Erläuterung
der lambertischen
Methode
Sonnenfinsternisse
zu verzeichnen.

Von

Anton Dätzl.

Der bis in das Innere der Mathematik gedrungen hat, wird es mir gestehen müssen, daß es ungemein schwer sey, in mathematischen Wissenschaften überhaupt, und insbesondere in der Astronomie, durch neue Erfindungen Zusätze zu machen: so sehr ist durch die vielen Erfindungen der größten Männer schon alles erschöpfet worden, daß wir kaum noch etwas sagen, was diese nicht längst schon vor uns gesagt haben; und was wirklich noch für uns übrig ist, ist so in Dunkelheit eingehüllet, daß sich nur Männer, die beym mathematischen Studium grau geworden, daran wagen dörfen. Man wird es mir also zu Gute halten, daß ich anders nichts zum Stoffe meiner Abhandlung gewählet habe, als die Erläuterung einer fremden Erfindung.

Lambert ein würdiges Mitglied dieser Akademie machte schon vor mehrern Jahren eine neue Methode Sonnenfinsternisse zu verzeichnen bekannt, blieb aber den Beweis davon für allezeit schuldig, der um so weniger hätte wegbleiben sollen, als er sich nicht jedem von sich so leicht darbietet. Ich versuchte es also, den Beweis aufzusuchen; und da ich alles auseinander setzte, ist nachfolgende Theorie von der stereographischen Projektion der Kugeln entstanden.

Ich übergebe diese Schrift der erlauchten Akademie zur Prüfung und wünsche, daß sie des Beyfalls nicht ganz unwürdig erkannt werden möchte.

Anton Dätzl.

§. 1.

Aus den gegebenen Linien BD, BG, AD, EG, die BC zu finden.

Man ziehe durch den als bekannt angenommenen Punkt C der BC, die αF mit DG parallel; so wird seyn

$A\alpha : \alpha C = EF : FC$; folglich

$$A\alpha = \frac{\alpha C \times EF}{FC} = \frac{BDI\ BC - EGI}{BG}$$ Also

$$BC = AD - A\alpha = \frac{AD \times BG \times EG.\ BD}{GD}$$

§. 2.

Wenn nebst der AD und EG die Entfernungen der Punkte D, G von der durch B gelegten Linie XZ bekannt sind, die Linie BC zu finden.

Weil die Dreyecke BDp und BGP ähnlich sind: so ist

$BD : BG = Dp : GP$; also auch

$BD : BD + BG = Dp : Dp + PG$, und

$BD + BG : BG = Dp + GP : GP$. Folglich

$$\frac{BD}{GD} = \frac{Dp}{Dp + GP}; \text{ und } \frac{BG}{GD} = \frac{GP}{GP + DP}$$

weil $BD + BG = GD$ ist. Setzt man nun diese beyden Werthe in die oben für BC gefundene Gleichung: so erhält man

$$BC = \frac{AD.\ GP + EG.\ Dp}{GP + Dp}$$

§. 3.

§. 3.

Auf diese beyden geometrischen Sätze gründet sich die Theorie der stereographischen Projektionen der Kugeln, wovon ich das, was man, um eine Sonnenfinsterniß nach der lambertischen Methode zu verzeichnen, zu wissen nöthig hat, herleiten werde.

§. 4.

Es bezeichne DG die Durchschnittslinie der vertikalen Ebene mit der fundamentalen; EG den Abstand des Auges E von der Vertikalebene, und AD die Entfernung eines zuprojicirenden Punkts A von eben derselben Ebene; BC die Fundamentallinie; BG und DB die Abstände des Auges und des sogenannten Punkts von der Tafel. Man soll die Lage des Punkts A auf der Tafel gegen die Vertikalebene finden.

Es sey $BG = \delta$; $DB = d$, $AD = f$, $EG = l$; so ist die Entfernung des projicirten Punkts A auf der Tafel von der Vertikalebene $= BC = \frac{f\delta + l d}{\delta + d}$; zufolge des 1. §. oder wenn das Aug in der Vertikalebene gesetzt wird.
$$= \frac{f \quad \delta}{\delta + d}$$

§. 5.

Es bezeichne DE die Ebene des Auges, die durch das Aug E und den Punkt A gelegt, auf der Fundamentalebene senkrecht steht; BC die Durchschnittslinie der Tafel mit der Ebene des Auges; DG die Durchschnittslinie der Fundamentalebene mit eben derselben; XZ

die

die Fundamentallinie. Man soll die Lage des Punkts A auf der Tafel gegen die Fundamentalebene finden.

Es sey der Abstand des Auges E von der Tafel $= GP = \delta$, der des zuprojicirenden Punkts $= Dp = d$, die Höhe des Auges über der Fundamentalebene $= EG = a$, die des Punkts $= AD = \alpha$; so wird zufolge des 2 §. die Höhe des projicirten Punkts auf der Tafel über der Fundamentalebene

$$= BC = \frac{\alpha\delta + ad}{\delta + d}$$

§. 6.

Die perspektivische Höhe des Punkts A zu finden, oder was eines ist, die Linie Cc.

Man setze in obiger Gleichung $\alpha = 0$; so erhält man die Höhe des projicirten Punkts D über der Fundamentalebene

$$= Bc = \frac{ad}{\delta + d}$$

und folglich auch $Cc = BC - Cc = \frac{\alpha\delta + ad}{\delta + d} - \frac{ad}{\delta + d} = \frac{\alpha\delta}{\delta + d}$

§. 7.

Wenn OTH die Fundamentalebene vorstellt, TH die Fundamentallinie, OH die Durchschnittslinie der fundamentalen Ebene mit der verticalen, und die krumme Linie KLR in der Ebene LFH liegt, welche die Fundamentalebene in FH schneidet, und gegen dieselbe unter dem Winkel LFM geneigt ist; die Projektion jedes Punkts derselben z. B. L zu finden.

Man

Man nehme die Linien ML, MN, NT, welche die Lage des Punkts L gegen die Tafel, die vertikale und fundamentale Ebene bestimmen, indeß als bekannt an: so wird, wenn TN = f, MN = d, OT = δ und der Abstand des Auges O von der Vertikalebene = 1 = o gesetzt werden, die Entfernung des projicirten Punktes L von der Vertikalebene seyn

$$= \frac{f\ \delta}{\delta + d}$$

(4 §.) Setzt man nun auch die Höhe des

ML

Punkts L über der Fundamentalebene = α, die Höhe des Auges über eben derselben Ebene = a, wird die Entfernung des projicirten Punkts von der Fundamentalebene

$$= \frac{\alpha\delta + a\,d}{\delta + d}$$

seyn, und also die Lage des projicirten Punktes auf der Tafel ihre volle Bestimmung haben. Wären nun für jeden einzelnen Punkt die Werthe der Linien f, d, α, bestimmt; so würden auch beyde gefundene Formeln die Projektion jedes andern Punkts der krummen Linie allgemein ausdrücken. Allein wenn die Natur der krummen Linie KLR durch eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Ordinaten ausgedrückt, bekannt ist, und die Werthe für f, d, α daraus hergeleitet worden; so werden sie in die gefundenen Formeln versetzt dieselben eben so allgemein machen, als sie es selber sind. Die Werthe für f, d, α werden aus den Koordinaten der krummen Linie KLR also hergeleitet. Es sey der Winkel, welchen die Durchschnittslinien FH, TH in H ausmachen = m; der Neigungswinkel LFM der Ebene LFH gegen die Fundamentalebene = n. Aus T werde ein Perpendikel auf FH in E gefället, und E für den Anfang der Abscissen angenommen; so werden EF = u und FL = y die Koordinaten der krummen Linie bezeichnen. Weil in dem Dreyecke FML die Seite FL, und die Winkel F, und M, deren letzter ein rechter ist, bekannt sind; so ist

$1 : y = \sin. n : ML$,
$1 : y = \cos. n : MF$; also $ML = \alpha = y \sin. n$,
$MF = y \cos. n$.

