. In mancher Richtung wird das Folgende eine Bestätigung dieser Auffassung bringen.

Das so erhaltene Bild des Sternsystems hatte ich als das „typische" bezeichnet. Es ist durch die Bemerkung entstanden, daß die Sternverteilung im großen und ganzen nicht von der galaktischen Länge abhängt und daß sie in nördlichen galaktischen Breiten angenähert so ist wie in südlichen. Ich habe es in I als eine Hauptaufgabe der Astronomie bezeichnet, zunächst dieses typische Bild mehr zu sichern und auszubauen. Die empirischen Daten erlauben auch jetzt noch nicht die von mir begonnenen Untersuchungen weiterzuführen und man muß sich mit weniger allgemeinen Resultaten begnügen, wenn man zu besser fundierten Ansichten gelangen will. Wie sich das typische Bild auf Mittelwerte der Zahlen A_m für die einzelnen Zonen I bis IX stützt, so kann man weitergehend die Mittelwerte der A_m und auch der π_m für den ganzen Himmel der Betrachtung zu Grunde legen. Es entsteht so ein „schematisches" Sternsystem, dem man also gewissermaßen kugelförmige Beschaffenheit, d. h. vollkommene Symmetrie nach allen Seiten zuschreibt. Seine Eigenschaften in Bezug auf Ausdehnung und Dichtigkeitsverteilung zu untersuchen, wird immerhin einiges Interesse darbieten, wenn man sich dabei auch bewußt bleiben muß, daß man sich dadurch noch mehr von den Tatsachen entfernt. Man gelangt auf diesem Wege nur zur Erkenntnis gewisser mittlerer Eigenschaften des Sternsystems, aber die zu Grunde liegenden empirischen Daten werden eine größere Sicherheit besitzen. In manchen Richtungen liegen Vorarbeiten überhaupt nur in diesem Sinne vor. Es soll zuerst Umschau gehalten werden, was man über die Funktion φ und über die für den ganzen Himmel gebildeten Mittelwerte der Sternanzahlen A_m aussagen kann.

III.

Da die Funktion φ in allen Teilen des Raumes, den das Sternsystem einnimmt, sich gleich verhalten soll, liegt der Versuch nahe, φ aus den bisher direkt gemessenen Parallaxen abzuleiten. Dieser Versuch ist in der Tat von

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Herrn Comstock[1]) und von mir gelegentlich einer im Sommer 1903 gehaltenen Vorlesung gemacht worden.

Nennt man m_0 die Größe eines Sterns, dessen scheinbare Größe m und dessen Parallaxe π Sekunden ist, welche er in der Entfernung einer Siriusweite, entsprechend einer Parallaxe $0\overset{''}{.}2$, haben würde, dann ist:

$$m_0 = m + 5 \log \left(\frac{\pi}{0.2}\right) = m + 3.495 + 5 \log \pi.$$

Ich habe nun vor 6 Jahren das mir zugängliche Material an Fixsternparallaxen sorgfältig gesammelt, die zugehörigen m_0 berechnet und die Anzahlen A der Sterne innerhalb von Intervallen von zwei Größenklassen in m_0 ermittelt. Parallaxenwerte $< 0\overset{''}{.}02$ wurden dabei als völlig illusorisch fortgelassen. Es blieben dann 112 Einzelwerte übrig, die sich nach Maßgabe der Zahlen A in folgender Tabelle verteilten.

$m_0 - 1$	$m_0 + 1$	A	A'	A_1	A_1'
8.0	10.0	10	11	—	—
6.0	8.0	16	30	—	—
4.0	6.0	30	70	29.4	71
2.0	4.0	25	57	23.2	55
0	2.0	15	40	17.1	39
— 2.0	0	10	20	10.9	23
— 4.0	— 2.0	5	7	4.8	6
— 4.6		1	0	0.1	0

Die Zahlen A sind proportional mit

$$\int_{m_0+1}^{m_0-1} \varphi(m)\, d\, m,$$

woraus auf den Verlauf von $\varphi(m)$ geschlossen werden kann.

Man erreicht dies im vorliegenden Falle durch eine einfache Interpolationsformel. Indessen würden nur Täuschungen hervorgerufen werden, wollte man durch eine solche Formel alle vorhandenen A zusammenfassen. Bisher wurden in der Hauptsache nur hellere Sterne und außerdem prozentualiter jedenfalls viel weniger schwache Sterne mit großer Eigenbewegung auf Parallaxe untersucht und es ist also klar, daß bisher die Sterne mit verhältnismäßig großer Leuchtkraft bevorzugt worden sind. Nun wachsen die Zahlen A in der obigen Tabelle, von unten nach oben verfolgt, stark an und man wird

[1]) The luminosity of the fixed stars. Astronomical Journal No. 597. Aug. 1907.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

annehmen dürfen, daß dieses Anwachsen bei Vermehrung des Materials vielleicht noch vergrößert werden wird. Dagegen wird man das Abnehmen der A für $m_0 > 6$ in keiner Weise als reell anzusehen brauchen. Beschränkt man sich aber auf den ersten offenbar noch gesicherten Teil der Kurve, durch welche $\varphi(m)$ dargestellt wird, dann ergibt sich für Werte $m_0 < 6$ etwa:

$$\varphi(m_0) = 7.0\,(1 + 0.22\,m_0). \tag{1}$$

Nach dieser Formel sind die Zahlen A_1 gerechnet, die sich vollkommen befriedigend an die Zahlen A anschließen.

Seitdem ich diese Formel aufgestellt hatte, hat sich das publizierte Material an besser bestimmten Parallaxen erheblich vermehrt. Die vollständige Zusammenstellung verdankt man, wie schon erwähnt, Herrn Comstock, aus der für 235 Sterne die in der obigen Tabelle enthaltenen A' leicht zu entnehmen sind. Herr Comstock führt, abweichend von meiner Bezeichnung, die Leuchtkraft L eines Sternes ein, die so definiert ist: L ist die scheinbare Helligkeit eines Sternes, wenn derselbe aus einer der Parallaxe π entsprechenden Entfernung in eine solche, die durch $\pi = 1''$ gegeben ist, versetzt wird, wobei $L = 1$ die Helligkeit der Sonne ist, falls dieselbe die Parallaxe $\pi = 1''$ hätte. Danach wird also für einen Stern von der scheinbaren Größe m

$$\log L = 0.150 - 0.4\,m - 2\log\pi$$

und das von mir benutzte m_0 hängt mit dem von Herrn Comstock benutzten L durch die Formel zusammen:

$$m_0 = -\tfrac{5}{2}\log L + 3.87.$$

Für die A' gelten dieselben Bemerkungen, die über die A gemacht worden sind. Für kleinere m_0 bis etwa $m_0 = 6$ wird für $\varphi(m_0)$ wiederum ein linearer Ansatz vollständig genügen. Aus mehr zufälligen Gründen habe ich nach einigen Versuchen angesetzt:

$$\varphi(m_0) = 15.55\,(1 + 0.266\,m_0 - 0.002\,m_0^2).$$

Mit diesem $\varphi(m_0)$ wurden nun die Zahlen A_1' berechnet, wobei darauf Rücksicht genommen worden ist, daß $\varphi(m_0)$ immer positiv bleiben muß. Die Übereinstimmung ist den Umständen entsprechend als sehr gut zu bezeichnen, auch das etwas größere Wachstum von $\varphi(m_0)$ für die kleinsten Werte von m_0, welches vorauszusehen war, ist angedeutet. Für Werte von m_0 aber, die größer als 6 sind, bleibt, da diese ganz unberücksichtigt geblieben sind, der Verlauf von φ ganz unbekannt. Für kleinere m_0 dagegen wird, da das wesentlich

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

vermehrte Material kaum eine Änderung ergeben hat, angenommen werden dürfen, daß tatsächlich $\varphi(m_0)$ nahezu durch eine lineare Funktion dargestellt wird. Nach der letzten Formel wird $\varphi(m_0) = 0$ für $m_0 = -3.62$ bzw. -3.76, je nachdem das quadratische Glied mitgenommen wird oder nicht. Ich habe in den folgenden Rechnungen -3.62 genommen. Große Sicherheit wird man diesem Wert nicht zuerkennen, was natürlich nicht außer acht gelassen werden darf.

Trotz der Vorsicht, mit der man die Sicherheit der erhaltenen Resultate zu beurteilen haben wird, wird es sich doch lohnen, mit dem gefundenen linearen Ausdruck für $\varphi(m_0)$ die Rechnungen durchzuführen, selbst wenn man diesen Rechnungen nur eine informatorische Bedeutung zuerkennen will. Und das soll später in der Tat geschehen. Aus der Funktion $\varphi(m_0)$ erhält man die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ aus der Gleichung

$$\varphi(i)\,di = -\varphi(m_0)\,dm_0$$

und da die rechtsstehende Funktion linear also

$$\varphi(m_0) = A + B m_0$$

ist und außerdem $-C \log i = m_0$, so findet man:

$$\varphi(i) = (A + B m_0)\frac{C}{i} = (A - C_1 \log i)\frac{C}{i}.$$

Hier werden A, C und C_1 positive Konstanten sein. Man kann diesen Ausdruck für $\varphi(i)$ offenbar auch schreiben:

$$\varphi(i) = \Gamma \cdot \frac{H}{i} \log \frac{H}{i}.$$

Die Konstante Γ läßt sich nicht bestimmen, da nur ein bestimmter endlicher Teil der Kurve als reell betrachtet wird. H ist die Helligkeit, für welche $\varphi(H) = 0$ wird und entspricht also dem obigen Werte -3.62 in Größenklassen ausgedrückt. Den letzten Ausdruck für $\varphi(i)$ hat, wie ich zu bemerken nicht unterlassen darf, bereits Herr Comstock, a. a. O. aufgestellt.

Bei oberflächlicher Betrachtung scheint eine Bestimmung des Verlaufs von i, die auf das angegebene Intervall beschränkt ist, wenig Wert zu haben. Nun läßt sich aber zeigen, daß die erlangte Kenntnis, insoweit sie nur genügend verbürgt erscheint, ausreicht, um sowohl die Anzahlen A_m als auch die Parallaxen π_m bis zu Sternen der 17. oder 18. Größe herab mit fast ganz ausreichender Genauigkeit anzugeben. Diese Tatsache ist in der Tat sehr wichtig und wird im folgenden demgemäß genügend behandelt werden. Die allgemeinere Bedeutung dieser Tatsache ist schon in den einleitenden Bemerkungen hervorgehoben worden.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

IV.

