Ueber die Bahn des dritten Saturns-Satelliten.

Von

Dr. J. Lamont,

ordentlichem Mitgliede der Königl. Akademie der Wissenschaften, Conservator der K. Sternwarte, auswärtigem Mitgliede der K. Astronom. Societät in London.

Ueber die Bahn

des

dritten Saturns-Satelliten.

Der dritte Saturns-Satellit, (welchen Herschel übereinstimmend mit den frühern Astronomen als den ersten Saturns-Satelliten bezeichnet hat) *), wurde am 21. März 1684 von Cassini dem Aeltern entdeckt, aber wegen Unzulänglichkeit der optischen Hülfsmittel jenes Zeitalters nur mit geringem Erfolge sowohl von ihm als auch von seinem Sohne beobachtet. In den Denkschriften der Pariser Academie für das Jahr 1716 hat der letztere die erhaltenen Beobachtungen zusammengestellt, und Tafeln der mittlern Bewegung dar-

*) Ich habe die von Delambre angenommene, sich eben so sehr durch Analogie als Zweckmässigkeit empfehlende, Benennungsweise befolgt, wornach die Saturns-Satelliten vom innersten anfangend mit den Ordnungszahlen I., II., III. . . . bezeichnet werden, während sie Herschel zum Theile nach ihrer Stellung zum Theile nach der Zeitfolge ihrer Entdeckung den VII., VI. I. . . . benannte. Die doppelte Benennung wird hier keine Verwirrung herbeiführen, weil man bei der Theorie der Saturns-Satelliten, besonders der innersten, wenig Veranlassung haben wird, sich auf die sehr mangelhaften Beobachtungen des vorigen Jahrhunderts zu beziehen.

auf begründet. Die Bemühungen anderer Astronomen, eines Pound, Halley und Hadley, welche in dem Zeitraume zwischen Cassini und Herschel den dritten Satelliten gesehen haben, sind für die Theorie fruchtlos geblieben, indem sie keine messenden Bestimmungen zu liefern im Stande waren; fast dasselbe Urtheil trifft auch die von Bernard in Marseille 1787 mit einem Fernrohre von Short angestellten Beobachtungen, die sich auf ganz unsichere Zeitangaben der grössten Elongation beschränken. Bei Weitem die zahlreichste und wichtigste Beobachtungsreihe, die wir aus älterer Zeit über die Saturns-Satelliten besitzen, ist diejenige, welche Herschel im Jahre 1789, während der Ring seinem Verschwinden nahe war, mit dem vierzigfüssigen Teleskop unternommen hat. Wäre das Instrument so gut zu Messungen eingerichtet gewesen, als es geeignet war, lichtschwache Gegenstände zu zeigen, so würde uns die Herschel'sche Arbeit, durch den angewendeten Fleiss, wie durch die Zahl der Bestimmungen, vorzüglich schätzenswerth, zu einer genauen Kenntniss der Bahnen der Saturnus-Satelliten geführt haben: aber auch so wie sie, in Ermangelung des ersterwähnten Vorzuges am Instrumente, geworden ist, scheint sie auf mehr Berücksichtigung Anspruch machen zu dürfen, als derselben bisher zugewendet worden. In wie ferne daraus zur Bahnbestimmung des dritten Satelliten Nutzen gezogen werden kann, wird aus dem Folgenden hervorgehen. Herschel selbst hat nicht versucht, eine Theorie der Saturns-Satelliten auf seine Beobachtungen zu gründen; er begnügte sich zum Behufe der Tafeln, welche in den *Philos. Transactions* von 1790 (pag. 488) enthalten sind, die Epochen näherungsweise abzuleiten, übrigens aber die Cassini'schen Tafeln beizubehalten.

Von der Epoche der Herschel'schen Beobachtungen bis auf die neueste Zeit ist kein Versuch bekannt gemacht worden, die Bahn des dritten Saturns-Satelliten, sey es durch neue Beobachtungen, sey es durch schärfere Berechnung der vorhandenen Angaben, näher zu bestimmen. Gleichwohl fordert der Gegenstand dieselbe Aufmerksamkeit, welche jedem einzelnen Theile der Mechanik des Himmels zugewendet werden muss, wenn bekannte Gesetze und Verhältnisse allgemein begründet oder unbekannte zu Tage gefördert werden sollen: insbesondere aber bietet die Untersuchung der nächsten Saturns-Satelliten das unmittelbare Interesse dar, dass sie zu einer nähern Kenntniss der Saturnsmasse und der räthselhaften Beschaffenheit seines Ringes wesentlich beitragen wird. Dieses hat mich veranlasst nach Aufstellung des grossen Refractors an der hiesigen k. Sternwarte, die Saturns-Satelliten unter diejenigen Gegenstände aufzunehmen, an denen insbesondere die Leistung jenes mächtigen Instrumentes versucht werden sollte. Es ist nun meine Absicht, hier die Ergebnisse der Beobachtungen des ersten Jahres in Beziehung auf den dritten Saturns-Satelliten zusammenzustellen, zugleich aber auch die aus älterer Zeit vorhandenen Bestimmungen, in so ferne sie zur Begründung der Theorie entsprechenden Nutzen erwarten lassen, einer schärfern Rechnung, als bisher geschehen ist, zu unterwerfen.

So lange es an grossen Fernröhren mit geeigneten Messapparaten fehlte, war das Bestreben der Astronomen bezüglich auf die Saturns-Satelliten dahin gerichtet, die Zeit ihrer Conjunction mit dem Planeten entweder unmittelbar zu beobachten oder aus den beobachteten Elongationen zu berechnen. War aber die Conjunctionszeit bekannt, so ergab sich für diese Zeit die saturnicentrische Länge der Satelliten ohne Mühe, indem diese in der obern Conjunction der geocentrischen Länge des Planeten gleich, in der untern Conjunction aber um 180° grösser war. Nach solchem Grundsatze sind insbesondere die Beobachtungen der beiden Cassini, die sich in den Denkschriften der Pariser Academie für 1716 (pag. 200) aufgezeichnet finden, angestellt worden. Cassini der Jüngere, welcher die Beobachtungen in Rechnung genommen hat, scheint den Umstand unberücksichtiget gelassen zu haben, dass die Beobachtungen nur die Zeit angeben, zu welcher ein Satellit durch die kleine Axe der Ringellipse gegangen ist, diese Zeiten aber nur dann für die Conjunctions-Zeiten in Beziehung auf die Ecliptik genommen werden dürfen, wenn sich die Erde in der Ebene der Bahn des Satelliten befindet. Folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Cassini'schen Beobachtungen des dritten Saturns-Satelliten, wobei der Halbmesser des Saturn mit r, der Halbmesser des Ringes aber mit r' bezeichnet sind.

Wahre Pariser-Zeit der Beobachtung.	Beob. Entfernung von der kleinen Axe der Ringellipse.	Berechnete saturnicentrische Entfernung von der Conj.	Länge.	Fehler der Tafeln.
1685. 31. März. 10h. 19'	$r' + \frac{1}{2}(r' - r)$	322°.7'	123°.49	*
1686. 21. „ 9. 53		322. 7	138. 14	*
1687. 20. Jun. 9. 54		148 48		— 68'
1690. 11. „ 10. 20		44.39		— 21
1696. 17. Sept. 7. 30		142.12		+ 5
1703. 30. Nov. 8. 50		119 18		+ 40
1705. 23. Oct. 8. —		115. 0		+ 65
1714. 18. Apr. 9. 37	$r' + (r' - r)$	223. 0	27. 55	*
„ 6. Mai. 9. 30		65. 0		+ 28

Um die saturnicentrische Entfernung von der Conjunction zu berechnen nahm Cassini $\frac{r'-r}{r'} = \frac{5}{9}$ und das Verhältniss der mittlern Entfernung des Satelliten zum Halbmesser des Ringes $\frac{a}{r'} = 1{,}93$ an.

Aus den Beobachtungen von 1685, 1686 und der ersten Beobachtung von 1714 hat er die Elemente seiner Tafeln berechnet, nämlich

Epoche: 1714 mittlere saturnicentrische Länge $236°.\ 17'.\ 21''$
mittlere Bewegung für einen Tag $n = 190°.\ 41'.\ 51''$.