Es ist ferner in dem bey F rechtwinkelichten Dreyecke MFG, worinn die Seite MF und die beyden Winkel M und G bekannt sind,

$MG : FM = 1 : \cos. m$.
$FG : MG = \sin. m. 1$. Also $MG = \frac{FM}{\cos. m} = \frac{y. \cos. n}{\cos. m}$

$FG = \sin. m. MG. = \frac{y \sin. m. \cos. n}{\cos. m}$; $NG = MN -$

$MG = d - \frac{y. \cos. n}{\cos. m}$. In dem rechtwinklichten Dreyecke GNH ist

$NG : NH = \sin. m : \cos. m$; folglich, weil $TH = b$, und $NH = b - f$ ist, $NG = \frac{(b-f) \sin. m.}{\cos. m.} = \frac{d. \cos. m - y \cos. n}{\cos. m}$

Also $d = \frac{(b-f) \sin. m + y \cos. n}{\cos. m}$. In dem rechtwinkelichten Dreyecke ETH ist

$EH : b = \cos. m : 1$; folglich $EH = b \cos. m$,
$FH = b \cos. m - n$ und $HG = b \cos. m - n - \frac{y \sin. m. \cos. n}{\cos. m}$.

Ferner ist in dem rechtwinkelichten NGH, $NH : HG = \cos. m : 1$. Also $NH = HG \cos. m = b \cos. m^2 - n \cos. m - y. \sin. m. \cos. n = b - f$.

Hieraus

Hieraus ergiebt sich $f = -b. \cos.^2 m + b + x \cos. m + y. \sin m. \cos. n$; und wenn man den für $b-f$ gefundenen Werth in obige für d gefundene Gleichung versetzt, auch

$$d = \frac{(b. \cos^2 m - x \cos m - y \sin. m. \cos. n) \sin m + y. \cos. n}{\cos. m} =$$

$$b. \cos. m. \sin. m - x \sin. m + \frac{y \cos. n (1 - \sin^2 m)}{\cos. m}.$$

Beyde Ausdrücke lassen sich noch geschmeidiger machen, wenn man betrachtet, daß $1 - \cos^2 m = \sin^2 m$, und $1 - \sin^2 m = \cos^2 m$ ist. Solchemnach wird
$f = + b \sin^2 m + x \cos. m + y. \sin m. \cos n$, und $d = b \cos. m. \sin. m - x \sin. m + y. \cos m. \cos. n$. Läge TN auf der entgegengesetzten Seite, so wäre $NH = b + f$, und hiemit $b + f = b \cos.^2 m - x \cos. m - y \sin. m. \cos. n$; und hieraus ergäbe sich $f = - b \sin^2 m + x \cos m + y. \sin. m. \cos. n$. Eben so fände man $d = b \cos m. \sin m + x. \sin. m - y \cos m. \cos n$, wenn die Linien EF und FL auf den entgegengesetzten Seiten lägen. Demnach kann man allgemein setzen
$f = \pm b. \sin.^2 m + x \cos m + y \sin. m \cos. n$. $d = b \cos. m. \sin. m \mp \sin. m. \pm \cos. m. \cos. n$, wo die oben stehenden Zeichen für die Fälle gelten, welche in der Zeichnung ausgedrückt worden. Setzt man nun die bisher gefundenen Werthe in den beyden Gleichungen $\frac{f \delta}{\delta + d}$ und $\frac{\alpha \delta + a d}{\delta + p}$ an die Stelle der α, f, und d; so erhält man

$$\frac{f \delta}{\delta + d} = \frac{\delta (\pm b \sin^2 m + x \cos. m + y \sin. m. \cos. n)}{\delta + b. \cos m. \sin m \mp x \sin m \pm y \cos m. \cos n} = x';$$

$$\frac{\alpha\delta + ad}{\delta + d} = \frac{\delta y.\sin.n + a\,(b\,\cos m.\sin m \mp \sin m \pm \cos m.\cos.n)}{\delta + b\ \cos.m.\sin.m \mp x \sin m \pm y \cos.m.\cos.n.} = y'$$

wo x' und y' Koordinaten der projicirten krummen Linie bezeichnen, deren erstere auf der Fundamentallinie T H von T an gerechnet wird, die zwote aber auf der ersten an ihrer äussersten Gränze senkrecht steht: daß also beyde die Lage jedes einzelnen Punkts der projicirten krummen Linie auf der Tafel bestimmen, wenn die Natur derselben als bekannt vor ausgesetzt wird.

§. 8.

Bis hieher haben wir aus den zween ersten geometrischen Sätzen einen allgemeinen für die gesammte Perspektiv hergeleitet; nun wollen wir denselben insbesondere auf die stereographische Projektion der Kugeln anwenden. Die stereographische Projektion unterscheidet sich von der ortographischen durch anders nichts, als daß man voraussetzt, daß das Aug nicht unendlich weit, wie bey dieser, sondern nur um den Halbmesser der Kugel von der Tafel entfernet sey; daher hier δ allemal = r angenommen werden muß.

§. 9.

Es stelle O K R die Fundamentalebene, K R die Fundamentallinie vor, und zugleich die Durchschnittslinie der halben Kreisfläche E K L R mit der Tafel und der Fundamentalebene, zu welcher letztern sie unter einem spitzigen Winkel n sich neiget, da indessen die andere Hälfte sich unter die Fundamentalebene hinunter versenket, und einen gleichen Winkel mit derselben gestaltet, aber auf der entgegengesetzten

Seite der gleichfalls hinunter verlängerten Tafel. Man soll die Projektion des vertikalen Durchmessers des Kreises finden.

Weil in diesem Falle die Durchschnittslinie F. 2 und 3. KR in die Fundamentallinie fällt; so wird $m = 0$, $TH = EH$: daß also E mit T, und weil F und T Mittelpunkte größter Kreise einer Kugel sind, auch mit F, und folglich auch mit N in einem Punkt zusammen fällt. Weil nun $NH = b - f = 0$, und $f = 0$ ist, so wird auch $b = 0$: daß also auch H mit den andern vier Punkten in dem Mittelpunkte der Kugel zusammen fällt. Nach diesen Voraussetzungen findet man aus der allgemeinen Formel $y = \frac{r\, r.\, \sin.\, n}{r \pm \cos. n} = \frac{\sin.\ n.}{1 \pm \cos.\, n}$ wenn $r = 1.$ gesetzt wird. Man findet hier einen doppelten Werth für y. Weil nun die eine Hälfte des Durchmessers, der projicirt werden soll, vor der Tafel, die andere hinter derselben lieget; so sind hier beyde Werthe brauchbar; denn eben diese zween verschiedenen Fälle drücket die Formel aus. Demnach wird die Projektion des vertikalen Durchmessers $= \frac{\sin.\ n}{1 + \cos.\, n} + \frac{\sin.\ n}{1 - \cos.\, n}$ seyn. Diese Formel läßt sich leicht so geschmeidig machen, als es zum verzeichnen erfodert wird, wenn man für n das Komplement zu 90° annimmt, oder den Winkel, welchen die halbe Kreisfläche mit der Tafel macht. Es sey dieser Winkel $= \pi$; so ist die Projektion des Durchmessers

$$= \frac{\cos.\ \pi}{1 + \sin \pi} + \frac{\cos.\ \pi}{1 - \sin \pi} = \frac{\cos.\, \pi\, (1 + \sin.\, \pi + 1 - \sin \pi)}{1 - \sin^2 \pi} =$$

$$\frac{2.\ \cos.\ \pi}{\cos.^2\ \pi} = \frac{2}{\cos.\ \pi} = 2.\ \sec.\ \pi.$$

§. 10.

§. 10.

Wenn (Fig. 4.) LOl den Vertikalkreis bezeichnet, Ll die Durchschnittslinie des Kreises, der gegen die Fundamentalebene unter dem Winkel n sich neiget, und unter dem Winkel π gegen die Tafel, wovon PF die Durchschnittslinie mit dem Vertikalkreise anzeigt, und überhaupt alle Buchstaben die Bedeutung behalten, die sie in der dritten Figur hatten; wird die Projektion des Durchmessers L l seyn $= \text{P p} = 2 \sec. \pi$, und $\text{P c} \tfrac{1}{2} \text{P p} = \sec \pi$.

§. 11.

Wenn HI den Horizont eines Ortes Z bezeichnet, LH die Polhöhe: die Projektion des nördlichen Pols L auf dem Horizonte zu finden.

