

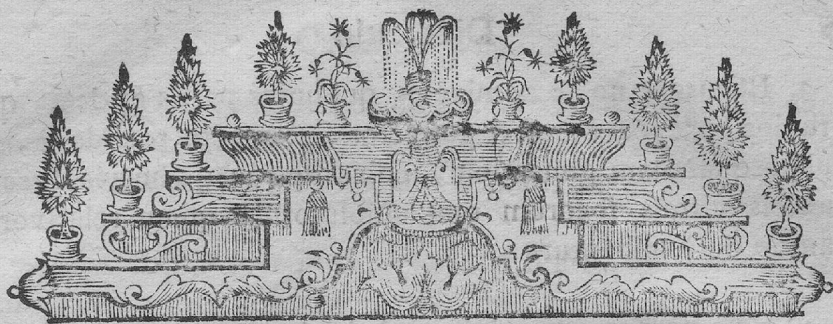
DISSERTATIO
CATADIOPTICA ELABORATA

PER

JOANNEM BAPTISTAM DE LASARRE,
HISTORiarum ET GEOGRAPHIAE PROFESSOREM, ELECTORALIS SCIEN-
TIARUM ACADEMIAE BOICAE MEMBRUM ORDINARIUM.

DISSERTATIO
CATADICTORIA ET ELABORATA

JOANNIS BAPTISTAE KAPPA
RECTORIS ET GEOGRAPHICAE PROFESSORIS
PARNASSI ACADEMIAE BOEOTICAE



DE CATADIOPTRICA SPHAERICA.

I.



Quæ ad nostra usque tempora de Catadioptrica sphaerica dicta sunt & scripta, ad solas luminis radiorum proprietates pertinent, qui radii, in specula sphaerica cadentes, in suis superficiebus absque refractione reflectuntur: eorundem radiorum proprietates, qui, in lenticulas vitreas sphaericas cadentes, per ipsas transeunt, & transeundo refringuntur, quin reflectantur, hæ sunt Dioptricæ sphaericæ objectum.

2. Hi iidemque radii, in lenticulas vitreas sphaericas ex una parte stanno obductas cadentes, si considerentur, hos radios dico refrangi simul & reflecti; unde horum speculorum sphaericorum vitreorum proprietates ut accuratius dignoscantur, horum radiorum, in hæc specula cadentium, reflexionis simul & refractionis effectus considerandi sunt.

D

3. Huc-

3. Hucusque nosco neminem, qui hujus partis opticae, quoad radios reflexos simul & refractos, elementa tradiderit, aut regulam quamdam generalem, cujus ope in quibusvis speculis sphaericis vitreis focorum tam absolutorum quam relativorum distantiae determinentur.

4. Haec pars tamen minime despicienda videtur. 1^o enim speculorum sphaericorum vitreorum numerus major est, quam numerus speculorum lucem reflectentium, aut lenticularum lucem tantum refringentium. Numerus speculorum simpliciter reflectentium si multiplicetur per numerum lenticularum lucem tantum refringentium, productum tot speculorum vitreorum species diversas administrabit.

5. Horum speculorum proprietates non minus mirabiles sunt proprietatibus lenticularum vitrearum, speculisque sphaericis ex metallo: plures ipsis solis propriae sunt, nec caeteris conveniunt: ipsorum usus extensior est speculis metallicis, suntque ad caput omnium; si quoad quasdam partes considerentur, perfectiones & utilitates continent, quae in speculis metallicis difficile invenirentur. Deinde majorem luminis quantitatem reflectunt, ac proinde, caeteris utrinque paribus, majorem vim comburendi continent.

6. Aliunde ad specula metallica perfecte elaboranda quacunque methodo quis utatur, specula vitrea ad perfectionem facilius deducuntur; specula autem metallica etiam perfectissima non absque maxima sollicitudine conservantur, aëruginem contrahunt, nitorque ipsorum facile hebetatur; hebetata semel aut aërugine exesa perfecte laevigari amplius non possunt, quin de primævo

nitore multum perdant; specula autem vitrea facile mundantur & conservantur; immo novo stanno obduci & lævigari possunt, quin de prima perfectione aliquid deperdant.

7. Quapropter hac in dissertatione horum speculorum vitreorum sphaericorum præcipuas proprietates detegere satagam.

8. Scientiam, hæc specula tractantem, *Catadioptricam* dico & merito: scientia lucis tantum reflexæ dicitur *Catoptrica*, lucis autem refractæ *Dioptrica*; scientia ergo, cujus objectum est eadem lux reflexa simul & refracta, merito *catadioptrica* vocatur. Sequentibus in demonstrationibus suppono notitiam elementorum *Dioptricæ* simul & *Catoptricæ*; unde

PRINCIPIA.

9. 1°. Angulus incidentiæ angulo reflexionis semper æqualis est.

10. 2°. Lucis radio ex aere per vitrum transeunte, sinus anguli incidentiæ se habet ad angulum refractionis uti 3 ad 2. similis autem radius si per vitrum aerem petat, uti 2 ad 3.

11. 3°. Radii Paralleli, in Speculum sphaericum cadentes, post reflectionem vel in uno puncto colliguntur, aut versus unicum idemque punctum diriguntur.

12. 4°. Radii paralleli, in superficiem sphaericam vitream cadentes, post refractionem vel in unico puncto concurrunt vel versus idem punctum diriguntur.

12. 5°. Hoc punctum, in quo post reflexionem aut refractionem radii paralleli concurrunt aut diriguntur, dicitur focus radiorum parallelorum, sive focus absolutus, aut simpliciter *focus*.

14. 6°. Radii, in superficiem speculi sphaerici vel in superficiem sphaericam refragentem cadentes, si proveniant ab unico axeos puncto, aut si versus unicum idemque punctum dirigantur; post reflexionem aut refractionem in unico puncto se colligunt, aut versus idem punctum diriguntur.

15. 7°. Hæc axeos puncta, a quibus radii incipiunt vel versus quæ diriguntur, *foci respectivi*, aut foci radiorum obliquorum vocantur.

16. 8°. Radii paralleli si in speculum sphaericum cadant, ipsorum collectionis punctum sive focus post reflexionem distat ab hujus speculi superficie pro quarta parte diametri ejus sphaeræ, cujus pars est.

17. 9°. Radii paralleli si ex vitro in aërem per superficiem sphaericam concavam aut convexam transeunt, ipsorum focus distabit a centro speculi pro tribus semidiamentris sphaeræ, cujus pars est.

18. 10°. Hoc in casu superficies si sit convexa, focus erit ultra speculum vitreum; sin concava, focus erit intra speculi crassitiem aut versus eandem partem, a qua radii proveniunt.

19. 11°. In utroque hoc casu focus radiorum parallelorum distabit a superficie concava aut convexa pro diametro concavitate aut convexitatis speculi.

20. 12°. Radii paralleli si ex aëre per superficiem sphaericam concavam aut convexam speculum vitreum transeunt, focus ab hac superficie distabit pro tribus semidiametris concavatis aut convexitatis.

21. 13°. Hoc in casu, superficies si sit concava, focus erit ultra vitrum, si autem sit convexa, focus erit in ipso vitro, id est, versus eandem partem, per quam radii ingrediuntur.

22. His principiis innituntur omnia, quæ de speculorum vitreorum proprietatibus dicturi sumus.

DEFINITIONES.

23. 1°. In speculis vitreis duæ superficies considerandæ sunt, una stanno obducta, quæ lucem reflectit; altera non obducta, per quam radii libere transeunt.

24. 2°. Superficiem stanno obductam dico superficiem reflectentem, superficiem autem refringentem voco eam, quæ non obducta radiis luminaribus liberum transitum permittit.

25. 3°. Diametrum, semidiametrum, aut centrum superficiæ reflectentis aut refringentis dico esse diametrum, semidiametrum aut centrum sphaeræ, cujus pars est.

26. 4°. Speculi vitrei superficiem refringentem indifferenter dicturus sum superficiem primam aut superficiem refringentem.

27. 5°. Pariter per speculorum superficiem reflectentem intelligo secundam aut reflectentem superficiem.

28. 6°. Lenticulæ superficies convexa si sit stanno obducta, hanc voco superficiem concavam; hæc enim relative ad radios, in ipsam cadentes, fit vere concava.

29. 7°. Similiter superficies concava si sit stanno obducta, hanc voco superficiem convexam.

30. 8°. Axis speculi sphaerici est linea, quæ per bina superficieum centra transit, vel linea, binis his superficiebus perpendicularis.

31. 9°. Lenticula vitrea, cujuscunque speciei fit, cum in qualibet superficie stanno obduci possit, duas speculorum species diversas administrat.

32. 10°. Pro majori claritate, & vitanda confusione notandum est, quod lineæ duplicatæ uti H M N designent superficiem reflectentem; lineæ autem simplices H S N superficiem refringentem. Fig. 2.

33. 11°. Spatium autem duas inter has lineas per punctula designatum indicat speculi crassitiem.

34. 12°. Ad designandos luminis radios utor lineis nigris aut tantum punctuatis; per nigras designantur radii veri, id est, via, quam radii vere tenent, per lineas vero punctuatas designo prolongationem radiorum, id est, viam, quam tenerent radii, si per superficiem reflectentem non impedirentur, aut per superficiem refringentem avia recta non deturbarentur. His prænotatis.

PRO-

PROPOSITIO I.

LEMMA.

35. **I**n triangulo, duo anguli si sint valde acuti, Summa duorum laterum, angulum obtusum formantium, æqualis est lateri, angulo obtuso opposito.

36. Similiter ex eodem puncto A duæ si ducantur lineæ AB & AC Fig. 1. ad circumferentiam concavam aut convexam circuli, ita ut forment angulum valde acutum BAC, & harum linearum una per centrum transeat, binæ hæ lineæ sunt sensibilibiter æquales; idem etiam dico, licet nulla ex his lineis per centrum transeat, dummodo a se invicem non multum distent; differentia enim in his casibus tam modica est, ut nulla æstimari possit.

37. In pluribus Dioptricæ & Catoptricæ demonstrationibus hæc æqualitas supponitur. Æqualitas hæc integra est in angulis infinite parvis, in quibus lineæ infinite proximæ sunt; proinde demonstrationes, his principiis innixæ, uti vere geometricæ considerandæ sunt.

38. In Dioptrica sicut & in Catoptrica sæpius accidit, ut hæ lineæ, licet non infinite proximæ, uti æquales accipiantur, unaque alteri substituatur absque errore sensibili in omnibus proportionibus, in quibus his utimur, uti experientia constat.

PROPOSITIO II.

