© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Abhandlungen
der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
XXVI. Band, 12. Abhandlung

Ueber einige neue Apparate zur mechanischen Integration

von

Walther von Dyck

Vorgelegt am 7. März 1914

München 1914
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franzschen Verlags (J. Roth)

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Apparate zur Aufzeichnung der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definierten Kurven stellen die in dem Aufbau der Gleichung enthaltenen funktionellen Beziehungen zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ durch kinematische Verbindungen der einzelnen Glieder her. An diese ist dann ein geeigneter Integrationsmechanismus anzuschließen. Für die Ausführung der Integration erhält der Apparat bei den bisherigen Konstruktionen eine zwangläufige Bewegung dadurch, daß einzelne Punkte des Systems auf bestimmten Kurven, die sich punktweise entsprechen, geführt werden. Dabei können diese Führungskurven von vornherein (graphisch oder durch Schablonen) gegeben sein, oder auch im Laufe der Bewegung durch kinematische Vorrichtungen erzeugt werden. Den Antrieb des Apparates mag man sich durch mechanische Kraft oder durch die Führung mit der Hand bewerkstelligt denken.

Als Integrationsmechanismen finden, wenn wir von einzelnen, auf physikalischen Vorgängen beruhenden Apparaten absehen, Anwendung: Kugel, Zylinder und Kegel, die aufeinander und auf festen oder bewegten Ebenen abrollen; Räder mit abgerundetem Rand, deren Bewegung auf der ebenen oder gekrümmten Unterlage sich aus Abrollen um die Achse und Gleiten in Richtung der Achse zusammensetzt; endlich Räder mit scharfkantigem Rand, bisweilen ersetzbar durch ebene Schneiden, die nur in Richtung ihrer Ebene fortbewegt, außerdem aber um die im Auflagepunkt zur Unterlage senkrechte Achse gedreht werden können.

Die Verbindung von Kugel, Zylinder und ebener Kreisscheibe — um nur die einfachsten Beispiele zu nennen — ist bei dem harmonischen Analysator von Lord Kelvin verwendet, das Rad mit abgerundetem Rand beim Polarplanimeter von Amsler, das scharfkantige Rad endlich bei dem Integraphen von Abdank-Abakanowicz. Für den Aufbau allgemeiner Integrationsprobleme (Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung) sei endlich auf die von Kriloff beschriebenen Anordnungen hingewiesen.[1])

---

[1]) Zusammenfassende Darstellungen der hauptsächlichsten Integrationsmechanismen und ausführliche Literaturangaben enthalten die kleinen Werke von A. Galle, „Mathematische Instrumente“ (Leipzig, 1912)

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Im folgenden (§ 1 und 2) gebe ich zunächst einen Apparat zur Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung, der von den bisher konstruierten prinzipiell dadurch unterschieden ist, daß er sich einer Führungsfläche bedient, um die durch die Gleichung

$$1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

gegebene Abhängigkeit des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ vom Ort x, y festzulegen.

Diese Fläche ist im allgemeinen plastisch hergestellt zu denken; in einzelnen Fällen aber kann sie selbst wieder zweckmäßig durch ein kinematisches System ersetzt werden; so beispielsweise, wenn die Fläche eine Rotationsfläche oder eine Regelfläche oder eine Rückungsfläche ist. Besonders einfach gestaltet sich der aus dem Prinzip der Führungsfläche entspringende Mechanismus für die Integration der linearen Differentialgleichung erster Ordnung und der Riccatischen Gleichung (§ 2).

An zweiter Stelle (in § 3 und 4) beschreibe ich noch einen Integraphen zur Aufzeichnung der durch eine beliebige innere Gleichung

$$2) \qquad \frac{1}{\varrho} = f(\sigma)$$

(wo σ den Bogen, ϱ den Krümmungsradius bedeutet) definierten Kurven, den ich als „Fahrradintegrator“ bezeichnen möchte. Er besitzt gegenüber den für einzelne spezielle innere Gleichungen schon konstruierten Mechanismen [1]) den Vorteil voller Allgemeinheit und absoluter Bewegungsfreiheit. Ich darf endlich in diesem Zusammenhange noch auf meine in der Abhandlung „Über den Verlauf der Integralkurven einer homogenen Differentialgleichung erster Ordnung“ [2]) gegebene Umformung des Abdank-Abakanowiczschen Integraphen zur Integration homogener Differentialgleichungen hinweisen.

---

und von H. de Morin, „Les appareils d'intégration“ (Paris, 1913). Eine Anzahl neuer Integraphen beschreibt E. Pascal in dem unlängst erschienenen Buch „I miei integrafi per equazioni differentiali“ (Napoli, 1914). Kriloffs Anordnungen sind dargelegt im 20. Band des Bulletin de l'Académie imp. des sciences de St. Pétersbourg, 1904.

[1]) Man vergleiche den Aufsatz von R. Schimmack, „Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenographen“. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 52, 1905.

[2]) Abhandlungen der K. Bayer. Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl., Bd. 26, 10, 1914.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

§ 1. Apparat zur Integration der allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung.

Die umstehende Fig. 1 stellt den Integrationsapparat in schematischer Zeichnung dar:

$W_y W_y$ ist der „Integrationswagen", der seine freie Beweglichkeit über der horizontalen Ebene xy dadurch erhält, daß er sich auf einem ersten Schienenpaar in Richtung der y-Achse bewegen läßt, während dieses Schienenpaar selbst wieder auf einem Wagen $W_x W_x$ in Richtung der x-Achse verschoben werden kann.

Auf dem Wagen W_y ist, nach oben und unten erstreckt, der äußere Zylinder UU befestigt; in seinen unteren Teil ist der innere Zylinder VV so eingeschoben, daß er mit der an seinem unteren Ende angebrachten scharfkantigen „Integrierrolle J" auf der Ebene $A' B' C' D'$ aufruht.

Stellen wir nun an einer Stelle (x, y) die Ebene der Integrierrolle so ein, daß sie mit der x-Achse den Winkel φ bildet, für welchen

$$\text{3)} \qquad \operatorname{tg} \varphi = f(x, y)$$

ist, so können wir von da ausgehend die Bewegung des Apparates dadurch einleiten, daß wir die Integrierrolle in ihrer Ebene um das Element ds abrollen lassen; es verschieben sich dabei die Wagen W_y, W_x beziehungsweise um die Elemente dy und dx, so daß

$$\text{4)} \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$$

ist. Statt dessen können wir die Bewegung auch dadurch einleiten, daß wir den Wagen W_x um den Betrag dx verschieben, wodurch die Verschiebung des Wagens W_y um dy, das Abrollen der Integrierrolle J um ds hervorgerufen wird, so daß $dy = \operatorname{tg} \varphi \cdot dx$, $ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$ ist. Ebenso läßt sich endlich die Bewegung des Apparates mit Hilfe der Verschiebung des Wagens W_y bewirken.