Mit hinlänglicher Genauigkeit sind gegenwärtig die Anzahlen A_m wohl nur bis etwa $m = 9$ angebbar und zwar eigentlich nur für den nördlichen Himmel. Denn für den südlichen Himmel ist das vorliegende Material noch nicht vollständig, und was die hellen Sterne betrifft, auch nicht einwandfrei. In zwei Abhandlungen [1]) hatte ich mir die Aufgabe gestellt, im Bereiche der Bonner Durchmusterung die A_m in ihrer Abhängigkeit von der Lage der betrachteten Gegend zur Milchstraße festzustellen. Diese Aufgabe hat sich als eine ziemlich verwickelte gezeigt, wenn es sich um einigermaßen genaue Werte handeln soll, weil die Helligkeitsschätzungen der Durchmusterung mit größeren zufälligen, namentlich aber auch systematischen Fehlern behaftet sind. Der Feststellung der Anzahlen A_m muß also eine eingehende Untersuchung dieser Fehler vorangehen. Das letztere geschah in der Arbeit (*a*), das zweite in der Arbeit (*b*). Indessen zeigte sich dabei, daß die Feststellung der Zahlen A_m für die mit freiem Auge sichtbaren Sterne nicht mit genügender Sicherheit vorgenommen werden kann, da hier die Fehler der Schätzungen in der B. D. in der Tat nicht mit der erforderlichen Genauigkeit festgestellt werden können, so daß in der Hauptsache die B. D. nur im Intervall $m = 6$ bis $m = 9$ einwandfreie Resultate gibt. Für die hellen Sterne ist nun aber seitdem (1898) eine Abhilfe geschaffen, indem vollständige photometrische Verzeichnisse dieser Sterne erschienen sind. Es ist die 1901 erschienene Arbeit des Herrn Pickering [2]) und die große Potsdamer photometrische Durchmusterung, die die Feststellung der A_m bis zu $m = 7.0$ erlauben wird. In definitiver Reduktion ist das letzte Werk erst vor kurzem erschienen. Die Abzählungen für die einzelnen Zonen sind mit Umständlichkeiten verbunden und konnten noch nicht ausgeführt werden.

Herr Pickering hat selbst die Ermittlung der Anzahlen A_m auf Grund seiner Kataloge vorgenommen.[3]) Hier kommen nur die auf den ganzen Himmel bezüglichen in Frage. Die von ihm gegebenen Abzählungen der Anzahlen der Sterne bis zur Größe 6.75 bilden sicherlich einen schätzenswerten Beitrag; er beschränkte sich aber nicht auf die Diskussion dieser Abzählungen, sondern gab auch die Anzahlen A_m bis zu $m = 13.5$. Seine endgültigen Werte, die

---

[1]) (a) Über die Größenklassen der teleskopischen Sterne der Bonner Durchmusterungen. Sitzungsberichte der Münchener Akademie, März 1898.

(b) Zur Verteilung der Fixsterne am Himmel. Ebenda, Dezember 1899.

[2]) A photometric Durchmusterung. Annalen der Harvard-Sternwarte XLV. Wird im folgenden mit P_{II} bezeichnet.

[3]) Distribution of stars. Harvard Annals, XLVIII No. 5.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

durch Interpolationen und Ausgleichungen gewonnen sind, sind aber nicht nur als unsicher sondern auch als nichtzutreffend anzusehen. Auf die Art, wie Herr Pickering die Abhängigkeit der A_m von der Lage zur Milchstraße untersucht, braucht nicht näher eingegangen zu werden, da es genügt, auf meine oben zitierten Arbeiten hinzuweisen.

Auch sollen hier nur die für den ganzen Himmel genommenen Anzahlen A_m in Frage kommen. Zunächst ist nun zu bemerken, daß es sich bei genaueren Festsetzungen, die hier möglich sind, empfehlen dürfte, für die hellen Sterne nicht die Zahlen für den ganzen Himmel zu nehmen, sondern nur die Sterne auf der nördlichen Hemisphäre zu berücksichtigen, denn nur dann sind die so gewonnenen Resultate mit denen, die aus der B. D. folgen, zu vergleichen. Auch dürften die photometrischen Festlegungen an südlichen Sternen, die von Herrn Pickering benutzt worden sind, nicht die gleiche Sicherheit besitzen. Was das aus der B. D. fließende Material betrifft, das allein die Zahlen A_m für m zwischen 6 und 9 bestimmt, so hat Herr Pickering meine Untersuchungen gänzlich ignoriert und deshalb sind seine Zahlen für genauere Feststellungen nicht zu gebrauchen. Ich habe gezeigt, daß sich die A_m aus der B. D. bis zu $m = 9.2$ feststellen lassen. Herr Pickering geht aber viel weiter, indem er alle in der B. D. vorkommenden Sterne einbezieht und einfach festsetzt, daß, wie photometrische Beobachtungen ergeben haben, im Durchschnitt die Größen 9.5 der B. D. gleich sind 10.65 der photometrischen Skala. Es soll also die Zahl der in der B. D. überhaupt enthaltenen Sterne gleich sein der Zahl der Sterne $A_{10.65}$. Nun ist aber allgemein bekannt, daß die B. D. nur die Sterne bis etwa zur 9.2 Größe (photometrisch) ziemlich vollständig anführt und die schwächeren ganz unvollständig sind. Herr Pickering muß also für $m > 9.2$ gänzlich falsche A erhalten und zwar zu kleine.

Nicht geringere Bedenken stellen sich den Resultaten gegenüber, die Herr Pickering in Bezug auf die schwachen Sterne von der 10. oder 11. Größe herab anführt. Die Zahlen beruhen auf Abzählungen von Karten, die Herr Hagen für die Umgebungen von veränderlichen Sternen gezeichnet hat. Abgesehen von allem anderen, dürfte der Schluß kaum als ausreichend betrachtet werden können, der von 1600 abgezählten Sternen auf 4—5 Millionen, die Herr Pickering für $A_{13.5}$ angibt, führt. Herr Pickering hat übrigens seine Einzelresultate durch graphische Ausgleichungen zu verbinden gesucht. Ich glaube aber nicht, daß man diese Ausgleichung bei näherer Betrachtung anders als fast vollständig willkürlich ansehen wird können. Danach dürfen die Resultate des Herrn Pickering bei allen strengeren Untersuchungen nicht benutzt werden. Den vorstehenden Bemerkungen gemäß habe ich deshalb

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

die nördlich vom Äquator stehenden Sterne nach P_{II} von neuem abgezählt und gefunden:

m	A_m	$\log A_m$	$\log \alpha_m$
1.5	11	1.041	0.214
2.00	18	1.255	0.301
2.50	36	1.556	0.257
3.00	65	1.813	0.212
3.50	106	2.025	0.308
3.75	151	2.179	0.243
4.25	264	2.422	0.264
4.75	485	2.686	0.286
5.25	938	2.972	0.261
5.75	1710	3.233	0.248
6.25	3030	3.481	0.256
6.75	5457	3.737	

(1)

In der Reihe der $\log \alpha_m = \log A_m - \log A_{m\frac{1}{3}}$ wird man gewiß nicht eine fortschreitende Veränderung erblicken können. Da vor kurzem der Potsdamer Generalkatalog erschienen ist, kann ich hier, ohne das Material weiter zu bearbeiten, einen Vergleich mit den zuletzt angeführten Pickeringschen Werten herstellen. Die nötigen Abzählungen, bei denen alle Variablen fortgelassen worden sind, hat Herr cand. math. Georg Schwarz ausgeführt und aus ihnen ergab sich nach der Potsdamer Durchmusterung:

	A_m	$\log A_m$	$2 \log \alpha_m$
$m < 2.00$	10	1.000	0.663
$m = 3.00$	46	1.663	0.590
4.00	179	2.253	0.512
5.00	582	2.765	0.511
6.00	1889	3.276	0.501
7.00	5990	3.777	

Eine Erklärung der Abweichungen für $m < 3.00$ zwischen Potsdam und Pickering mag hier nicht versucht werden. Bei so kleinen Zahlen A, wie sie hier auftreten, wird man auf sie kein großes Gewicht legen. Im allgemeinen stimmen dann die beiderseitigen Resultate befriedigend überein, wenn man die Potsdamer Größen auf P_{II} reduziert. Nach Band XVII der Potsdamer Publikationen ist Potsdam — P_{II} etwa $0^m.16$ anzusetzen. Um also auf P_{II} zu reduzieren, hat man die $\log A_m$ um 0.082 etwa zu vermehren. So ergibt sich die Gegenüberstellung:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

m	Potsd.	P_{II}
3.00	1.745	1.813
4.00	2.335	2.301
5.00	2.847	2.829
6.00	3.358	3.357
7.00	3.859	3.865

In der oben (S. 23) zitierten Abhandlung (b), S. 390, habe ich die Korrektionen abgeleitet, welche an die Logarithmen der Sternzahlen für die einzelnen Zonen I—VIII, insoweit sie in der nördlichen B. D. vertreten sind, anzubringen sind Es erfordert nur eine einfache Rechnung, hieraus die Anzahlen A_m für den ganzen nördlichen Himmel abzuleiten. Es ergibt sich so:

m	$\log A_m$
6.5	3.578
7.5	4.093
9.2	4.967

(2)

Der Anschluß dieser als homogen zu betrachtenden Wertreihe an die aus P_{II} gewonnene (1) ist nicht ganz befriedigend und es wird sich lohnen, nach einer Aufklärung zu suchen. Man erhält nämlich:

$$\log A_{6.75} = 3.707 \text{ aus B. D.}$$
$$\log A_{6.75} = 3.737 \text{ aus } P_{II}.$$

Um einen Beitrag zur Aufklärung der Differenz in $\log A_{6.75}$

$$P_{II} - \text{B. D.} = + 0.030$$

zu erhalten, wird zuerst auf einen Umstand hinzuweisen sein, der gewöhnlich übersehen wird, den ich aber bereits in (b) berücksichtigt habe.

Infolge der Ungenauigkeit der photometrischen Messungen werden die durch direkte Abzählungen gefundenen A_m fehlerhaft und zwar zu groß sein, weil eine vollkommene Kompensation der Messungsfehler nicht eintreten kann infolge des Umstandes, daß die A_m stark mit m anwachsen. Schwächere Sterne als die von der festgesetzten Größe m_0 werden heller als m_0 geschätzt und umgekehrt hellere Sterne werden schwächer als von der Größe m_0 angegeben. Die Anzahl I der ersteren muß von der abgezählten Anzahl A'_{m_0} subtrahiert, die Anzahl II der letzteren muß addiert werden, um die richtige Anzahl A_{m_0} zu bekommen. Es ist also:

$$A_{m_0} = A'_{m_0} - \text{I} + \text{II}$$

Es sei nun $c_m \cdot dm$ die Anzahl der Sterne, die faktisch zwischen den Größen m und $m + dm$ liegen. Ferner folgen die bei photometrischen Messungen

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

gemachten Messungen einem Fehlergesetz $\varphi(\Delta)$, wo immer $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta = 1$ angenommen werden kann. Man findet dann sofort:

$$\mathrm{I} = \int_{m_0}^{\infty} c_m\, \varphi(m - m_0)\, dm$$

$$\mathrm{II} = \int_{-\infty}^{m_0} c_m\, \varphi(m - m_0)\, dm.$$

Nun ist die näherungsweise Giltigkeit des Gaußschen Fehlergesetzes für viele Beobachtungen der betrachteten Art erfahrungsmäßig festgestellt. Man kann also mit einiger Berechtigung setzen:

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \Delta^2}.$$

Ferner ist, zum mindesten sehr nahe:

$$\log \frac{A_m}{A_{m_0}} = c \cdot (m - m_0),$$

wo $c = 0 \cdot 512$ angenommen werden kann. Nennt man also $\varepsilon = 0.434\ldots$, so wird

$$A_m = A_{m_0} \cdot e^{\frac{c}{\varepsilon}(m - m_0)}$$

und daraus folgt:

$$c_m = \frac{d A_m}{d m} = A_{m_0} \cdot \frac{c}{\varepsilon} \cdot e^{\frac{c}{\varepsilon}(m - m_0)}.$$