39. **I**n qualibet speculorum vitreorum sphaericorum axi datur punctum, cujus proprietas est, quod radii, ab hoc puncto in speculum cadentes, post reflexionem & refractionem
ad

ad hoc punctum revertantur, vel quod omnes radii, in speculum cadentes, si versus hoc punctum dirigantur, post reflexionem & refractionem in hoc speculo, versus idem punctum iterum dirigantur; ita ut in omnibus speculis vitreis detur casus, in quo radii post reflexionem & refractionem in speculo factas, per eandem lineam, qua venere, revertantur, radiusque incidens, radius refractus & reflexus sequantur directionem ejusdem lineæ in sensu contrario ante & post reflexionem refractionemque.

DEMONSTRATIO.

Sit radius incidens AS , (fig. 2. 3. 4. 5. 9. 10. 13.) qui cadens in superficiem refringentem HSN , per ipsam transit, ita ut post refractionem radius fractus SM sit superficiei reflectenti HMN perpendicularis. Evidens est, radium SM post reflexionem eidem superficiei adhuc esse perpendicularem, consequenter egredietur ex speculo per idem superficiei refringentis punctum S , per quod ingressus est; unde sequitur, quod post secundam refractionem, in hoc puncto factam, radius retrogrediendo sequetur eandem lineam SA , quam antea speculum ingrediendo sequebatur.

Evidens autem est, quod in omnibus speculis vitreis detur casus in quo radii incidentes, facta refractione, speculum vitreum per primam superficiem HSN ingrediendo, secundæ superficiei HMN sint perpendiculares; ergo in omnibus speculis vitreis datur casus, in quo radii incidentes, refracti & reflexi secundum eandem lineam tendunt, vel versus idem punctum diriguntur ante & post reflexionem & refractionem in superficibus factas. Q. E. D.

40. *Corollarium I.* (2. 3. 4. 13. fig.) Sequitur, quod in hoc casu, in quo radius fractus in occurſu primæ ſuperficiæ eſt perpendicularis ſecundæ, radii, ſi veniant ab axeos puncto I ante ſpeculum, poſt reflexionem & refractionem ad idem punctum I revertantur,

41. Si radii in ſpeculum convergentes cadant, dirigantur-que verſus axeos punctum I retro ſpeculum, poſt reflexionem & refractionem revertentur per eandem directionem lineæ AS, qua venere, eodemque modo ac ſi emanarent ab eodem puncto I.

42. Demum radii in ſpeculum cadentes, ſi ſint axi paralleli, poſt reflexionem & refractionem ex ſpeculo egredientes adhuc axi paralleli erunt; unde dici poteſt, punctum I a ſpeculo infinite diſtare. (Fig. 6. 8.)

43. *Corollarium II.* 7. fig. Eodem in casu ſuperficies reflectens HMN ſi ſit ſphærica, radius fractus SM prolongatus tranſibit per centrum ejusdem ſuperficiæ reflectentis; ſuperficies autem reflectens HMN ſi ſit plana, tunc radius fractus SM erit axi CI parallelus.

44. *Nota.* Quod de radiis in ſpecula cadentibus hic dico & in ſequentibus dicturus ſum, de radiis in puncta ab axi non multum diſtantia intelligi volo.

45. *Definitio.* Per centrum reflexionis intelligo hoc punctum I in axi, habens proprietatem jam demonſtratam; evidens enim eſt, quod in ſpeculis concavis ſimpliciter reflectentibus

tibus omnes radii post reflexionem ad idem centrum, a quo venere, revertantur; in convexis autem radii, qui in ipsa cadunt, cum sint convergentes versus centrum, post reflexionem redeunt divergentes, ac si ab eodem centro provenirent. Merito ergo centrum reflexionis dico hoc punctum, quod in speculis sphaericis vitreis hanc habet proprietatem, licet ipsius figurae centrum non sit: exceptis casibus, in quibus binæ superficies, reflectens nempe & refringens, sunt concentricæ.

PROPOSITIO III.

46. Dato qualicumque speculo sphaerico vitreo invenire centrum reflexionis.

SOLUTIO.

Centrum reflexionis invenietur hac analogia.

Uti distantia centri superficiei reflectentis ad quoddam punctum, quod a superficie refringente magis distat quam suum centrum, pro integro diametro sphaera, cujus hæc superficies portio est, ad hunc eundem diametrum: Ita distantia centri superficiei reflectentis ad superficiem refringentem.

Pro qualibet speculorum sphaericorum vitreorum specie figuram delineavi, ut singulis in casibus radiorum via clarius innotescat, utque pateat differentia ab uno ad alterum casum; pro omnibus his casibus sufficit demonstratio propositionis præcedentis.

PRÆ-

P R Æ P A R A T I O.

47. HSNM sit speculum vitreum, cujus axis sit IO, (2. 3. 4. 5. 9. 10. 13. fig.) SM sit radius superficiei reflectenti HMN perpendicularis, qui ex utraque parte infinite prolongatus hujus superficiei centrum transeat. Per punctum O, quatenus centrum superficiei refringentis HSN, ducatur recta OF rectæ CR parallela, hæc erit radius fractus protensus SM; recta OF designabit axim eorum radiorum, qui prodeuntes a parte interna a speculi S ei sunt paralleli.

Recta OF fiat æqualis tribus semidiametris superficiei refringentis HSN; punctum F designabit focum radiorum, qui a speculi vitrei parte interna prodeuntes, sunt paralleli lineæ OF (17); ergo radius MS, rectæ OF parallelus, egrediendo ex speculo per punctum S, habebit radium suum fractum SA, qui transit per punctum F, secaturque axim IO in puncto I, & hoc punctum ex præcedenti propositione erit reflexionis centrum.

Jam per punctum O quatenus centrum superficiei refringentis HSN ducatur recta OR, lineæ SA parallela, quæve producta secet radium CR in puncto R; unde evidenter fit parallelogrammum ROFS; consequenter OR erit = FS & SR = FO.

Ex puncto O & intervallo OF fiat arcus BF, & ex intervallo OR fiat arcus RP; unde sequitur, quod OB = OF, & OP = OR (36), radius autem MSA si supponatur axi IO valde proximus, recta CR erit = CP, SF = Be, CS = Ce, & SI = Ie; ergo absque errore sensibili quælibet ex his lineis alteri substitui potest.

DEMONSTRATUR.

48. Propter lineas parallelas CR & OF , SF & OR bina triangula CRO , & CSI sunt similia: unde habetur hæc proportio; $CR:RO::CS:SI$; jam si recta CP substituetur rectæ CR , & Be ponatur loco RO , Ce loco CS , & Ie loco SI , habebitur hæc altera proportio: $CP:Be::Ce:Ie$; sed recta SF æqualis est diametro superficiei refringentis HSN (19); ergo Be , RO & OP huic diametro etiam sunt æquales; ergo CP est distantia centri C superficiei reflectentis HMN ad punctum P , quod a superficie refringente HSN pro toto diametro OP magis distat, quam centrum suum O ; aliunde Ce est distantia a C , centro superficiei reflectentis HMN ad superficiem refringentem HSN ; denique Ie est distantia ab eadem hac superficie refringente ad punctum I , centrum reflexionis; ergo uti distantia centri superficiei reflectentis ad punctum quodlibet &c. Q. E. D.

49. *Corollarium I.* Neglecta vitri crassitie & pro nulla reputata (quod absque sensibili errore fieri potest, nisi superficies sint portiones minimarum sphaerarum, & inter se valde distantes) tertius proportionis terminus æqualis erit semidiametro superficiei reflectentis; unde habebitur hæc proportio.

Uti distantia ab centro superficiei reflectentis ad punctum, quod a superficie refringente magis distat, quam suum centrum pro toto diametro sphaeræ, cujus hæc superficies portio est, se habet ad eundem hunc diametrum superficiei refringentis; ita semidiameter superficiei reflectentis se habet ad distantiam a speculo ad centrum reflexionis.

50. *Corollarium II.* Speculum si sit ex utraque parte concavum aut convexum, primus proportionis terminus æqualis erit summæ ex semidiametro superficiei reflectentis & tribus semidiametris superficiei refringentis; proinde in hoc casu, neglecta vitri crassitie, erit hæc proportio:

Uti summa, ex semidiametro superficiei reflectentis & tribus semidiametris superficiei refringentis, se habet ad diametrum superficiei refringentis; ita semidiameter superficiei reflectentis se habet ad distantiam a speculo ad centrum reflexionis.

51. *Corollarium III.* In eodem casu concavitas & convexitas lenticulæ speculum componentis si sint æquales, id est, si utraque sit ejusdem diametri, tunc primus proportionis terminus æqualis erit quatuor semidiametris unius superficiei; & proinde habetur hæc proportio:

Uti duo diametri unius superficiei ad unum ex his diametris; ita unus semidiameter ad distantiam a speculo ad centrum reflexionis.

Seu quod idem est:

Uti 2. ad 1 ita semidiameter unius superficiei ad distantiam a speculo ad centrum reflexionis.

Unde in hoc casu centrum reflexionis distabit a speculo pro dimidietate semidiametri concavitatis aut convexitatis.

52. *Corollarium IV.* Specula si sint Menisci, id est convexo-concava, ex unâ parte stanno obducta; tunc, neglecta vitri crassitie, primus proportionis terminus erit æqualis differentie inter semidiametrum superficiei reflectentis, & tres semidiametros superficiei refringentis, terminusque tertius æqualis erit semidiametro superficiei reflectentis; unde sequitur hæc proportio:

Ut differentia inter semidiametrum superficiei reflectentis & tres semidiametros superficiei refringentis ad diametrum superficiei refringentis; ita semidiameter superficiei reflectentis ad distantiam a speculo ad centrum reflexionis.

53. *Corollarium V.* Hoc in casu binæ superficies si sint concentricæ, tunc centrum reflexionis coincidat cum binarum superficierum centro communi; unde sequitur, quod speculum vitreum, cujus binæ superficies sunt concentricæ, a speculo ex metallo nullatenus differat, aut ab alia quacumque materia lævigata, cujus concavitas aut convexitas æqualis est concavitati aut convexitati superficiei stanno obductæ.

54. *Corollarium VI.* In speculo menisco semidiameter superficiei reflectentis si sit æqualis tribus semidiametris superficiei refringentis, seu quod idem est, si centrum superficiei reflectentis pro tribus semidiametris superficiei refringentis ab hac superficie distet; tunc radii, in speculum cadentes, cum axi sint paralleli, post reflexionem e speculo egredientes eidem axi etiam paralleli erunt.

DEMONSTRATUR.