Die Genauigkeit, mit der sich die kleinen Bewegungen ds, dx, dy der Einstellung φ entsprechend vollziehen, ist eine wesentliche Bedingung des genauen Funktionierens des Apparates. Aufgabe der Steuerung des Apparates ist es jetzt, die Rolle J an jeder Stelle x, y, die sie auf ihrem Wege erreicht, in die durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

vorgeschriebene Richtung φ jeweils einzustellen.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Zu dem Ende seien von irgend einem Horizont aus, in der Figur von der oberen Ebene $ABCD$ aus, die Werte der Funktion $f(x, y)$ als Höhen z einer Fläche aufgetragen. Führen wir dann einen vertikal unter dieser Fläche (bei (x, y)) aufgestellten Stab KL so, daß seine Spitze L stets an dieser Fläche anliegt, so handelt es sich nur darum, die bei der seitlichen Bewegung des Stabes (um dx, dy) eintretende Vertikalverschiebung dz in die entsprechende Drehung $d\varphi$ der Ebene der Integrierrolle J umzusetzen.

Dies wird in dem vorliegenden Apparat folgendermaßen erreicht:

Der innere Zylinder VV (und mit ihm die Achse $M_1 M_2$ der Integrierrolle) ist um die vertikale Achse des Apparates (in Kugellagern kk) drehbar. In dieser Achse liegt die Führungsstange KL, die sich, zentriert durch die im oberen Teil des Zylinders U angebrachten Kugellager, vertikal auf und ab bewegen läßt. Sie wird durch das über Rollen r, r, r aufgehängte Gewicht p, p mit der Spitze L nach oben, an die Fläche $z = f(x, y)$ angedrückt.

Am unteren Ende der Stange ist die um den Kopf K drehbare Querstange $H_1 H_2$ eingesetzt. Die Enden dieser Querstange greifen einerseits in die beiden diametralsymmetrischen Schlitze T_1, T_2 des (nicht drehbaren) äußeren Zylinders U, andererseits in zwei vertikale Schlitze Q_1, Q_2 des (drehbaren) inneren Zylinders V ein.

Bei vertikaler Verschiebung der Stange KL gleitet also der Querarm $H_1 H_2$, sich drehend, in den Schlitzen $T_1 T_2$ und nimmt bei seiner Drehung den inneren Zylinder V und damit die Achse $M_1 M_2$ der Integrierrolle mit.

Entspricht nun die Kurve (T_1, T_2) auf dem äußeren Zylinder der Gleichung

$$z = z' - z_0 = \operatorname{tg} \varphi \tag{5}$$

(von der Mittelebene z_0 des unteren Zylinders an gemessen), so erhält die Integrierrolle an jedem Punkt der Ebene xy die ihr entsprechende Einstellung.

Für ein innerhalb der Grenzen der möglichen Vertikalverschiebung der Stange KL über der Ebene $ABCD$ einfach ausgebreitetes Blatt der Fläche $z = f(x, y)$ kann also auf der unteren Ebene $A' B' C' D'$ jeder zugehörige Zweig der Integralkurven dadurch aufgezeichnet werden, daß man, von einer entsprechenden Anfangsstellung x_0, y_0 ausgehend, den Apparat durch einen (mechanischen oder manuellen) Antrieb der Integrierrolle, oder durch Verschieben des Wagens W_x (oder auch des Wagens W_y) in Bewegung setzt. Dabei kann die Integralkurve direkt von der zu diesem Zwecke mit gefärbtem Rand versehenen Integrierrolle J, oder von einem seitlich mit dem Wagen W_y fest verbundenen Zeichenstift beschrieben werden.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