Weil der Halbmesser FL über der Fundamentalebene erhaben liegt, so ist seine Projektion

$$\text{FP} = \frac{\sin.\, n}{1 + \cos n} = \frac{\sin.\, n}{\dfrac{\sin.\, n}{\text{tng.}\, \frac{1}{2} n}} = \text{tng.}\, \tfrac{1}{2} n = \text{tng}\, \frac{(90 - \pi)}{2} = \text{tang}\,(45 - \tfrac{1}{2}\pi)$$

folglich ist auch die Lage des projicirten Pols L auf der Durchschnittslinie FH bestimmt.

§. 12.

Die Projektion des horizontalen Durchmessers KR zu finden. (Fig. 3.)

Weil

Weil KR in der Fundamentallinie liegt, so wird $d=0$. Also ergiebt sich aus der allgemeinen Grundformel $KR = 2y = 2x = 2r$.

§. 13.

Die Projektion des Kreises LRlO ist ein Kreis. (Fig. 3.)

Denn da die Projektion des horizontalen Halbmessers FR ist $= r = 1$, des vertikalen Durchmessers Ll seine $= 2 \sec. \pi = Pp$, und des über der Fundamentalebene erhabenen Halbmessers FL seine $= \operatorname{tng} \frac{1}{2} n$; (Fig 4. 5.) so ist $Fp = 2 \sec. \pi - \operatorname{tng}. \frac{1}{2} n = \frac{2}{\cos. \pi} - \operatorname{tng}. \frac{1}{2} n =$

$$\frac{2}{\sin. n} - \operatorname{tng}. \tfrac{1}{2} n = \frac{2}{\sin. n} - \frac{1 - \cos. n}{\sin. n}.$$

Soll nun die Projektion ein Kreis seyn: so muß $PF \times Fp = FR^2$ seyn: (Fig. 5.) also

$$\left(\frac{2}{\sin. n} - \frac{1 - \cos. n}{\sin. n} \right) \times \frac{1 - \cos. n}{\sin. n} = rr = 1.$$

Dieses zu beweisen multiplicire ich die beyden Faktorn durcheinander; so wird

$$\left(\frac{2}{\sin. n} - \frac{1 - \cos. n}{\sin. n} \right) \times \frac{1 - \cos. n}{\sin. n} = \frac{1 + \cos. n}{\sin n} \times$$

$$\frac{1 - \cos. n}{\sin. n} = \frac{1 - \cos.^2 n}{\sin.^2 n} = \frac{\sin^2 n}{\sin^2 n} = 1.$$

Folglich ist die Projektion ein Kreis, dessen Halbmesser $= \sec. \pi$ ist.

§. 14.

Wenn die Ebene eines Meridians die Tafel vorstellt, und der Aequator die Fundamentalebene, und überdem der Winkel eines zweyten Meridians mit dem ersten gegeben ist, die Projektion des horizontalen Durchmessers des letztern zu finden.

Es sey A E P Q der erste Meridian, A E Q die durch das Aug O gelegte Fläche des Aequators, P O die Durchschnittslinie der Vertikalebene mit der Tafel, und ψ, λ bezeichnen die Winkel, welche der Meridian l P p mit der Tafel und der Vertikalfläche macht. Weil für den gegebenen Fall wieder die Punkte E, F, H, T in einen zusammenfallen, $n = 90^\circ$, $m = \psi$, $b = o = y$ ist; so erhält man aus der allgemeinen Formel $x' = \frac{\text{cos.}\,\psi}{1 \mp \text{sin.}\,\psi} = \frac{\text{sin.}\,\lambda}{1 \mp \text{cos.}\,\lambda}$ weil $\psi + \lambda = 90^\circ$.

Demnach ist die Projektion des ganzen Durchmessers

$$= \frac{\text{sin.}\,\lambda}{1 - \text{cos.}\,\lambda} + \frac{\text{sin.}\,\lambda}{1 + \text{cos.}\,\lambda} = \frac{2\,\text{sin.}\,\lambda}{\text{sin}^2\,\lambda} = \frac{2}{\text{sin.}\,\lambda} = \frac{2}{\text{cos.}\,\psi} = 2\,\text{sec.}\,\psi.$$

§. 15.

Den Abstand des Mittelpunkts r des projicirten Durchmessers vom Augpunkte O zu finden.

Man ziehe von dem projicirten Halbmesser $= \frac{1}{\text{cos.}\,\psi}$ die Projektion des diesseits der Tafel liegenden Halbmessers $= \frac{\text{cos.}\,\psi}{1 + \text{sin}\,\psi}$;

so

so wird $lr - Ol = Or$

$$= \frac{1}{\text{cos}.\,\psi} - \frac{\text{cos}.\,\psi}{1 + \text{sin}.\,\psi} =$$

$$\frac{\text{sin}.\,\psi + 1 - \text{cos}.^2\psi}{\text{cos}.\,\psi\,(1 + \text{sin}\,\psi)} = \frac{\text{sin}.\,\psi + \text{sin}.^2\,\psi}{\text{cos}.\,\psi + \text{cos}.\,\psi\,\text{sin}\,\psi} =$$

$$\frac{\text{sin}\,\psi + 1}{\frac{\text{cos}.\,\psi}{\text{sin}.\,\psi} + \text{cos}\,\psi} = \frac{\text{sin}\,\psi + 1}{\text{cot}.\,\psi + \text{cos}.\,\psi} = \frac{\text{sin}.\,\psi + 1}{\text{cot}.\,\psi + \text{cos}.\,\psi} =$$

$$\frac{\text{sin}.\,\psi + 1}{\text{cot}.\,\psi + \text{sin}\,\psi.\,\text{cot}\,\psi} = \frac{1}{\text{cot}.\,\psi} = \text{tng}.\,\psi.$$

§. 16.

Die Projektion des Kreises lPp ist ein Kreis, dessen Halbmesser $= \text{sec}.\,\psi$ ist.

Der Beweis wird, wie (§. 13.) auf eben dieselbe Weise geführt, daher es unnöthig ist, denselben hier zu wiederholen.

§. 17

Da man nun den Halbmesser der Projektion, und zugleich den Ort seines Mittelpunkts kennt, so kann es nicht mehr schwer seyn, denselben merklich zu verzeichnen.

§. 18.

Stellt man sich vor, daß über O eine gerade Linie $= r$ senkrecht aufgerichtet sey, an deren Ende das Aug sich befindet: und daß ferner der Kreis APQ sammt dem lPp sich um die auf ihm senkrecht stehende Linie herumdrehe; so werden die beyden Kreise in Ansehung des Auges ihre Lage nicht verändern, und also die Projektion des letztern immer die nämliche bleiben; mit dem Unterschiede, daß der Bogen des projicirten Kreises, der auf der Tafel zu liegen kömmt, für jede verschiedene Lage der Durchschnittslinie PO, gleichfalls eine verschiedene Lage enthält. Ist demnach die Lage der Durchschnittslinie bestimmt; so ist die des projicirten Bogens seine gleichfalls bestimmt.

§. 19.

Aus dem 14 §. folgt noch dieß, daß für $\psi = 90^\circ$, der Halbmesser der Projektion $= \sec. \psi = 8$ werde; welches anzeigt, daß die Projektion eines Kreises, der durch das Aug gelegt ist, und auf der Tafel senkrecht steht, eine gerade Linie ist.

§. 20.

Es sey Fig. 7. HirH der äusserste Rand der von der Sonne beleuchteten halben Erdkugel, der zugleich die Stelle der Tafel vertreten soll, und in Z der Ort der Sonne H^2ROH der Meridian, der durch den Ort der Sonne Z und des Pols P gelegt worden, und zugleich die Vertikalebene; durch P, den Ort des nordlichen Pols, und den Mittelpunkt C sey ein anderer Meridian Pipr gelegt, der mit der Vertikalebene einen gegebenen Winkel $HPi = \phi$ einschließt; man soll die Pro-

Projektion dieses letztern Meridians finden: vorausgesetzt, daß auch die Abweichung der Sonne Z, die HP bekannt sey.