Die übrigen Beobachtungen weichen, wie man aus dem angegebenen Betrage der Fehler sieht, so wenig von den Tafeln ab, dass man sich mit Recht über die Genauigkeit der Schätzung in einem so besonders schwierigen Falle wundern muss. Noch auffallender wird diese ausserordentliche Uebereinstimmung seyn, wenn man bedenkt, dass Cassini nicht nur, wie oben bemerkt, die Zeit des Durchganges durch die kleine Axe der Ringellipse als gleichbedeutend mit der Conjunctionszeit in Beziehung auf die Ecliptik betrachtet zu haben scheint, sondern auch in so ferne nach unrichtigen Elementen rechnete, als er die mittlere Entfernung des Satelliten um Vieles zu klein angenommen hat. Obwohl nun die zu grosse Uebereinstimmung der Beobachtungen einerseits, andererseits aber die unvollständige Form, in welcher sie mitgetheilt sind, allerdings gegründete Ursache zum Misstrauen gewähren, so habe ich sie doch, ohne gerade grosse Präcision zu suchen, aufs Neue in Rechnung genommen. Nimmt man nach neueren Bestimmungen $\frac{a}{r'} = 2{,}168$ an, und setzt die von Cassini angegebene saturnicentrische Entfernung von der Conjunction oder vielmehr von der kleinen Axe der Ringellipse, $= q$, die richtige Entfernung $= q'$, so erhält man

$$\sin q' = \frac{1{,}93}{2{,}168} \sin q.$$

Bei den folgenden Angaben sind die Längen des Satelliten auf der Ringebene von dem aufsteigenden Knoten des Ringes über die Ecliptik an gerechnet: die Lage des Ringes habe ich nach Bessel's Elementen, die Positionen des Saturn nach Bouvard bestimmt. Die letzte Columne gibt die Fehler der Beobachtungen, d. h. die Abweichung derselben von den mittlern Oertern, welche berechnet worden sind, an, unter der Voraussetzung, dass die Länge des Satelliten zur Zeit der ersten Beobachtung 319°,0 war, die mittlere Bewegung aber von Cassini richtig bestimmt worden sey. Auf Aberration ist keine Rücksicht genommen.

Zeit der Beobachtung.					Länge auf der Ringebene gezählt.	Fehler der Beobachtung.
1685.	März	31.	. .	$10^h.19'$	326°. 3′	+ 7°. 3′
1686.	„	21.	. .	9. 53	337. 27	+ 4. 17
1687.	Juni	20.	. .	9. 54	172. 1	+ 0. 50
1690.	„	11.	. .	10. 20	94. 23	− 8. 29
1696.	Sept.	17.	. .	7. 30	284. 42	+ 7. 4
1703.	Nov.	30.	. .	8. 50	335. 51	+ 3 46
1705.	Oct.	23.	. .	8. —	3. 22	+ 4. 52
1714.	Apr.	18.	. .	9. 37	215. 23	− 7. 42
1714.	Mai	6.	. .	9. 30	43. 6	− 11. 37

Der einzige Zweck, zu welchem diese sehr von einander abweichenden Beobachtungen verwendet werden könnten, wäre die Bestimmung der mittlern Bewegung: ich werde mich desshalb auch später darauf beziehen und gehe nun zu den Herschel'schen Beobachtungen über.

Herschel's Beobachtungen sind, wie früher bemerkt wurde, in dem Jahre 1789 und zwar in den Monaten Juli bis December vorgenommen worden. Dem Beobachter standen die mächtigsten optischen Hülfsmittel zu Gebote; aber die Einrichtung und Aufstellung derselben gestattete ihm nicht, Positionswinkel oder Distanzen zu messen und er musste sich in Beziehung auf die Saturns-Satelliten darauf beschränken, theils die Zeiten ihrer Conjunctionen unter sich zu beobachten, theils, wie von den beiden Cassini geschehen war, ihre Entfernung vom Rande des Planeten oder vom Ringe durch Schätzung zu bestimmen. Die Bestimmungen der erstern Art werden nur dann benützt werden können, wenn eine vollständigere Theorie sämmtlicher Satelliten zu Stande kommt; sie mussten desshalb in der gegenwärtigen Untersuchung unberücksichtiget bleiben. Für die Schätzungen der Entfernung, die sehr zahlreich und sorgfältig angestellt sind, war es ein besonders vortheilhafter Umstand, sowohl in Beziehung auf Genauigkeit, als auch auf Leichtigkeit der Anwendung zur Bahnbestimmung, dass während des Zeitraumes, in welchen die Beobachtungen fallen, die Erde sich wenig aus der Ebene des Saturnsringes, mithin auch wenig aus der Ebene der Satellitenbahnen entfernt hat. Auf diese Weise stellte die scheinbare Bewegung der Satelliten nahe eine gerade, durch den Mittelpunkt des Saturn gehende Linie dar, in welcher sie sich östlich und westlich von dem Planeten entfernten und wieder zurückkehrten. Herschel schätzte ihre Entfernung theils vom Rande der Planetenscheibe, theils von der Extremität der fast als eine Linie erscheinenden Ringebene, und wählte dabei als Mass entweder den Durchmesser des Saturn oder die „Projection des Ringes" d. h. die Länge der Anse oder des über die Planetenscheibe hinausragenden Theiles der Ringebene: auch kommen einzelne Fälle vor, wo der Durchmesser eines Satelliten zur Schätzung kleiner Entfernungen angewendet wurde. In der folgenden Zusammenstellung der Beobachtungen des dritten Satelliten, die ich aus den *Philosophical Transactions* von 1790 (pag. 456 et sq.) herausgezogen habe, ist die von Herschel gebrauchte Beschreibung durch Zeichen ersetzt: östliche Ausweichungen sind mit +, westliche mit — bezeichnet; p bedeutet die Projection des Ringarmes, oder die Länge der Anse, d den Durchmesser des Saturn und δ den Durchmesser des Satelliten. Zugleich habe ich durch Hinzufügung von

$\frac{1}{2}d$ oder $\frac{1}{2}d + p$ die vom Rande des Planeten, oder vom Ende der Ringebene angegebenen Schätzungen auf den Mittelpunct bezogen. Die letzte Columne gibt die, nach den weiter unten vorkommenden Elementen berechneten, mittleren saturnicentrischen Entfernungen des Satelliten von seiner obern Conjunction, welche desswegen beigefügt sind, weil die Beobachtungen nach diesen Winkeln geordnet werden sollen.

Tag der Beobachtung.	Angabe der Uhr.	Beob. Entfernung vom Mittelpunkt des Saturn.	Entfernung von der obern Conjunction.
1789 Jul. 27. .	h ′ 20.27	$1\frac{1}{2}d$	° 75,5
28. .	19.40	$-2d$	259,4
— .	22.34	$-2d$	282.4
Aug. 18. .	21.11	$-\frac{1}{2}d - 2\frac{1}{2}p$ *	305,0
28. .	0. 9	$+\frac{1}{2}d + 2\frac{7}{24}p = 1\frac{1}{2}d$	69,3
29. .	22.18	$-2d$	244,7
31. .	20.54	$-2d$	253,8
Sept. 11. .	1. 0	$-\frac{1}{2}d - p - 2\delta$	217,5
	1.34	$-\frac{1}{2}d - 1\frac{1}{2}p$	222,0
	1.57	$-\frac{1}{2}d - 1\frac{3}{4}p$	225,1
13. .	22. 0	$-\frac{1}{2}d - p$	214,0
	22.13	$-\frac{1}{2}d - 1\frac{1}{3}p$	215,7
14. .	21.55	$+\frac{1}{2}d + 1\frac{3}{4}p$	43,4
	0.42	$+\frac{1}{2}d + 2\frac{1}{2}p$	65,4
	1.24	$+\frac{1}{2}d + 2\frac{1}{2}p$	71,0
	1.46	$+\frac{1}{2}d + 2\frac{1}{2}p$	73,9
16. .	19.39	$+\frac{1}{2}d + 1\frac{1}{2}p$	45,7
	22.18	$+\frac{1}{2}d + 2\frac{1}{2}p$	66,7
	23.59	$+1\frac{1}{2}d + p$	80,1
	1. 3	$+1\frac{1}{4}d + p$	88,5
17. .	19.48	$-\frac{1}{2}d + 2p$	237.0
	20.38	$-\frac{1}{2}d - 2\frac{1}{3}p$	243,6
18. .	21.15	$+\frac{1}{2}d + 2\frac{1}{3}p$	78,6
	22.35	$+\frac{1}{2}d + 3p$	89.1
	0.14	$+\frac{1}{2}d + 2\frac{1}{4}p$	102,2
21. .	21.15	$-\frac{1}{2}d - 3p$	288.9
	22.44	$-\frac{1}{2}d - 2\frac{5}{8}p$	300,6
23. .	22.51	$-\frac{1}{2}d - 1\frac{5}{4}p$	321,5
	23.55	$-\frac{1}{2}d - p - \delta$	329,9