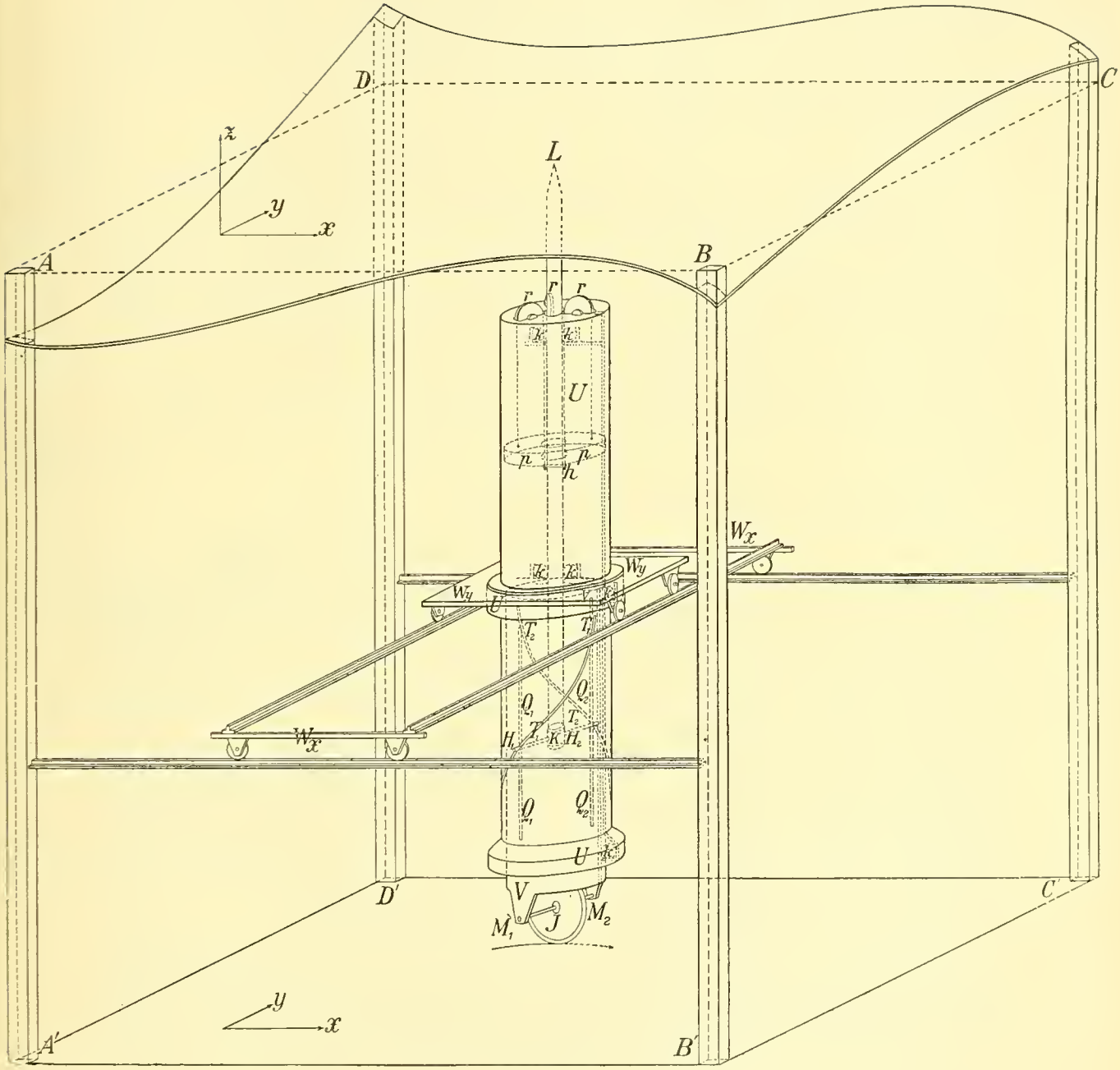


Fig. 1.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Der Übergang von einem Blatt der Fläche $z = f(x, y)$ zu einem zweiten erfolgt im allgemeinen längs der „Umrißkurve“ dieser Fläche, in welcher sie vertikale Tangentialebenen besitzt. Hier versagt für eine praktische Ausführung der Apparat, so daß die Spitzen der Integralkurven nicht zur Darstellung gebracht werden können, ebensowenig wie die Umgebung einer etwa vorhandenen singulären Lösung.

§ 2. Spezielle Fälle und mögliche Abänderungen des Apparates.

Für die Führung des Punktes L muß man sich im allgemeinen jedes Blatt der Fläche $z = f(x, y)$ aus festem, möglichst wenig Reibung bietendem Material hergestellt denken. In einzelnen Fällen ist aber die Führung dieses Punktes durch einen Bewegungsmechanismus besonders einfach. So vor allem

1. Für die lineare Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} = X_1 y + X_2. \tag{6}$$

Hier ist die zugehörige Fläche

$$z = X_1 y + X_2 \tag{7}$$

eine Regelfläche, deren Erzeugende parallel zur yz-Ebene verlaufen. Man kann daher die Schnittkurven der Ebenen $ABA'B'$ und $CDC'D'$ ($y = y_a$ und $y = y_c$) mit der Regelfläche als Führungslinie L_1, L_2 der erzeugenden Geraden G benützen. Dabei sorgt eine Vertikalverbindung von G mit dem Wagen W_x dafür, daß die Gerade zugleich mit diesem Wagen in Richtung der x-Achse verschoben wird. In Fig. 2, welche das Schema dieses Apparates darstellt, ist diese Verbindung durch einen Doppelwagen hergestellt. Andererseits ist die Spitze L der Stange KL (etwa vermittelst einer auf G laufenden Rolle) gezwungen, sich auf G zu bewegen. Damit ist unter den gleichen beschränkenden Voraussetzungen wie im allgemeinen Fall die Führung der Integrierrolle J der Differentialgleichung 6) gemäß gesichert.

Gegenüber anderen Apparaten, die man zur Integration der linearen Differentialgleichungen vorgeschlagen hat, scheint mir der vorliegende den Vorzug einer ungehemmten Bewegung innerhalb weiter Grenzen zu gewährleisten.

Auch können die Leitkurven L_1 und L_2 leicht für jeden einzelnen Fall als Schablonen in den Begrenzungsebenen des Apparates angebracht und ausgewechselt werden.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