Weil die Kreise HiRr, Pipr sich irgend in i schneiden müssen, und Ci die Durchschnittslinie ihrer beyden Ebenen bezeichnet: so erhält man des Durchmessers Pp Projektion $= \frac{2}{\text{cos.}\,\pi} = 2$ sec. $\pi = P'p'$ (§. 9), wenn π wie daselbst, den Neigungswinkel HCP bezeichnet; und des Durchmessers ir seine, weil er in der Tafel liegt, $= r = 1$ (§. 12.) Man verzeichne die Projektionen der beyden Durchmesser Pp, ir besonders, und setze sie unter dem Winkel HCi, dessen Sinus = sin. HP, sin HPi ist, zusammen; so erhält man vier Punkte, welche in der Projektion des Kreises Pprm liegen, nämlich i, P′, r und p′, und, da dieselbe ein Kreis ist (§. 16.) desselben Halbmesser und Mittelpunkt bestimmen. Denn da ir die Durchschnittslinie des Meridians mit dem Horizonte anzeigt; so muß der Mittelpunkt des projicirten Kreises irgend in der Linie liegen, die auf ir senkrecht steht, und in der Tafel liegend ist; und da eben derselbe auch irgend auf der Linie cf zu liegen kömmt, die aus dem Mittelpunkte c der Sehne $P'p'$ senkrecht aufgerichtet worden: so ist f der Mittelpunkt des projicirten Kreises, und Pf der Halbmesser derselben.

§. 21.

Bey eben denselben Voraussetzungen den Halbmesser $P'f$ zu finden.

Weil $P'C = \frac{\text{cos}\,\pi}{1 + \text{sin.}\,\pi}$ (§. 11.), $P'c = \frac{1}{2} P'p' = \frac{1}{\text{cos.}\,\pi}$ (§. 20.)

so

so wird $Cc = P'c - P'C = \frac{1}{\cos.\pi} - \frac{\cos.\pi}{1+\sin.\pi} =$

$$\frac{1-\cos.^2\pi+\sin.\pi}{\cos.\pi+\cos.\pi.\sin.\pi} = \frac{\sin.\pi+1}{\cos.\pi+\frac{\cos.\pi}{\sin.\pi}} = \frac{\sin.\pi+1}{\cot.\pi+\cos.\pi} =$$

$$= \frac{\sin\pi+1}{\cot.\pi+\cot.\pi.\sin.\pi} = \frac{\sin.\pi+1}{(\sin.\pi+1)\cot.\pi} = \frac{1}{\cot.\pi} = \mathrm{tng}.\pi.$$

Da nun $\mathrm{tang}.\pi = \sin.\pi \sec.\pi$; so ist auch $Cc = \sin.\pi \sec.\pi$.

In dem bey c rechtwinkelichten Dreyecke, wenn man cf zum Radius annimmt, ist $Cc : cf = \mathrm{tng}.f : 1$; also $Cc = cf.\mathrm{tng}.f. = cf.\mathrm{tng}.HCi$. Nun ist in dem sphärischen Dreyecke HiP, das bey H rechtwinkelicht ist: $1 : \sin.PH = \mathrm{tang}.HPi : \mathrm{tng}.Hi$, folglich $\mathrm{tng}.Hi = \mathrm{tng}.HCi = \sin PH.\mathrm{tng}.HPi$. Dieser Werth von tng. HCi in obige Gleichung gesetzt, giebt $Cc = cf \sin PH.\mathrm{tng}.HPi = cf.\sin.\pi.\mathrm{tng}.\phi$, wenn man PH allgemein mit π und HPi mit ϕ benennt.

Diese beyden für Cc gefundenen Werthe einander gleichgesetzt, geben $\sin\pi.\sec.\pi = cf.\sin.\pi.\mathrm{tng}.\phi$, woraus $cf = \frac{\sec.\pi}{\mathrm{tng}.\phi}$ gefunden wird.

Da nun $P'C = \frac{\cos.\pi}{1+\sin.\pi}$ und $PZ = 90° - \pi$ (F.7.): so wird Fig. 8. $\cos.\pi = \sin.(90° - \pi)$ und $\sin.\pi = \cos(90° - \pi)$; also $P'C.$

=

$$= \frac{\sin(90^\circ - \pi)}{1 + \cos(90^\circ - \pi)} = \frac{\sin.(90^\circ - \pi)}{\dfrac{\sin.(90^\circ - \pi)}{\operatorname{tng}\left(\dfrac{90^\circ - \pi}{2}\right)}}\ \operatorname{tng}.\left(\frac{90^\circ - \pi}{2}\right);$$

$$= \operatorname{tng}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1 - \operatorname{tng}.\frac{1}{2}\pi}{1 + \operatorname{tng}\frac{1}{2}\pi} = \frac{\cos.\frac{1}{2}\pi - \sin.\frac{1}{2}\pi}{\cos.\frac{1}{2}\pi + \sin\frac{1}{2}\pi}$$

(weil $1 - \dfrac{\sin.\frac{1}{2}\pi}{\cos.\frac{1}{2}\pi} = 1 - \operatorname{tng}\frac{1}{2}\pi$ und $1 + \dfrac{\sin\frac{1}{2}\pi}{\cos.\frac{1}{2}\pi} = 1 + \operatorname{tng}.\frac{1}{2}\pi$.) $= \sec\pi - \operatorname{tng}.\pi$.

Da ferner $Cp' = \dfrac{\cos.\pi}{-\sin\pi}$; so ist aus gleichen Gründen auch

$$Cp' = -\frac{\sin.(90^\circ - \pi)}{1 - \cos.(90 - \pi)} = \frac{\sin.(90 - \pi)}{\sin.(90 - \pi).\operatorname{tng}\left(\dfrac{90^\circ + \pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tng}.\left(\dfrac{90^\circ - \pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cot.\left(\dfrac{90^\circ + \pi}{2}\right)} = \operatorname{tng}.\frac{(90 + \pi)}{2}$$

$$= \operatorname{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1 + \operatorname{tang}.\frac{1}{2}\pi}{1 - \operatorname{tang}.\frac{1}{2}\pi} = \frac{\cos.\frac{1}{2}\pi + \sin.\frac{1}{2}\pi}{\cos.\frac{1}{2}\pi - \sin.\frac{1}{2}\pi}$$

$= \sec.\pi + \operatorname{tang}.\pi$. Daher ergiebt sich $P'p' = \sec\pi - \operatorname{tang}.\pi + \sec.\pi + \operatorname{tang}.\pi = 2\sec.\pi$; welches (§.§. 9, 21.) auch durch andere Wege gefunden worden.

Weil nun $cf = \frac{\sec.\pi}{\text{tng}.\phi} = \sec.\pi\cot.\phi$: so wird $P^1f^2 = cf^2 +$ $P^1c^2 = \sec^2\pi.\cot^2\phi + \sec^2\pi = \sec^2\pi.(\cot^2\phi + 1) = \text{cosec}^2\phi.$ $\sec^2\pi$; also $P^1f = \text{cosec}.\phi.\sec.\pi$. Demnach ist $P^1f : P^1c = \text{cosec}.\phi.\sec.\pi : \sec.\pi. = 1 : \sin P^1fc$; daß also $\sin P^1fc = \text{cosec}.\phi$. Da nun überhaupt $\sin. A = \text{cosec}. A$; so folgt, daß $cP^1f = 90^\circ - \phi$ und $cf = \text{tang}.(90^\circ - \phi)$.

§. 22.

Bey eben denselben Voraussetzungen, die Projektionen so vieler Meridiane durch Zeichnung zu finden, als man verlangt. Z. B von 15 zu 15 Graden.

Es stelle HNR, wie in voriger Figur, die Ebene, welche durch die Gränze der beleuchteten und unbeleuchteten Halbkugel gelegt worden, und zugleich die Tafel vor, und NT. HR zween aufeinander senkrecht stehende Durchmesser: so ist C der Augpunkt, NT die Fundamentallinie, HR die Projektion des durch das Aug und die beyden Pole gelegten Vertikalkreises, der zugleich der Meridian des Ortes ist.