Tag der Beobachtung.	Angabe der Uhr.	Beob. Entfernung vom Mittelpunkt des Saturn.	Entfernung von der obern Conjunction.
	h '		°
Sept. 24.	19.49	$+\frac{1}{2}d+2\frac{1}{4}p$	127,9
	20.45	$+\frac{1}{2}d+3p$	135,4
	22 47	$+\frac{1}{2}d+p+$	151,4
25.	19.34	$-\frac{1}{2}d-3p$	316,0
	20.41	$-\frac{1}{2}d-1\frac{1}{2}p$	324,8
	22.38	$-\frac{1}{2}d-\frac{2}{3}p$	340,2
Oct. 12.	20.37	$-1\frac{1}{4}d$	316,2
	21.24	$-\frac{1}{2}d-1\frac{1}{2}p$	322,4
	22. 6	$-\frac{1}{2}d-p-$	328,0
	22.24	$-\frac{1}{2}d-p-$	330,4
	23.26	$-\frac{1}{2}d-\frac{5}{4}p$	358,6
15.	0 52	$-\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}p$	201,1
16.	0.11	$+\frac{5}{4}d$	24,9
	1.20	$+\frac{1}{2}d+1\frac{1}{4}p$	34,0
18.	21.12	$+1\frac{1}{2}d+\delta$	21,5
	21.32	$+\frac{1}{2}d+2\delta$	25,4
	21.51	$+\frac{7}{8}d$	27,9
	22.36	$+\frac{1}{2}d+p+$	33,9
20.	20. 5	$+\frac{5}{6}d$	32,9
28.	21. 1	$+1\frac{1}{2}d$	121,4
29.	21.49	$-1\frac{7}{8}d$	317,9
30.	20.53	$+1\frac{1}{4}d$	140,7
31.	21.13	$-1\frac{1}{4}d$	333,4
	23.13	$-\frac{7}{8}d$	349,3
Nov. 2.	0. 8	$+\frac{5}{8}d$	16,8
	0.34	$+\frac{3}{4}d$	30,2
3.	23.48	$-d$	204,3
4.	22.14	$+\frac{5}{4}d$	22,0
7.	31.28	$-1\frac{1}{2}d:$	226,4
	21.53	$-1\frac{5}{4}d$	229,7
8.	20.46	$+1\frac{3}{8}d$	51,0
15.	22.33	$-1\frac{1}{4}d$	316,1
16.	22.50	$+\frac{1}{2}d+p+$	148,5
21.	0 54	$+1\frac{1}{4}d$	35,7
Dec. 16.	23.59	$+1\frac{1}{2}d$	103,0
25.	1.36	$+\frac{1}{2}d+p+$	27,6

Bei der Beobachtung vom 18. August ging, nach Herschel's Angabe, der Satellit dem Ringe voran „um $1\frac{1}{2}$ Durchmesser des Saturn". Offenbar muss es aber heissen „um $1\frac{1}{2}$ Projection", was ich auch in der vorgehenden Tabelle aufgenommen habe. In Beziehung auf die Uhr gibt Herschel an, dass sie nach Sternzeit gerichtet war, und dass die Correction am 18. Juli zu Mitternacht $-\ 8'51'',5$ betrug. Die Uhr blieb regelmässig um $0'',4$ des Tages zurück.

Bei der folgenden Untersuchung werden alle Längen auf der Ebene des Ringes gezählt, und zwar so, dass von dem aufsteigenden Knoten des Ringes auf der Ecliptik zu zählen angefangen wird: auch habe ich vorausgesetzt, dass die Bahn des Satelliten in der Ebene des Ringes liegt, eine Bedingung, die übrigens nicht streng erfüllt zu werden braucht.

In Beziehung auf die Lage des Saturnringes sind überall die neuen Bessel'schen Elemente *) zu Grunde gelegt; die Stellungen des Planeten selbst sind nach Bouvard's Tafeln **) berechnet.

Es sey nun

die Entfernung des Satelliten vom Mittelpuncte des Saturn gemessen $= x$

die halbe grosse Axe der Satellitenbahn $= a$

die Excentricität derselben $= e$

Länge des Perisaturniums $= \omega$

---

*) S. Astronomische Nachrichten herausgegeben von H. C. Schumacher. Nro. 274.

**) *Tables Astronomiques publiées par le Bureau des Longitudes de France, par Bouvard.* Paris 1811.

mittlere Bewegung für einen mittlern Sonnen-Tag $= n$

die Zeit, in Tagen ausgedrückt, $= t$

mittlere Länge für die Zeit der ersten Beobachtung (1789 Juli 27. $20^h.27'$ Zeit der Uhr) $= \varepsilon$

wahre Länge des Satelliten $= v$

Radius-Vector $= r$

Länge der Erde vom Saturn aus gesehen, und auf der Ebene des Ringes gezählt $= \lambda$

Entfernung des Satelliten von seiner obern Conjunction $= u$

Hiernach finden, wenn nur die erste Potenz der Excentricität berücksichtiget wird, folgende Gleichungen statt:

$$r = a\,[1 - e \cos (nt + \varepsilon - \omega)]$$
$$v = nt + \varepsilon + 2e \sin (nt + \varepsilon - \omega)$$
$$u = v - \lambda + 180^\circ$$
$$x = r \sin u = r \sin (v - \lambda + 180^\circ)$$
$$= a \sin (nt + \varepsilon - \lambda + 180^\circ) +$$
$$\tfrac{1}{2}\, ae \sin (2nt + 2\varepsilon - \lambda + 180^\circ - \omega) - \tfrac{3}{2}\, ae \sin (\omega - \lambda + 180^\circ.)$$

Der Winkel $nt + \varepsilon - \lambda + 180^\circ$ ist derselbe, der oben bei der Zusammenstellung der Beobachtungen als mittlere saturnicentrische Entfernung des Satelliten von seiner obern Conjunction bezeichnet ist; in den spätern Formeln soll $nt + \varepsilon - \lambda + 180 = \varphi$ so wie $\omega - \lambda + 180 = \omega'$ gesetzt werden.

Es ergibt sich demnach:

$$x = a \sin \varphi + \tfrac{1}{2}\, ae \sin (2\,\varphi - \omega') - \tfrac{3}{2}\, ae \sin \omega'$$

Setzt man endlich $\frac{1}{2}ae \cos \omega' = p$, $-\frac{1}{2}ae \sin \omega' = q$, so erhält man aus der eben angeführten Formel folgenden Differenzial-Ausdruck zur Verbesserung der Elemente nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\delta x = \delta a \sin \varphi + a \delta \varepsilon \cos \varphi + p \sin 2\varphi + q\,(3 + \cos 2\varphi)$$

Zum Behufe weiterer Entwickelung ist es nun vorerst nothwendig, die von Herschel beobachteten Werthe von x, welche theils in p, theils in d und δ ausgedrückt sind, auf ein gemeinsames Mass, als welches der Durchmesser des Saturn angenommen werden soll, zu reduciren. Aus den Messungen, welche Herschel selbst früher angestellt hat, ergibt sich $\frac{p}{d} = 0{,}523$: nach Struve erhält man $\frac{p}{d} = 0{,}613$, nach Bessel $= 0{,}653$. Allein das erste Verhältniss lässt sich nicht wohl anwenden, weil sich der Ring zur Zeit, als die Bestimmung gemacht wurde, in einer ganz verschiedenen Beleuchtung befand: bei den letzteren Verhältnissen kommt überdiess noch der Umstand hinzu, dass die Fernröhre, womit die Messungen angestellt sind, die Bilder des Saturn und des Ringes nicht in der Grösse darstellten, wie das Herschel'sche Teleskop, welches eine sehr bedeutende Aberration gehabt zu haben scheint. Es bleibt nur übrig, aus den Distanz-Schätzungen der Saturns-Satelliten selbst das gesuchte Verhältniss zu ermitteln. Unter den Beobachtungen finde ich folgende, wo die Distanzen in beiden Massen zugleich ausgedrückt sind:

Beim I. Satelliten: Oct. 20. $1\frac{5}{12}\,p = \frac{3}{4}\,d \,..\, \frac{p}{d} = 0{,}530$

Dec. 24. $2\frac{1}{4}\,p = 1\frac{1}{8}\,d \,..\, \frac{p}{d} = 0{,}500$

Beim II. Satelliten: Oct. 15. $1\frac{3}{4}\,p = d \,...\, \frac{p}{d} = 0{,}571$

Beim III. Satelliten: $2\frac{7}{24}\,p = d \ldots \frac{p}{d} = 0{,}436$

Im Mittel ergibt sich also $\frac{p}{d} = 0{,}509.$

Auf andere Weise lässt sich dieses Verhältniss dadurch ermitteln, dass man die unter nahe gleichen Umständen, d. h. bei nahe gleicher Entfernung von der Conjunction beobachteten und in zweierlei Mass ausgedrückten Entfernungen miteinander vergleicht. Sind nämlich bei den Entfernungen von der Conjunction φ und φ' die Distanzen D und P beobachtet worden, wovon die erstere nur in d ausgedrückt ist, die zweite aber p enthält, so hat man unter den obigen Bedingungen den Radius-Vector des Satelliten $r = \dfrac{D}{\sin\varphi} = \dfrac{P}{\sin\varphi'}$ daher $P = \dfrac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}\,D.$

Combinationen dieser Art sind folgende:

$\varphi = 51{,}^{\circ}0$	$D = \frac{11}{8}\,d$	$\varphi' = 45{,}^{\circ}7$	$P = \frac{1}{2}\,d + 1\frac{1}{2}\,p$	$\frac{p}{d} = 0{,}490$	relat. Gew. $\frac{2}{3}$
		$= 66{,}7$	$= \frac{1}{2}\,d + 2\frac{1}{2}\,p$		
$\varphi = 121{,}4$	$D = 1\frac{1}{2}\,d$	$\varphi' = 127{,}9$	$P = \frac{1}{2}\,d + 2\frac{1}{2}\,p$.	$\frac{p}{d} = 0{,}529$	. . . 1
$= 140{,}7$	$= 1\frac{3}{4}\,d$	$= 135{,}4$	$= \frac{1}{2}\,d + 2\,p$		
$\varphi = 226{,}4$	$D = 1\frac{1}{2}\,d$	$\varphi' = 222{,}0$	$P = \frac{1}{2}\,d + 1\frac{1}{2}\,p$.	$\frac{p}{d} = 0{,}601$	. . . $1\frac{1}{3}$
$= 229{,}7$	$= 1\frac{3}{4}\,d$	$225{,}1$	$= \frac{1}{2}\,d + 1\frac{3}{4}\,p$		
		$237{,}0$	$= \frac{1}{2}\,d + 2\,p$		
		$243{,}6$	$= \frac{1}{2}\,d + 2\frac{3}{4}\,p$		
$\varphi = 333{,}4$.	$D = 1\frac{1}{4}\,d$	$\varphi' = 338{,}6$.	$P = \frac{1}{2}\,d + \frac{3}{4}\,p$.	$\frac{p}{d} = 0{,}655$	. . . $\frac{2}{3}$
		$340{,}2$	$= \frac{1}{2}\,d + \frac{2}{3}\,p$		

Diese Zusammenstellung beweist, wie wenig Sicherheit die Schätzungen gewähren: in der That weichen die gefundenen Werthe zu sehr von einander ab, als dass das arithmetische Mittel derselben ein zuverlässiges Resultat geben könnte. Ueberdiess ist es bemerkenswerth, dass die östliche Anse eine viel kleinere Verhältnisszahl gibt, d. h. grösser gesehen worden ist, als die westliche, was mit anderwärtigen Wahrnehmungen übereinstimmt *). Da ich keinen hinreichenden Grund habe, zu entscheiden, ob ein Unterschied wirklich vorhanden gewesen, und ob darauf bei der Berechnung der Herschel'schen Beobachtungen Rücksicht genommen werden solle, so muss ich diesen Umstand künftiger Untersuchung überlassen, und werde bei der folgenden Rechnung den Werth

$$\frac{p}{d} = 0{,}510$$

einführen, welches Verhältniss sich aus der von den Herren Beer und Mädler **) vorgenommenen Berechnung der zahlreichen Beobachtungen des I. und II. Satelliten ergeben hat, und fast identisch ist mit dem erstgefundenen Werthe 0,509.

Noch ist es nothwendig, das Verhältniss $\frac{\delta}{d}$ zu bestimmen, dessen man in einzelnen Fällen bedarf.

Die zwei ersten Beobachtungen vom 18. October geben, wenn man den Radius-Vector $= 1{,}953\,d$ annimmt

$$\tfrac{1}{2}\,d + \delta = 1{,}953 \sin 21^\circ{,}5$$
$$\tfrac{1}{2}\,d + 2\,\delta = 1{,}953 \sin 25{,}4,$$

*) Siehe die Beobachtungen von Mädler beim Verschwinden des Ringes im Jahre 1832. Astronomische Nachrichten Nro. 239, dessgleichen die Beobachtungen von Schwabe, Astr. Nachr. Nro. 247. 249.

**) Astronomische Nachrichten, herausgegeben von H. C. Schumacher, Nro. 293.

woraus folgt $\frac{\delta}{d} = 0{,}118$. Obwohl der Durchmesser des Satelliten viel kleiner ist, als sich hieraus ergiebt, so mag doch der gefundene Werth in Beziehung auf das Herschel'sche Teleskop, welches auch den Durchmesser des Saturn um mehr als $2''$ zu gross gezeigt hat, nicht bedeutend von der Wahrheit abweichen.

Folgende Tabelle, in welcher die Herschel'schen Beobachtungen nach der Entfernung des Satelliten von der obern Conjunction geordnet sind, stellt die beobachteten und auf den Durchmesser des Saturn als Einheit reducirten Werthe von x dar, wozu ich noch zu bemerken habe, dass bei der dritten Beobachtung vom 24. September, bei der dritten und vierten Beobachtung vom 12. October und bei der vierten Beobachtung vom 18. October, wo Herschel die Stellung des Satelliten als „ganz nahe" am Ringarme angibt, nicht p sondern $p + \delta$ gesetzt worden ist.

φ	x	$\lambda + 180°$	φ	x	$\lambda + 180°$
16°,8	+ 0,625	168°,9	66°,7	+ 1,77	166°,4
20,2	+ 0,750	168,9	69,3	+ 1,584	165,1
21,5	+ 0,618	168,4	71,0	+ 1,77	166,3
22,0	+ 0,750	169,0	73,9	+ 1,77	166,3
24,9	+ 0,750	168,3	75,5	+ 1,5	163,5
25,4	+ 0,736	168,4	78,6	+ 1,69	166,6
27,9	+ 0,875	168,4	80,1	+ 2,01	166,4
27,6	+ 1,01	168,2	88,5	+ 1,76	166,4
32,9	+ 0,833	168,5	89,1	+ 2,03	166,6
33,9	+ 1,128	168,4	102,2	+ 1,65	166,6
34,0	+ 1,15	168,3	103,0	+ 1,5	168,6
35 7	+ 1,25	169,1	121,4	+ 1,5	168,8
43,4	+ 1,39	166,3	127,9	+ 1,65	167,0
45,7	+ 1,265	166,4	135,4	+ 1,52	167 0
51,0	+ 1,375	169,0	140,7	+ 1,25	168,8
65,4	+ 1,77	166,3	148,5	+ 1,01	169,1

φ	x	$\lambda + 180°$	φ	x	$\lambda + 180°$
151°,4	— 1,128	167,0	300°,6	— 1,84	166,6
200,1	— 0,75	168,3	305,0	— 1,775	164,3
204,3	— 1,00	168,9	316,0	— 1,52	167,1
214,0	— 1,01	166,2	316,1	— 1,25	168,1
215,7	— 1,18	166,2	316,2	— 1,25	169,1
217,5	— 1,246	166,1	317,9	— 1,375	168,8
222,0	— 1,265	166,1	321,5	— 1,39	167,9
225,1	— 1,392	166,1	322,4	— 1,26	168,1
226,4	— 1,50	169,0	324,8	— 1,26	167,1
229,7	— 1,75	169,0	328,0	— 1,128	168,1
237,0	— 1,52	166,5	329,9	— 1,128	167,9
243,6	— 1,69	166,5	330,4	— 1,128	163,1
244,7	— 2,00	165,2	333,4	— 1,25	168,9
253,8	— 2,00	165,4	338,6	— 0,88	168,1
259,4	— 2,00	163,6	340,2	— 0,84	167,1
282,4	— 2,0	163,6	349,3	— 0,875	168,9
288,9	— 2,03	166,8			

Die Werthe von x sind hier nicht immer genau von dem Mittelpunkte des Saturn aus gerechnet, weil die Planetenscheibe nicht vollständig erleuchtet war. Ich habe diesen Umstand im Verlaufe der Rechnung berücksichtiget, obwohl die Correctionen auch da, wo sie am grössten waren, nur wenige Einheiten der dritten Decimalstelle betrugen, demnach so weit unter der Grenze der Wahrnehmung standen, dass man sie füglich hätte vernachlässigen können. Nachdem ich die Beobachtungszeiten wegen der Correction der Uhr verbessert, und um diejenige Zeit vermindert hatte, welche das Licht brauchte, um vom Saturn bis zur Erde zu gelangen, erhielt ich durch eine theilweise Berechnung der Beobachtungen folgende Elemente:

Epoche: für 1789 Juli 27 $10^h\ 51'\ 10''$ mittlere Pariser Zeit, mittlere Länge des Satelliten auf dem Ringe gezählt 249°. 0′

$a = 1{,}97622$
$e = 0{,}0383$
$\omega = 136^\circ.\ 13'$
$n = 190^\circ.\ 41'.\ 51''$ nach Cassini angenommen.

Nach dieser Hypothese, welche den oben gegebenen Werthen von φ schon zum Grunde liegt, berechnete ich die Werthe von x und ihre Abweichung von der Beobachtung, δx. Zum Behufe einer endlichen, und wie ich erwartete, nur mehr sehr geringen Verbesserung der Elemente nahm ich nun aus je vier Beobachtungen das Mittel (nur in einem Falle, nämlich von $\varphi = 43^\circ{,}4$ bis $\varphi = 66^\circ{,}7$ wurden fünf Beobachtungen zusammengenommen), woraus folgende Tabelle hervorging.