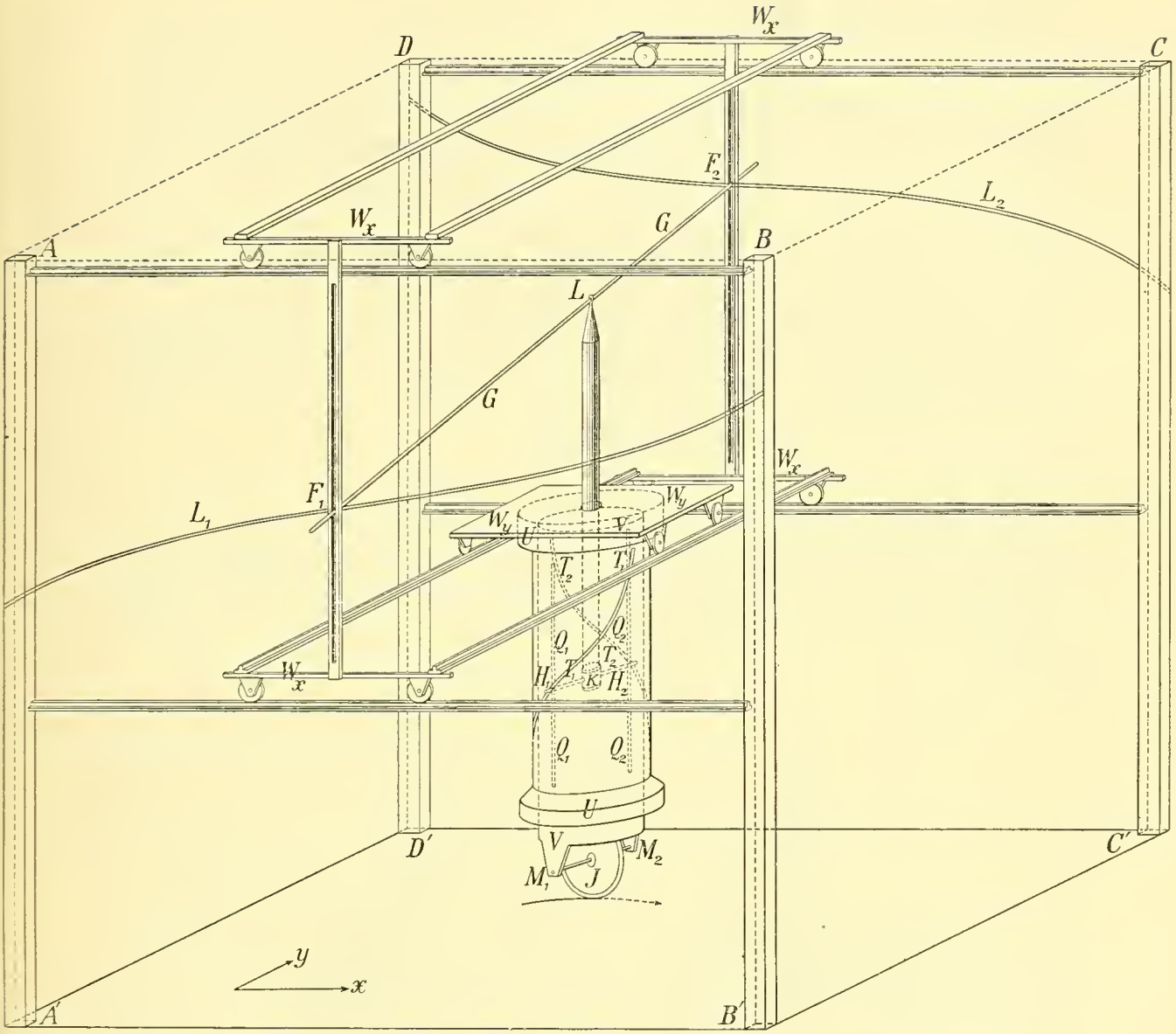


Fig. 2.

2. In ähnlicher Weise ergibt sich ein einfacher Ersatz der Führungsfläche durch einen Führungsmechanismus für die Differentialgleichung

8) $$\frac{dy}{dx} = X(x) + Y(y),$$

im besondern also für die Riccatische Gleichung

9) $$\frac{dy}{dx} = X(x) + y^2.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Man bewege die feste Kurve L_y

10) $$z = Y(y)$$

(nach Art eines Laufkrans) parallel mit sich an den zwei in den Begrenzungsebenen $y = y_a$ und $y = y_c$ angebrachten krummlinigen Geleisen

11) $$z = X(x) + Y(\bar{y}) \qquad \bar{y} = y_a;\ \bar{y} = y_c$$

entlang und sorge durch Verbindung der Spitze L mit einer auf L_y laufenden Rolle jeweils für die richtige Einstellung der Führungsstange $K\,L$.

Von weiteren, sich leicht darbietenden Beispielen sei abgesehen, und nur noch eine, für manche Fälle zweckmäßige Abänderung des Apparates erwähnt.

Statt die Einstellung des Winkels φ der Integrierrolle gegen die x-Achse durch die Funktion

$$z = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi)$$

zu bewirken, bei welcher wegen der vertikalen Dimension des Apparates, der Winkel nur innerhalb enger Grenzen variieren kann, läßt sich natürlich jede passende Funktion von z als Führungsfläche unter entsprechender Abänderung der Führungskurven T_1, T_2 für den Querstab H_1, H_2 verwenden; so etwa die Funktion

$$z' = \sin\varphi,$$

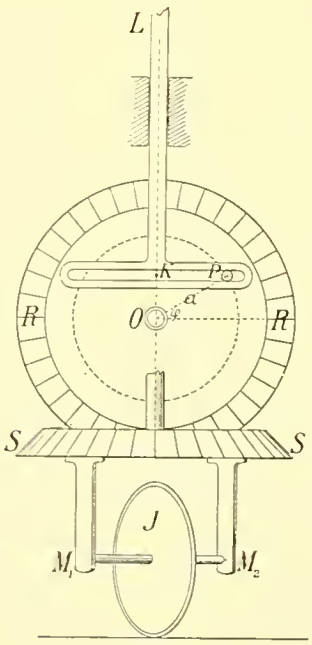


Fig. 3.

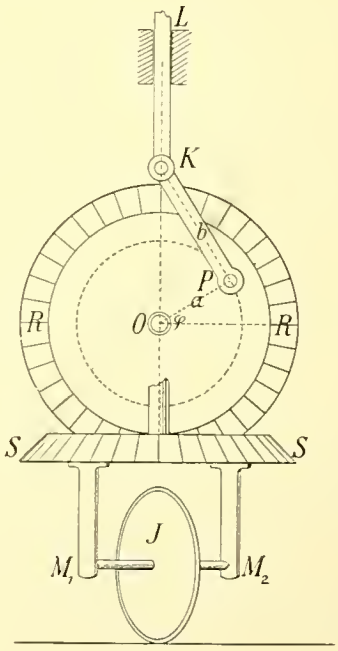


Fig. 4.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

für welche die Höhenschwankung der Stange KL zwischen ± 1 verläuft und die Führungskurven T_1, T_2 aus zwei in den Zylinder U eingeschnittenen Ellipsen bestehen. Man kann für diesen Fall die Umsetzung der Vertikalbewegung der Führungsstange in die Drehung der Rollenebene J auch einfacher durch die in Fig. 3 gekennzeichnete „Kurbelschleife" bewirken, für welche sich für einen Punkt P der Führungsstange sofort

12) $$\overline{KO} = a \sin \varphi$$

ergibt.

Verwendet man andererseits den in Fig. 4 skizzierten allgemeinen Kurbelmechanismus, so ist

13) $$\overline{KO} = a \sin \varphi + \sqrt{b^2 - a^2 \cos^2 \varphi}$$

und man hat dieser Relation entsprechend die Führungsfläche zu konstruieren.

§ 3. Apparat zur Integration der „inneren Gleichung" einer Kurve:

$$\frac{1}{\varrho} = f(\sigma).$$

Nebenstehende Fig. 5 ist die schematische Darstellung eines Velozipeds. Bei A befindet sich die Achse des Hinterrades H, bei B die Achse des Vorderrades V. Der Antrieb wirke auf das Hinterrad, die Steuerung wird durch Drehung des Vorderrades um die in B auf der Bahnebene xy vertikale Steuerachse bewerkstelligt. Beide Räder seien so belastet, daß sie sich nur in der Richtung der Radebenen vorwärts bewegen können und dabei abrollen ohne zu gleiten.

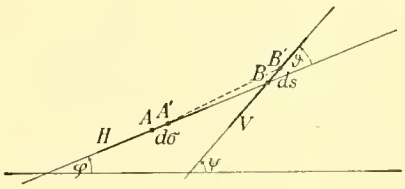


Fig. 5.