Es sey nun die Abweichung der Sonne für eine bestimmte Zeit $= 22^\circ$, so mache $HG = 22^\circ$, und ziehe durch N und G eine gerade Linie, welche CH in Pi schneidet, so ist $P^1C = \text{tang}\left(\frac{90^\circ - 22^\circ}{2}\right)$ die Projektion der halben Erdaxe, und P^1 der Ort des nördlichen Pols auf der Tafel (§. 11.) Man mache $TE = 2HG$, und ziehe durch N und E die Linie NE, welche CR in c schneidet, so ist $Cc = \text{tang}.22^\circ$ (§. 21); und wenn aus c eine gerade Linie cX mit CT parallel

parallel gezogen wird, werden alle Mittelpunkte der projicirten Meridiane auf derselben zu liegen kommen. Legt man noch an $P^1 c$ die Winkel $c P^1 1 = 15^\circ$, $c P^2 = 30^\circ$, $c P^1 3 = 45^\circ$, $C P^1 4 = 60^\circ$, $c P^1 5 = 75^\circ$, und bemerket die Durchschnittspunkte 1 2 3 4 5 in der Linie $c X$, und beschreibt aus denselben mit den Halbmessern P^1, P^2, P^3, P^4, P^5 nach der Ordnung so viele Kreise; so erhält man die Projektionen der Meridiane, welche den Meridian des Ortes unter den Winkeln 75°, 60°, 45°, 30°, 15° schneiden. Denn es ist $c 1 = \text{tang } 15^\circ = \text{tng.} (90^\circ - 75)$, $c 2 = \text{tang.} 30^\circ = \text{tng.} (90^\circ - 60)$ u. s. f.

Weil $P^1 c = \sec \pi = N c$ (§. 10); so findet man auch die Projektion des Meridians, der die Fundamentalebene in $N T$ durchschneidet, und gegen die Tafel unter dem Winkel π sich neiget, wenn man aus c mit $P^1 c$ einen Bogen wie $N P^1 T$ beschreibet.

§. 23.

Es sey $H Z R N$ eine Kreisfläche, die durch den Ort der Sonne S und die beyden Pole gelegt worden; $H R$ sey die Durchschnittslinie des Horizonts mit dieser Ebene; $K L$ die Durchschnittslinie des Kreises, welcher die beleuchtete Halbkugel von der unbeleuchteten absondert. Man soll auf diesen letztern den Ort der Sonne und des nördlichen Pols, und den Parallelkreis $Z c$ für einen gegebenen Ort Z projiciren.

Man setze das Aug der Sonne gegenüber in O: so wird die Projektion des Bogens $S Z = \text{tng.} \frac{1}{2} S C Z = C \zeta$, die des Bogens $S P$, $= \text{tng} \frac{1}{2} S C P = C \pi$, die des Bogens $A c$, $= \text{tang} \frac{1}{2} A C c = C \gamma$ (§. 10).

Nun ist $SZ = SP - HA$: also $C\zeta = \text{tng.} \frac{SP-HA}{2}$. Und weil $ZP = Pc$; so ist $Zc = 2\,ZP = 2\,HA$: also $Sc = SZ + 2\,HA = SP - HA + 2\,HA = SP + HA$, und tang $\frac{1}{2}\,SCc =$ tang $\frac{SP+HA}{2} = C\gamma$: daß also die ganze Linie $\zeta\gamma$ bekannt ist $=$ tang. $\frac{SP+AH}{2}$ $-$ tang. $\frac{SP-AH}{2}$. Nimmt man also das Mittel, und beschreibt daraus mit $\frac{\zeta\gamma}{2}$ einen Kreis; so ist derselbe die Projektion des Parallelkreises für den Ort Z. Denn daß die Projektion eines Parallelkreises wieder ein Kreis sey, erhellet daraus, daß $ZL.Lc = \zeta L.L\gamma$ ist, und die auf ZL oder ζL senkrecht stehende Semiordinate in L dem Parallelkreis und seiner Projektion gemein ist.

§. 24.

Ich suchte die Projektion eines Parallelkreises auch unmittelbar durch die Grundformel auf; die Rechnung fiel aber so weitläuftig aus, daß ich alle Lust dabey verlohr, sie nochmal zu wiederholen, und ordentlich auseinander gesetzt zu Papier zu bringen; übrigens fand ich das nämliche.

§. 25.

Um die eben gefundenen beyden Ausdrücke tang. $\frac{SP+AH}{2}$,

tang.

$tang. \frac{SP-AH}{2}$ noch bequemer einzurichten, muß ich anmerken, daß

$SP = 90^\circ - PL$

$AH = 90^\circ - AZ$; also

$SP + AH = 180^\circ - PL - AZ$; folglich

$$tang. \frac{SP+AH}{2} = tang\left(90 - \frac{PL-AZ)}{2}\right) =$$

$$cot. \frac{PL+AZ}{2}$$: und

$SP = SZ + PZ$, $AZ = SZ + AS$

$AH = PZ$ $PL = AS$; also

$SP - AH = SZ + PZ - PZ = SZ$,

$AZ - PL = SZ + AS - AS = SZ$; folglich

$SP - AH = AZ - PL$, und $tang \frac{SP-AH}{2} = tng. \frac{AZ-PL}{2}$.

§. 26.

Bey den Voraussetzungen des 23. §. so viele Parallelkreise zu projiciren, als man verlangt, z. B. von 10 zu 10 Graden.

Es sey fig. 11. $PL = AS = OQ$ die Deklination der Sonne $= 22^\circ$. Man ziehe OA, OQ; so wird erstere den Durchmesser LK in α durchschneiden, letztere in M, wenn beyde OQ, CL, so viel es nöthig ist, verlängert werden, und αM wird der Durchmesser der Projektion des Aequators AQ seyn: daß also mehr nicht nöthig ist, als den Mittelpunkt d zu suchen, um daraus mit der gehörigen Oeffnung des Zirkels den projicirten Kreis beschreiben zu können. Denn wenn der Aequator der zu projicirende Parallelkreis selbst ist, wird $AZ = 0$ (Fig. 10.) folglich

$$\cot. \frac{PL + AZ}{2} = \cot : \tfrac{1}{2} PL = \operatorname{tang}. \frac{180 - PL}{2} \text{ und } \operatorname{tang} \frac{AZ - PL}{2} = \operatorname{tang}. \frac{PL}{2}$$

daß also $O\alpha = \dfrac{-}{\operatorname{tang} \frac{PL}{2}}$ und $CM = \dfrac{PL}{\cot. \frac{\quad}{2}}$.

Da nun A L Q ein halber Kreis ist; so theile man selben beyderseits von A und Q bis P von 10° zu 10° ein, wie die Zeichnung anzeigt, und ziehe die geraden Linien $O\,10^\circ$, $O\,10^\circ$, die, wenn es nöthig ist, verlängert die Linie αM irgend in zweenen Punkten m n schneiden werden, welche den Durchmesser des projicirten Parallelkreises bestimmen, dessen Abstand vom Aequator $= 10^\circ$ ist. Denn es ist $Cn = \operatorname{tang}. \dfrac{A10 - PL}{2} = \operatorname{tang}. \dfrac{10^\circ - 22^\circ}{2}$, und $Cm = \operatorname{tng}. \dfrac{180^\circ - 10^\circ - 22^\circ}{2}$

Auf solche Weise wird die Projektion jedes andern Parallelkreises gefunden.

§. 27.

Es sey MN die Durchschnittslinie der Ecliptik mit dem Breitenkreise $M\pi\ N\pi$, der zugleich die Stelle der Tafel vertritt, $\pi\pi$ die Durchschnittslinie des Weichungskreises $P\pi\ p\pi$ mit eben demselben, und zugleich die Axe der Ecliptik; Pp die Axe des Aequators: Man soll die Projektion derselben auf der Tafel finden, vorausgesetzt daß in S der Ort der Sonne auf der Tafel sey, und der Winkel $M\pi P$ nebst dem Bogen $P\pi$ gegeben worden.

Weil

Weil hier $\delta = 1$, $a = 0$, $b = 0$, $n = 90^{\circ}$ ist; so wird sich

$$\acute{y} = \frac{y}{1 + x .\ \sin m},\quad \acute{x} = \frac{x .\ \cos.\ m}{1 + x\ \sin.\ m},$$ woraus

$$y = \frac{\acute{y} .\ \cos.\ m}{\cos.\ m - \acute{x}\ \sin.\ m.},\quad n = \frac{\acute{x}}{\cos.\ m - \acute{n} .\ \sin m}$$ ergiebt.

Da auch der Bogen $P\pi = e$ bekannt ist; so ist ferner $SF : FP = x : y = 1 : \cot.\ e$: Also $\acute{x} : \mu, \cos.\ m = 1 : \cot.\ e$; oder $\acute{x} : \acute{y} = \cos.\ m.\ \cot.\ e$. Setzt man demnach $\acute{x} = \cos.\ m$; so wird $\acute{y} = \cot\ e$, und also die Lage der Axe PC auf der Tafel bestimmt. Setzt man die Projektion des Bogens $P\pi$, $= e'$; so ist $\acute{x} : \acute{y}\ 1 : \cot.\ e' = \cos.\ m : \cot.\ e$; folglich $\cot.\ e' = \frac{\cot.\ e}{\cos.\ m.}$, oder $\tang.\ e' = \frac{\cos.\ m}{\cot.\ e.}$. Da nun (§. 11.) die Projektion der halben Axe PS, $= \tang.\ (45 - \frac{1}{2} e)$; so ist die Grösse und die Lage der projicirten Axe des Aequators auf der Tafel bestimmt.