φ	$\lambda + 180$	δx
$20{,}1^\circ$	$168{,}8^\circ$	$+ 0{,}124$
26,4	168,4	$+ 0{,}078$
34,1	168,6	$+ 0{,}102$
56,3	166,8	$+ 0{,}035$
72,4	165,3	$- 0{,}144$
84,0	166,5	$- 0{,}010$
113,1	167,8	$- 0{,}164$
144,0	168,0	$+ 0{,}135$
208,5	167,4	$+ 0{,}071$
222,7	166,8	$+ 0{,}105$
238,7	166,9	$+ 0{,}033$
271,1	164,9	$- 0{,}045$
309,4	166 6	$- 0{,}037$
319,4	168,3	$+ 0{,}020$
327,3	167,6	$- 0{,}038$
340,3	168,3	$- 0{,}219$

Bildet man nach der Form:

$$\delta x = \delta a \sin\varphi + a\delta\varepsilon \cos\varphi + \delta p \sin 2\varphi + \delta q\,(\cos 2\varphi + 3)$$

aus der hier gegebenen Tabelle 16 Bedingungsgleichungen und behandelt sie nach der Methode der kleinsten Quadrate, so gelangt man zu folgenden Finalgleichungen:

$$\begin{aligned}
-0{,}068 &= 16{,}493\,\delta a + 1{,}578\,a\delta\varepsilon + 3{,}579\,\delta p - 0{,}574\,\delta q,\\
-0{,}402 &= 1{,}578\,\delta a + 15{,}507\,a\delta\varepsilon - 1{,}925\,\delta p + 24{,}325\,\delta q,\\
+0{,}912 &= 3{,}579\,\delta a - 1{,}926\,a\delta\varepsilon + 20{,}422\,\delta p + 9{,}116\,\delta q,\\
+0{,}984 &= -0{,}574\,\delta a + 24{,}325\,a\delta\varepsilon + 9{,}116\,\delta p + 293{,}662\,\delta q;
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned}
\delta a &= -0{,}0108\\
a\delta\varepsilon &= -0{,}262 \;..\; \delta\varepsilon = -45'{,}8\\
\delta p &= +0{,}0423\\
\delta q &= +0{,}0042
\end{aligned}$$

Diese Bestimmungen sind insoferne nicht genau, als die Grössen δp und δq, obwohl sie die veränderliche Grösse λ enthalten, doch als constant in der Rechnung angenommen wurden: in derselben Beziehung wird auch die Vereinigung mehrerer Beobachtungen zu einer einzigen Bedingungsgleichung nicht ganz ohne nachtheiligen Einfluss geblieben seyn. Indessen würden die Aenderungen, wenn man auf diese Umstände Rücksicht nehmen wollte, nicht so bedeutend ausfallen, dass durch obige Behandlungsweise der Genauigkeit, deren die Beobachtungen fähig sind, Eintrag geschehen wäre. Ich nehme demnach für λ den Mittelwerth 357°,3 und erhalte

$$\omega' = \omega - 177°{,}3$$

$$\begin{aligned}
p &= -0{,}02855 \;..\; p + \delta p = +0{,}0138\\
q &= -0{,}02489 \;..\; q + \delta q = -0{,}0207
\end{aligned}$$

Hiernach sind die Elemente des dritten Satelliten folgende:

$$a = 1{,}9654$$
$$e = 0{,}0253$$
$$\omega = 53^\circ.36'$$

mittlere Länge $\varepsilon = 289^\circ.14'$ für 1789, Juli 27. $10^h.51'.10''$ mittl. Pariser-Zeit.

Die bedeutende Aenderung, welche die elliptischen Elemente bei einer vollständigern Berechnung erhalten haben, beweist, dass unter den Beobachtungen selbst wenig Uebereinstimmung herrscht, und deshalb die Bestimmungen auch wenig Zutrauen verdienen. Der gefundene Werth der mittlern Entfernung lehrt uns nichts, weil er in einem uns unbekannten Masse ausgedrückt ist. Nur die Bestimmung der Epoche gewährt bedeutende Sicherheit; und von dieser Bestimmung allein werde ich in der gegenwärtigen Untersuchung Gebrauch machen.

Zum Beschlusse der Herschel'schen Beobachtungen mögen noch die vorkommenden Andeutungen über die Neigung der Bahn des III. Satelliten hier einen Platz finden.

Tag.	Lage des Satelliten.	Mittlere Länge des Satelliten.
Sept. 14. .	südlich	219°,7
16. .	südlich	243,1
23. .	nördlich	138,4
25. .	nördlich	133,1
25. .	$\frac{1}{2}\delta$ nördlich	157,1
Oct. 31. .	$1\,\delta$ nördlich	168,2
Nov. 4. .	$1\,\delta$ nördlich	206,6

Es würde vergebliche Mühe seyn, hieraus irgend ein Resultat ziehen zu wollen: jedoch werden die letzteren Angaben, wenn einmal die Elemente und ihre Veränderungen näher bekannt sind, nicht ganz ohne Interesse bleiben.

Ich gehe nun zu den von mir im Jahre 1836 angestellten Beobachtungen über. Da die Construction der Fraunhofer'schen Refractoren und der damit verbundenen Filarmikrometer hinlänglich bekannt ist, so brauche ich über die Art der Messungen im Allgemeinen nichts weiter beizufügen; nur folgende Bemerkungen scheinen zu nahe mit der gegenwärtigen Untersuchung verknüpft, um hier unerwähnt gelassen zu werden. Bekanntlich sind die mit dem Filarmikrometer gemessenen Distanzen weniger zuverlässig befunden worden, als die Positionswinkel, was nicht sowohl in der Construction des Mikrometers, als vielmehr in der besondern Schwierigkeit, die Mikrometerfäden auf zwei von einander entfernte, also nicht zugleich gesehene Gegenstände richtig einzustellen. Diese Schwierigkeit wird um so grösser, je lichtschwächer die Gegenstände sind; und da der dritte Saturns-Satellit zu den letzteren um so mehr gezählt werden muss, als er sich immer in der Nähe des glänzenden Planeten befindet, so hielt ich es für rathsam, weit seltener Distanzen als Positionswinkel zu messen. In der That zeigen die Distanzmessungen im Allgemeinen weniger Uebereinstimmung als die Positionswinkel, weshalb ich vorgezogen habe, die Elemente der Satellitenbahn auf die gemessenen Positionswinkel allein zu gründen, die Distanzen dagegen blos zur Bestimmung der mittlern Entfernung zu verwenden. Das Verfahren beim Messen der Positionswinkel bestand darin, dass ich die Mikrometerfäden um etwas mehr als die Hälfte des Saturn-Durchmessers auseinander entfernte und sie dann symmetrisch über die Planetenscheibe stellte, während der Satellit sich mitten dazwischen befand. Auf solche Weise wurden die Positionswinkel auf die Mitte der erleuchteten Planetenscheibe bezogen.

Folgende Tabelle stellt die gemessenen Positionswinkel dar: sie sind nach der jetzt allgemein eingeführten Weise von Norden über Osten bis 360° gezählt. Die dabei angezeigten Zeiten sind in Sternzeit ausgedrückt.

Zeit der Beobachtung.		Positionswinkel.	Zahl der Messungen.
	h ′ ″	° ′	
1836 April 23.	12. 33. 2,32	97. 53,8	3
	13. 4. 47,70	99. 42,1	3
„ 24.	22 16 33,00	280 13,1	2
	12. 34. 53,01	281. 41,1	2
Mai 3.	12. 48. 35,29	251. 40,1	3
	13. 12. 11,60	255. 29,1	3
„ 4.	13. 28. 3,58	81. 18,4	3
„ 7.	13. 43. 51,51	89 41,6	2
„ 11.	13. 52. 56,40	283. 11,1	3
„ 17.	14. 24. 31,42	49. 34,1	2
	14. 42. 15,39	53. 26,1	2
	15. 15. 23,84	58. 58,1	2
„ 19.	14. 36. 35,80	73. 19,1	2
Juni 1.	13. 56. 40,07	314. 51,6	2
	14. 9. 7,02	324. 32,7	5
„ 15.	15. 21. 6,96	108. 3,0	5
Juli 1.	17. 2. 36,20	285. 53,8	5
„ 12.	16. 34. 17,03	264. 24,9	3

Zum Behufe der Rechnung soll die Bedeutung der Grössen a, e, ω, n, r, v, λ, wie sie oben festgesetzt worden, auch hier beibehalten werden: ferner setze ich den Erhöhungswinkel der Erde über die Ebene des Saturnringes, (worauf, wie oben, die Längen gezählt werden sollen) $= l$, und den Winkel, welchen die kleine Axe des Ringes mit dem Declinationskreise bildet $= m$. Endlich soll die Länge des Satelliten vom westlichen Ende der grossen Axe der Ringellipse mit u, die Projection desselben Winkels auf einer die Gesichtslinie senkrecht durchschneidenden und durch die grosse Axe der

Ringellipse gelegten Ebene mit u', so wie die Projection des Radius-Vector r mit r' bezeichnet werden. Es ergibt sich hiernach unter der Voraussetzung, dass die Bahn des Satelliten mit der Ringebene zusammenfällt:

$$u' = 90^\circ + m + \text{Positionswinkel} \qquad u = v - \lambda - 90^\circ$$

$$v = nt + \varepsilon + 2\,\varepsilon \sin\,(nt + \varepsilon - \omega)$$

$$r = a\,[1 - e \cos\,(nt + \varepsilon - \omega)]$$

$$\operatorname{tg} u' = \sin l \,.\, \operatorname{tg} u$$

$$r' = r\,\frac{\cos u}{\cos u'}$$

Um die Gleichungen zu bilden, aus welchen die elliptischen Elemente durch die Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet werden sollen, hat man die Differentialformel

$$\delta u' = \sin l\,\frac{\cos^2 u'}{\cos^2 u}\,\delta u = \sin l\,\frac{\cos^2 u'}{\cos^2 u}\,\delta v$$

$$= \sin l\,\frac{\cos^2 u'}{\cos^2 u}\,[\delta\varepsilon + 2e \sin\,(nt + \varepsilon - \omega)]$$