Es ist also:

$$\mathrm{I} = A_{m_0} \frac{c h}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \int_{m_0}^{\infty} e^{\frac{c}{\varepsilon}(m - m_0) - h^2 (m - m_0)^2} \cdot dm$$

$$\mathrm{II} = A_{m_0} \frac{c h}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{m_0} e^{\frac{c}{\varepsilon}(m - m_0) - h^2 (m - m_0)^2} \cdot dm.$$

Dieses Resultat kann man auch schreiben:

$$\mathrm{I} = A_{m_0} \frac{c}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{c^2}{4 h^2 \varepsilon^2}} \int_{-\frac{c}{2 h \varepsilon}}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

$$\mathrm{II} = A_{m_0} \frac{c}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{c^2}{4 h^2 \varepsilon^2}} \int_{\frac{c}{2 h \varepsilon}}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Setzt man also:

$$\nu = \frac{c}{2h\varepsilon}$$

so wird:

$$A'_{m_0} = A_{m_0}\left[1 + \frac{2c}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \cdot e^{\nu^2}\int_0^{\nu} e^{-y^2}dy\right]. \tag{4}$$

Führt man den mittleren Fehler μ an Stelle von h ein:

$$\frac{1}{h} = \mu\sqrt{2},$$

so wird:

$$\nu = \frac{c\mu}{\varepsilon\sqrt{2}}.$$

Ist schließlich ν genügend klein, so ergibt sich als Näherungsformel:

$$A_{m_0} = A'_{m_0}\left(1 - \frac{2c\nu}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\right) = A'_{m_0}\left(1 - \frac{c^2\sqrt{2}}{\varepsilon^2\sqrt{\pi}} \cdot \mu\right).$$

Die so definierten Korrektionen sind im allgemeinen keineswegs zu vernachlässigen, insbesondere wenn es sich um genauere Ermittlungen handelt, die doch gerade photometrische Kataloge ergeben sollen. Die Ermittlung von μ, das sich auch mit der Größe m ändern wird, hat also nicht bloß den Wert, die Genauigkeit der Beobachtungen kennen zu lernen.

Mit dem obenerwähnten Wert $c = 0.512$, $\nu = 0.845\,\mu$ ergibt sich:

$$A_{m_0} = A'_{m_0}(1 - 1.109\,\mu). \tag{5}$$

Für die Potsdamer Durchmusterung darf man im Mittel μ zu 0.056 ansetzen. Dann folgt:

$$\log A_{m_0} = \log A'_{m_0} - 0.028.$$

Noch eine andere, allerdings überaus geringfügige Korrektion ist anzubringen. Die photometrischen Kataloge (Potsdam, Pickering) geben die Größen auf zwei Dezimalstellen. Man kann annehmen, daß also z. B. $A_{7.0}$ alle Sterne nicht bis zur Größe 7.00, sondern bis 7.005 enthält, denn erst wenn die Größe 7.006 wird, wird sie als 7.01 notiert. Danach muß also der Logarithmus der abgezählten Anzahl A'_{m_0} um $\frac{1}{200} \times 0.512 = 0.003$ verkleinert werden. Es wären also die nach der Potsdamer Durchmusterung abgezählten Werte im Logarithmus um $-0.028 - 0.003 = -0.031$ zu korrigieren. Für $\log A_{6.75}$ würde aus Potsdam folgen $3.731 - 0.031 = 3.700$, also so nahe überein-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

stimmend mit dem aus B. D. hervorgehenden 3.707, wie nur gewünscht werden kann und nach der Unsicherheit der Reduktion kaum erwartet werden konnte. Man wird daraus einen Beweis dafür ableiten, daß meine aus B. D. abgeleiteten Werte für die log A_m sehr nahe richtig sein müssen. Denn die Unsicherheit bei ihrer Aufstellung erstreckte sich bei dem komplizierten Reduktionsverfahren hauptsächlich auf die absoluten Werte der Logarithmen, während die log α kaum davon alteriert werden dürften. Um demnach die Reihe (1) an die Werte (2) anzuschließen, ist man berechtigt, die log A_m in (1) um — 0.030 zu korrigieren und die Zulässigkeit dieser Korrektion dürfte bis auf kleine Restbeträge, die gegenwärtig unkontrollierbar sind, durch die ausgeführten Betrachtungen erwiesen sein. Aus der Notwendigkeit dieser Korrektion folgt noch nicht, daß μ bei P_{II} denselben Betrag hat, wie in Potsdam, obwohl sich auch gegen diese Annahme nichts Wesentliches einwenden ließe, solange nicht umfangreiche Rechnungen ausgeführt sind. Vielmehr können auch konstante Differenzen in den Größenangaben der drei Kataloge, P_{II}, H. R. und Potsdam, von ganz wenigen hundersteln Größen, die in beiden bis jetzt ausgeführten Vergleichungen nicht konstatiert werden konnten, vorhanden sein.

Meine Angaben (2) basieren, wie noch einmal erwähnt werden mag, auf dem System der Harvard-Revision. Ich werde eine passende Auswahl aus den Werten (1) und dann die Reihe (2) weiter unten zusammenstellen. Wie schon oben konstatiert wurde, sollen die A_m mit 2 multipliziert werden. Ich werde demnach den log A_m in (1) 0.301 — 0.030 = 0.271 und log A_m in (2) 0.301 hinzufügen.

Für die analogen Anzahlen A_m für schwächere Sterne als von der Größe 9.2 liegt auch heute nur noch ein ziemlich spärliches Material vor, wenn von den Sterneichungen der beiden Herschel abgesehen wird, die ich auch in I benutzt habe. Man darf also nicht erwarten, diese Anzahlen mit einer Sicherheit zu bestimmen, die auch nur entfernt an die heranreicht, die für die helleren Sterne durch die vorstehenden Zusammenfassungen erreicht worden ist. Indessen ist es doch unter allen Umständen von hohem Interesse, weitere Daten abzuleiten, auch wenn dieselben nur eine gewissermaßen provisorische Gültigkeit beanspruchen können. Dies ist nun ermöglicht durch die vielfachen Abzählungen schwacher und schwächster Sterne, die neuerdings Herr Kapteyn [1]) veröffentlicht hat.

Herr Kapteyn selbst überschätzt wohl kaum die Zuverlässigkeit des von ihm mit so großem Fleiße zusammengebrachten Materials. Sicherlich genügt

---

[1]) Publications of the astronomical laboratory at Groningen, No. 18, 1908.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

es nicht, um bis etwa $m = 15$ die mittleren Anzahlen auf einem Quadratgrad und noch weniger die Abhängigkeit dieser Zahlen von der galaktischen Breite mit einer genügenden Sicherheit festzustellen, um daraus Verteilungsgesetze abzuleiten. Denn diese geforderte Sicherheit ist, wie die vorstehenden Bemerkungen gezeigt haben dürften, nicht unerheblich und es dürfen nur ganz wenige Einheiten der zweiten Dezimale in den log A_m zweifelhaft bleiben. Auch der Umstand, daß Herr Kapteyn mit großem Aufwand von Arbeit die gewonnenen Zahlen durch Interpolationsformeln darzustellen unternommen hat, dürfte nicht ganz entsprechen. Denn hierdurch werden, wie schon erwähnt wurde, etwaige Gesetzmäßigkeiten verwischt, deren Aufdeckung erfolgen soll, auch verleiten solche Formeln zu ihrer Anwendung weit über das Intervall hinaus, für welche sie abgeleitet worden sind, während dort in den meisten Fällen die Resultate solcher Extrapolationen gar keine Beziehung zu den tatsächlichen Verhältnissen mehr haben. Indessen lassen die Zahlen Herrn Kapteyns die zwei von mir in I ausgesprochenen Gesetze deutlich erkennen: 1. (S. 576) Die Anzahl der Sterne wächst mit der Größe beträchtlich langsamer, als eine gleichförmig räumliche Verteilung von Sternen mit gleicher Leuchtkraft erfordert. 2. (S. 579) Die Zahl der Sterne nimmt mit der Sterngröße immer stärker zu, je näher die betrachtete Himmelsgegend der Milchstraße ist.

Ich beschränke mich hier, wie schon gesagt, auf die Anzahl der Sterne A_m am ganzen Himmel. Die Einschränkung, daß, wie bisher, nur Sterne am nördlichen Himmel genommen und ihre Zahl mit 2 multipliziert wird, ist hier nicht mehr durchführbar, aber im wesentlichen habe ich doch nur solche Sterne herangezogen, soweit dies möglich war, ohne die Sicherheit der Resultate gar zu sehr zu gefährden. Es wird sich nur darum handeln, Daten zu beschaffen, die zeigen können, ob sich die von mir vertretenen Ansichten mit ihnen vereinigen lassen oder ob dies nicht der Fall ist. Es wird sich zeigen, daß das erstere zutrifft.

Die von Herrn Kapteyn ausgeführten Abzählungen erlauben nun in der Tat, diese Daten herbeizuschaffen. Allerdings bleibt man im ungewissen, welche Zuverlässigkeit diese besitzen. Ich habe aber aus verschiedenen Gründen nur eine beschränkte Auswahl aus den Kapteynschen Abzählungsresultaten benutzt und auch diese in anderer Gruppierung. Zuerst habe ich die einzelnen Felder nach den von mir benutzten, nach der Milchstraße orientierten Zonen im Mittel vereinigt und daraus dann die Zahlen A_m abgeleitet. Was die Fortlassungen betrifft, so sind diese nicht nur von dem Gesichtspunkte aus beurteilt worden, daß Sterne nördlich vom Äquator bevorzugt werden sollten. Alle mit Hilfe der südlichen B. D. gewonnenen Abzählungen habe ich auch deshalb fort-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

gelassen, weil die photometrischen Feststellungen hier sich nach meinen Erfahrungen nicht mit genügender Sicherheit — wenigstens gegenwärtig — machen lassen. Die Felder Nr. 101 bis 120 blieben fort, weil diese ausschließlich sehr südliche Deklinationen haben und außerdem, weil Herr de Sitter sehr abweichende Skalen für die photometrisch bestimmten Größen in Gegenden der Milchstraße und fern von ihr gefunden hat, was ohne nähere Aufklärung die Resultate als zweifelhaft erscheinen lassen muß. Die sich auf die Größen 12—14 beziehenden Felder habe ich fortgelassen, weil in dieses Intervall zum Teil die Grenzgröße n fällt oder fallen könnte und eine Sonderung nicht ohne präokkupierende Hypothese gemacht werden kann. Außerdem liegen die Herschelschen Sterne an der Grenze dieses Intervalls und diese geben ein sicheres Resultat. Es blieben so 76 Gegenden übrig und außerdem die so wichtigen Herschelschen Sterneichungen. Hat man die Sternanzahlen δ auf einem Quadratgrad für verschiedene Größen m, so fragt es sich, wie die Mittelbildung zu erfolgen hat. Sind die einzelnen m, die zu einem Mittelwert verbunden werden sollen, nur wenig voneinander verschieden, so liegt kein Bedenken vor, dem arithmetischen Mittel des δ das arithmetische Mittel des m zuzuordnen. Sind aber die einzelnen m sehr verschieden, dann würde es besser sein, die arithmetischen Mittel der log δ dem Mittelwert von m entsprechen zu lassen, wenn natürlich die δ nicht zu klein und nicht allzusehr verschieden ausfallen. Denn bis zu $m = 12$ etwa ist der log δ proportional mit m und darüber hinaus ist innerhalb nicht sehr großer Intervalle ein ähnliches Verhalten näherungsweise zu erwarten. Es ist deshalb wohl ein kombiniertes Verfahren am zweckmäßigsten. In der Tat habe ich innerhalb Differenzen von 0.5 Größen das arithmetische Mittel des δ genommen, dann aber die Logarithmen dieser Mittelwerte mit Rücksicht auf die Gewichte im Mittel vereinigt. Es wird keiner Rechtfertigung bedürfen, daß die Ausdehnung der einzelnen Stellen nicht durch Anbringung von Gewichten berücksichtigt worden ist.