§. 28.

Der Bogen, welcher den Winkel mißt, ist allemal der Länge der Sonne gleich, wie man es an einer künstlichen Erdkugel selbst leicht gewahr werden kann, wenn man derselben nur die Lage zu geben weiß, welche obige Aufgabe voraussetzt.

§. 29.

Die Gründe, welche bisher vorgetragen worden, sind zur Kenntniß der lambertischen Methode, Sonnenfinsternisse zu verzeichnen, allerdings

dings nöthig, wenn man auch die Ursache der praktischen Regeln einzusehen verlangt. Aber dennoch langen sie allein nicht ganz hin, wenn man nicht noch auf folgende mit Rücksicht nimmt, die ich noch kürzlich anführen werde.

§ 30.

1) Wenn die Sonne, und das Aug des Beobachters in Ansehung des Mondes scheinbar ruhen; fällt bey dem Monde die Parallaxe weg. 2) Wenn das Aug sammt der Projektion der Sonne in den Mittelpunkt der Tafel versetzt wird, werden die Ecliptik und die Mondsbahn dem Auge daselbst gerade Linien zu seyn scheinen, die gegeneinander unter einem gewissen Winkel sich neigen; gerade, so wie sie aus der Sonne gesehen würden, oder aus dem Nadir auf der Erdkugel, wenn beyde, Sonne und Mond, unendlich weit von dem Auge entfernet wären: daß also die Projektionen beyder Bahnen orthographisch seyn müssen, wenn das Aug im Mittelpunkte der Tafel liegt. 3) Wenn O S. L l zween gleiche Bögen zweener größter Kreise auf der Erdkugel sind; und die Erdpunkte der letztern von den Durchschnittspunkten der letztern beyderseits gleichweit abstehen; und in O das Aug, in S die Sonne, in L der Mond sich befinden; so wird L in l fassen, wenn der Ort des Auges mit dem der Sonne in S zusammenfällt. 4) Weil der Ort des Mondes orthographisch, jener der Sonne und des Auges aber stereographisch entworfen sind; muß man, um den Ort des Auges auf der Tafel in den Mittelpunkt derselben zu übertragen, mit der Tangente des halben Bogens OS den Sinus des Bogens L l = OS parallel ziehen, wo sodenn der äusserste Punkt des Sinus den Ort des Mondes bestimmen wird, in Ansehung des Auges, das in den Mittelpunkt der Tafel versetzet worden.

Von

Von der Weise für einen gegebenen Ort eine Sonnenfinsterniß zu verzeichnen.

§. 31.

1) Mit dem Halbmesser der Erde beschreibe man einen Kreis A π Q p, welcher die gemeinschaftliche Gränze der beleuchteten und unbeleuchteten halben Erdkugel anzeigt.

2) Man verzeichne darein, nach der sonst gewöhnlichen Art, die Ecliptik MN, und die respektive Mondsbahn KR, und trage auf der letztern die Stunden des Tages da auf, wo sich der Mond um selbe Zeit auf seiner Bahn befindet. Die so verzeichneten beyden Linien werden zugleich die Durchschnittslinien ihrer Ebenen mit der Tafel, und die orthographischen Projektionen derselben seyn. (§. 31.)

3) Aus C errichte man die Perpendikel C π; so wird π der Pol der Ecliptik seyn. (§. 23.)

4) Vermittelst der Formel $\text{tang. } é = \frac{\text{cos. m.}}{\text{cot. e.}}$ (§. 27.)

suche man den Winkel $\gamma C \pi$, welchen die Projektion der Axe des Aequators mit der Axe der Ecliptik einschließt.

5) Um den Parallelkreis des gegebenen Ortes zu entwerfen, mache man C γ = der Tangente der halben Summe aus der Aequatorshöhe, und dem Abstande der Sonne vom Pol, und C ζ = der Tangente der halben Differenz derselben Bögen (§23); und beschreibe

aus dem Mittelpunkte der $\zeta\gamma$ mit $\frac{1}{2}$ $\zeta\gamma$ einen Kreis, der der Parallelkreis des gegebenen Ortes seyn wird.

6) Die Tangente des halben Bogens, welcher den Abstand der Sonne vom Pol mißt, trage man auf der Linie Cγ aus C in P (§. 11); und die Tangente der Deklination der Sonne aus C in c (§. 21.) und beschreibe aus c mit CP den Kreisbogen APQ, welcher die Projektion des Mittagkreises der sechsten Stunde Morgens und Abends vorstellen wird.

7) Man verzeichne für den Theil des Tages, auf welchen die Sonnenfinsterniß fällt, z. B. für den Abend, so viele Meridiane als man nöthig hat, wenigstens von 15 zu 15 Graden (§. 22.) mit blinden Linien, und bemerke die Durchschnittspunkte in dem Parallelkreise $\gamma\beta\zeta$ so wird derselbe in die Abendstunden stereographisch getheilt seyn.

8) Für die vierte Stunde z. B. welche dem Anfange der Finsterniß vorgeht, ziehe man die Linie Cb, welche die Tangente des halben Bogens seyn wird, um welchen der gegebene Ort um 4 Uhr Abends von der Sonne entfernet ist; aus m aber ziehe man die Linie mn = dem Sinus desselben Bogens parallel mit Cb: so wird n der Ort des Mondes seyn, wenn das Aug aus b in C übertragen wird. (§. 30. 4).

9) Eben so verfahre man mit jeder andern Stunde; so wird nq die scheinbare Mondsbahn seyn, wie sie an dem gegebenen Orte gesehen wird, und in Stunden eingetheilt ist.

10) Aus C beschreibe man mit dem Halbmesser der Sonne den Kreis rt, welcher die Sonne vorstellt.

11) Mit der Summe der Halbmesser der Sonne und des Mondes durchschneide man die scheinbare Mondsbahn in I und F, und fälle aus C eine Perpendikel auf I F, so erhält man den Anfang, das Mittel, und das Ende der Finsterniß.

§. 32.

Diese Vorschrift gilt für jeden Fall; nur muß man C c aufwärts tragen, wenn die Deklination der Sonne südlich ist. Die Ursache ergiebt sich aus §. 1, wo man sich die 8. Fig. verkehrt vorstellen muß.

Verbesserung.

§. 21.

Wird der Halbmesser P' f = M f kürzer also gefunden. Es sey F. 7. M C der Halbmesser des Kreises p M P m auf r i senkrecht gezogen worden; so wird, wenn H i P = ψ, die Projektion desselben $= \frac{1}{\text{cos.}\psi}$ (§. 9.) = P' f (F. 8.) Nun ist in dem bey H rechtwinkelichten Dreyecke H i P, wenn H P = π, H P i = ϕ gesetzt wird, cos. ψ = cos. π. sin ϕ, und also P' f

$$= \frac{1}{\text{cos}\,\psi} = \frac{1}{\text{cos.}\pi\,\text{sin}\,\phi} = \text{sec.}\,\pi.\ \text{cos.}\,\phi.$$