Die Grösse des Beobachtungsfehlers in Längenmass ausgedrückt, ist $r'\,\delta u'$, sohin muss die Gleichung mit $r' = r\,\frac{\cos u}{\cos u'}$ oder auch $= a\,\frac{\cos u}{\cos u'}$ multiplicirt werden, endlich darf man a als einen, allen Gleichungen gemeinschaftlichen, Factor auslassen. Man erhält demnach:

$$\delta u'\,\frac{\cos u}{\cos u'} = \frac{\cos u'}{\cos u}\,\sin l\,[\delta\varepsilon + 2e \sin\,(nt + \varepsilon - \omega)]$$

oder:

$$\delta u'\,\frac{\cos u}{\cos u'} = \sin l\,\frac{\cos u'}{\cos u}\,[\delta\varepsilon + p \sin\,(nt + \varepsilon) + q \cos\,(nt + \varepsilon)]$$

wo $p = 2e \cos\omega$ und $q = -2e \sin\omega$ ist, und $u = nt + \varepsilon - \lambda + 90°$ gesetzt werden kann.

Ehe ich diese Formeln auf die Beobachtungen anwende, müssen die gemessenen Positionswinkel wegen der unvollkommenen Erleuchtung der Saturnskugel verbessert werden. An dem oben beschriebenen Verfahren beim Messen der Positionswinkel wäre im Wesentlichen Nichts geändert, wenn die Mikrometerfäden so weit auseinander entfernt würden, dass sie Tangenten zur Planetenscheibe, welche als Ellipse gesehen wird, bildeten. Zieht man in diesem Falle zu den zwei Berührungspuncten von der Mitte der Ellipse aus Radien, so werden sie beide gleich seyn und in einer geraden Linie liegen, deren Neigung zur grossen Axe von dem westlichen Endpuncte der grossen Axe gerechnet, z heissen soll. Ist der Planet unvollständig erleuchtet, so wird die Folge davon seyn, dass auf der nicht vollkommen erleuchteten Seite die Radien in einem gewissen Verhältnisse verkürzt erscheinen. Um dieses Verhältniss zu bestimmen, ziehe man einen Durchmesser, der die vollständig erleuchtete Hälfte der Planetenscheibe von der unvollständig erleuchteten trennt, und nenne den Winkel, den derselbe mit der grossen Axe von ihrem westlichen Endpuncte aus bildet ψ: ferner soll der Winkel, unter welchem Sonne und Erde, vom Saturn aus gesehen, entfernt erscheinen $= \chi$ gesetzt werden: alsdann erhält man die Verkürzung des Radius ρ auf der unvollständig erleuchteten Hälfte

$$= \rho\,[1 - \sqrt{1 - \sin^2 (z - \psi) \sin^2 \chi}]$$
$$= \tfrac{1}{2} \rho \sin^2 (z - \psi) \sin^2 \chi$$

Die Correction des Positionswinkels in Minuten ausgedrückt, ist demnach

$$= \frac{1}{4} \frac{\rho}{r' \sin 1'} \sin^2 (z - \psi) \sin^2 \chi \sin (u' - z)$$

Mit einer für den gegenwärtigen Fall hinreichenden Genauigkeit kann man $z = u' - 90$ setzen, wornach der obige Ausdruck in folgenden übergeht:

$$\frac{1}{4} \frac{\rho}{r' \sin 1'} \cos^2 (u' - \psi) \sin^2 \chi$$

Das Zeichen der Correction ist jenem von $\cos (u' - \psi)$ jedesmal entgegengesetzt. Für den Winkel χ kann man immer die Differenz der heliocentrischen und geocentrischen Länge des Saturn nehmen. Zur Bestimmung von ψ hat man

$$\psi = \text{Positionswinkel der Sonne} + 90° - m$$

und folglich, wenn α, δ, α', δ' die Rectascension und Declination des Saturn und der Sonne bedeuten,

$$\operatorname{cotg} (\psi + m) = - \frac{\cos \delta \operatorname{tg} \delta'}{\sin (\alpha - \alpha')} + \sin \delta \operatorname{cotg} (\alpha - \alpha')$$

Zur Reduction der vorliegenden Beobachtungen hat man:

		$\frac{1}{4} \frac{\sin^2 \chi}{\sin 1'}$	ψ
Mai	1.	0',2	36°,0
	11.	1,1	28,8
	21.	2,4	25,7
Juni	1.	4,0	24,5
	11.	5,7	23,7
	21.	7,2	23,0
Juli	1.	8,3	22,5
	11.	9,0	22,0

Ferner lässt sich der Werth von $\frac{\rho}{r'}$ aus folgender Tabelle entnehmen:

$u' = 0°$ ..	$\frac{\rho}{r'} = 0{,}17$
10	0,20
20	0,27
30	0,40
40	0,46
50	0,53
60	0,57
70	0,60
80	0,63
90	0,64

Führt man nach diesen Angaben die Rechnung durch, so finden sich nur für folgende Beobachtungen merkliche Correctionen:

Mai	3.	1te	Beobachtung . .	+ 0′,1
April	17.	1te	„	— 0,7
		2te	„	— 0,5
		3te	„	— 0,5
	19.			— 0,2
Juni	1.	1te	„	— 0,2
		2te	„	— 0,6
Juli	12.			+ 0,3

Ich werde nun die Werthe von u_0 und $\delta u'$ bestimmen, um daraus die elliptischen Elemente abzuleiten, was, wie oben bemerkt worden, zuerst unter der Voraussetzung versucht werden soll, dass sich der Satellit in der Ebene des Saturnringes bewege. Ich nehme zu diesem Zwecke

für 1836. 23. Apr. $8^h.36'.20'',25$ mittl. Pariser-Zeit $\varepsilon = 160°.\ 21',25$ und $n = 190°.\ 41'.\ 51''$ an, woraus sich, wenn man sämmtliche Beobachtungszeiten um diejenige Zeit vermindert, in welcher das Licht die Entfernung zwischen Saturn und der Erde zurücklegt, folgende Bestimmungen hervorgehen:

$u =$	$\delta u' =$	$\lambda + 90° =$
208°.14,,5	− 22′,3	312°.6′,8
212. 26,1	− 8,7	312. 6,7
36. 18,7	− 71,1	312. 2,6
38. 43,9	− 46,2	812. 2,6
312. 47,8	− 38,0	311. 22,9
315. 54,8	+ 90,5	311. 22,9
148. 15,8	+ 114,3	311. 18,6
1. 6,1	+ 3,6	311. 5,4
43. 16,5	− 55,2	310. 49,1
108. 53,8	− 31,7	310. 25,8
111. 14,3	− 9,9	310. 25,8
115. 37,0	− 6,5	310. 25,7
130. 59,7	− 110,2	310. 16,8
78. 41,9	− 493,1	309. 36,2
80. 20,6	− 168,2	309. 36,2
232. 50,2	− 46,7	309. 5,8
49. 18,5	− 41,9	308. 51,6
337. 26,7	+ 110,0	308. 57,8

Durch Vereinigung derjenigen Beobachtungen, bei denen die Werthe von u nicht weit von einander verschieden sind, erhält man:

u	$\delta u'$	Zahl der Beob.	$\lambda+90$
43°,8	— 50′,9	12	311°,0
79,8	— 261,0	7	309,6
111,9	— 16,1	7	310,4
141,3	+ 112,6	5	310,8
210,3	— 15,5	6	312,1
232,8	— 46,7	5	309,1
314,3	+ 26,2	6	311,4
346,9	+ 67,8	5	310,0

Ich habe daraus 8 Gleichungen gebildet nach der oben abgeleiteten Form:

$$\delta u' \frac{\cos u}{\cos u'} = \frac{\cos u'}{\cos u} \sin l \, [\delta \varepsilon + p \sin (nt + \varepsilon) + q \cos (nt + \varepsilon)]$$

wobei ich jedoch anstatt ω die Grösse $\omega - 312°. 6,8$ einführte.