Die Zusammenfassung der Sterne von der Größe 10.0 bis 12.0 in der angedeuteten Weise ergab:

Γ	Zone	m	log δ	a	red.	log $F_{11.16}$	log f	log A
15	V	11.01	1.910	0.53	+ 0.080	1.990	3.855	5.845
13	IV u. VI	11.16	1.541	0.53	0	1.541	4.129	5.670
7	III u. VII	11.37	1.471	0.50	— 0.105	1.366	4.040	5.406
18	II u. VIII	11.39	1.571	0.46	— 0.106	1.465	3.855	5.320
1	I u. IX	10.15	0.690	0.41	+ 0.414	1.104	3.396	4.500
Summe 54						für $m = 11.16$, log $A = 6.221$		

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Γ gibt die Zahl der benachbarten Gegenden, der Wert α wurde meinen früheren Arbeiten gemäß benutzt zur Reduktion „red.“, f ist Anzahl Quadratgrade, die die betreffende Zone enthält.

Zur Vergleichung sei angeführt, daß die Mitnahme der Cap-de Sitterschen Sterne aus 64 Gegenden auf dieselbe Weise reduziert ergab:

$$\text{für } 11^{m}.00, \ \log A = 6.135,$$

also ein fast (bis auf vier Einheiten der letzten Stelle) genau mit dem früheren übereinstimmendes Resultat. Hierbei wurde den Angaben des Herrn Kapteyn entsprechend die Größe um -0.10 am Pol der Milchstraße und um $+0.09$ in ihr korrigiert. Es scheint, daß die aus sieben Gegenden stammende, den Zonen III und VII zugehörigen δ zu klein sind, da δ für die nächstfolgende Zone zunimmt, während es abnehmen sollte und deshalb wird auch der abgeleitete Logarithmus für A voraussichtlich etwas zu klein sein.

Das zweite Resultat bezieht sich auf Sterne, für die $m \geqq 14.0$ ist.

Γ	Zone	m	$\log \delta$	red.	$\log A$
6	V	14.66	3.527	+ 0.054	7.436
7	IV u. VI	14.84	3.031	0	7.160
4	III u. VII	14.59	2.522	+ 0.075	6.637
2	II u. VIII	14.28	2.279	+ 0.168	6.302
3	IX	14.29	2.281	+ 0.165	5.842
Summe 22			für $m = 14.84$, $\log A = 7.688$		

Die Reduktion wurde mit $\log \alpha = 0.30$ ausgeführt. Dieser Wert ist nicht sehr sicher, was aber gegenüber den anderen Unsicherheiten nicht in Frage kommt.

Der zuletzt abgeleitete Wert beruht in der Hauptsache auf photographischen Aufnahmen, die Herr J. A. Parkhurst von der Umgebung veränderlicher Sterne angestellt hat, während er Sterne und darunter die allerschwächsten am 40 Zöller des Yerkes-Observatory photometrisch festlegte. Benutzt wurde dabei ein Keil, der das Licht des künstlichen Vergleichsterns meßbar abschwächte. Es lassen sich Annahmen machen, welche dafür sprechen, daß der so gewonnene Wert von $\log A$ eher zu groß als zu klein sein wird. Sicher aber dürften ähnliche Aufnahmen in größerer Zahl geeignet sein, die Kenntnis über die scheinbare Verteilung sehr schwacher Sterne zu fördern.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß nach meinen Untersuchungen (I, S. 592) für die Herschelschen Sterne $\log A = 7.433$ anzunehmen ist und die zugehörige Größe m darf nach Herrn Kapteyn in recht sicherer Bestimmung zu 13.90 angesetzt werden.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

V.

Wenn nunmehr die im letzten Abschnitt erhaltenen Werte von $\log A_m$ zusammengestellt werden, erhält man folgende Tabelle:

m	$\log A_m$	R	$B-R$
1.5	1.312	1.310	+ 2
2.5	1.827	1.824	+ 3
3.75	2.450	2.466	— 16
4.75	2.957	2.980	— 23
5.75	3.504	3.494	+ 10
6.75	4.008	4.008	0
7.50	4.394	4.394	0
9.20	5.268	5.265	+ 3
11.16	6.222	6.272	— 50
13.90	7.433	7.448	— 15
14.84	7.688	7.681	+ 7

Die Wertreihe für $\log A_m$ läßt sich, wie auf den ersten Blick ersichtlich ist, bis zu $m = 11.16$ als lineare Funktion von m darstellen. In der Tat gibt die Formel:

$$\log A_m = 4.394 + 0.514\,(m - 7.5),$$

die in der Tabelle unter R stehenden Werte und die mit $B - R$ bezeichneten Abweichungen. Diese Differenzen sind genügend klein, insbesondere zeigen sie keinen ausgesprochenen Gang. Die etwas größere Abweichung bei 11.16, die einer Veränderung in m im Betrage von noch nicht 0.1 Größenklasse entspricht, dürfte in Anbetracht der Ungenauigkeit des betreffenden Wertes von $\log A_m$ keine Bedenken erregen und es wird also als gute Näherung die Formel angesehen werden können:

$$\left.\begin{aligned} A_m &= c\,h_m^{\frac{\lambda-3}{2}}, \\ \text{wo:} \quad \frac{3-\lambda}{5} &= 0.514; \quad \lambda = 0.430 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Damit ergeben aber die in Art. 1 ausgeführten Betrachtungen:

$$\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-0.43} \tag{2}$$

und der weitere Verlauf der Werte A_m läßt sich mit der Annahme eines endlich begrenzten Sternsystems vereinigen, in welchem die eingeführte Stern-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

größe n, die bei gewissen Annahmen die Größe der hellsten Sterne an der Grenze des Sternsystems angibt, die Ungleichheit erfüllt:

$$11.16 < n < 13.90.$$

Zur weiteren Verfolgung ist die Kenntnis der Häufigkeitsfunktion φ nötig, während sie bei der Feststellung der Gleichungen (1) und (2) nicht erforderlich war. Nach den Auseinandersetzungen in Art. III wird man es aber als gerechtfertigt ansehen, wenn man, wenigstens zunächst, die Funktion

$$\varphi(i) = \frac{H}{i} \log \frac{H}{i} \tag{3}$$

zur Anwendung bringt. Eine solche Form kann, da φ (0) unendlich wird, nur innerhalb eines bestimmten endlichen Intervalls gültig sein und in der Tat wurde sie nur für Werte von i, die den Sterngrößen — 3.6 bis etwa 6 entsprechen, als zulässig erkannt. Es muß deshalb, wie schon in Art. III erwähnt wurde, $\varphi(i)$ bis auf einen konstanten Faktor unbestimmt bleiben und man kann deshalb nach Belieben den natürlichen oder Briggschen Logarithmus nehmen. Es soll, wenn nicht das Gegenteil besonders erwähnt wird, der natürliche Logarithmus gemeint sein. Nach den Betrachtungen des Art. III war es wahrscheinlich, daß außerhalb des Gültigkeitsbereiches die Formel (3) zu große Werte für φ angibt, für genügend kleine i ist das selbstverständlich der Fall. Trifft dieser Sachverhalt zu, dann werden die berechneten A_m für $m > n$ zu groß ausfallen, wenn die untere Grenze für ϱ im ersten Integral der 2. Formel (III) in Art. I gleich Null angenommen wird und sie werden zu klein ausfallen, wenn man die erstere Grenze so wählt, daß nur größere i, als der Größe 6 entsprechen, vorkommen. Dadurch kann man die Maximalfehler abschätzen, die durch die Begrenztheit des Gültigkeitsintervalls für die durch (3) definierte Funktion entstehen, was ein sehr wichtiger Umstand ist, denn sonst wäre die Anwendbarkeit von (3) ganz problematisch. Dieser prozentuale Fehler wird also wesentlich kleiner als X sein, wenn

$$\frac{A_m}{A_m^0} = 1 - X$$

gesetzt wird. Dabei ist

$$A_m = \Gamma_1 \int_{\sqrt{\frac{H}{h_0}}}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} r^{2-\lambda}\, dr \int_{h_m r^2}^{H} \frac{H}{i} \log \frac{H}{i}\, di$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

und A_m^0 der Werth von A_m, wenn die untere Grenze des äußeren Integrals Null wird. h_0 muß so bestimmt werden, daß i in Größenklassen ausgedrückt kleiner als 6.0 bleibt. Zunächst wird, wenn noch $\Gamma = \frac{H}{2} \cdot \Gamma_1$ gesetzt wird:

$$A_m = \Gamma \int_{\sqrt{\frac{H}{h_0}}}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} r^{2-\lambda} d r \left(\log \frac{H}{h_m r^2} \right)^2$$

und wenn man die Formeln verwendet:

$$\int r^n \log r \, d r = \frac{r^{n+1}}{n+1} \log r - \frac{r^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\int r^n (\log r)^2 \, d r = \frac{r^{n+1}}{n+1} (\log r)^2 - \frac{2}{(n+1)^2} r^{n+1} \log r + \frac{2 r^{n+1}}{(n+1)^3},$$

ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} A_m^0 &= \frac{\Gamma}{3-\lambda} \cdot \left(\frac{H}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \left\{ \left(\log \frac{h_n}{h_m} + \frac{2}{3-\lambda} \right)^2 + \frac{4}{(3-\lambda)^2} \right\} \\ X &= \left(\frac{h_n}{h_0}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \frac{\left(\log \frac{h_0}{h_m} + \frac{2}{3-\lambda} \right)^2 + \frac{4}{(3-\lambda)^2}}{\left(\log \frac{h_n}{h_m} + \frac{2}{3-\lambda} \right)^2 + \frac{4}{(3-\lambda)^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Die hier vorkommenden Logarithmen sind natürliche. Nennt man allgemein m_0 die Sterngröße, welche die Gültigkeit der Formel (3) nach oben begrenzt, ν die der Maximalhelligkeit H entsprechende Größe, so muß für die untere Grenze r_0 im Integrale von r

$$h_m r_0^2 = h_{m_0}$$

angenommen werden und da $r_0^2 = \frac{H}{h_0}$, so wird:

$$\frac{h_0}{h_m} = \frac{H}{h_{m_0}}.$$

Ist $\varepsilon = 0.43429$, so bestehen demnach die Formeln:

$$\log \frac{h_0}{h_m} = \frac{0.4}{\varepsilon} \cdot (m_0 - \nu)$$

$$\log \frac{h_n}{h_m} = \frac{0.4}{\varepsilon} \cdot (m - n).$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Im speziellen ist dem früheren zufolge anzunehmen $m_0 = 6$, $\nu = -3.62$; $\lambda = 0.43$. Damit ergibt sich folgendes:

$m-n$	X	brigg log $(1+X)$
0	0.001	0.000
1	1	0
2	2	1
3	3	1
4	6	3
5	13	6
6	32	14
7	80	33
8	0.205	0.081

Aus diesen Zahlen geht hervor, daß man bis zu $m = 18$ etwa die Anzahlen A_m so berechnen kann, als ob die angenommene Form für $\varphi(i)$ eine unbegrenzte Gültigkeit hätte, ohne einen bemerkbaren Fehler zu begehen, da n ungefähr $= 12$ ist. Zur Ableitung des Wertes von n sei folgendes bemerkt: nennt man m und m' zwei Größen, die den Bedingungen $m' < n$ und $m > n$ genügen, so ist nach den obigen Formeln

$$A_{m'} = c \cdot h_{m'}^{\frac{\lambda-3}{2}}$$

und:

$$\log \frac{A_n}{A_{m'}} = (n - m')\frac{(3-\lambda)}{5} = \beta$$

$$\frac{A_m}{A_n} = Y = \frac{1}{2} + \left[\frac{3-\lambda}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{0.4}{\varepsilon}(m-n) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$\log \frac{A_m}{A_{m'}} = \beta + \log Y.$$

Da eine genauere Ausgleichung nach diesen Formeln ziemlich unnötig wäre, habe ich durch einfache Versuche eine genügende Darstellung der zu Grunde gelegten Werte A_m zu erhalten gesucht. Es ergab sich so $n = 11.91$. Die Anzahl $A_{9.2}$ ist sehr sicher bestimmt, ich bin deshalb von $m' = 9.2$ ausgegangen. Das Resultat der Rechnung ist in der obigen Tabelle unter R angegeben. Die übrigbleibenden Abweichungen $B - R$ lassen eine, so kann man in Anbetracht der Unsicherheit der empirischen Daten sagen, vollständige Übereinstimmung erkennen. Es seien nun noch die Anzahlen A_m für $m > n$ angeführt in dem Umfange, als sie sich der obigen Betrachtung gemäß bis auf einige Einheiten der letzten Stelle verbürgen lassen.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

m	$\log A_m^0$	Δ
11.91	6.661	
		459
12.91	7.120	
		332
13.91	7.452	
		245
14.91	7.697	
		193
15.91	7.890	
		159
16.91	8.049	
		136
17.91	8.185	

Die Anzahlen A_m wachsen zuletzt nur langsam, aber schließlich wird A_m^0 für $m = \infty$ doch unendlich, was eine Folge davon ist, daß $\varphi(i)$ für $i = 0$ unendlich wird. Da aber die berechneten Zahlen A_m^0 für $m > 18$ zuerst unzuverlässig, später ganz illusorisch werden, kann über den Grenzwert A_∞^0, also über die Zahl aller sichtbaren Sterne, nichts ausgesagt werden, solange nicht die Funktion φ in ihrem Verlaufe für kleine i bekannt ist. Die Gesamthelligkeit aller dieser unendlich vielen Sterne aber ist endlich und zwar sehr klein. Dabei macht das Gesamtlicht der schwächsten Sterne, etwa von $m = 18$ ab, nur wenig aus und man überzeugt sich leicht, daß unter den gleichen Voraussetzungen, wie früher, die Gesamthelligkeit H höchstens um wenige Prozente unrichtig, und zwar wahrscheinlich zu groß, gefunden wird, wenn man die Funktion φ als in ihrem Gesamtverlauf durch (3) definiert ansieht.

Das von den Sternen $m > n$ gelieferte Gesamtlicht ist nun:

$$H_2 = -\int_0^{h_n} \frac{d A_m}{d h_m} \cdot h_m \, d h_m = A_n h_n \cdot \frac{(3-\lambda)(5-\lambda)}{4}.$$

Dazu kommt das Gesamtlicht der Sterne $m < n$, das sehr nahe sein wird:

$$H_1 = \frac{3-\lambda}{2} \cdot A_n h_n^{\frac{1}{2}(3-\lambda)} \cdot \int_{h_n}^{\infty} h^{\frac{1}{2}(\lambda-3)} \cdot d h = \frac{3-\lambda}{1-\lambda} A_n h_n.$$

Daraus folgt für das Gesamtlicht:

$$H = H_1 + H_2 = \frac{(3-\lambda)^3}{4(1-\lambda)} \cdot A_n h_n. \tag{5}$$

Nebenbei bemerkt ist also $\frac{H_2}{H_1} = 0.65$. Um so schwache Flächenhelligkeiten, wie die des Himmelsgrundes, in übersichtlicher Weise anzugeben, habe ich bei einer früheren Gelegenheit [1]) die Angabe der Zahl A vorgeschlagen,

[1]) Über kosmische Staubwolken und das Zodiakallicht. Münchener Sitzungsberichte 1901, S. 277.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

welche anzeigt, wievielmal größer die Flächenhelligkeit der mittleren Vollmondscheibe ist als die des betreffenden Objekts. Dem oben gefundenen Wert von H entspricht nun für die mittlere Erhellung des Himmelsgrundes:

$$A = 1.7 \times 10^7.$$

Newcomb[1]) hat die mittlere Flächenhelligkeit des Nachthimmels aus Beobachtungen zu bestimmen gesucht und gefunden, daß die nicht in der Milchstraße gelegenen Himmelsteile vom Flächeninhalt $\frac{3.1416}{4} = 0.785$ Quadratgrad so viel Licht aussenden wie 0.9 Sterne von der 5. Größe, während die Flächenhelligkeit in der Milchstraße etwa doppelt so groß ist. Der mittlere Vollmond hat so viel Licht wie ein Stern von der Größe — 11.8; ein Quadratgrad am Himmel hat die Fläche von a Vollmondflächen, wo $\log a = 0.676$. Danach ergibt die Beobachtung Newcombs:

$$A = 1.0 \times 10^7 \text{ in der Milchstraße}$$
$$A = 2{\cdot}1 \times 10^7 \text{ außerhalb der Milchstraße.}$$

Das ist eine so gute Übereinstimmung mit dem oben gefundenen Werte, wie bei der Unsicherheit solcher Beobachtungen kaum erwartet werden konnte. Herr Townley[2]) hat ähnliche Beobachtungen wie Newcomb, aber auf photographischem Wege, angestellt. Nach seinen Angaben wären die 0.9 Newcombschen Sterne 5. Größe durch 1 Stern 4. bis 5. Größe zu ersetzen und die Milchstraßengegenden sind 1.9 mal so hell wie die außerhalb gelegenen Himmelsteile. Ich habe in meiner zuletzt zitierten Arbeit vom Jahre 1901 unter der Voraussetzung $\varphi = \text{const.}$ für die Milchstraße $A = 0.75 \times 10^7$ gefunden. Da diese Zahl ebenfalls nicht wesentlich von der Newcombschen abweicht, wird man daraus schließen, daß die Berechnung der Flächenhelligkeit des Himmelsgrundes keine Kontrolle für die Richtigkeit der Grundlagen der Rechnung abgibt, der man große Bedeutung zuerkennen kann. Stark abweichende Resultate werden nur durch ganz enorm abweichende Annahmen hervorgerufen werden können, aus denen ganz andere A_m für $m > n$ folgen würden. Auf die vorhandenen Nebelgebilde ist bei allen diesen Betrachtungen und Beobachtungen keine Rücksicht genommen worden, was indessen kaum viel ausmachen kann.

Es sei noch bemerkt, daß die Formel (5) direkt aus der Formel (V) Art. I folgt, wenn $\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$, $F = 1$, $\Phi = \varphi$ gesetzt wird. Denn dann ist:

---

[1]) Astrophysical Journal 14, 297, 1901.

[2]) Publications of the Pacific Society XV, 1903.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$H = \gamma \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \varrho^{-\lambda}\, d\varrho \int_0^H H \log \frac{H}{i}\, di = \gamma\, \frac{H^2}{1-\lambda} \left(\frac{H}{h_n}\right)^{\frac{1-\lambda}{2}},$$

während sich aus (4) ergibt:

$$A_n^0 = \gamma \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{8}{(3-\lambda)^3} \left(\frac{H}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} = 4\gamma \cdot \frac{H}{(3-\lambda)^3} \left(\frac{H}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}.$$

Die Verbindung beider Formeln gibt das Resultat (5). Nebenbei sei noch folgender Satz angemerkt. Wäre das Sternsystem unendlich ausgedehnt und überall die Sterndichtigkeit endlich, so wäre nach (V) Art. I die Helligkeit des Himmelsgrundes:

$$H = \gamma \cdot \int_0^\infty D \cdot \psi(r)\, dr \int_0^H \varphi(x)\, x\, dx.$$

In dem speziellen Falle, daß allein die vorgelagerten hellen Massen eine Absorption verursachen oder daß die Dichtigkeit in der Verteilung der dunklen Massen proportional mit der Dichtigkeit D verläuft, würde man ansetzen dürfen

$$\psi(r) = e^{-\chi(r)}, \quad \text{wo } \chi(r) = \nu \int_0^r D\, dr.$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\frac{d\chi(r)}{dr} = \nu D,$$

und da $\int_0^H \varphi(x)\, x\, dx = B$ eine Konstante ist:

$$H = \frac{B\gamma}{\nu} \cdot \int_0^\infty e^{-\chi(r)} \cdot \frac{d\chi(r)}{dr}\, dr = \frac{B\gamma}{\nu} \cdot \left(1 - e^{-\nu \int_0^\infty D\, dr}\right).$$

Der Voraussetzung gemäß ist aber $\int_0^\infty D\, dr$ unendlich groß. Es ergibt sich also:

$$H = \frac{B\gamma}{\nu},$$

d. h. der Himmelsgrund ist überall gleich hell und ganz unabhängig von der Dichtigkeitsverteilung.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

VI.

Nach den erhaltenen Resultaten sind die empirischen Abzählungsresultate vollständig darstellbar durch die Formeln (2) und (3) des vorigen Artikels. Die Dichtigkeit der räumlichen Sternverteilung $D(r)$ ist dadurch noch nicht gegeben, vielmehr besteht nur die Relation (4), Art. I. Man muß also die Absorption kennen, um zur Kenntnis von D zu gelangen. Dagegen ermöglicht, wie öfters erwähnt worden ist, die Hinzuziehung der mittleren Parallaxenwerte π_m die Bestimmung der Absorption und somit auch von $D(r)$.