Wir bezeichnen mit $d\sigma$ das Bogenelement der Drehung des Hinterrades, also gleichzeitig das Bogenelement auf der vom Hinterrad durchlaufenen Kurve K. ϱ sei der Krümmungsradius dieser Kurve, ϑ der Winkel der Vorderradebene mit der Ebene des Hinterrades, φ der Winkel der Hinterradebene mit einer festen Richtung X, ebenso ψ der Winkel der Vorderradebene mit dieser Richtung; die Entfernung AB sei gleich l gesetzt.

Dann besteht die sofort aus der Figur zu entnehmende Beziehung:

14) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{1}{l} \cdot \operatorname{tg} \vartheta.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ist also die „innere Gleichung“

$$2) \qquad \frac{1}{\varrho} = f(\sigma)$$

der Hinterradkurve gegeben, so ergibt sich aus Formel 14:

$$15) \qquad \operatorname{tg} \vartheta = l \cdot f(\sigma)$$

als zugehörige „Steuervorschrift“ für das Vorderrad V.[1])

Um das Fahrrad dieser Gleichung gemäß lenken und damit die der inneren Gleichung (2) entsprechende Kurve K als Bahn des Hinterrades aufzeichnen zu können, dient folgende Vorrichtung:

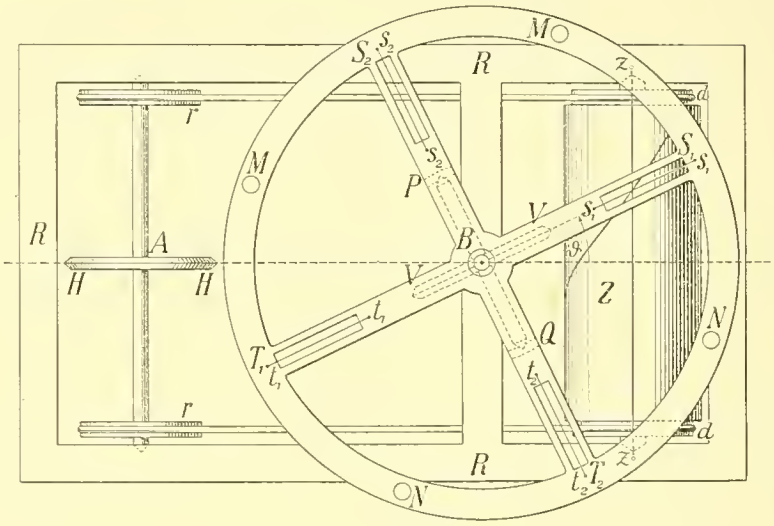


Fig. 6.

Parallel zur Achse des Hinterrades ist (vgl. Fig. 6) an dem rechteckigen Rahmen R der Zylinder Z drehbar in zwei Lagern angebracht und durch Zahnradeingriff oder vermittelst einer Transmission (d, r) mit dem Hinterrad H verbunden. Auf dem Zylinder ist die durch die innere Gleichung (2) gegebene Kurve J in der Weise verzeichnet, daß die Bögen σ auf der Mittellinie des Zylinders (dem Verhältnis der Umfänge von Hinterrad und Zylinder, wie der angewandten Übersetzung gemäß) von einem Nullpunkt aus aufgetragen sind und in der Richtung der Erzeugenden des Zylinders die zugehörigen Werte:

---

[1]) Man sehe hierzu: M. d'Ocagne, „Note sur la théorie géométrique du virage à bicyclette“ in den Comptes rendus du congrès de l'association française pour l'avancement des sciences, Paris 1889 und eine das gleiche Thema behandelnde Note im 29. Band (S. 140) von „Le génie civil“ (1896). Ferner vergleiche man die Ausführungen von C. Bourlet im ersten Teil seines „Nouveau traité des bicycles et bicyclettes“, 2. édit., Paris 1898.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

16) $$\zeta = \frac{c \cdot l}{\varrho} = c \cdot l \cdot f(\sigma).$$

Unmittelbar über dem Zylinder ist, in einem Abstand c vom Punkt B, ein Draht zz parallel zu einer Erzeugenden gespannt. Darüber liegt ein auf der Steuerachse B des Vorderrades befestigter und mit der Lenkstange MN des Vorderrades sich drehender Zeiger BS_1.

Stellt man mit Hilfe der Lenkstange diesen Zeiger BS_1 und damit die Ebene des Vorderrades in jedem Augenblick der Bewegung auf den Schnittpunkt der Geraden zz mit der auf dem Zylinder verzeichneten Kurve J ein, so beschreibt das Hinterrad im Laufe der Bewegung die Kurve K.

Die Integrationskonstanten ergeben sich dadurch, daß man an irgend einer Stelle ξ_0, η_0 der Ebene die Anfangsrichtung φ_0 von AB gegen die X-Achse willkürlich wählen kann und dann noch an irgend einem Punkte P_0 der auf dem Zylinder verzeichneten Kurve J — welcher einem Anfangswinkel ϑ_0 zwischen Vorder- und Hinterradebene entspricht — die Bewegung beginnen kann. Es werden damit zum Ausgangspunkte ξ_0, η_0 die Anfangswerte $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_0$ und $\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_0$ festgelegt.

Für die praktische Ausführung des Integraphen wird man die Dimensionen des Instrumentes der Ebene des Zeichentisches entsprechend wählen und die Bewegungen am einfachsten mit der Hand an den Handgriffen M, N der Lenkstange ausführen. Durch Gleitrollen, die am Rahmen R anzubringen sind, ist dabei für die Normalstellung des Apparates auf der Zeichenebene zu sorgen.

Der Apparat ist dann in seiner Bewegung völlig unbeschränkt, wenn man dafür sorgt, daß jede Richtung des Steuerrades V gegen das Hinterrad H eingestellt werden kann.