55. Radii, axi paralleli, per superficiem refringentem in speculum cadentes, ita se refringunt, ut ipsorum refractionis focus sit præcise in centro superficiæ reflectentis (20); hoc centrum ergo supponatur a superficie refringente præcise pro tribus semidiametris distare; tunc radii, axi paralleli, peracta refractione dirigentur ad centrum superficiæ reflectentis; proindeque huic superficiæ perpendiculares erunt; ergo post reflexionem per eandem viam regredientur; proindeque axi manebunt paralleli. Q. E. D.

56. *Corollarium VII* Speculum si sit meniscus ex parte concava stanno obductus, superficiæ reflectentis semidiameter si sit minor tribus semidiametris superficiæ refringentis, aut centrum superficiæ reflectentis si sit superficiæ refringenti pro tribus hujus superficiæ semidiametris proximior; tunc radii, in speculum cadentes, si sint axi paralleli, post reflexionem æque ac refractionem erunt divergentes; eodem in casu superficiæ reflectentis semidiameter si sit major tribus semidiametris superficiæ refringentis; vel si centrum superficiæ reflectentis plus distet a superficie refringente pro tribus hujus superficiæ semidiametris, tunc radii, axi paralleli, in speculum cadentes post reflexionem & refractionem erunt convergentes.

57. *Corollarium VIII.* In menisco ex parte convexa stanno obducto semidiameter superficiæ reflectentis si sit tribus semidiametris superficiæ refringentis minor, tunc radii, axi paralleli, in hoc speculum cadentes, post reflexionem & refractionem

tionem erunt convergentes; eodem in casu si superficiei reflectentis semidiameter sit tribus superficiei refringentis semidiametris major, tunc radii, axi paralleli, in hoc speculum cadentes, post reflexionem & refractionem divergentes erunt.

58. *Corollarium IX.* In omnibus casibus, in quibus radii axi paralleli, in speculum vitreum cadentes, post reflexionem & refractionem sunt convergentes, centrum reflexionis erit ante speculum; hi vero radii axi paralleli si post reflexionem & refractionem divergentes sint, reflexionis centrum erit retro speculum; quod bene notandum est.

59. *Corollarium X.* Semidiameter superficiei refringentis relative ad semidiametrum superficiei reflectentis si sit infinite magnus, tunc superficies refringens erit portio sphaerae infinite magnae, & proinde erit superficies plana, ergo radius MS 12. Fig. superficiei reflectenti HMN perpendicularis, egrediendo per punctum S, refrangetur suam habens directionem versus punctum in axi I, ita ut distantia CS vel CE a centro ad superficiem planam refringentem HSN sit ad IS vel IE, quae est distantia a puncto I ad eandem superficiem, uti 3, ad 2. id est, quod in superficiei refringentis planae casu centrum reflexionis distabit ab hac superficie pro duabus tertiis distantiae ejusdem superficiei ad centrum superficiei reflectentis; neglectaque vitri crassitie, distantia centri reflexionis ad speculum aequalis erit duabus tertiis semidiametri superficiei reflectentis.

60. *Corollarium XI.* Semidiameter superficiei reflectentis si relative ad semidiametrum superficiei refringentis sit infinite magnus, tunc superficies reflectens erit portio sphaerae infinite magnae,

consequenter plana; ergo radii perpendiculares uti SM , egrediendo ex speculo per punctum S in superficie refringente, secabunt axim in puncto I , Fig. 7. 11. ita ut recta IE æqualis sit diametro superficiei refringentis (18); ergo superficies reflectens si sit plana, centrum reflexionis a speculo distabit pro toto diametro superficiei refringentis.

61. *Corollarium XII.* Binæ superficies, reflectens nempe & refringens, si sint portiones sphaeræ infinite magnæ, tunc binæ planæ erunt, centrumque reflexionis erit in distantia infinita: unde sequitur, quod in hoc casu radii, in speculum parallele cadentes, post reflexionem paralleli manebunt.

62. *Corollarium XIII.* Bina duarum superficierum centra in speculo vitreo possunt esse versus eandem superficiei partem, centrumque reflexionis versus partem oppositam; uti in fig. 4. & 10.

63. *Corollarium XIV.* Specula vitrea ad tres species revocari possunt; prima species eorum est, quorum reflexionis centrum est coram speculo: talia sunt Fig. 2. 1^o omnia ea, quæ ex lenticulis convexo-concavis conficiuntur; 2^o Fig. 7. 12. lenticulæ plano-convexæ, ex una parte stanno obductæ; 3^o Fig. 3. 4. 13. menisci secundi casus corollariorum VII & VIII.

64. Secunda species est eorum, quorum reflexionis centrum est retro speculum; uti sunt 1^o Fig. 5. omnes lenticulæ concavo-concavæ; 2^o Fig. 11. 12. lenticulæ plano-concavæ, ex una parte stanno obductæ; 3^o Fig. 9. 10. omnes menisci primi casus corollarii VII et secundi casus corollarii VIII.

65. Tertia denique species eorum est, quæ centro reflexionis proprie dicto carent, vel quorum centrum est in distantia infinita, uti sunt 1^o omnia specula, quorum binæ facies planæ sunt; 2^o omnes menisci, quorum in corollario VI. mentionem fecimus.

PROPOSITIO IV.

LEMMA.

66. **E**x puncto I, valde proximo axi TS in circulo HN Fig. 14. si ducantur tres lineæ IF, IG, IE ad tria puncta circumferentiæ F, G, E, axi etiam perproxima, arcusque FG & GE sint æquales; dico, hos angulos FIG & GIE, per tres has lineas in puncto I formatos, absque errore sensibili pro angulis æqualibus accipi posse.

DEMONSTRATUR.

Protendatur GI usque ad circumferentiæ punctum O, ducanturque rectæ FO & EO; evidens est, angulos FOG & GOE esse inter se æquales; etenim verticem suum habent in eodem circumferentiæ puncto O, arcusque FG & EG ex constructione sunt æquales. Aliunde rectæ IE & IF, cum sint axi ST valde proximæ, faciantque angulum valde parvum EIE, quatenus æquales accipi possunt (36); eadem ratione rectæ OF & OE quatenus æquales possunt accipi; unde sequitur, bina triangula FIO & EIO uti æqualia accipi posse; ergo in triangulo FIO bini anguli F & O, collective sumpti, æquales sunt duobus angulis E & O in triangulo EIO; sed angulus FIG æqualis est duobus angulis OFI & IOF simul sumptis, & angulus GIE æqualis est duobus angulis OEI, & IOE etiam simul sumptis; ergo anguli FIG & GIE inter se æquales sunt. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO V.

67. **R**adius incidens per reflexionis centrum non transiens si cadat in speculum vitreum, inque idem reflectentis superficiei punctum, uti radius per reflexionis centrum transiens, dico, angulum duos inter hos radios comprehensum æqualem esse angulo, comprehenso inter hunc radium reflexionis centrum transeuntem, & inter alterum radium, qui, post reflexionem in superficie reflectente, egreditur refringendo se per superficiem refringentem.

PRÆPARATIO.

Punctum **C** sit centrum reflexionis speculi **HN**, **GIM** sit radius incidens, per reflexionis centrum **C** transiens: Fig. 15. post refractionem in puncto **I** refringentis superficiei **HIN** hic radius cadet perpendiculariter in punctum **M** reflectentis superficiei **HMN**; proindeque post reflexionem in puncto **M**, regreditur per eandem viam versus punctum **C**.

Jam supponamus hunc radium **GIM** ab hac directione deviare, & tendere versus aliam **FPM**, ita ut cadens in punctum **P** superficiei refringentis **HIN**, post refractionem in hoc puncto peractam cadit nihilominus in idem punctum **M** superficiei reflectentis **HMN**.

Evidens est, quod radius refractus **PM** reflectetur in puncto **M**, secabitque refringentem superficiem **HIN** in puncto **R**, ita ut angulus **PMI** æqualis sit angulo **IMR**, (10), radiusque reflexus **MR**, egrediendo per hoc punctum **R**, refringetur, tendens versus aliam directionem **RE**.

His positis dico, quod, prolongatis tribus radiis, EP, GI ER, versus punctum n, hi radii facient angulos æquales $F n G^c$ $G n E$.

DEMONSTRATUR.

Radii PM, MI, MR considerentur, ac si procederent a puncto M, egredientes e speculo per refringentis superficiei HIN puncta P, I, R; hi radii si eandem viam prosequerentur, quin vi refractionis tendendo per rectas MPD, MIL, MRK declinant, evidens est, hos radios angulos æquales DML & LMK facturos esse: sed hi radii, egrediendo ex speculo per puncta P, I, R, declinant a rectis PD, IL, RK; ad determinandam viam, per quam, ab his lineis declinando, tendunt, sit O centrum superficiei refringentis HIN: per hoc centrum O ducatur recta OL, rectæ MD parallela, OK parallela rectæ ML, & OE parallela lineæ MK.

Ex eodem puncto O, tanquam centro, & intervallo, tribus superficiei refringentis HIN semidiametris æquali, fiat arcus DE, ita ut secet tres parallelas OL, OK, OE in punctis F, G, E; per puncta P & F ducatur recta PF, per puncta I & G ducatur recta IG, & per puncta R & E ducatur recta RE; evidens est (17) lineas PF, IG, & RE designare radios refractos radiorum MP, MI, & MR, viamque, per quam post eorum egressum ex speculo tendunt; insuper evidens est, quod angulus DML propter parallelas DM & LO sit æqualis angulo MLO, & propter parallelas ML & KO angulus MLO æqualis sit angulo LOK; ergo angulus DML æqualis est angulo LOK.

Simi-

Simili modo propter parallelas LM, & KO angulus LMK æqualis est angulo MKO, & proptet parallelas MK & OE angulus MKO æqualis est angulo KOE; ergo angulus LMK æqualis est angulo KOE; sed angulus DML æqualis est angulo KOE; ergo arcus FG & GE sunt æquales:

Sed punctum n supponebatur axi OD valde proximum, & puncta F, G, E ab eadem axi parum distant, ergo ex lem-mate præcedenti sequitur, angulos FnG & GnE esse æquales. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

68. **D**ato speculo sphærico vitreo qualicumque, invenire focum radiorum parallelorum.

SOLUTIO.

Hunc focum dico semper esse dimidiam distantiam centri reflexionis ad speculum; unde hæc distantia cum in propositione III pro omnibus casibus determinata sit, focus radiorum parallelorum etiam erit determinatus.

DEMONSTRATUR.