Die Formel (IV) Art. I kann man, da $\Delta(\varrho) = \varrho^{-\lambda}$ ist, auch schreiben:

$$\frac{\pi_{mm'}}{0.2} = \frac{I_m - I_{m'}}{K_m - K_{m'}},$$

wobei zur Abkürzung

$$I_m = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \frac{\varrho^{2-\lambda}}{r} \cdot d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H} \varphi(x)\, dx$$

gesetzt wird. K_m geht aus I_m hervor, wenn $r = 1$ angenommen wird. Mit Benutzung der Häufigkeitsfunktion (3) des vorigen Art. wird:

$$I_m = \frac{H}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \frac{\varrho^{2-\lambda}}{r} \cdot \left(\log \frac{H}{h_m \varrho^2}\right)^2 d\varrho. \tag{1}$$

Eine weitere Behandlung ist nur möglich, wenn man $r = f(\varrho)$ angeben kann, d. h. wenn das Gesetz der Absorptionswirkung bekannt ist. Geänderte Annahmen scheinen nun die Schwierigkeiten, die hier auftreten und im folgenden erwähnt werden sollen, nicht zu beheben. Ich begnüge mich deshalb, die Folgerungen aus der Annahme einer allgemeinen Absorption zu ziehen, die dadurch charakterisiert ist, daß

$$\psi(r) = e^{-\nu r}; \qquad \varrho = r\, e^{\frac{1}{2}\nu r} \tag{2}$$

gesetzt wird. e ist die Basis des natürlichen Logarithmensystems. Das Integral I_m ist nicht in geschlossener Form ausführbar. Andrerseits genügt offenbar folgende Berechnung, die bis auf einen mäßigen Bruchteil von einem Prozent, oder doch bis auf wenige Prozente, genau ist. Innerhalb der Grenzen der Integration und für nicht zu große ν lassen sich nämlich, wie der nume-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

rische Verlauf der betreffenden Größen zeigt, konstante Größen α und β so bestimmen, daß die Fehler meistens sehr viel weniger als 1% betragen, wenn man setzt:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho} + \alpha - \beta \log \varrho. \tag{3}$$

Dann ergibt sich aber sofort:

$$\frac{I_m}{H} = \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{2-\lambda}{2}} \cdot \frac{2}{(2-\lambda)^3} + \left(\alpha - \beta \log \sqrt{\frac{H}{h_m}}\right) \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \frac{2}{(3-\lambda)^3} + \beta \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \frac{6}{(3-\lambda)^4}.$$

K_m erhält man dann hieraus, wenn man $\beta = 0$, $\alpha = 1$ setzt und das erste von α und β freie Glied fortläßt:

$$K_m = H \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \frac{2}{(3-\lambda)^3}.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung:

$$A = \left(\frac{3-\lambda}{2-\lambda}\right)^3 \frac{1 - \left(\frac{h_m}{h_{m'}}\right)^{\frac{2-\lambda}{2}}}{1 - \left(\frac{h_m}{h_{m'}}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}};$$

$$B = \frac{\log \frac{H}{h_m} - \left(\frac{h_m}{h_{m'}}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \log \frac{H}{h_{m'}}}{2\left[1 - \left(\frac{h_m}{h_{m'}}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\right]},$$

so erhält man schließlich:

$$\frac{\pi_{mm'}}{0{,}2} = A \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{2}} - \beta B + \alpha + \frac{3\beta}{3-\lambda}. \tag{4}$$

Dabei sind alle Logarithmen natürliche. Auch in Bezug auf die Formel (4) gilt der wichtige Satz, daß die Beschränkung des Gültigkeitsbereichs der Häufigkeitsfunktion φ in der obigen Weise nur außerhalb gewisser Grenzen für m und m' merkbare Fehler erzeugt. Zur ungefähren Feststellung dieser Grenzen genügt es selbstverständlich vollkommen, statt der Gleichung (IV) die etwas einfachere (IVa) zu untersuchen. Man hat also zuzusehen, ob und innerhalb welchen Spielraums für die m die Gleichung:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\frac{\pi}{0''.2} = \frac{I}{K} = \frac{\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{\varrho^{4-\lambda}}{r} \cdot \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho}{\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma_1} \varrho^{4-\lambda} \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho},$$

wo $\sigma_1 = \sqrt{\frac{H}{h_n}}$, $\sigma_0 = \sqrt{\frac{H}{h_0}} = \sqrt{\frac{h_{m_0}}{h_m}}$ bis auf kleine Abweichungen dasselbe π gibt, wie in dem Falle, in dem $\sigma_0 = 0$ angenommen wird. Zunächst gilt diese Untersuchung für $m > n$, und dieser Fall ist hier als der allgemeinere aufzufassen. Für $m < n$ hat man in den Endformeln einfach $n = m$ zu setzen; n selbst kommt dann gar nicht mehr vor. Zur Vereinfachung der Darstellung werde gesetzt:

$$a = \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma_1} \varrho^{1-\lambda} \log\left(\frac{H}{h_m \varrho^2}\right) d\varrho; \qquad b = \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma_1} \varrho^{2-\lambda} \log \varrho \log\left(\frac{H}{h_m \varrho^2}\right) d\varrho;$$

$$c = \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma_1} \varrho^{2-\lambda} \log\left(\frac{H}{h_m \varrho^2}\right) d\varrho.$$

Dann wird:

$$\frac{\pi}{0''.2} = \frac{a}{c} + \alpha - \beta \frac{b}{c}. \tag{5 a}$$

Die Durchführung der Rechnung gibt folgendes:

$$\left.\begin{aligned}
a &= \frac{2}{(2-\lambda)^2}\left(\frac{H}{h_n}\right)^{\frac{2-\lambda}{2}}\left(1+\frac{2-\lambda}{5\varepsilon}(m-n)\right)\left\{1-\left(\frac{h_{m_0}h_n}{Hh_m}\right)^{\frac{2-\lambda}{2}}\frac{1+\frac{2-\lambda}{5\varepsilon}(m_0-\nu)}{1+\frac{2-\lambda}{5\varepsilon}(m-n)}\right\}\\
b &= -\frac{4}{(3-\lambda)^3}\left(\frac{H}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left[1+\frac{3-\lambda}{10\varepsilon}(m+\nu-2n)+\frac{(3-\lambda)^2}{50\varepsilon^2}(n-\nu)(n-m)\right]\\
&\quad\times\left[1-\left(\frac{h_{m_0}h_n}{Hh_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\frac{1-\frac{3-\lambda}{10\varepsilon}(m+\nu-2m_0)-\frac{(3-\lambda)^2}{50\varepsilon^2}(m-m_0)(m_0-\nu)}{1+\frac{3-\lambda}{10\varepsilon}(m+\nu-2n)+\frac{(3-\lambda)^2}{50\varepsilon^2}(n-\nu)(n-m)}\right]\\
c &= \frac{2}{(3-\lambda)^2}\left(\frac{H}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left(1+\frac{3-\lambda}{5\varepsilon}(m-n)\right)\left\{1-\left(\frac{h_{m_0}h_n}{Hh_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\frac{1+\frac{3-\lambda}{5\varepsilon}(m_0-\nu)}{1+\frac{3-\lambda}{5\varepsilon}(m-n)}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Formeln wurden gleich so geschrieben, daß die in geschweifte Klammern gesetzten Glieder die Form $1 - X$ haben. X ist also der Fehler, der entsteht, wenn man die untere Grenze der Integrale $= 0$ setzt. Zuerst interessiert der Fall $m < n$. Dann ist den obigen Bemerkungen zufolge $n = m$ zu setzen, und es wird also:

$$a = \frac{2}{(2-\lambda)^2}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{2-\lambda}{2}}(1-X_a); \qquad b = -\frac{4}{(3-\lambda)^3}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left(1+\frac{3-\lambda}{10\varepsilon}(\nu-m)\right)(1-X_b);$$

$$c = \frac{2}{(3-\lambda)^2}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}(1-X_c)$$

$$X_a = \left(\frac{h_{m_0}}{H}\right)^{\frac{2-\lambda}{2}}\left[1+\frac{2-\lambda}{5\varepsilon}(m_0-\nu)\right]$$

$$X_b = \left(\frac{h_{m_0}}{H}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\frac{1-\frac{3-\lambda}{10\varepsilon}(m+\nu-2m_0)-\frac{(3-\lambda)^2}{50\varepsilon^2}(m-m_0)(m_0-\nu)}{1-\frac{3-\lambda}{10\varepsilon}(m-\nu)}$$

$$X_c = \left(\frac{h_{m_0}}{H}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left[1+\frac{3-\lambda}{5\varepsilon}(m_0-\nu)\right].$$

Für $m_0 = 6$, $\nu = -3.62$, $\lambda = 0.43$ findet man den Fehler $X_a < 0.8\%$, während X_b und X_c völlig ($< 0.1\%$) belanglos bleiben, solange m eine positive Größe ist.

Für $m > n$ findet man nach den Formeln (5) überschlagsweise:

m	X_a	X_b	X_c
11.91	0.008	0.000	0.000
12.01	9	0	0
13.91	13	0	0
14.91	21	1	1
15.91	35	3	2
16.91	0.061	0.007	0.006

Man darf danach die Formel (4) für die mittleren Parallaxen benutzen, solange m positiv und < 17 bleibt, ohne einen irgendwie ins Gewicht fallenden Fehler zu befürchten.

Bekanntlich hat Herr Kapteyn [1]) aus und in Verbindung mit Apexbestim-

[1]) Ich nehme die Zahlen aus den Angaben des Autors in Astron. Journ., Nr. 566.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

mungen mittlere Parallaxen $\pi_{mm'}$ bis zu Sternen von der 8. und 9. Größe abgeleitet und Herr Comstock [1]) hat aus einer Apexbestimmung aus 68 schwachen, zuerst von O. Struve in Pulkowa beobachteten Sternen mittlere Parallaxen für diese Sterne erhalten. Die zugehörigen Grenzwerte m und m' habe ich dabei ohne nähere Untersuchung der folgenden Tabelle gemäß angenommen. Kleinere Ungenauigkeiten in dieser Beziehung sind ziemlich belanglos.

Nr.	m'	m	Mittel	$\pi(K)$	$\pi(N)$	(π)
1	0.0	3.5	2.7	0.″0383	0.″0310	0.″0404
2	3.5	4.5	4.0	205	155	222
3	4.5	5.5	5.0	147	98	155
4	5.5	6.5	6.0	129	62	113
5	6.5	7.5	7.0	89	39	86
6	8.0	9.0	8.5	63	19	63
7	10.0	11.0	10.5	0.0045	0.0008	0.0049

Neben den ungefähren Mittelwerten der Größen sind unter $\pi(K)$ die von Herrn Kapteyn und Comstock gefundenen Parallaxen angeführt. Ferner sind $\pi(N)$ die oben als „normale“ bezeichneten Parallaxen. Nebenbei bemerkt, erhält man eine gute Darstellung der empirischen Werte durch die Formel:

$$(\pi) = \pi(N) \times 1.178 + 0.''0040,$$

wie die Gegenüberstellung von (π) und $\pi(K)$ in der obigen Tabelle zeigt.