Tab. I Dätzl

Fig. 1

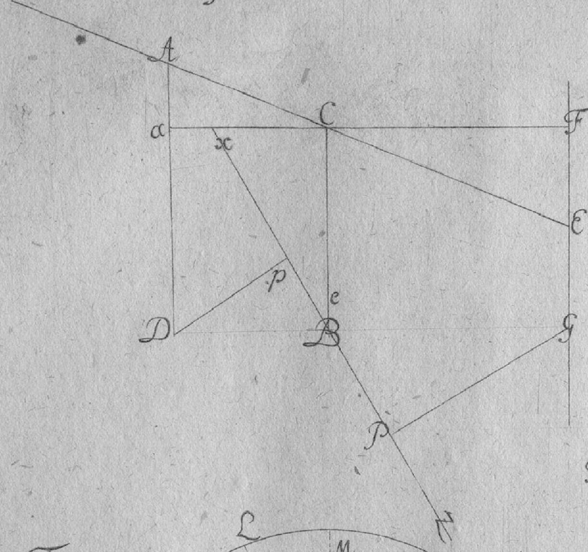

Fig. 2

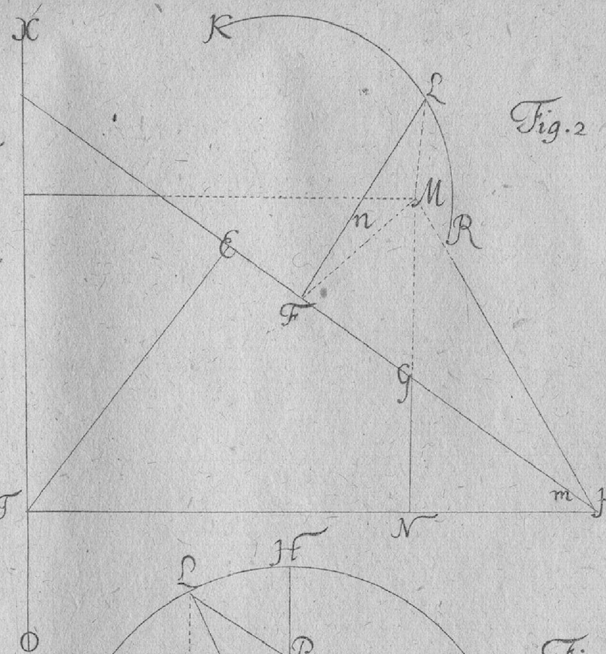

Fig. 3

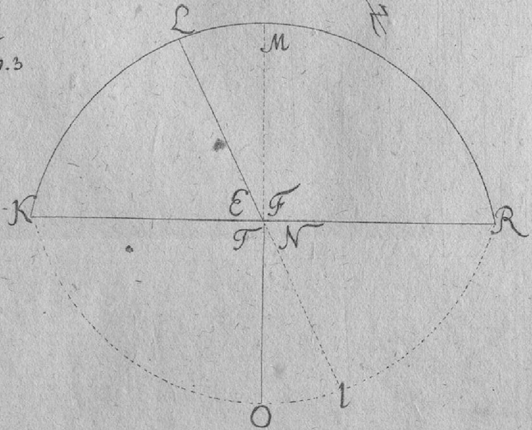

Fig. 4

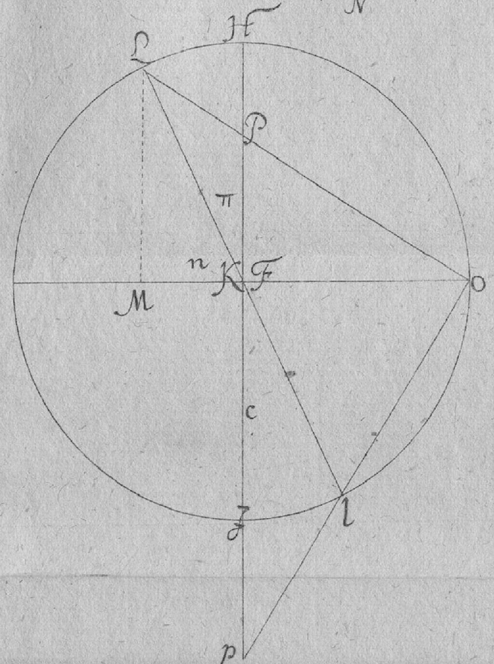

Fig. 5

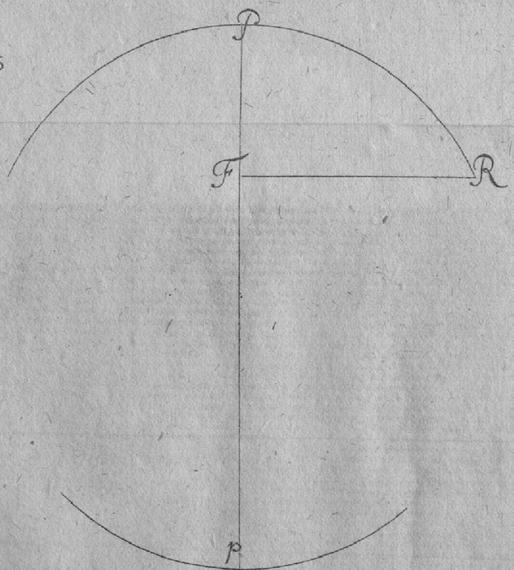

Fig. 6

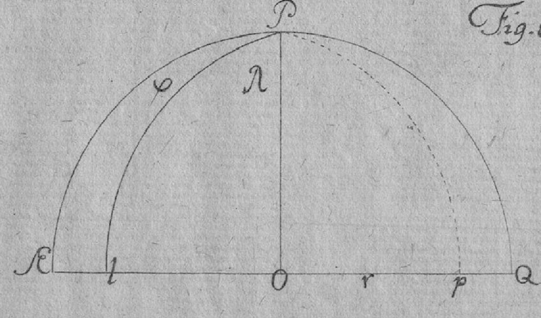

Fig. 7

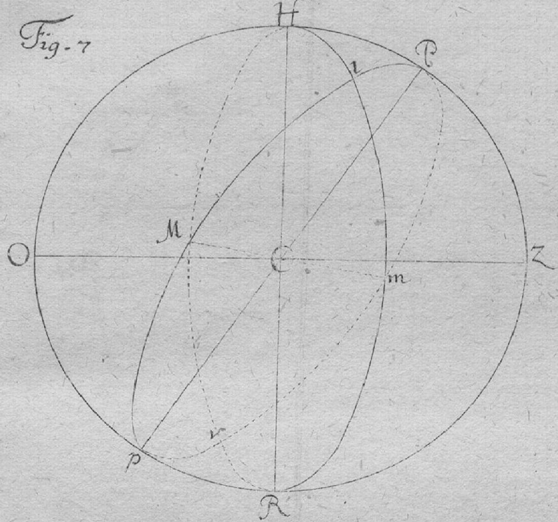