Vti in speculo simpliciter sphærico, lucem tantummodo reflectente, radius incidens & radius reflexus faciunt cum linea a centro ad punctum incidentiæ ducta angulos æquales; ita jam in præcedenti propositione demonstratum est, quod in omnibus speculis vitreis radius incidens & radius reflexus faciant cum ra-

dio, per reflexionis centrum & punctum incidentiæ transeunte, angulos æquales; ergo evidens est, quod uti per æqualitatem angulorum incidentiæ & reflexionis demonstratur, in speculis sphaericis simpliciter reflectentibus distantiam foci absoluti ad speculum esse dimidium semidiametri, id est, dimidietatem distantiae centri ad speculi superficiem, ita & per æqualitatem angulorum, quos in speculis vitreis formant radius incidens & radius reflexus cum radio per reflexionis centrum & punctum incidentiæ transeunte, demonstratur, quod dimidietas distantiae centri reflexionis ad speculum sphaericum vitreum sit distantia foci absoluti ad hoc speculum. Q. E. D.

69. *Corollarium I.* Speculum sphaericum vitreum quodcumque, sive plano-sphaericum, sive sphaerico-sphaericum considerari potest uti speculum sphaericum simpliciter reflectens, quod foret pars cujusdam sphaerae, cujus distantia a reflexionis centro ad speculum esset semidiameter, & radii a reflexionis centro provenientes, & in superficiem reflectentem in punctis axi per proximis cadentes considerari possunt uti semidiametri ejusdem sphaerae.

70. *Corollarium II.* Evidens ergo est, quod omne, quod in Catoptrica sphaerica de speculis sphaericis simpliciter reflectentibus ratione focorum tam absolutorum quam relativorum radiorum in puncta axi valde proxima cadentium demonstratur, etiam speculis sphaericis vitreis applicetur, hæc si considerentur uti unicum superficiem sphaericam reflectentem habentia, cujus superficiei semidiameter esset distantia centri reflexionis ad speculum: proinde in proportionibus ordinariis Catoptricæ sphaericæ pro resolutione problematum speculorum sphaericorum simpliciter-

pliciter reflectentium, si loco semidiametri ponatur distantia centri reflexionis ad speculum vitreum, habebitur solutio eorundem problematum pro his speculis.

71. *Corollarium III.* Specula vitrea primæ supradictæ speciei (63) æquivalent speculis sphæricis ex metallo habentque focum absolutum eorum speculo.

72. Specula secundæ speciei (64) æquivalent speculis sphæricis convexis ex metallo, habentque focum suum imaginarium retro speculum.

73. Denique specula tertiæ speciei (65) licet sphærica, considerari possunt ut specula simpliciter plana.

74. *Corollarium IV.* Dantur specula plene concava, quorum superficies refringens sicut & reflectens concava est, hæc easdem habent proprietates eosdemque effectus, ac specula metallica convexa uti Fig. 10.

75. Dantur & alia totaliter convexa, quorum superficies reflectens & refringens convexa est, easdem proprietates eosdemque effectus habent ac specula ex metallo concava. Fig. 4.

76. Dantur denique specula, quæ cum sint concava aut convexa, plures speculorum planorum proprietates habent, uti Fig. 6. 8.

77. *Corollarium V.* In speculis vitreis plano - sphæricis, quorum superficies reflectens plana est, focus absolutus distat a
super-

superficie sphaerica pro semidiametro sphaerae, cujus pars est; hic focus est ante speculum, si superficies sit sphaerica, Fig. 7. imaginarius autem est & retro speculum, si superficies sphaerica sit concava, Fig. 2.

78. *Corollarium VI.* In speculis vitreis plano-sphaericis, quorum superficies reflectens est sphaerica, focus absolutus distat a speculo pro sexta parte diametri; hic focus realis est & coram speculo, si superficies reflectens sit concava Fig. 12. imaginarius autem & retro speculum, si superficies reflectens sit convexa.

79. *Corollarium VII.* Duobus ex his corollariis sequitur, quod ex duobus speculis vitreis plano-sphaericis similibus, quorum sphaericitas eadem est, unum si sit ex parte superficiei planae & alterum ex parte superficiei sphaericae stanno obductum, primum speculum focum suum absolutum habebit in distantia triplici speculi secundi.

80. *Corollarium VIII.* In speculis vitreis sphaericis, ex lenticulis concavo-concavis aut convexo-convexis in una superficierum stanno obductis, compositis, si ipsorum concavitas aut convexitas pertinent ad sphaeras aequales, tunc focus ipsorum absolutus distat a speculo pro octava parte diametri; hic focus est realis & coram speculo, si lenticula sit sphaerico-sphaerica Fig. 2. imaginarius autem & retro speculum, si lenticula sit concavo-concava. Fig. 5.

81. *Corollarium IX.* Specula vitrea si sint menisci, quorum superficies sunt concentricae, focus ipsorum erit in distantia pro quarta parte diametri, ac si solam haberent superficiem reflectentem.

PRO-

PROPOSITIO VII.

82. **S**peculum vitreum si sit meniscus, cujus una superficies sit stanno obducta, cujusque superficiei reflectentis semidiameter sit sexies major semidiametro superficiei refringentis, neglecta vitri crassitie, focus radiorum axi parallelorum erit in puncto distante a speculo pro toto diametro superficiei refringentis.

DEMONSTRATUR.

Radii, axi paralleli uti AS , cadentes in superficiem refringentem HeN , (Fig. 16. 17.) post refractionem in occurfu factam, dirigentur versus punctum axeos C distans ab hac superficie pro tribus semidiametris Oe (20): ita ut Ce æquale sit tribus semidiametris Oe ; ergo radius refractus SM radii AS cadet in superficiem reflectentem HDN , si dirigatur versus axeos punctum in concavitate hujus superficiei HDN , & ab hac distans pro medietate sui semidiametri; hoc enim evidens est, quod, si lenticulæ crassities uti nulla aut insensibilis consideretur, recta Ce æqualis futura sit CD , consequenter CD æquale est tribus semidiametris superficiei refringentis HeN , quod est dimidium semidiametri DP superficiei reflectentis HDN , æquale sex semidiametris De superficiei refringentis HeN per suppositionem.

Sed in Catoptrices elementis demonstratur, quod radii, in superficiem sphericam reflectentem cadentes, si dirigantur versus punctum axeos ejusdem sphaeræ, cujus portio est, in distantia dimidii diametri, hi radii post reflexionem sunt axi paralleli; ergo radius Mn uti radius reflexus radii MS retrogrediendo

per superficiem refringentem HeN , axi parallelus est; sed radii, axi paralleli, e lenticula per superficiem sphaericam in aërem egredientes, diriguntur versus punctum, quod pro toto diametro sphaerae, cujus portio est, ab hac distat (19); ergo punctum F , in quo radius protensus In post egressum e speculo axim secat, ab eodem hoc speculo ita distat, ut DF æquale sit diametro superficiei refringentis HeN ; ergo speculum, si sit meniscus, &c. Q. E. D.

83. *Corollarium I.* Propositio hæc immediate deduci potuisset ex corollario quarto propositionis III. (52); semidiameter enim superficiei reflectentis cum sit sexduplus semidiametri superficiei refringentis, hujus corollarii proportio pro hoc casu in sequentem vertitur:

Uti tres superficiei refringentis semidiametri ad duos hos semidiametros: ita sex hi semidiametri ad distantiam a speculo ad centrum reflexionis.

Proinde hoc reflexionis centrum distat a speculo pro quatuor refringentis superficiei semidiametris; unde sequitur (68) quod horum radiorum parallelorum focus distat ab ipso pro toto hujus superficiei diametro. Q. E. D.

84. *Corollarium II.* Binæ superficies si sint concavae, focus erit imaginarius; realis autem erit, si binæ sint convexæ.

PROPOSITIO VIII.

85. **C**onstruere specula vitrea, quorum binæ superficies sint concavæ, in quibus radiorum axi parallelorum focus sit in secundæ superficiæ centro.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Sit C centrum superficiæ reflectentis QDT , Fig. 18. axis speculi DI , vitri crassities De , quæ minima live nulla supponitur; recta Ce æqualiter dividatur in puncto O ; ab hoc puncto, quasi centro & intervallo Oe fiat arcus HeN ; his peractis dico, quod arcus HeN designet speculi vitrei $HNQT$ superficiem refringentem, quodque hoc speculum habeat focum radiorum, axi parallelorum, in puncto C .

Fiat $CI = Ce$; ex puncto I ducatur recta IS , hæc designabit radium incidentem obliquum, cadentem in superficiem refringentem HeN in puncto S ; per punctum O , quatenus hujusmet superficiæ centrum, ducatur recta Rn , parallela IS ; per punctum C , superficiæ reflectentis centrum & per punctum S ducatur recta CS , ex utraque parte protensa, ita ut superficiem reflectentem QDT fecet in puncto M , lineamque Rn in puncto R .

His peractis demonstratur, quod recta Rn æqualis sit tribus semidiamentris Oe superficiæ refringentis HeN ; nam recta CS cum sit rectæ Ce valde proxima, ipsi æqualis est (36), proinde etiam æqualis rectæ CI ; ergo triangulum ICS est isocèles; sed propter rectas parallelas Rn & IS , triangulum RCO simile est triangulo ICS ; ergo pariter est isocèles; consequenter $CO = CR$; sed bini anguli O & R cum sint valde acuti, la-

tus OR æquale est duobus lateribus CO & CR simul sumptis (35); aliunde CO est semidiameter superficiei refringentis HeN ; ergo OR æquale est duobus hujus superficiei semidiamentris; sed ON est hujus superficiei semidiameter; ergo $RO + ON$, hoc est Rn æquale est tribus semidiamentris superficiei refringentis HeN .

His demonstratis sequitur, quod radius refractus radii incidentis IS indicetur per rectam MS , & protensus transeat per centrum superficiei reflectentis QDT ; ergo radius refractus MS huic superficiei perpendicularis est, & reflectens per eandem viam, qua venerat, regreditur; e vitro egreditur in puncto S , aximque secat in puncto I , a quo venerat; ergo punctum I est centrum reflexionis speculi $HNQT'$ (45). Q. E. D.

86. *Corollarium I.* Evidens est, quod vitri crassities De si supponatur infinite parva, CD & CI æquales erunt semidiametro superficiei reflectentis QDT , & Oe superficiei refringentis semidiameter æqualis erit medietati semidiametri CD superficiei reflectentis.

87. Unde sequitur, quod speculum vitreum, in quo semidiameter superficiei reflectentis geminata erit semidiametri superficiei refringentis, binis his superficiebus suppositis concavis, focum suum habet in centro superficiei reflectentis, & in extremitate diametri superficiei refringentis, suumque reflexionis centrum in extremitate diametri superficiei reflectentis.