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt

$$\delta \varepsilon = 28',14$$
$$p = 2e \cos \omega' = 2e \cos (\omega - 312°. 6',8) = -43',94$$
$$q = -2e \sin \omega' = -2e \sin (\omega - 312. 6,8) = -32,35$$

daraus folgt

$$\varepsilon = 159° 53',1$$
$$\omega = 348 \; 31$$
$$e = 27',84 = 0,0087$$

Diese Elemente lassen noch folgende Fehler über:

$$\begin{array}{r} -\ 15' \\ -\ 77 \\ +\ 47 \\ +122 \\ -\ 30 \\ -\ 73 \\ +\ 28 \\ +\ 72 \end{array}$$

Es ergibt sich hieraus der Beweis, dass die Voraussetzung, als bewege sich der Satellit in der Ringebene den Beobachtungen keineswegs Genüge leiste, vielmehr deuten die angeführten Differenzen, indem die Zeichen in jedem Quadranten wechseln, auf eine nicht unbeträchtliche Neigung der Satellitenbahn hin. Man setze die Grösse dieser Neigung $= i$, die Länge des aufsteigenden Knotens $= \gamma$, und nenne die rechtwinkligen Coordinaten des Satelliten auf der Ringebene x, y, z, die Coordinaten seiner Projection in einer durch die grosse Axe der Ringellipse gelegten und auf der Gesichtslinie senkrechten Ebene x' und y', wobei x und x' von dem Mittelpunct des Planeten auf der grossen Axe der Ringellipse, und zwar westlich positiv, gezählt werden sollen. Nach dieser Voraussetzung ist:

$$x' = x$$
$$y' = y \sin l + z \cos l$$
$$x = r \cos u$$
$$y = r \sin u$$
$$z = r \sin i \sin (nt + \varepsilon - \gamma)$$
$$\operatorname{tg} u' = \frac{y'}{x'}$$
$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

daher:

$$\operatorname{tg} u' = \operatorname{tg} u \sin l + \frac{\sin i \sin (nt + \varepsilon - \gamma) \cos l}{\cos u}$$

$$r' = r \left(\frac{\cos u}{\cos u'} + \sin i \sin u' \sin (nt + \varepsilon - \gamma) \cos l \right) \text{ und}$$

$$\delta u' \frac{\cos u}{\cos u'} = \frac{\cos u'}{\cos u} \Big[f + p \sin (nt + \varepsilon) + q \cos (nt + \varepsilon) + p' \sin 2 (nt + \varepsilon) + q' \cos 2 (nt + \varepsilon) \Big]$$

wo $f = \delta \varepsilon \sin l + \frac{1}{2} \sin i \cos l \sin (\lambda + 90^\circ - \gamma)$

$p = 2e \cos \omega \sin l, \quad q = -2e \sin \omega \sin l$

$p' = \frac{1}{2} \sin i \cos l \cos (\lambda + 90^\circ + \gamma)$, und

$q' = -\frac{1}{2} \sin i \cos l \sin (\lambda + 90^\circ + \gamma)$

gesetzt worden. Indem hiernach die Bedingungsgleichungen gebildet und nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden, gelangt man nur zu genäherten Resultaten, weil f, p .. nicht constant, sondern veränderlich sind, indem sie die veränderlichen Grössen l und λ enthalten. Auch der Umstand, dass mehrere Beobachtungen zu einer einzigen Bedingungsgleichung vereiniget worden, beeinträchtiget die Genauigkeit der Resultate. Die Verbesserung dieser Fehler wird eben so leicht als vollständig erlangt, wenn man die Oerter des Satelliten mittelst der gefundenen genäherten Elemente berechnet und deren Abweichungen von der Beobachtung, d. h. die Werthe von $\delta u'$ neu bestimmt. Diese neuen Werthe von $\delta u'$ in die obigen Bedingungsgleichungen substituirt geben die Correctionen der angenommenen Elemente mit aller erforderlichen Schärfe. Ich habe nach dieser Weise folgende Elemente erhalten:

$$e = 17',52 = 0{,}0051$$
$$i = 1^\circ \cdot 33',1$$
$$\omega = 357^\circ \cdot 39'$$
$$\gamma = 184 \cdot 36$$

Epoche: April 23. 8^h. 36'. 20,25 mittlere Pariser-Zeit.
$\varepsilon = 158°.\ 31',0$.

In wie ferne die Beobachtungen durch diese Elemente dargestellt werden, geht aus folgender Zusammenstellung (wo übrigens der Zweck nicht die grösste Schärfe der Berechnung zu erfordern schien), hervor:

April	22. . .	— 26'	Fehler der Elemente.
	23. . .	— 6	
	24. . .	— 52	
	25. . .	— 21	
Mai	3. . .	— 74	
	3. . .	+ 49	
	4. . .	+ 38	
	7. . .	— 49	
	11. . .	— 21	
	17. . .	— 49	
	17. . .	— 45	
	17. . .	— 63	
	19. . .	+ 25	
Juni	1. . .	—202	
	1. . .	+139	
	15. . .	+ 17	
Juli	1. . .	+ 5	
	12. . .	+ 70	

Ich habe bisher nach Cassini $n = 190°.\ 41'.\ 51''$ angenommen, weil eine vorläufige Rechnung gezeigt hatte, dass diese Bestimmung wenig von der Wahrheit abweicht. Die Vergleichung der aus meinen Beobachtungen gefundenen Epoche der mittlern Länge mit derjenigen, die ich oben aus Herschel's Beobachtungen abgeleitet habe, giebt das Mittel an die Hand, den Werth von n auf das Schärfste zu bestimmen. Es ist nämlich

1789 Juli 27. 10^h. 51′ 10″ mittlere Länge . . .	248°. 14′,2
um diese Länge auf 1836 April 23. 8^h. 36′. 20″ zu reduciren, muss nach Cassini hinzugefügt werden	259. 10,0
	147. 24,2

Die Beobachtung gab die Länge grösser um 11°. 6′,8, und diess ist der Fehler der von Cassini angenommenen Bestimmung in 17071 Tagen. Der wahre Werth von n in Beziehung auf die Intersection der Ringebene mit der Ecliptik ist demnach

190°. 41′,88906

Berechnet man aus den Cassini'schen Beobachtungen diejenige Länge, welche der Beobachtungszeit von 1703 entspricht, so erhält man mit Rücksicht auf Aberration

1703 Nov. 30. 7^h. 39′ Länge 333°. 21′

Werden nur die zwei letzten Cassini'schen Beobachtungen berücksichtiget, so ergiebt sich im Mittel

1714 April 18. 8^h. 26′ . . Länge 213°. 34′

Meine Elemente geben die erstere Länge um 13°. 52′ kleiner, die letztere dagegen nur um 32′ grösser. Unglücklicher Weise sind wir berechtiget, die Glaubwürdigkeit der Cassini'schen Beobachtungen in Zweifel zu ziehen, ein Umstand, der mehr noch als der Mangel an Uebereinstimmung zwischen den Beobachtungen selbst, verbietet, irgend eine Folgerung auf die eine oder die andere der eben gefundenen Bestimmungen zu gründen.

Es ist noch Ein Element der Satellitenbahn, nämlich dessen mittlere Entfernung vom Planeten zu bestimmen übrig. Folgende Tabelle enthält die hierauf bezüglichen Beobachtungen, wobei zu bemerken ist, dass die gemessenen Entfernungen in Theilen der Mikrometerschraube ausgedrückt sind. Der Werth eines Theiles der Mikrometerschraube ist aber bei den ersten zwei Beobachtungen ein anderer als bei den folgenden, indem bei jenen das eigenthümliche Objectiv des hiesigen Refractors, bei diesen aber ein anderes zum optischen Institute dahier gehöriges Objectiv von gleicher Oeffnung aber etwas grösserer Brennweite gebraucht worden ist.

Es ergab sich nämlich der Werth eines Theiles der Mikrometerschraube

für das erstere Objectiv $= 0{,}13793''$
für das letztere Objectiv $= 0{,}13697$

Bei den zuerst angestellten Messungen wurde das Mikrometer so gestellt, dass die Fäden möglichst genau auf dem zu messenden Radius-Vector senkrecht standen; diese Bedingung habe ich bei den späteren Beobachtungen theils nicht genau zu erfüllen gesucht, theils absichtlich nicht erfüllt: dagegen sind die in der letzten Columne bemerkten Positionswinkel der Mikrometerfäden abgelesen worden.

Die Einstellungen, deren Anzahl beigefügt ist, wurden zur Hälfte auf der einen, und zur Hälfte auf der andern Seite des fixen Fadens gemacht, so dass unmittelbar die doppelte Distanz erhalten wurde und es nicht nothwendig war, die Coincidenz, (welche bisweilen beobachtet wurde), zu berücksichtigen. Nur die zwei ersten Messungen sind von dem Coincidenzpuncte aus gerechnet worden, aus einem Grunde, den ich später erwähnen werde.

Tag der Beobachtung.	Sternzeit.	Entfernung des Satelliten.	Zahl der Einstellungen.	Positionswinkel des Mikrometers.
1836 Mai 26.	$13^h.45'.3'',07$	305,28	5	
	14. 9. 11,74	311,71	4	
Juni 10.	14. 43. 58,61	324,33	6	
11.	14. 34. 16,29	325,75	6	180°. 0
14.	15. 3. 17,72	246,84	8	180. 33
27.	16. 19. 39,83	310,75	10	178. 9
28.	15. 27. 43,70	316,30	10	179 39
Juli 5.	15. 34. 59,49	81,44	10	268. 39
13.	16. 19. 48,75	247,97	8	178 26
14.	16. 34. 35,82	305,58	6	178. 11

Die Entfernungen beziehen sich auf die Mitte der erleuchteten Planetenscheibe und müssen, um auf den wahren Mittelpunct des Saturn reducirt zu werden, den oben angewendeten Grundsätzen gemäss noch mit den Factoren $1+\frac{1}{4}\sin^2\chi\sin^2\psi$ oder $1-\frac{1}{4}\sin^2\chi\sin^2\psi$ multiplicirt werden, je nachdem der Satellit westlich oder östlich vom Planeten stand. Für die in der Richtung des Declinationskreises gemessene Distanz vom 5. Juli ist die Correction unmerklich.