Fig. 8

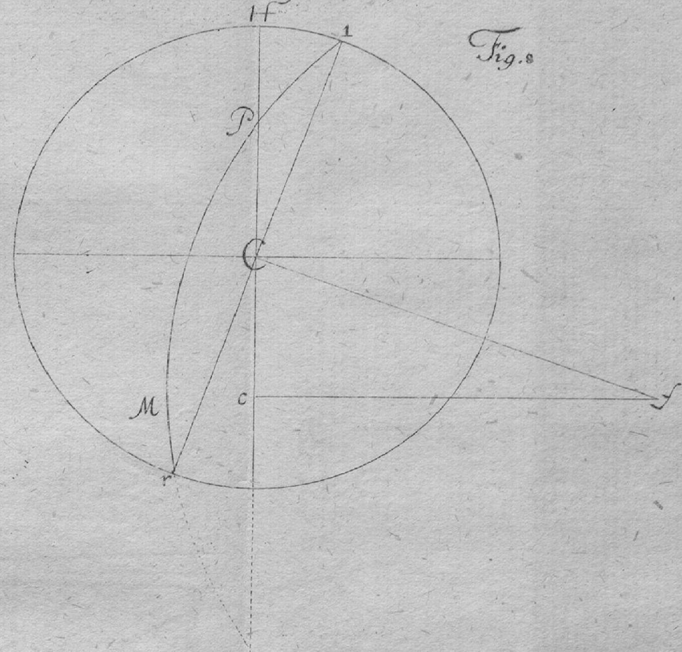

Fig. 9

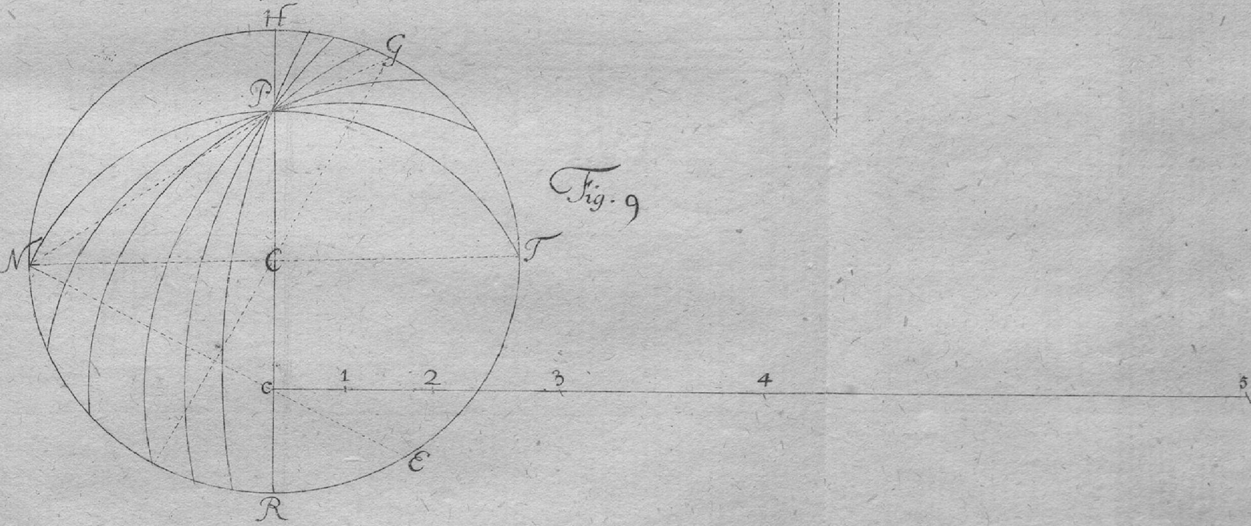

Fig. 10.

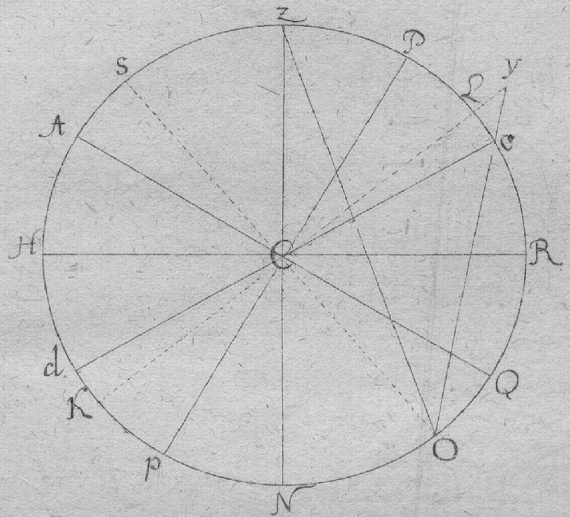

Fig. 11

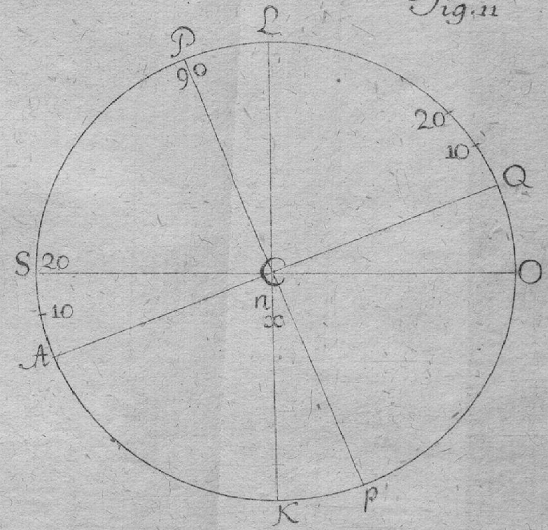

Fig. 12.

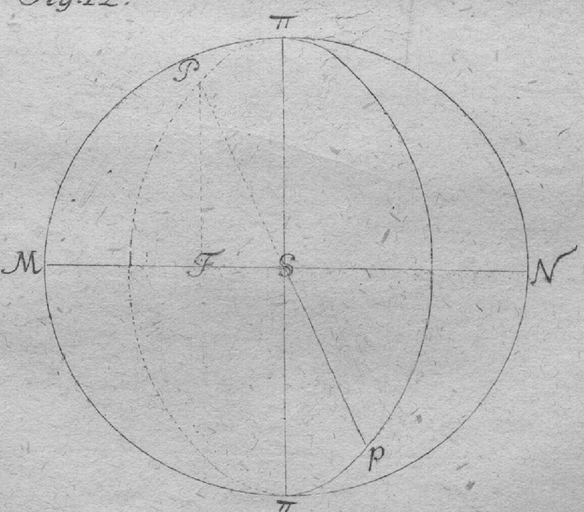

Fig. 13.

Tab. IV. Dätzl

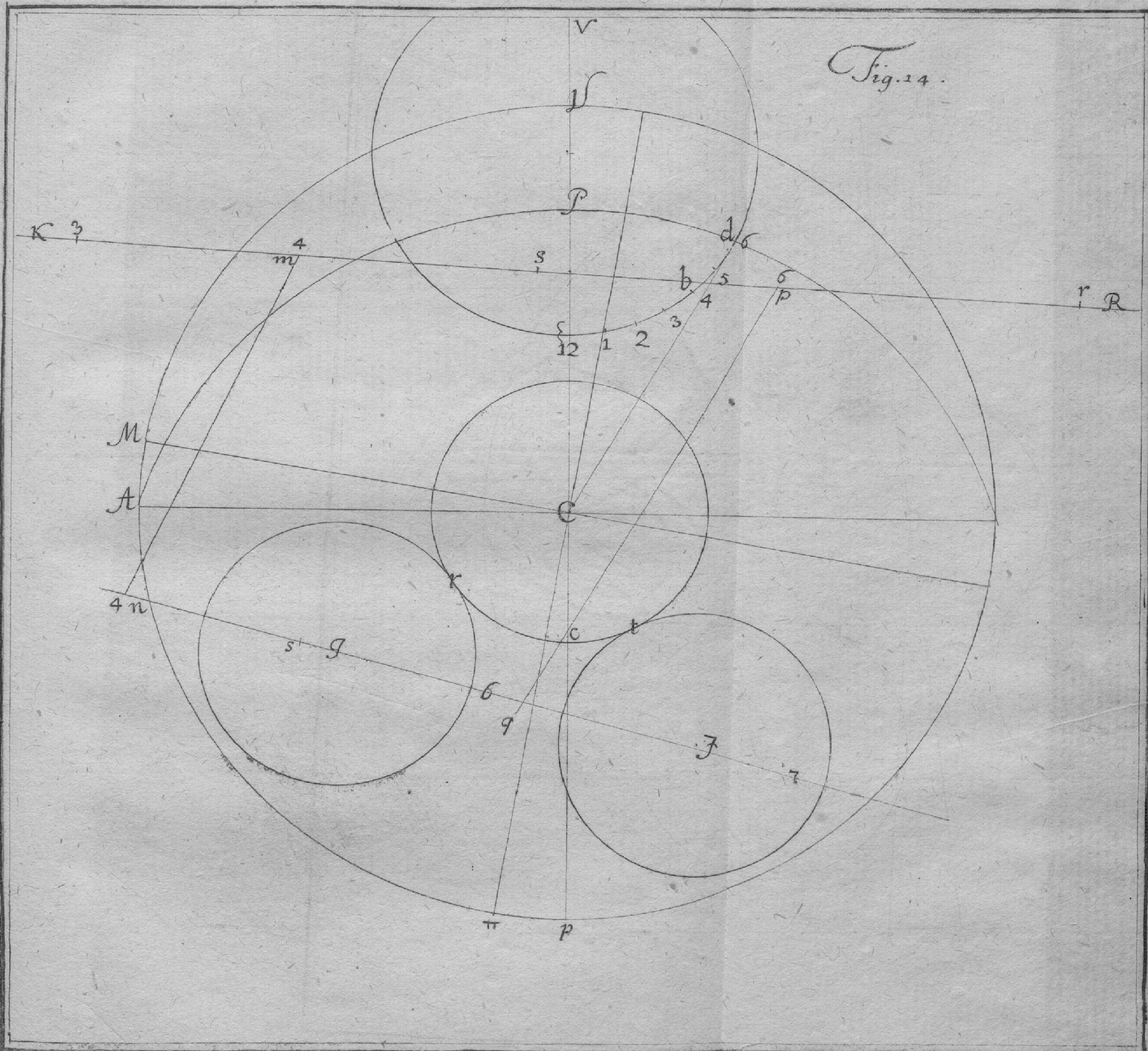

Fig. 14.