88. *Corollarium II.* Hoc corollarium, hæcque demonstrata propositio ex corollario IV tertiæ propositionis (52) immediate de-

deduci poterat, vitri crassitie supposita nulla; semidiameter enim superficiei reflectentis cum sit geminata semidiametri superficiei refringentis, evidens est, quod in hoc casu differentia semidiametrum superficiei reflectentis inter & tres semidiametros superficiei refringentis, æqualis sit semidiametro superficiei refringentis; ergo proportio, in hoc corollario demonstrata, mutatur in sequentem.

Uti semidiameter superficiei refringentis ad diametrum ejusdem superficiei: ita semidiameter superficiei reflectentis ad distantiam a speculo ad centrum reflexionis. Ergo hoc centrum reflexionis est in extremitate diametri superficiei reflectentis; ac proinde focus radiorum, axi parallelorum, est in ejusdem superficiei centro (68). Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

89. **C**onstruere specula vitrea, quorum binæ superficies sint concavæ, & in quibus focus radiorum axi parallelorum sit in centro primæ superficiei.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

H e N sit superficies refringens, cujus centrum sit O: Fig. 19. axis speculi sit D I; O I sit æquale O e semidiametro superficiei refringentis H e N; O I dividatur in duas partes æquales in puncto C; ex hoc puncto quatenus centro fiat arcus Q D T, ita ut C D sit majus quam C e pro quantitate D e tam parva, ut neglegi possit; his peractis, dico, quod arcus Q D T designabit superficiem reflectentem, speculumque H N Q T habebit suum radiorum, axi parallelorum, focum in puncto O, centro superficiei refringentis.

B b 3

Ex

Ex puncto I ducatur IS, hæc recta indicabit radium incidentem, qui oblique cadet in superficiem refringentem H e N in puncto S. Per punctum O, ejusdem superficiæ centrum ducatur recta R n, parallela ad IS; fiat RO æqualis duobus semidiametris O e superficiæ refringentis H e N; per puncta R & S ducatur recta RS, protendaturque, usque dum secet superficiem reflectentem QDT in puncto M; evidens est, rectam MS representare radium refractum radii incidentis SI (17).

Jam demonstrandum est, quod recta MR, quæ nihil aliud est, quam radius protensus MS, secet axim DI in puncto C; recta enim IS cum sit rectæ I e valde proxima, ipsi æqualis est (36); consequenter etiam æqualis est rectæ OR. & propter parallelas IS & Ru angulus ISC æqualis est angulo ORC, & angulus SIC æqualis est angulo ROC; ergo bina triangula SCI, & RCO similia sunt & in omnibus æqualia: ergo IC = CO.

Ergo evidens est, quod radius refractus MS, si prolongetur, transeat per punctum C, quod est centrum superficiæ reflectentis QDT; proindeque huic superficiæ perpendicularis; reflexus autem regredietur per eandem lineam MS, & exeundo e speculo per punctum S secabit axim in eodem puncto I, a quo venerat; ergo punctum I est centrum reflexionis hujus speculi.

Demonstravimus autem (68), quod focus radiorum, axi parallelorum, in speculo vitreo sit in dimidia distantia centri reflexionis ad speculum; ergo punctum O, centrum superficiæ refringentis H e N, quod est in dimidia distantia I e, est focus radiorum hujus speculi axi parallelorum. Q. E. D.

90. *Corollarium I.* Evidens est, quod, si vitri crassities De supponatur infinite parva, DO æqualis sit Oe , quæ est semidiameter superficiei refringentis HeN , consequenter recta DC æqualis erit semidiametro + dimidio semidiametri ejusdem superficiei.

91. Unde sequitur, quod speculum vitreum, utrinque concavum, in quo semidiameter superficiei reflectentis æqualis sit semidiametro + semidiametri dimidio superficiei refringentis, habebit focum suum radiorum, axi parallelorum, in centro superficiei refringentis.

92. *Corollarium II.* Vitri crassitie supposita nulla, hoc corollarium sicut & propositio, ex qua deducitur, demonstrari possunt per corollarium III. propositionis (52); nam semidiameter superficiei reflectentis cum sit æqualis semidiametro & dimidio semidiametri superficiei refringentis, sequitur, quod differentia semidiametrum superficiei reflectentis inter & tria semidiametra superficiei refringentis æqualis sit semidiametro simul & dimidio semidiametri superficiei refringentis; unde sequitur, quod proportio in hoc corollario demonstrata vertatur in sequentem:

Uti semidiameter & dimidium semidiametri superficiei refringentis ad diametrum ejusdem superficiei; ita semidiameter superficiei reflectentis ad distantiam centri reflexionis ad speculum.

Hoc est, uti 3 ad 4, ita diameter superficiei reflectentis ad distantiam centri reflexionis ad speculum; sequitur ergo, quod in hoc casu distantia centri reflexionis ad speculum major sit semidiametro superficiei reflectentis pro tertia parte ejusdem

dem semidiametri; sed hujus semidiametri tertia pars æqualis est dimidio semidiametri superficiei refringentis; ergo distantia centri reflexionis ad speculum æqualis est diametro superficiei refringentis; ergo radiorum axi parallelorum focus est in hujus superficiei centro, siquidem hoc centrum est in medio hujus distantiae. Q. E. D.

93. *Nota.* Vitri crassitiem hucusque supposuimus nullam; hæc autem crassities tanta esse potest, ut pro vitandis erroribus negligi non possit. Quod hucusque demonstravimus, verum est in omnibus casibus, in quibus vitri crassities valde parva est, radiique cadunt in superficiei puncta, ab axi non multum distantia.

94. Pluribus in casibus, vitri crassities siue magna sit siue parva, licet hoc æque verum sit, sæpe tamen accidit, quod hoc, quod pro speculis vitreis minimæ crassitiei demonstratur, speculis majoris crassitiei convenire non possit.

95. Horum speculorum proprietates ergo examinandæ sunt, observata semper vitri crassitie, ex quo constructa sunt; hocque tentabo in sequentibus proportionibus, in quibus quasdam horum speculorum proprietates singulares demonstrandas mihi propono.

96. Observandum tamen est, quod, de radiis incidentibus loquendo, semper intelligo hos radios in puncta axi valde proxima cadentes; id autem nihil impedit, quominus hæc puncta sumantur in distantia sensibili, E. G. 15° , 20° aut plurius graduum, & hoc absque errore sensibili.

PRO-

PROPOSITIO X.

97. **D**ata speculi vitrei superficie refringente, invenire superficiem reflectentem requisitam, ut hujus speculi centrum reflexionis sit in dato axeos puncto.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

HSN sit data superficies refringens, IC axis speculi, (Fig. 2. 3. 4. 9. 10. 13. 20. 21. 22. 23. 24.) I punctum axeos datum, in quo reflexionis centrum esse debet; ex hoc puncto I ducatur recta IS, quæ superficiem refringentem secet in puncto S, quæ recta cum axi IC faciat angulum valde parvum S I e; per centrum O superficiei refringentis HSN ducatur recta OR, parallela ad IS, æqualis duobus hujus superficiei diametris O e; per puncta S & R ducatur recta SR, protendaturque, usque dum secet axim in puncto C.

Ex hoc puncto C, veluti centro, & intervallo qualicumque (dummodo in quibusdam circumstantiis sit majus, in aliis minus distantia Ce, a puncto C ad superficiem refringentem) fiat arcus HMN vel QMT; his peractis dico, quod hic arcus designet superficiem reflectentem desideratam. Fig. 22. 23. 24.

Evidens enim est, quod recta SC repræsentet radium refractum protensum radii incidentis IS (20); sed recta SC superficiei reflectenti HMN vel QMT perpendicularis est, transit enim per hujus superficiei centrum C; ergo tangens hanc superficiem in puncto M reflectitur, regrediturque per eandem lineam MS; ergo exeundo e vitro per punctum S, sequetur

C c

eam-

eamdem directionem SI, quam in speculum cadens habebat, aximque secabit in eodem puncto I, a quo venerat; ergo punctum I est centrum reflexionis hujus speculi, & superficies HMN vel QMT est superficies reflectens desiderata. Q. E. D.

98. *Corollarium I.* Datum punctum I si sit præcise in foco radiorum, qui, ex vitro per superficiem refringentem in aerem transeuntes, axi sunt paralleli, id est, paralleli distantiae duorum semidiametrorum ante superficiem refringentem datam, si sit convexa uti fig. 7. aut æquali distantiae retro superficiem datam, si sit concava uti fig. 11. hoc in casu superficies reflectens debet esse plana, vitrique crassities major aut minor esse potest.

99. *Corollarium II.* Datum punctum si sit retro speculum duobusque semidiametris superficiei refringenti proximius, superficies hæc si sit concava, dico, quod desiderata superficies reflectens concava aut convexa esse poterit.

Convexa erit, si ex puncto C fiat arcus HMN ipsam designans, Fig. 5. ita ut hic arcus sit inter punctum C & superficiem refringentem HSN; hoc in casu intervallum CM, quo fit hic arcus, debet esse minus distantia Ce a puncto C ad superficiem refringentem HSN, tuncque vitri crassities minor esse potest distantia Ce, nunquam autem ipsa major.

Superficies reflectens concava erit, si ex puncto C fiat arcus QMT, Fig. 24. ita ut hoc punctum C sit inter hunc arcum & superficiem refringentem datam HSN; hoc in casu intervallum CM, quo fit hic arcus, majus aut minus esse potest, vitrique

que crassities ad libitum, nunquam autem minor, quam distantia Ce a puncto C ad superficiem refringentem.

100. *Corollarium III.* Punctum datum I si sit duobus semidiamentris superficiem refringenti proximius & coram speculo, si superficies sit convexa, uti Fig. 2. tunc dico 1°. quod desiderata superficies reflectens debet esse concava, 2°. quod intervallum CM , quo sit arcus HMN , hanc superficiem repræsentans majus esse debet, quam distantia Ce , a puncto C ad superficiem refringentem datam, 3°. hoc intervallum pro nutu magnum esse potest, nunquam autem minus, quam distantia Ce , 4°. in hoc casu vitri crassities major aut minor esse potest.

101. *Corollarium IV.* Punctum I si ultra duos semidiamentros distet a superficie refringente coram speculo, hæc superficies si sit convexa uti in Figuris 4 & 22. dico, hanc superficiem convexam aut concavam esse posse.

Convexa erit, si ex puncto C fiat arcus HMN , ita ut sit inter punctum C & superficiem refringentem datam HSN ; hoc in casu intervallum CM , Fig. 4. quo hic arcus formatus est, pro libitu minus esse potest, nunquam autem majus, quam distantia Ce , a puncto C ad superficiem refringentem datam HSN , vitrique crassities pro libitu parva esse poterit, nunquam autem major, quam distantia Ce .