Man kann das am einfachsten dadurch erreichen, daß man den einen Zeiger BS_1, welcher der Richtung der Vorderradebene entspricht, durch eine um den Punkt B drehbare Zeigerscheibe ersetzt, auf welcher mehrere Zeiger unter gleichen Winkeln gegeneinander angebracht sind, so zwar, daß bei voller Umdrehung der Scheibe (und damit des Vorderrades V) um die vertikale Achse bei B diese einzelnen Zeiger der Reihe nach den Zylinder Z überstreichen. Auf dem Zylinder sind dann die den einzelnen Zeigern entsprechenden Steuerkurven J_1, J_2 . . . aufzutragen. In Fig. 6 sind vier Zeiger angebracht, die aus den in die Speichen T_1S_1, T_2S_2 der Scheibe eingespannten Drähten ss, tt bestehen.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Statt dieser zyklischen Anordnung der Zeiger kann man auch um B mehrere Zylinder zyklisch anordnen, die sich gleichmäßig mit dem ursprünglichen Z drehen. Fig. 7 zeigt eine solche Verteilung:

Die drei Zylinder Z_1, Z_2, Z_3 sind im Dreieck unter einer ringförmigen Platte R in Lager c_i, c_i eingesetzt, so daß sie gegenseitig mit den an ihren Enden angebrachten Kegelrädern d_i ineinandergreifen. Das Hinterrad H überträgt seine Drehung an diese Zylinder durch die Zahnräder a und e (im Aufriß sind die Räder a_3, e_3, r_3 und der vorn gelegene Zylinder Z_3 weggelassen). Auf die drei Zylinder kann jede beliebige Steuervorschrift aufgetragen werden. Die Steuerung, wie die Fortbewegung des Apparates erfolgt von den Handgriffen MN der Lenkstange aus, wobei jeweils an den Drähten ss bzw. tt abzulesen ist. L_2 und L_3 sind die zur Vertikalstellung erforderlichen Laufräder.

§ 4. Singuläre Stellen der Hinterradkurve.

Es mögen noch einige Bemerkungen über ausgezeichnete Stellen der auf dem Zylinder Z aufgezeichneten „Steuerkurve J" und den zugehörigen Singularitäten der Hinterradkurve K_A und der Vorderradkurve K_B angeschlossen sein.

Wir führen noch die Bezeichnungen für den Krümmungsradius der Vorderradkurve r und deren Bogenelement ds ein. Es folgt dann aus der „inneren Gleichung" für die Hinterradkurve K_A:

$$2)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{d\sigma} = f(\sigma) \text{ oder } \sigma = g(\varrho),$$

da

$$ds = \sqrt{1 + l^2 f^2(\sigma)} \cdot d\sigma$$

ist, für den Krümmungsradius der Vorderradkurve K_B:

$$17)\quad \frac{1}{r} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{f(\sigma)}{\sqrt{1 + l^2 f^2(\sigma)}} + \frac{l \cdot f'(\sigma)}{\sqrt{1 + l^2 f^2(\sigma)}^3} = \frac{1}{\sqrt{l^2 + \varrho^2}} - \frac{l\varrho}{\sqrt{l^2 + \varrho^2}^3} \cdot \frac{1}{g'(\varrho)}.$$

Die Darstellung der Hinterradkurve K_A ergibt sich aus $d\xi = d\sigma \cdot \cos\varphi$, $d\eta = d\sigma \cdot \sin\varphi$ in der Form:

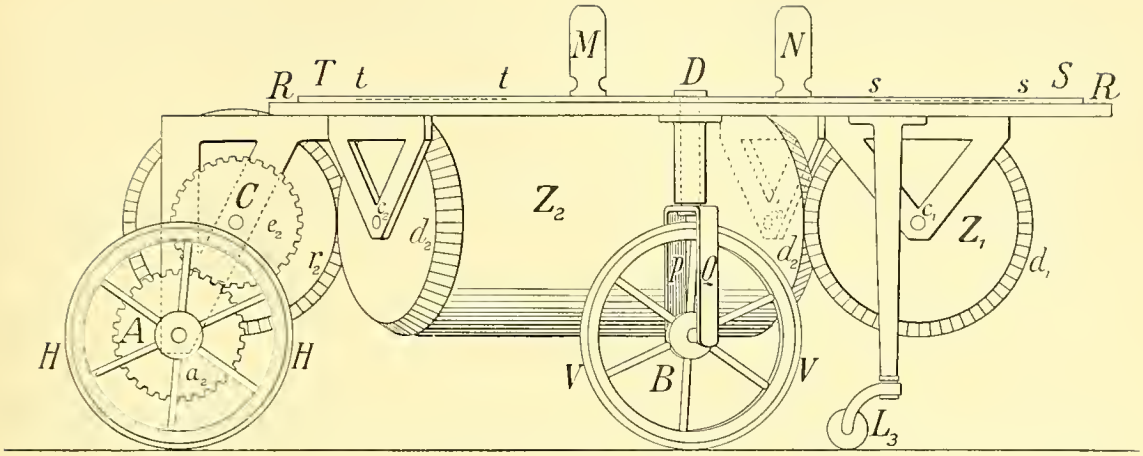
$$18)\quad \begin{aligned} \xi &= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \cos\left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} f(\sigma) \cdot d\sigma\right] \cdot d\sigma \\ \eta &= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sin\left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} f(\sigma) \cdot d\sigma\right] \cdot d\sigma \end{aligned}$$ [1])

---

[1]) Man vergleiche die entsprechenden Formeln in den auf Seite 12 angeführten Abhandlungen von M. d'Ocagne und C. Bourlet. Wir notieren zu Formel 18 noch die Differentialgleichung der Hinterradkurve in rechtwinkligen Koordinaten:

$$19)\qquad g'\left(\frac{(1+\eta'^2)^{\frac{3}{2}}}{\eta''}\right) \cdot \left[3\,\eta'\eta'' - (1+\eta'^2)\frac{d\eta''}{d\eta'}\right] - \eta'' = 0.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at