Es ist schon oft bemerkt worden, daß die $\pi(K)$ und die normalen Werte $\pi(N)$ ganz unvereinbar miteinander sind. Will man die Werte $\pi(K)$ als richtig anerkennen, so bleibt wohl kaum etwas anderes übrig, als eine starke Absorption anzunehmen. Versuche, ohne eine solche Absorption die Abzählungsergebnisse A_m mit den $\pi(K)$ in Einklang zu bringen, können nur dann erfolgreich sein, wenn die oben benutzten A_m abgeändert werden und man außerdem die Funktion $\varphi(i)$ ganz anders verlaufen läßt, als die bisherigen direkten Bestimmungen von Parallaxen zeigen, und zwar in dem Sinne, daß kleine i sehr viel häufiger vorkommen müßten. Solche Rechnungen lassen sich ohne sonderliche Mühe ausführen. Die Annahme, daß die weiteren Sterne eine andere Häufigkeitsfunktion φ zeigen als die uns nächsten, ist natürlich nicht ohne weiteres zurückzuweisen, dürfte aber wohl nur im Notfalle zuzulassen sein. Sobald aber die hier benutzten A_m bis etwa zur 12. Größe ganz nahe richtig sind, sind die normalen Parallaxenwerte als mathematische Folge zu bezeichnen und dann bleibt nichts übrig als entweder die mittleren Parallaxen $\pi(K)$ als nicht zutreffend anzusehen oder eine starke

[1]) Provisional results etc. Astron. Journ., Nr. 558.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Absorption anzunehmen. Gegen die erste Maßnahme werden sich gegenwärtig keine ernsten Einwände machen lassen, da die Ableitung der $\pi(K)$ auf der Annahme einer vollständigen Kompensation aller systematischen Eigenbewegungen beruht, die sicher nicht stattgefunden hat. In welchem Betrag sich die mittleren Parallaxen durch andere Annahmen oder andere Rechnungsmethoden verändern können, ist sehr schwierig anzugeben, da über die systematischen Eigenbewegungen der Sterne und namentlich der schwächeren noch viel zu wenig bekannt ist.

Was die zweite Maßnahme betrifft, nämlich die Einführung einer bedeutenden Absorption, so ist sie in Bezug auf die räumliche Dichtigkeit $D(r)$ mit kaum zulässigen Folgerungen verbunden. Das Vorhandensein bedeutender Absorptionen an einzelnen Stellen, besonders in der Milchstraße, ist wiederholt und von verschiedenen Seiten bemerkt worden. Unzweideutige Anzeichen einer allgemein wirkenden Absorption aber, die also einen mit der Entfernung wachsenden Einfluß ausübt, sind bis jetzt noch nicht aufgefunden worden. Gerade in den letzten Monaten wollte man zwar sehr bemerkbare selektive Absorptionswirkungen konstatiert haben. Den Gedankengängen, die dazu geführt haben, kann ich aber, zunächst wenigstens, nicht beistimmen. Zum Teil sind sie als gänzlich verfehlt anzusehen, zum Teil stützen sie sich auf Andeutungen, die allerdings von beobachteten Tatsachen ausgehen und demgemäß nicht ohne weiteres abzuweisen sind. Aber diese Andeutungen müßten noch sehr viel weiter verfolgt werden, ehe sie als Grundlage für irgendwelche Beweise des Vorhandenseins bemerkbarer selektiver Absorptionen benutzt werden können. Mit Hilfe der obigen Formeln oder geringfügiger Umgestaltungen derselben können leicht beliebige Absorptionen in Rechnung gezogen werden. Gegenwärtig fehlt noch die Handhabe zur Verwendung besonderer Ansätze, deshalb soll nur, wie schon oben geschehen ist, die gleichmäßige allgemeine Absorption, die durch die Formel

$$\psi(r) = e^{-\nu r}$$

ausgedrückt ist, weiter verfolgt werden. Auf die Sternzahlen A_m hat die Absorption keinen Einfluß insofern, als aus ihnen nur geschlossen werden kann, daß $\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-0.43}$ ist. Aber dann ist die räumliche Dichtigkeit $D(r)$ durch die Formel (14) Art. I bestimmt, und man ersieht daraus ohne weiteres, daß $D(r)$ bei nicht zu kleinen ν gegen die Grenzen des Sternsystems sehr stark anwachsen muß.

Ist keine oder nur eine unmerkliche Absorption vorhanden, dann ist die Dichtigkeit $D(r) = \Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$. Die Grenze des schematischen Stern-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

systems ist dort, wo Sterne von der Größe —3.62 in der Siriusweite als Sterne von der Größe 11.91 erscheinen, was also in 1280 Siriusweiten eintritt. Die Dichtigkeitsverteilung für $r < 1$ kommt nicht in Frage, und das starke Anwachsen von D bei Verringerung von r in diesem Teil des Raumes bleibt am besten unbeachtet, da es nur verwirrend wirken kann. Für Werte $r > 1$ gestaltet sich der Verlauf von $D(r)$ folgendermaßen:

r	D	r	D	r	D
1	1.000	120	0.128	600	0.064
5	0.501	140	0.119	700	0.060
10	0.372	160	0.112	800	0.057
20	0.276	180	0.107	900	0.054
40	0.204	200	0.102	1000	0.051
60	0.172	300	0.086	1100	0.049
80	0.152	400	0.076	1200	0.047
100	0.138	500	0.069		

Will man für die schwächeren Sterne den Parallaxenwerten $\pi(K)$ nahe kommen, so muß man, wie schon erwähnt worden ist, relativ große Absorptionen annehmen. Ich will hier nur folgende Werte anführen:

1. $\nu = 1/20$. Dann ist die Grenze des Sternsystems schon in einer Entfernung von 100 Siriusweiten. Man findet hier die Näherungsformel:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho} + 0.0300 - 0.00304 \log \text{nat}\, \varrho.$$

Es ist also $\alpha = +0.0300$ und $\beta = +0.00304$.

Die hierdurch erzielte Annäherung an die Werte $\pi(K)$ ist offenbar lange noch nicht ausreichend.

2. $\nu = 4/15$ und damit:

$$\alpha = +0.0300; \qquad \beta = +0.00700.$$

Grenze des Sternsystems 83 Siriusweiten. Aus dem Verlauf der danach gerechneten Zahlen ist zu schließen, daß man ν noch weiter vergrößern müßte, vielleicht bis auf $1/12$. Zum Vergleich wurde noch

3. $\nu = 1/500$ angenommen,

$$\alpha = +0.00154; \qquad \beta = +0.000113.$$

Grenze des Sternsystems bei 670 Siriusweiten.

Die mit den angegebenen Werten gerechneten Parallaxen sind in der folgenden Tabelle zugleich mit den Werten $\pi(K)$ zusammengestellt:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

m	$\nu = 1/15$	$\nu = 1/20$	$\nu = 1/500$	$\pi\ (K)$
2.7	0.″0363	0.″0357	0.″0313	0.″0383
4.0	204	198	158	205
5.0	144	138	101	147
6.0	106	99	65	129
7.0	80	74	42	89
8.5	55	46	23	63
10.5	0.0039	0.0033	0.0017	0.0045

Berechnet man nach (14) Art. I die Dichtigkeiten $D\ (r)$, so ergibt sich für $\nu = 1/15$ und $\nu = 1/500$.

r	$D\ (1/15)$	r	$D\ (1/500)$
1	1	1	1.00
10	1	10	0.39
20	2	30	0.26
30	5	50	0.22
40	13	100	0.20
50	32	200	0 21
60	78	300	0.24
70	190	400	0.30
80	470	500	0.38
Grenze 82.8	604	600	0.47
		Grenze 670	0.57

Bei größeren Absorptionen, und sie allein vermögen unter den gemachten Voraussetzungen die Werte $\pi\ (K)$ darzustellen, findet stets diese enorme Anhäufung der Sterne in den äußersten Regionen des Sternsystems statt, was wohl einige Bedenken hervorrufen dürfte. Aus großer Entfernung betrachtet würden solche Systeme wie Ringnebel aussehen. Für $m > n$ seien schließlich nur folgende mittleren Parallaxen, nach Formel (5 a) berechnet, angeführt.

m	$\nu = 1/15$	$\nu = 1/500$
11.91	0.″0030	0.″0004
12.91	28	0.″0003
13.91	28	
14.91	27	
15.91	27	
16.91	27	

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

VII.

An dem Vorhandensein einer Absorption des Sternlichts ist wohl kaum zu zweifeln, insbesondere wenn man dabei an die Wirkung vorgelagerter Massen denkt. Daß z. B. weit ausgebreitete Staubwolken in den verschiedensten Gegenden des Himmels vorkommen, ist zum mindesten eine sehr wahrscheinliche Annahme, vielleicht eine sichergestellte Tatsache. Man hat wohl auch, und namentlich geschah dies in früheren Zeiten, die Ansicht ausgesprochen, die Lichtbewegung durch weite Strecken trage an sich die Zeichen einer Abschwächung, indem sie auch beim Fehlen dessen, was wir Materie nennen, in stärkerem Maße erfolgt, als die quadratische Ausbreitung erfordert. Doch dürfte diese Annahme immerhin nach den neueren physikalischen Ansichten auf Schwierigkeiten stoßen. Da gewöhnliche Absorption und Dispersion zusammenhängen, wenn dies sich auch nicht in begrenzten Teilen des Spektrums nachweisen zu lassen braucht, ferner die Absorption in vielen Fällen sich als selektive zeigen wird, haben sich in neuester Zeit die Bemühungen hauptsächlich auf Konstatierung einer Dispersion und selektiven Absorption des Sternlichts gerichtet. Wenn nun auch die Arbeiten der Herren Nordmann und Tikhoff in Bezug auf die Dispersion des Sternlichts bis jetzt noch nicht zu Ergebnissen geführt haben, die eine unzweifelhafte Interpretation erlauben, so ist doch durch sie sicherlich die Bearbeitung wichtiger Probleme angebahnt worden.

In Bezug auf die selektive Absorption ist in den letzten Monaten die Meinung ausgesprochen worden, daß wirklich der Nachweis einer solchen und zwar in dem Sinne, daß die brechbareren Teile des Spektrums mehr als die weniger brechbaren geschwächt werden, bereits als gelungen angesehen werden könne. Im Zusammenhang mit den hier behandelten Fragen wäre das eine viel zu wichtige Erkenntnis, als daß die näheren Umstände unerwähnt bleiben könnten.

Es traten hierbei insbesondere drei Feststellungen in den Vordergrund:

1. Herr Kapteyn[1]) hat folgende Bemerkung gemacht. Innerhalb einer Klasse von Sternen, deren Spektra dem Sonnenspektrum sehr ähnlich sind, sind einige zu finden, bei denen im violetten Teil eine größere Absorption bemerkbar ist als in anderen Teilen, so daß man den auf der Harvard-Sternwarte eingeführten Spektraltypus XVa in zwei Unterabteilungen teilen kann: in die Gruppen I und II, zu denen α Cassiop. bzw. α bootis gehören. Die

[1]) On the absorption of light in space. Astrophysical Journal XXIX.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Gruppe I zeigt eine mehr oder weniger stark bemerkbare Absorption im violetten Teil des Spektrums. Herr Kapteyn hat weiter bemerkt, daß die 36 bekannten Sterne der Gruppe I, die er übrigens durch neun Sterne vom ähnlichen Typus XIV vermehrte, im Mittel eine säkulare Eigenbewegung von 11″.4 haben, die 25 Sterne der Gruppe II dagegen eine solche von 47″.1. Man wird daraus sicherlich folgern dürfen, daß die letzteren Sterne uns im Mittel viel näher sind und man kann demzufolge annehmen, daß die stärkere selektive Absorption im Violett bei Gruppe I durch die größere Entfernung verursacht sei. Herr Kapteyn selbst hat aber eine Nötigung zu dieser Annahme nicht als vorhanden erklärt, was gegenüber anderen Auffassungen hervorgehoben werden muß. In der Tat hat die Gruppe I im Mittel die Sterngröße 3.3, die Gruppe II 3.5. Die Sterne I haben also eine sehr viel größere Leuchtkraft und befinden sich in anderen physikalischen Zuständen als II. Die kleine Verschiedenheit der Spektra ist demnach auf die plausibelste Weise erklärt, ohne daß man gezwungen wäre, an eine Absorption des Lichts im Weltraum zu denken.