Superficies reflectens concava erit, si ex puncto C fiat arcus QMT , Fig. 22. ita ut hoc punctum C sit inter hunc arcum & superficiem refringentem datam HSN ; hoc in casu intervallum CM , quo arcus constructus est, pro libitu majus aut minus

esse poterit, vitrique crassities major, nunquam vero minor distantia Ce.

102. *Corollarium V.* In superficie refringente concava datum punctum I si sit retro speculum, duobusque hujus superficiei diametris remotius; Fig. 10. dico, superficiem reflectentem tunc necessario concavam esse; hoc in casu intervallum, quo hæc superficies formata erat, majus esse poterit, sed nunquam minus, quam distantia Ce, a puncto C ad superficiem refringentem datam HSM, vitrique crassities major aut minor pro libitu.

103. *Corollarium VI.* Datum punctum I si sit retro speculum, superficiesque data sit convexa, uti in Figuris 9 & 23. dico, superficiem reflectentem concavam aut convexam esse posse.

Concava erit, si ex puncto C fiat arcus HMN, Fig. 9. ita, ut sit inter punctum C & superficiem refringentem HSN; hoc in casu intervallum CM, quo constructus est, pro libitu minus, nunquam autem majus esse poterit, quam distantia Ce a puncto C ad superficiem refringentem datam HSN; vitrique crassities pro libitu parva esse poterit, at nunquam major distantia Ce.

Superficies reflectens concava erit, si ex puncto C fiat arcus QDT, Fig. 23. ita ut punctum C sit inter hunc arcum & superficiem refringentem datam HSN; in hoc casu intervallum CM, quo hic arcus formatus est, pro libitu majus aut minus esse potest, vitrique crassities pro libitu magna, nunquam autem minor distantia Ce.

104. *Corollarium VII.* Datum punctum I si sit coram speculo, Fig. 3. 13. superficies refringens data cum sit concava, dico, quod superficies reflectens debet esse concava; in hoc casu intervallum CM, quo hæc superficies formata est, pro libitu majus esse potest, nunquam autem minus, quam distantia Ce a puncto C ad superficiem refringentem datam HSN; vitri crassities major aut minor pro libitu esse poterit.

105. *Corollarium VIII.* Datum punctum I si sit præcise in centro superficiei refringentis datæ HSN, erit etiam centrum superficiei reflectentis.

106. Hoc in casu superficies refringens si sit concava, Fig. 21. superficies reflectens necessario concava erit: intervallum C, quo formata est, pro libitu majus esse potest, at nunquam minus, quam distantia Ce a puncto C ad superficiem refringentem datam HSN; vitri crassities ad libitum major aut minor esse potest.

107. Superficies refringens si sit convexa, dico, quod superficies reflectens convexa aut concava esse potest: convexa erit, si ex puncto C fiat arcus QMT, Fig. 20 ita ut sit inter superficiem refringentem datam HSN & punctum C. Intervallum CM, quo constructus est arcus QMT, pro libitu majus aut minus esse potest, nunquam vero majus distantia Ce a puncto C ad superficiem datam refringentem HSN; vitri crassities pro libitu minor esse potest, nunquam vero major semidiametro superficiei refringentis datæ HSN.

108. In eodem casu, superficies refringens si sit convexa, superficies reflectens concava erit, si fiat arcus QMT, Fig. 25.

ita ut punctum C sit inter superficiem refringentem datam HSN & hunc arcum : intervallum CM , quo hic arcus constructus est, pro libitu majus aut minus esse poterit; vitri crassities etiam pro libitu major esse potest, nunquam vero minor semidiametro superficiei refringentis datæ HSN .

109. *Corollarium IX.* Speculum vitreum, si sit sphaera integra, cujus dimidia superficies stanno obducta sit, centrum suum reflexionis habebit in centro ipsiusmet sphaeræ.

PROPOSITIO IX.

110. **D**ata speculi vitrei superficie refringente invenire superficiem reflectentem, ita ut hujus speculi radiorum axi parallelorum focus sit in puncto dato ejusdem axeos.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

In axi si accipiatur punctum, quod a data superficie refringente pro duplici hujus puncti mensura distet, evidens est, quod desiderata superficies reflectens per præcedentem proportionem invenietur, ita ut speculum suum reflexionis centrum in hoc puncto habeat, proindeque focum suum in dato puncto (68).

111. *Nota.* Hoc tantum verum est in casibus, in quibus, sicut jam in præcedentibus corollariis demonstravimus, vitri crassities pro libitu minor esse potest; cæteris enim in casibus, in quibus vitri crassities major esset, focus absolutus non amplius erit in dimidia distantia centri reflexionis ad speculum, sed in alio puncto, prout vitri crassities major aut minor fuerit.

112. Co-

112. *Corollarium.* Per ea, quæ hucusque in præcedentibus propositionibus demonstravimus, evidens est, quod, dato speculo sphærico ex metallo, inveniri possunt infinita specula vitrea, singula per concavitates aut convexitates suas inter se diversa, centrum suum reflexionis habentia in distantia superficiei refringentis, quæ æqualis est semidiametro sphæræ, cujus speculum portio est; ergo horum speculorum vitreorum focus distabit ab ipsorum superficie pro intervallo æquali distantiae a foco hujus speculi metallici dati ad suam superficiem.

113. Unde sequitur, quod, dato speculo metallico, cujus superficies sit determinatæ sphæræ portio, facillime invenientur infinita specula vitrea inter se diversa, quorum tamen idem effectus erit ac speculi metallici dati; ergo ope speculorum vitreorum idem effectus infinitis modis produci potest, qui per speculum metallicum semel tantum fieri poterit.

PROPOSITIO XII.

114. **S**peculum vitreum si sit sphæra integra, cujus dimidia superficies sit stanno obducta, radii axi paralleli superficiem stanno obductam penetrantes facta reflexione in occurso superficiei stanno obductæ axim secabunt, antequam ex sphæra egrediuntur, in quodam puncto, quod distat a superficie stanno obducta pro sexta parte diametri.

SOLUTIO.

HNRD sit sphæra vitrea, cujus dimidia superficies HDN (26. Fig.) sit stanno obducta; RF sit axis hujus speculi; AS sit radius huic axi parallelus, cadens in punctum S superficiei stanno non obductæ.

Evi-

Evidens est (17), quod radius refractus SM sequatur directionem lineæ rectæ, axim secantis in puncto F , ita ut recta RF æqualis sit tribus sphaeræ semidiametris.

E centro C ad punctum M , in quo radius refractus SM occurrit superficiei reflectenti, ducatur semidiameter CM .

Hic radius SM , reflectens in puncto M , formabit angulum CME , æqualem angulo CMS (9), radiusque reflectens ME axim secabit in puncto I ; per centrum C ducatur recta GK , parallela rectæ SM .

His præparatis demonstrandum est, quod distantia DI a puncto I ad punctum D æqualis sit sextæ parti diametri RD .

DEMONSTRATUR.

Diameter GK cum sit parallelus rectæ SM , accipi potest pro axi radiorum parallelorum, in superficiem reflectentem HDN cadentium; ergo radius SM , rectæ GK parallelus, facta reflexione in puncto M , diametrum secabit in puncto E , ita ut recta GE æqualis sit quartæ parti hujus diametri (36); unde sequitur, $GE = CE$; GE & GM autem cum sint valde proximæ, inter se etiam æquales erunt; ergo $CE = EM$; ergo quælibet harum rectarum æqualis est quartæ parti diametri sphaeræ.

Jam RF cum sit æqualis tribus ejusdem sphaeræ semidiametris, sequitur, quod DF æqualis sit semidiametro DC ; consequenter CM & MF , cum sint rectæ CF valde proximæ, inter se æquales sunt; ergo triangulum CMF est isocles, &

an-

anguli MCF & MFC sunt æquales; sed propter parallelas GK & SF angulus ECF æqualis est angulo MFC ; ergo etiam æqualis est angulo MCF ; ergo in triangulo CEM angulus ECM per rectam CI in duas partes æquales divisus est.

Ergo evidens est, quod duæ partes EI & IM lateris EM lateribus EC & CM sint proportionales, ita ut $EC : CM :: EI : IM$, & substituendo EM loco CE , quæ ipsi æqualis est, habebitur, $EM : CM :: EI : IM$; sed EM est dimidia pars rectæ CM ; ergo EI est etiam dimidia pars rectæ IM ; consequenter IM continet duas tertias rectæ ME vel æqualis est quartæ parti diametri, cui ME æqualis est; ergo æqualis est tertię parti semidiametri, consequenter sextæ parti totius diametri; sed ID cum sit rectæ IM valde proxima, ipsi æqualis est; ergo ID æqualis est sextæ parti totius diametri. Q. E. D.

PROPOSITIO XIII.

115. **I**n speculo vitreo centrum superficiiei reflectentis si sit in puncto, a superficie refringente pro tribus hujus superficiiei semidiametris distante, aliunde sit retro hanc superficiem refringentem, si sit convexa, vel coram speculo, si sit concava, dico, quod, quæcumque sit vitri crassities, radii axi paralleli in superficiem refringentem cadentes post reflexionem & refractionem in speculo etiam huic axi paralleli erunt.

DEMONSTRATUR.

Demonstratio, quam dedimus in corollario VI. propositionis III. (55) in qua vitri crassitiem suppoluimus valde parvam, lenticulamque esse meniscum, hujus propositionis veritatem

D d

etiam

etiam probat, licet vitri crassities sit valde ampla, & lenticula non sit meniscus, sed valde crassa, utrinque convexa; figura 6 & 8 demonstrant meniscos; figura autem 27 lenticulas utrinque convexas.

Evidens enim est, quod, licet semidiameter CM superficiei reflectentis major aut minor evadat pro libitu, proindeque lenticulæ crassities augeatur aut minuatur, radius AS , axi parallelus, refringendo se in puncto S , certe dirigetur versus punctum quoddam C , a superficie refringente pro tribus semidiametris distans (17), & hoc punctum C cum sit reflectentis superficiei centrum, sequitur, quod radius refractus SC vel SM huic superficiei perpendicularis erit, & revertetur per eandem perpendicularem, egredieturque per punctum S , axi adhuc parallelum, uti antea exierat. Q. E. D.

116. *Corollarium.* Speculum $HNPQ$ fig. 27 ex lenticula utrinque convexa, cujus superficies PQD sit stanno obducta, pertinet ad tertiam speculorum vitreorum, quorum mentionem fecimus in corollario 14^o tertiæ propositionis (65).

PROPOSITIO XIV.