Bezeichnet man die Entfernung des Saturn von der Erde zur Zeit der Beobachtung mit ρ, die mittlere Entfernung, auf welche die Distanzen reducirt werden sollen mit (ρ), den Positionswinkel des Mikrometers mit u'' und die Distanz mit x, so erhält man, wenn $nt+\varepsilon-\omega=\lambda$ und $nt+\varepsilon-\gamma=\lambda'$ gesetzt wird, nach der früher angeführten Formel die halbe grosse Axe der Satellitenbahn

$$a=\frac{x\,.\,\rho}{(\rho)\cos(u''-u')\,[1-e\cos\lambda]\left(\frac{\cos u}{\cos u'}+\sin i\sin u'\sin\lambda'\cos l\right)}$$

Da bereits die nöthigen Elemente der Rechnung bezüglich auf die Satellitenbahn angegeben worden sind, so ist es hier nur mehr nöthig, die Bestimmung von (ρ), dessen Werth $= 9{,}54219$ angenommen wurde, beizufügen. Es ergeben sich folgende Resultate:

Mai	26.	$a = 40'',81$
	26.	42,22
Juni	10.	42,88
	11.	42,69
	14.	41,57
	27.	42,02
	28.	42,59
Juli	5.	42,00
	13.	42,47
	14.	42,43

Am 26. Mai geschahen die 5 ersten Einstellungen auf der einen Seite des fixen Mikrometerfadens; erst nach geraumer Zeit konnte die Coincidenz bestimmt und die als zweite Beobachtung angesetzten Messungen auf der andern Seite vorgenommen werden. Es scheint nun keinem Zweifel zu unterliegen, dass nach den ersten Einstellungen in der Lage des fixen Fadens eine Veränderung vorgegangen seyn muss, da die Abweichung des ersten Resultats vom Mittel viel zu gross ist, um als Beobachtungsfehler angenommen werden zu dürfen. Das Resultat muss desshalb bei der Berechnung des Mittels ausgeschlossen werden. Auch die Beobachtung vom 14. Juni giebt die Entfernung bedeutend zu klein, jedoch finde ich keinen hinreichenden Grund, sie zu verwerfen. Dagegen lasse ich die Beobachtung vom 5. Juli hier unberücksichtiget, weil sie, obwohl wenig vom Mittel abweichend, doch wegen der Stellung des Satelliten für den gegenwärtigen Zweck nicht entscheidend ist. Demnach erhält man im Mittel mit Rücksicht auf die Anzahl der Einstellungen

$$a = 42'',33$$

Dieser Werth ist etwas geringer, als man ihn finden würde, wenn man aus der Umlaufszeit verbunden mit Bessel's Elementen des Hugenischen Satelliten die mittlere Entfernung gesucht hätte. Ueberhaupt sind die Elemente, wie ich sie oben angegeben habe, grösstentheils nur als zwischen ziemlich weiten Grenzen eingeschlossen anzunehmen. Diess ist insbesondere bei der Excentricität der Fall. Die vorhergehende Untersuchung zeigt übrigens, dass die Herschel'schen Beobachtungen nicht geeignet sind, die Unsicherheit der Bahnbestimmung zu vermindern, wenn man die mittlere Bewegung ausnimmt, deren Werth, wie oben, auf Herschel's Epoche gestützt, den erwünschten Grad von Zuverlässigkeit wohl jetzt schon erreicht hat. Den Betrag der Excentricität geben die Herschel'schen Beobachtungen entschieden zu gross an, so zwar, dass er mit den neueren Messungen auf keine Weise zu vereinbaren wäre. Unter solchen Verhältnissen müsste jede Vergleichung der elliptischen Elemente älterer und neuerer Bestimmung, jede Ableitung ihrer Veränderungen, mithin die Beziehungen des dritten Sattelliten zum übrigen Saturnssystem und insbesondere zum Ringe als eine fruchtlose Mühe betrachtet werden. Die älteren Beobachtungen mögen höchstens in Zukunft eine Bestätigung solcher Veränderungen gewähren; dagegen kann nur die fortgesetzte Anwendung der vervollkommneten Hülfsmittel neuerer Zeit eine dem Stande der Wissenschaft entsprechende Bestimmung derselben herbeiführen, wozu hier eine Vorbereitung gegeben ist.

Folgende Tafeln der mittlern Bewegung des dritten Saturns-Satelliten sind nach den oben gefundenen Elementen für den Pariser-Meridian berechnet. Die Zeitangaben beziehen sich auf den Augenblick, wo das Licht vom Saturn ausgeht, desshalb muss zur Vergleichung mit der Beobachtung noch die Zeit überall hinzugefügt werden, welche das Licht braucht, um die Entfernung zwischen Saturn und Erde zurückzulegen.

T a f e l n

der

mittlern Bewegung des dritten Saturns-Satelliten

für den Pariser-Meridian berechnet.

E p o c h e.

Jahre.	Mittlere Länge.	Jahre.	Mittlere Länge.
	° ′		° ′
1830	90 26,0	1836	140 46,8
1831	215 15,5	1837	265 36,4
1832	170 47,0	1838	30 25,9
1833	295 36,5	1839	155 15,3
1834	60 25,9	1840	110 46,8
1835	185 15,5		

Bewegung für Julianische Jahre.

Jahre.	Mittlere Bewegung.	Jahre.	Mittlere Bewegung.
	° ′		° ′
1	124 49,5	10	189 38,8
2	249 39,0	20	209 59,5
3	14 28,5	30	39 38,3
4	329 59,9	40	59 59,0
5	94 49,4	50	249 37,8

Bewegung für die Monate.

Monate.	Mittlere Bewegung.	Monate.	Mittlere Bewegung.
	° ′		° ′
Januar	0 0,0	Juli	316 21,9
Februar	151 38,5	August	108 0,5
März	91 11,4	September	259 39,0
April	242 50,0	October	220 35,7
Mai	203 46,7	November	12 14,2
Juni	355 25,2	December	333 10,9

Bewegung für die Monats-Tage.

Tage.	Mittlere Bewegung.	Tage.	Mittlere Bewegung.
	° ′		° ′
1	190 41,9	17	1 52,1
2	21 23,8	18	192 34,0
3	212 5,7	19	23 15,9
4	42 47,5	20	213 57,8
5	233 29,4	21	44 39,7
6	64 11,3	22	235 21,6
7	254 53,2	23	66 3,4
8	85 35,1	24	256 45,3
9	276 17,0	25	87 27,2
10	106 58,9	26	278 9,1
11	297 40,8	27	108 51,0
12	128 22,7	28	299 82,9
13	319 4,5	29	130 14,8
14	149 46,5	30	320 56,7
15	340 28,3	31	151 38,5
16	171 10,2		

Bewegung für die Stunden.

Stunden.	Mittlere Bewegung.	Stunden.	Mittlere Bewegung.	Stunden.	Mittlere Bewegung
h	° ′	h	° ′	h	° ′
1	7 56,8	9	71 30,7	17	135 4,7
2	15 53,5	10	79 27,4	18	143 1,4
3	23 50,2	11	87 24,2	19	150 58,1
4	31 47,0	12	95 20,9	20	158 54,9
5	39 43,7	13	103 17,7	21	166 51,6
6	47 40,5	14	111 14,4	22	174 48,4
7	55 37,2	15	119 11,2	23	182 45,1
8	63 34,0	16	127 7,9	24	190 41.9

Bewegung für die Minuten.

Minuten.	Mittlere Bewegung.	Minuten.	Mittlere Bewegung.	Minuten.	Mittlere Bewegung.
′	° ′	′	° ′	′	° ′
1	0 7,9	21	2 46,9	41	5 25,8
2	0 15,9	22	2 54,8	42	5 33,7
3	0 23,8	23	3 2,8	43	5 41,7
4	0 31,8	24	3 10,7	44	5 49,6
5	0 39,7	25	3 18,6	45	5 57,6
6	0 47,7	26	3 26,6	46	6 5,5
7	0 55,6	27	3 34,5	47	6 13,5
8	1 3,6	28	3 42,5	48	6 21,4
9	1 11,5	29	3 50,4	49	6 29,3
10	1 19,5	30	3 58,4	50	6 37,3
11	1 27,4	31	4 6,3	51	6 45,2
12	1 35,3	32	4 14,3	52	6 53,2
13	1 43,3	33	4 22,2	53	7 1,1
14	1 51,2	34	4 30,2	54	7 9,4
15	1 59,2	35	4 38,1	55	7 17,0
16	2 7,1	36	4 46,0	56	7 25,0
17	2 15 1	37	4 54,0	57	7 32,9
18	2 23,0	38	5 1,9	58	7 40,8
19	2 31,0	39	5 9,9	59	7 48,8
20	2 38,9	40	5 17,8	60	7 56,7