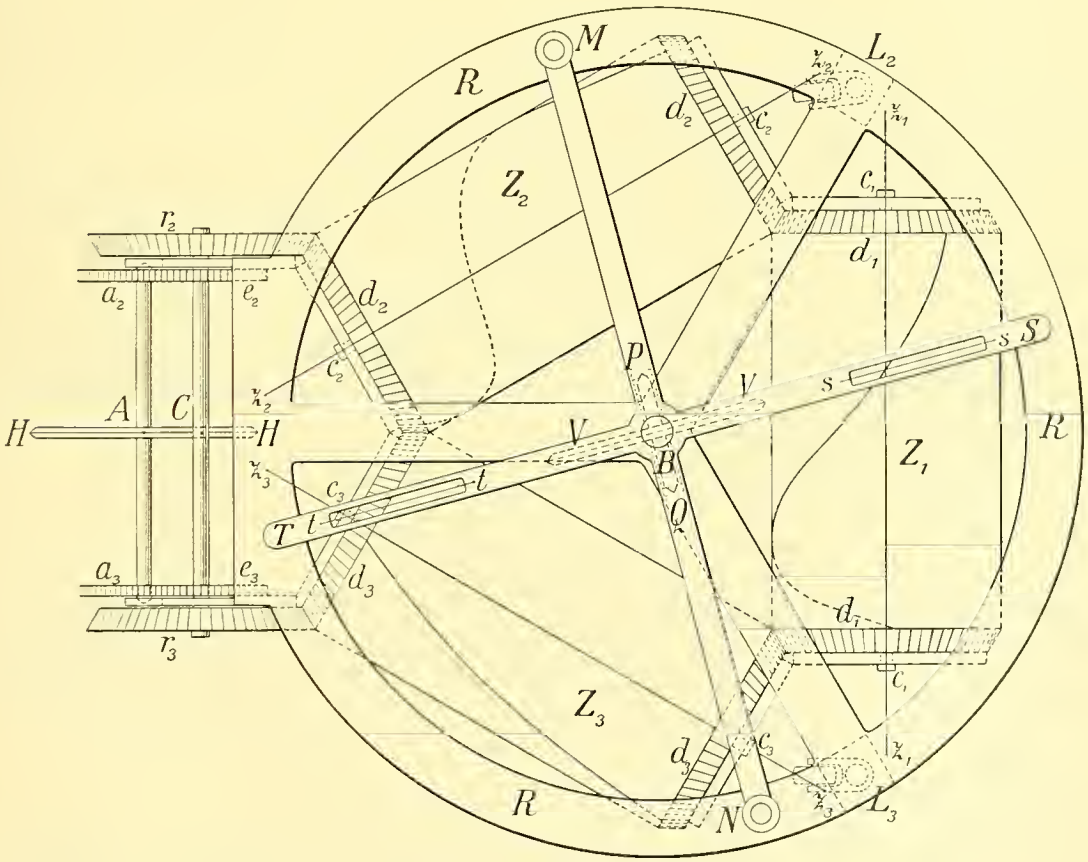


Fig. 7.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Vorderradkurve, für welche die Hinterradkurve eine Traktrix bildet, folgt hieraus sofort in der Gestalt

$$20)\qquad \begin{aligned} x &= \xi + l\cos\varphi \\ y &= \eta + l\sin\varphi . \end{aligned}$$

Für die singuläre Stelle sei $\sigma = 0$, also $\xi = 0$, $\eta = 0$ und $x = l$, $y = 0$ angenommen.

1. Setzen wir nun zunächst:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{l}\operatorname{tg}\vartheta = f(\sigma) = a_1\sigma + a_2\sigma^2 + \cdots,$$

so wird bei $\sigma = 0$ der Winkel $\vartheta = 0$, es fallen also die Ebenen des Vorderrades und des Hinterrades für ein Element der Bahnkurven zusammen. Die Hinterradkurve erhält an dieser Stelle einen Wendepunkt:

$$\xi = \sigma - \frac{a_1^2}{40}\cdot\sigma^5 + \cdots$$

$$\eta = \frac{a_1}{6}\cdot\sigma^3 + \frac{a_2}{12}\cdot\sigma^4 + \cdots,$$

während sich für die Vorderradkurve ergibt:

$$x = l + \sigma - \frac{l\cdot a_1^2}{8}\cdot\sigma^4 + \cdots$$

$$y = \frac{l\cdot a_1}{2}\cdot\sigma^2 + \left(\frac{a_1}{6} + l\frac{a_2}{3}\right)\sigma^3 + \cdots$$

In Fig. 8 (wie auch in den folgenden Figuren) sind die beiden Kurven näherungsweise durch den gebrochenen Linienzug der einander entsprechenden Elemente $d\sigma$ und ds dargestellt.

2. Für eine Entwickelung

$$\frac{1}{\varrho} = f(\sigma) = a_{-\frac{1}{2}}\sigma^{-\frac{1}{2}} + a_0 + a_{\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{1}{2}} + \cdots$$

folgt für die Hinterradkurve:

$$\xi = \sigma - a_{-\frac{1}{2}}^2\cdot\sigma^2 + \cdots$$

$$\eta = \frac{4}{3}a_{-\frac{1}{2}}\cdot\sigma^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a_0\cdot\sigma^2 + \cdots$$

und für die Vorderradkurve:

$$x = l + (1 - 2\cdot l a_{-\frac{1}{2}}^2)\cdot\sigma + \cdots$$

$$y = 2 l a_{-\frac{1}{2}}\cdot\sigma^{\frac{1}{2}} + l a_0\cdot\sigma + \cdots$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Das Hinterrad beschreibt eine Spitze und ändert dabei den Bewegungssinn. Das Vorderrad steht bei $\sigma = 0$ senkrecht zum Hinterrad, läuft aber gleichsinnig weiter. Vgl. Fig. 9.

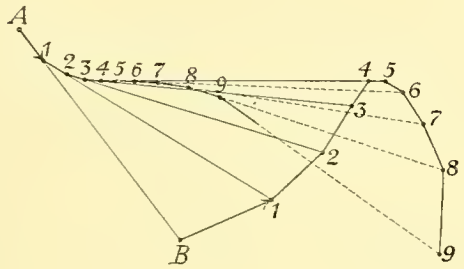


Fig. 8.

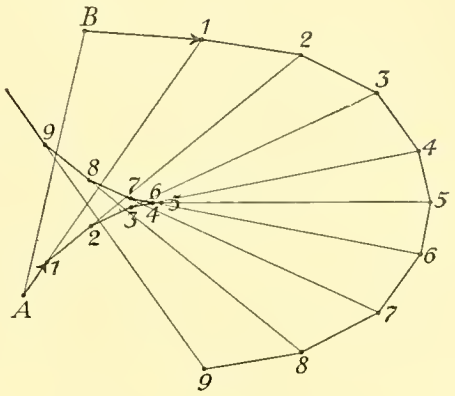


Fig. 9.

3. Ist dagegen:

$$\frac{1}{\varrho} = f(\sigma) = a_0 + a_{\frac{1}{2}} \cdot \sigma^{\frac{1}{2}} + a_1 \cdot \sigma + \cdots,$$

so ergibt sich für das Hinterrad:

$$\xi = \sigma - \frac{1}{6} a_0^2 \cdot \sigma^3 + \cdots$$

$$\eta = \frac{1}{2} a_0 \cdot \sigma^2 + \frac{4}{3 \cdot 5} a_{\frac{1}{2}} \cdot \sigma^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

für das Vorderrad:

$$x = l + \sigma - \frac{1}{2} l a_0^2 \cdot \sigma^2 + \cdots$$

$$y = l a_0 \sigma + \frac{2}{3} l a_{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

Beide Räder kehren den Sinn ihrer Bewegung um; und während das Vorderrad eine gewöhnliche Spitze beschreibt, folgt ihm das Hinterrad mit einer Schnabelspitze. Fig. 10 und 11.