117. *Speculi vitrei superficies refringens si sit convexa, distetque a superficie reflectente pro tribus suis semidiametris, dico, quod radii, axi paralleli, in hoc speculum cadentes facta reflexione & refractione in his superficiebus, egrediendo ex speculo eidem axi adhuc paralleli maneant, siue superficies reflectens sit plana, siue concava aut convexa.*

DE.

DEMONSTRATUR.

HNPQ fit speculum vitreum, cujus superficies refringens convexa fit HIN; F fit punctum in axi, distans a superficie HIN pro tribus suis semidiamentris. PQ fit superficies reflectens plana fig. 28, convexa fig. 29. aut concava 30, transiensque per punctum F. His positis

Evidens est 1°. quod AS si fit radius incidens in superficiem HIN, fig. 28. 29. 30. axique IF parallelus, radius suus refractus SF secabit hanc axim in puncto F (17); consequenter cadet in idem punctum superficiem reflectentis, in quo axis ipsum tangit; ergo ab hoc puncto F reflectetur per rectam FH, ita ut $\text{angulus } SFI = IFH$ (9); ergo radius FH egredietur per punctum H eadem inclinatione, qua radius AS, dum ingrediebatur; sed hic radius, ingrediendo per punctum S, erat axi parallelus; ergo egrediendo per punctum H eidem parallelus erit.

2°. Evidens est etiam, hoc pariter verum esse, superficies reflectens PFQ sive fit plana, sive convexa aut concava; reflexio enim semper fit in puncto F eodem modo, ac si spectaret ad planum perpendiculare rectæ FI. Q. E. D.

118. *Corollarium I.* Specula, de quibus in his ultimis propositionibus differuimus, licet etiam habeant proprietatem, radios axi parallelos in ipsa cadentes parallelos remittendi; inter hæc tamen & specula propositionis præcedentis differentia essentialis est, nimirum quia primi radii per eandem viam eandemque lineam, quam superficiem reflectentem ingredientibus percurrerant, regrediuntur; secundi autem per lineam oppositam,

tam, & versus axis partem oppositam percurrunt, sed eidem lineæ, quam ante reflexionem in secunda superficie percurrerant, similem.

119. *Corollarium II.* Radii, in superficiem refringentem convexam cadentes, si sint divergentes, non autem paralleli & ab unico puncto proveniant, vel si sint convergentes, diriganturque versus unicum punctum retro superficiem refringentem convexam, ita ut in hujus superficiei occurſu radii refracti axim ſequent in quodam puncto, in quo eadem axis tangit superficiem reflectentem, ſive hæc ſit plana, convexa, aut concava, dico, quod poſt reflexionem in hoc puncto factam egredientur per superficiem refringentem eadem obliquitate, quam ingrediendo habebant, aximque ſecabunt in eodem puncto, a quo procedebant, ſi divergentes ſint; vel dirigentur verſus idem punctum retro superficiem refringentem, verſus quod antea dirigerentur, ſi eſſent convergentes.

Hujus demonſtratio eadem eſt ac ea, quam dedimus pro caſibus radiorum axi parallelorum.

120. *Corollarium III.* Hoc in caſu corollarii præcedentis, radii in ſpeculum cadentes ſi ſupponantur divergentes, ſuperficies refringens neceſſario convexa erit, radiique a quodam axeos puncto, a ſuperficie refringente ultra hujus ſuperficiei diametrum integrum diſtante, provenire debent; ſi autem convergentes ſint, ſuperficies concava erit aut convexa.

121. *Corollarium IV.* In ſecunda propoſitione diximus, quod ſpeculi vitrei centrum reflexionis ſit quoddam punctum in
axi;

axi, cujus proprietas est, quod radii ab hoc puncto in speculum cadentes, post reflexionem & refractionem in his superficiebus factas, ad illud revertuntur, ceu illud punctum, versus quod radii post & ante reflexionem refractionemque diriguntur; hoc in sensu dici potest, quod specula vitrea in casibus duorum corollariorum præcedentum habeant duo reflexionis centra, inter se valde diversa.

Ast bene observandum est, quod in loco citato locuti sumus de radiis, qui speculum in & egrediendo non tantum versus unicum punctum diriguntur, sed eandem lineam tenent in contrario sensu.

Sed radii in hoc casu, licet versus unicum idemque punctum dirigantur tam in quam egrediendo speculum, egrediendo alteram, quam ingrediendo, viam tenent; unde per centrum reflexionis intelligi debet hoc punctum, versus quod radii diriguntur tam in quam egrediendo, eandem lineam in & egrediendo percurrentes.

PROPOSITIO XV.

122. Speculi vitrei densitas, cujus prima superficies convexa, secunda autem plana est, si sit sextæ partis diametri convexitatis, dico, quod radii, in hoc speculum cadentes axi-que paralleli, post refractionem in prima superficie factam, & reflexionem in occurso secundæ superficiæ, se colligent in puncto axeos, primam superficiem tangente.



DEMONSTRATUR.

HNPQ sit speculum vitreum, cujus superficies refringens HIN sit convexa, fig. 31. superficiesque reflectens PQ plana; vitri densitas DI sit æqualis sextæ parti diametri superficiæ refringentis HIN; AS sit radius axi IF parallelus. Evidens est, quod hic radius, refringendo se in puncto S, dirigetur versus axeos punctum F, ita ut IF æqualis sit tribus superficiæ refringentis HIN semidiametris (17).

Jam per punctum M superficiæ reflectentis planæ PQ, in quod cadit radius refractus SM, & per punctum I, in quo axis tangit superficiem refringentem HIN, ducatur linea IM; per idem punctum M ducatur recta EM, perpendicularis superficiæ reflectenti PQ, consequenter parallela rectæ IF; hoc peracto

Evidens est, quod propter parallelas IF & EM angulus DIM æqualis est angulo IME, angulusque DFM æqualis est angulo EMS; sed triangulum IMF isosceles est, nam DM perpendicularis est IF, & ID = DF, quælibet sextæ parti diametri superficiæ refringentis HIN æqualis; ergo IM = MF, & angulus DIM = angulo DFM; consequenter angulus IME etiam æqualis est angulo EMS. Evidens ergo est, quod MI est radius reflexus radii SM (9); ergo radius reflexus radii SM axim secat in puncto I, superficiem refringentem HIN tangente. Q. E. D.

123. *Corollarium.* Superficies reflectens PQ si esset convexa, vitri densitate eadem semper manente, radius reflexus MI secaret axim in majori distantia superficiæ reflectentis PQ quam DI;

D I; consequenter ipsam tantum secaret post egressum per superficiem refringentem H I N. Econtra superficies reflectens P Q si foret concava, radius reflexus M I fecaret axim in puncto a superficie reflectente P Q minus distante, quam D I; ergo ipsam secaret, antequam egrederetur ex lenticula per superficiem refringentem H I N.

Unde sequitur, quod in singulis speculis vitreis, in quibus superficies reflectens æque ac refringens convexæ sunt, radii, axi paralleli, post refractionem in occursum superficiem refringentis factam, & reflexionem per superficiem reflectentem productam, axim secant in puncto superficiem refringentem tangente; vitri densitas major esse debet pro sexta parte diametri superficiem refringentis.

Superficie refringente autem eadem manente, superficies reflectens si fiat concava, vitri densitas major esse debet sexta parte diametri superficiem refringentis, ut radii, axi paralleli, post refractionem in occursum primæ superficiem factam, & reflexionem in secunda productam, secant eandem axim in puncto superficiem refringentem tangente.

PROPOSITIO XVI.

124. **D**ata prima speculi vitrei superficie sphærica, invenire secundam superficiem sphæricam, ipsarumque distantiam inter se, ita ut speculum, quod terminant, colligat radios axi parallelos in axeos puncto primam superficiem tangente.

SO-

S O L U T I O.

HIN fit superficies refringens data, cujus axis fit FI; fig. 32. 33. 34. O fit centrum: FI fit æqualis tribus semidiamentris IO hujus superficiei, AS fit radius, axi parallelus, cadens in punctum S superficiei HIN; per hoc punctum S & per punctum F ducatur recta SF, ad libitum protensa; evidens est (17) quod radius fractus radii incidentis AS tendet secundum directionem SF. Ex puncto qualicumque M lineæ protensæ S ducatur ad axeos punctum I, tangens superficiem refringentem HIN, recta MI, quæ cum recta MS formabit angulum IMS; hic angulus IMS dividatur in duas partes æquales per rectam ME, protendaturque, usquedum secet axim FI in quodam puncto C; ex hoc puncto C, quatenus centro & intervallo CM fiat arcus PDQ; dico, quod CM fit semidiament radius superficiei reflectentis desideratæ, quod PDQ representet hanc superficiem, & DI fit lenticulæ densitas desiderata.

DEMONSTRATUR.

CM cum fit semidiament radius superficiei PDQ, ei etiam perpendicularis est; sed angulus EMI factus est æqualis angulo SME; ergo MI est radius reflexus radii SM, cadentis in superficiem PDQ; ergo superficies hæc una cum superficie HIN terminat speculum HNPDQ, colligens radios axi parallelos in puncto I superficiem refringentem tangente. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

125. **D**ata secunda speculi vitrei superficie spherica, invenire primam superficiem, distantiamque duas inter has superficies, ita ut speculum ab ipsis terminatum colligat radios axi parallelos in puncto primam superficiem tangente.

S.O.

S O L U T I O.

PDQ sit data superficies reflectens, C ipsius centrum, DI axis speculi; per centrum C ducatur semidiameter CM, protendaturque, ita ut cum axi faciat parvulum argulum MCD; evidens est, quod CM perpendicularis erit superficiei reflectenti PDQ.

Ex puncto M ducatur recta MS, faciens angulum SME, quæque protensa axim secet in puncto F. Ex eodem puncto M ducatur altera recta MI, ita ut faciat angulum $E M I = S M E$, aximque secet in puncto I.

FI dividatur in tres partes æquales, quarum una sit IO; ex puncto O, quatenus centro, & intervallo IO fiat arcus HIN, axim secans in puncto I, rectamque MS in puncto S.

His peractis dico, quod arcus HIN designabit superficiem refringentem desideratam; & DI erit densitas speculi vitrei desiderati HN PQ.

D E M O N S T R A T U R.

Per punctum S ducatur SA, parallela rectæ FI; hæc designabit radium axi parallelum cadentem in punctum S superficiei refringentis HIN; evidens est (17), quod radius refractus radii protensi SA transeat per punctum F, distans ab hac superficie pro tribus semidiametris IO; ergo radius refractus radii AS coincidat cum recta SM; unde sequitur, quod angulus SME cum sit æqualis angulo EMI, radius reflexus in

E e

pun-

puncto M coincidet cum recta MI; proindeque axim secabit in puncto I, superficiem refringentem H S N tangente; ergo speculum H N P Q est speculum desideratum. Q. E. D.