2. Die Bearbeitung der Greenwicher photographischen Sternaufnahmen ergab, daß die Durchmesser d der Sternscheibchen auf jeder Platte, die erfahrungsgemäß außer von Konstanten, die der Platte zugehören, abhängig sind von der Sterngröße m und der Expositionszeit t, diese zwei Größen nicht getrennt, sondern nur in der Verbindung $m - b \cdot \log t$ enthalten, wenigstens daß man mit einer solchen Annahme die Beobachtungen genügend darstellen konnte. Es ist also:

$$d = F(m - b \cdot \log t). \tag{1}$$

Diese Tatsache ist auch anderwärts und zwar sehr früh erkannt worden, so u. a. von Herrn Charlier[1]) 1899, der $b = 1.7$ fand. Nun hat Herr Turner[2]) die Greenwicher Messungen mit dem Werte $b = 2.0$ darstellen können und aus dieser keineswegs überraschenden Tatsache sehr weitgehende Folgerungen in Bezug auf eine interstellare Absorption gezogen. Die Bemerkung, daß der Zahlenwert sehr unsicher bestimmt erscheint und außerdem von der ziemlich willkürlich angenommenen Form der Funktion F, die den ursprünglich in Greenwich ausgeführten Reduktionen zu Grunde gelegt worden ist, abhängig ist, mag hier nicht weiter verfolgt werden, da sie von keiner prinzipiellen Bedeutung für das Folgende ist. Die Argumente, welche Herr Turner zur

[1]) Über Anwendung der Sternphotographie zur Helligkeitsmessung der Sterne. Publikationen der Astron. Gesellschaft, Nr. XIX.

[2]) On the diminution of light etc. Monthly Notices LXIX, S. 61.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Bekräftigung seiner Interpretation anführt, beruhen vielmehr auf folgendem. Nimmt man an, daß die ganze Energie der Lichtstrahlung E zur Vergrößerung der Sternscheibchen verwendet wird und daß d ein Maß für diese aufgewendete Energie ist, dann wird d nur eine Funktion dieser Energie sein.

Wird ein Stern von der photometrisch gemessenen Größe m die Zeit t lang exponiert, dann ist, abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor:

$$E = h_m t \tag{2}$$

oder auch:

$$\log E = -0.4\,(m - 2.5 \log t).$$

Es würde sich also ergeben:

$$d = F\,(m - \frac{5}{2} \log t).$$

Die photographischen Aufnahmen ergeben aber:

$$d = F\,(m - \frac{5}{2}\, p \log t), \tag{3}$$

wo im Falle der Greenwicher Beobachtungen $p = \frac{4}{5}$, also wesentlich kleiner als 1 ist. Diese allgemeine bekannte Tatsache kann man sich bekanntlich dadurch erklären, daß nicht (2), sondern der Ausdruck

$$E = h_m t^p \tag{4}$$

die verwendete Energie ausdrückt. Besonders Herr Schwarzschild[1]) hat die Formel (4) seinen bekannten photographisch-photometrischen Arbeiten zu Grunde gelegt und ausführlich behandelt. Es wurden dabei auch Laboratoriumsversuche herangezogen, so daß (4) mit allgemeinen Eigenschaften des photographischen Prozesses zusammenhängt. Freilich kommt hier noch ein anderer Umstand hinzu, weil die Vergrößerung der Sternscheiben als Maß der Helligkeit dient und in dieser Richtung dürften, wenn ich nicht irre, weitergehende Laboratoriumsversuche wünschenswert sein.

Herr Turner akzeptiert aber eine andere Erklärung. Er meint, daß die Sterne, welche photometrisch im optisch hellsten Teil des Spektrums gemessen die Größe m haben, im photographisch wirksamen Spektralgebiet eine andere Größe m_0 besitzen und daß diese letztere durch eine interstellare Absorption, die besonders die brechbaren Strahlen beeinflußt, vergrößert wird. Die bisher ausgeführten Versuche sprechen von vornherein zwar nicht zu Gunsten dieser

---

[1]) Publikationen der v. Kuffnerschen Sternwarte, Band V.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Annahme, aber es ist vielleicht von Nutzen, die Sache aufzuklären. Die von Herrn Turner gemachte Annahme erfordert, daß

$$h_{m_0}\, t \text{ eine Funktion von } h_m\, t^p,$$

wenn h_{m_0} die Helligkeit eines Sternes ohne und h_m dieselbe mit Rücksichtsnahme auf Absorption ist. Es muß also sein:

$$\log (h_{m_0}\, t) = f(\log h_m + p \log t)$$
$$\log h_{m_0} + \log t = f(-0.4\, m + p \log t);$$

für $m = 0$ wird $h_m = 1$ und man darf als Ausgangswert h_{m_0} ebenfalls 1 annehmen.

Es folgt also:

$$\log h_{m_0} = -\frac{0.4}{p}\, m.$$

Soll dies eine Folge der Absorption sein, so müssen folgende Beziehungen stattfinden. Nennt man r_m die mittlere Entfernung der Sterne von der photometrischen Größe m, die im optischen Spektralgebiet eine Helligkeit $f_1(r_m)$, was eine Funktion von r_m sein muß, hervorruft und im photographischen Gebiete eine solche $f_0(r_m)$, dann müßte sein:

$$\log \left(\frac{f_0(r_m)}{f_1(r_m)}\right) = \log \frac{h_{m_0}}{h_{m_1}} = -0.4\, m\, \frac{1-p}{p}.$$

Der Ausdruck, welcher r mit m verbindet, ist nach den früheren Untersuchungen noch nicht bekannt. Nehmen wir an:

$$\log r_m = \log c + q\, m \tag{5}$$

so kann man sowohl die Kapteynschen als auch die normalen mittleren Parallaxenwerte darstellen. Ist noch r_0 die Entfernung der Sterne von der Größe 0, also:

$$\log \left(\frac{r_m}{r_0}\right) = q\, m,$$

so wird:

$$\frac{f_0(r_m)}{f_1(r_m)} = \left(\frac{r_m}{r_0}\right)^{\frac{2(p-1)}{5pq}}. \tag{6}$$

Die Kapteynschen Parallaxenwerte und die normalen darf man als extreme Werte bezeichnen. Für die ersteren ist $q = -\log 0.75$ zu setzen,[1]) für die

[1]) Publications of the astronomical Laboratory at Gröningen, No. 8, Formel (55).

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

letzteren $q = \frac{1}{5}$. Ferner soll nach Herrn Turner $p = \frac{4}{5}$ genommen werden. Dann folgt:

$$\frac{f_0(r_m)}{f_1(r_m)} = \left(\frac{r_m}{r_0}\right)^{-0.8} \text{ oder } = \left(\frac{r_m}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Also nur dann, wenn die Schwächung des Lichtes nach diesen Formeln geschieht, kann p eine Konstante sein; sonst ist p mit der Größe p variabel. Um die zu erwartende Veränderlichkeit von p zu übersehen, soll die oben als allgemeine bezeichnete Absorption in Betracht gezogen werden. Es wird dann

$$f_0(r_m) = e^{-\lambda_0(r_m - r_0)} \quad \text{und} \quad f_1(r_m) = e^{-\lambda_1(r_m - r_0)}$$

zu setzen sein. Bezeichnet man zur Abkürzung:

$$\sigma = 0.4\,\frac{1-p}{p},$$

so wird:

$$(\lambda_1 - \lambda_0)(r_m - r_0)\log e = -m\sigma$$

und mit Benutzung von (5):

$$(\lambda_1 - \lambda_0)\, r_0 (10^{qm} - 1)\log e = -m\sigma. \tag{7}$$

Nimmt man beispielsweise an, daß für eine bestimmte Größenklasse m der Wert von σ gleich σ_1 ist, so ergibt sich:

$$(\lambda_1 - \lambda_0)\, r_0 \log e = \frac{-m_1\sigma_1}{10^{qm_1} - 1}$$

und für jedes beliebige m gibt dann (7) das zugehörige σ und daraus den Koeffizienten b in (3):

$$b = \frac{5}{2}\,p = \frac{5}{2 + 5\sigma}.$$

Wählt man $p = \frac{4}{5}$, $m_1 = 7$ und 1.) $q = 0.125$, 2.) $q = \frac{1}{5}$, so wird dann $\sigma_1 = \frac{1}{10}$; $\log[(\lambda_1 - \lambda_0)\ r_0 \log e] = 9.0323_n$ bzw. 8.4617_n, und man erhält:

m	b (1)	b (2)
3.0	2.23	2.33
7.0	2.0	2.0
11.0	1.61	1.23

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Werte von b variieren also sehr stark mit m und das ist gerade das charakteristische Anzeichen einer allgemeinen Absorption. Wenn man also die bekannte Tatsache, daß bei Sternphotographien b wesentlich kleiner als 2.5 nicht durch die in gewissem Umfange erprobte Formel (4), sondern durch das Vorhandensein einer selektiven Absorption erklären will, welche die photographisch wirksamen Strahlen wesentlich mehr schwächt als die optischen, wäre es nötig, die Veränderlichkeit des oben mit p bezeichneten Koeffizienten mit der Größe m nachzuweisen. Im übrigen wären trotz der umfangreichen Literatur in diesem Gebiete, ausführlichere Versuche mit künstlichen Sternen, wie schon erwähnt, erwünscht.

3. Durch Anwendung von Farbenfiltern gelangte Herr Tikhoff zu sehr merkwürdigen Resultaten, die allerdings als Nachweis für eine sehr bedeutende Absorption gedeutet werden können, aber keineswegs so gedeutet werden müssen. Auch unterliegt es keinem Zweifel, was Herr Tikhoff wohl selbst erkannt hat, daß noch sehr eingehende Laboratoriumsversuche an künstlichen Sternen vorhergehen müssen, ehe die Verhältnisse, namentlich in Bezug auf die rein photographischen Prozesse, so weit geklärt sein werden, daß man über die Absorption des Sternlichts etwas aussagen kann. Nach Herrn Schwarzschilds [1]) Mitteilungen übrigens sind gerade Beobachtungen an den Plejadensternen, die bei ähnlichen Untersuchungen bevorzugt zu werden pflegen, nur mit Vorsicht zu allgemeinen Schlüssen zu verwenden.

---

[1]) Vierteljahrschrift der Astron. Gesellschaft, Jahrgang 43, S. 287.

Berichtigung: Seite 15 Zeile 12 v. o. statt $\nu = 4 + \lambda$ lies $\nu = 4 - \lambda$.

*

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1912

Band/Volume: 25

Autor(en)/Author(s): Seeliger Hugo Johann

Artikel/Article: Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Fixsterne (2. Abhandlung) 1-53