4. Endlich sei noch

$$\frac{1}{\varrho} = f(\sigma) = a_{-1} \sigma^{-1} + a_0 + a_1 \sigma + \cdots$$

gesetzt. Beschränken wir uns, was für die Darstellung in der Umgebung der singulären Stelle genügt, auf das erste Glied der Entwickelung, so

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

folgt (in Polarkoordinaten R, ω geschrieben) für das Hinterrad die logarithmische Spirale:

$$R = \varkappa \cdot e^{\frac{\omega}{a}-1}.$$

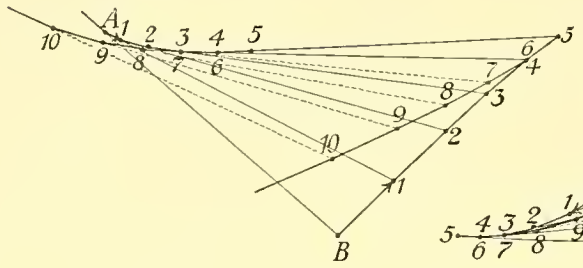


Fig. 10.

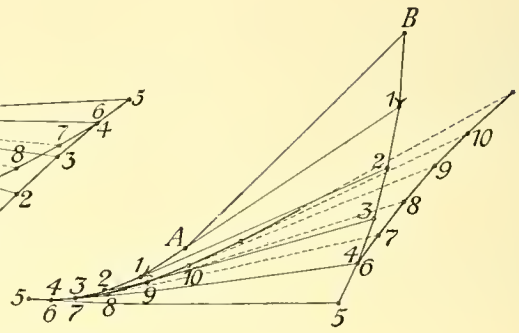


Fig. 11.

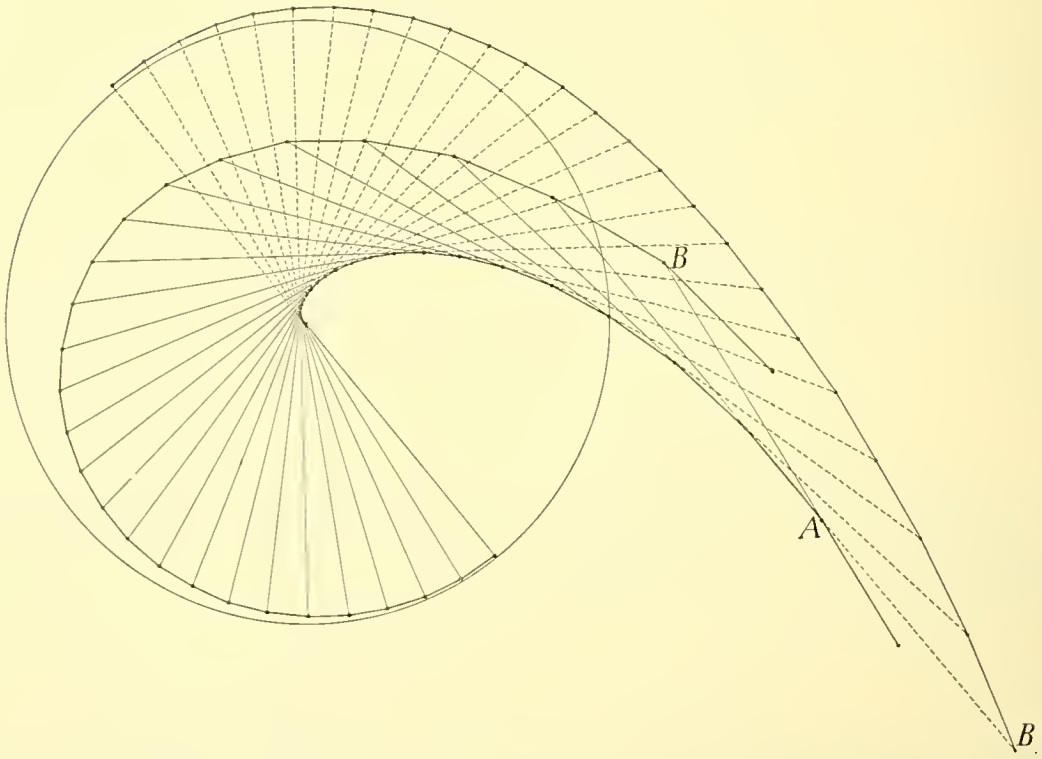


Fig. 12.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Steuervorschrift $\zeta = a_{-1} \cdot c \cdot l \cdot \frac{1}{\sigma}$ — eine auf den Zylinder Z aufgezeichnete Hyperbel, deren eine Asymptote eine Erzeugende bildet — bewirkt hier, daß das Vorderrad sich allmählich senkrecht zur Ebene des Hinterrades stellt, dieses aber sich dabei immer langsamer fortbewegt; während die Bahn des Vorderrades sich asymptotisch dem Grenzkreis vom Radius l nähert, umkreist das Hinterrad in immer engeren Windungen den Nullpunkt. Vergleiche Fig. 12, in welcher die den beiden Ästen der Hyperbel entsprechenden Radbahnen aufgetragen sind.

Schlußbemerkung. Beschreibt man umgekehrt mit dem Vorderrad eine bestimmte Kurve K_B, so kann man den Apparat auch dazu benützen, die innere Gleichung der Hinterradkurve auf den Zylinder Z im Laufe der Bewegung aufzeichnen zu lassen. Es ist aber zu beachten, daß dabei gefordert wird, das Vorderrad jeweils in die Tangentenrichtung der vorgegebenen Bahnkurve K_B einzustellen, eine bei graphisch gegebenen Kurven praktisch nicht leicht auszuführende Forderung, die etwa mit einer Spiegelvorrichtung — wie sie gelegentlich Reusch und Mack zur Normalen- und Tangentenkonstruktion vorgeschlagen haben [1]) — annähernd genau vollzogen werden kann.

---

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 52 (1905), S. 435.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1914

Band/Volume: 26

Autor(en)/Author(s): Dyck Walther von

Artikel/Article: Ueber einige neue Apparate zur mechanischen Integration 1-19