136. *Corollarium.* Duabus in præcedentibus propositionibus tres casus occurrere possunt 1° si binæ superficies desiderentur convexæ, 2° si binæ quærantur concavæ, 3° denique si prima superficies desideretur convexa & secunda concava.

In primo casu superficies refringens si data sit, punctum M in recta S F Fig. 34. sumi debet in majori distantia ab hac superficie, quam medietas rectæ FI; alias problema impossibile erit; quod per corollarium propositionis XV. evidens est (123).

In tertio casu punctum M sumi debet in minori distantia a superficie refringente data, quam medietas rectæ FI, quod per idem corollarium certum est.

In primo casu, superficies data si sit reflectens, recta M S fig. 34. axim secabit in puncto F, inter hanc superficiem datam P D Q & centrum suum C.

In tertio casu recta S M axim secabit in puncto F, ita ut superficies reflectens data P D Q sit inter centrum suum C & punctum F. (fig. 33).

In secundo casu superficies data si sit refringens, punctum F fig. 32. sumi potest in distantia majori aut minori ad arbitrium.

In eodem casu superficies data si sit reflectens, recta M S secabit axim in puncto F, ultra centrum C; si enim ipsum secaret inter centrum & superficiem, problema foret impossibile.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

127. **S**peculum vitreum, radios axi parallelos colligens in eodem puncto, in quo idem axis tangit primam superficiem, si constet ex duabus superficiebus concavis, fieri potest, ut duæ hæ superficies sint concentricæ

DEMONSTRATUR.

O sit centrum superficiæ refringentis concavæ HIN, fig. 35. OI semidiameter; IF sit æqualis tribus semidiametris OI; ex puncto F & per punctum S in superficie HIN ducatur recta SF, ad arbitrium protensa, faciensque cum axi parvulum angulum IFS; per puncta I & S ducatur corda IS.

Per centrum O ducatur recta OE, perpendicularis chordæ IS, & protendatur, usquedum secet rectam protensam FS in puncto M; per puncta M & I ducatur recta MI. Ex puncto O quatenus centro & intervallo OM fiat arcus PDQ; hic arcus designabit superficiem reflectentem. His peractis, evidens est:

1°. Superficiem refringentem HIN & superficiem reflectentem PDQ idem habere centrum O.

2°. OM cum sit perpendicularis chordæ IS, ipsam in duas partes æquales dividet in puncto E; ergo bina triangula IEM & SEM in omnibus sunt æqualia: ergo angulus SEM = EMI.

3°. AS si sit radius axi parallelus cadens in punctum S, facta refractione in puncto S, dirigetur secundum lineam FM (17), cum punctum F distet a superficie refringente pro tribus semi-

diametris OI ; ergo radius refractus SM , tangens punctum M secundæ superficiæ, reflectetur, ita ut dirigatur secundum lineam MI , & cum ipsa coincidat; ergo axim secabit in puncto I , superficiem refringentem tangente; ergo $HNPQ$ est speculum utrinque concavum, cujus binæ superficies sunt concentricæ, radiosque axi parallelos colligit in axeos puncto superficiem refringentem tangente. Q. E. D.

PROPOSITIO XIX.

128. **P**rima speculi vitrei superficies si sit plana, altera autem concava, binasque inter has superficies distantia sit æqualis quartæ parti diametri concavitatis, radii axi paralleli colligentur in puncto ejusdem axeos superficiem planam tangente.

DEMONSTRATUR.

Radii, axi paralleli, in hoc speculum cadentes, perpendiculares sunt primæ superficiæ; ergo speculum ingredientur, quin refringantur; secundam in superficiem cadentes eidem axi adhuc paralleli erunt; ergo (16) colligentur in puncto ab hac superficie pro quarta diametri parte distante, & proinde in puncto primam superficiem tangente. Q. E. D.

129. *Corollarium I.* Distantia binas has inter superficies si quarta diametri concavitatis parte major sit, radii axi paralleli ipsum secabunt post reflexionem, antequam ex speculo egrediantur.

130. *Corollarium II.* Binarum superficierum distantia si quarta diametri concavitatis parte minor sit, radii axi paralleli ipsum tantum secabunt post egressum e speculo per superficiem planam, & post refractionem in hujus superficie occursum factam.

131. *Corollarium III.* Radii in speculum cadentes si sint divergentes, procedantque ab ejusdem axeos puncto ante speculum: dico, quod hi radii ut colligantur in puncto superficiem planam tangente, necesse est, ut binarum superficierum distantia major sit quarta parte diametri concavitatis; si enim minor esset, radii axim tantum secarent post egressum e speculo, & post refractionem in superficie plana factam.

PROPOSITIO XX.

132. **D**uarum superficierum distantia si sit æqualis quartæ parti secundæ superficie, hæc si sit concava, prima autem convexa; dico, quod radii, procedentes ab axeos puncto, pro tota convexitatis diametro a prima superficie distante, post refractionem in occursum hujus superficie factam, reflexionemque in occursum secundæ, colliguntur in axeos puncto primam superficiem tangente.

DEMONSTRATUR.

Evidens est, quod radii procedentes a puncto, toto convexitatis diametro a convexa vitri superficie distante, speculum ingrediendo, post refractionem fiant axi paralleli; ergo in præsentī casu radii, in superficiem reflectentem cadentes, sunt axi

paralleli; ergo (16) post reflexionem in hujus superficiei occurſu factam colligentur in puncto, quarta ſui diametri parte ab ipſa diſtante; ergo axim ſecabunt in puncto primam ſuperficiem tangente. Q. E. D.

133. *Corollarium I.* In eodem caſu, quod vitri denſitas æqualis ſit quartæ parti diametri ſecundæ ſuperficiei, prima ſuperficies ſi ſit concava, radiique in hanc ſuperficiem cadentes ſint convergentes, diriganturque verſus axeos punctum retro hanc ſuperficiem, tota concavitatis ſuæ diametro ab hac ſuperficie diſtans, radii per ſecundam ſuperficiem reflexi colligentur in axeos puncto primam ſuperficiem tangente.

134. *Corollarium II.* In eodem caſu punctum, a quo radii procedunt, prima ſuperficies ſi ſit convexa, aut verſus quod diriguntur, ſi ſit concava, ab hac ſuperficie ſi ultra concavitatis aut convexitatis ſuæ diametrum diſtet, poſt reflexionem radii colligentur in axeos puncto binas inter ſuperficies.

Sed idem punctum, a quo radii procedunt, vel verſus quod diriguntur, ſi toto convexitatis aut concavitatis diametro primæ ſuperficiei proximius ſit; reliquis manentibus, radii per 2^{am} ſuperficiem reflexi axim tantum ſecabunt, quando egreſſi per primam ſuperficiem refracti fuerint.

135. *Corollarium III.* Binarum ſuperficierum diſtantia ſi quarta ſecundæ ſuperficiei concavæ diametri parte major ſit, radii procedentes a puncto, toto diametro a prima ſuperficie diſtante, ſi ſit convexa, vel ſi dirigantur verſus axeos punctum retro hanc ſuperficiem, ſi ſit concava, quod punctum toto con-

ca-

cavitatis diametro ab hac distet; radii, per secundam superficiem reflexi, axim secabunt, antequam e speculo egrediantur.

Econtra binarum superficierum distantia si quarta superficiei reflectentis diametri parte minor sit, reliquis manentibus radii per hanc superficiem reflexi axim tantum secabunt, quando e speculo egressi & per primam refracti fuerint.

136. *Corollarium IV.* Prima superficies si sit convexa, secunda autem plana, radiique procedant a puncto, toto convexitatis diametro a prima distante, radii post reflexionem revertentur eadem via, qua venere, quæcumque fuerit vitri densitas.

PROPOSITIO XXI.

137. **D**ata speculi vitrei superficiei sphaerica convexa, datoque axeos puncto, ab hac superficiei ultra convexitatis suæ diametrum distante, invenire hujus speculi densitatem, ita ut, secunda superficiei plana manente, radii ab hoc puncto procedentes axim secant post reflexionem in eodem puncto, in quo primam tangit.

SOLUTIO.

HIN sit data superficies convexa, AG axis speculi; fig. 37. A punctum datum in axi, a quo procedit radius obliquus AS; O sit centrum superficiei HIN; per hoc punctum O ducatur recta VF, parallela rectæ AS, æqualisque tribus semidiametris OV. Per puncta S & F ducatur recta SF; evidens est (17), quod

quod SF repræsentet radium fractum radii incidentis AS , & protensa secabit axim AG in puncto G .

His præmissis dico, quod si distantia GI a puncto G usque ad superficiem HIN dividatur in duas partes æquales in puncto D , distantia ID erit speculi densitas desiderata; rectaque PDQ perpendicularis rectæ AG , designabit secundam superficiem planam desideratam.

DEMONSTRATUR.

Per punctum M , in quo radius refractus SG secat superficiem planam PDQ , ducatur recta ME , parallela rectæ AG ; per idem punctum M & punctum I , in quo axis tangit primam superficiem HIN , ducatur recta MI . His positis demonstrandum est, quod IM sit radius reflexus radii refracti SM , in superficiem reflectentem planam PQD cadentis in eodem puncto M .

Evidens enim est, quod triangulum GMI sit isosceles, siquidem DM perpendicularis est rectæ IG , & $ID = DG$, ergo $\angle GIM = \angle IGM$; sed propter parallelos AG & ME $\angle GIM = \angle IME$, & $\angle IGM = \angle EMS$; ergo $\angle IME$ & $\angle EMS$ æquales sunt; ergo (9) MI est radius reflexus radii MS , aximque secat in puncto I , in quo idem axis tangit primam superficiem HIN . Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

138. **D**ata speculi vitrei prima superficiei sphaerica, datoque puncto in axi extra hanc superficiem, invenire secundam superficiem distantiamque, quam binæ hæ superficies inter se habere debent, ut radii, a puncto dato procedentes, post reflexionem axim secant in puncto, in quo idem axis primam superficiem tangit.

SOLUTIO.

HIN sit data superficiei sphaerica, fig. 38. 39. 40. 41. 42. A punctum datum in axi AD: AS radius, procedens a puncto A, cadensque in punctum S superficiei HIN. Per punctum O, tanquam hujus superficiei centrum, ducatur IF, parallela rectæ AS, æqualisque tribus semidiametris OI; per puncta S & F ducatur recta SF, protendaturque, usquedum axim fecet in puncto G.

Evidens est, radium refractum radii AS dirigi secundum rectam SF; in hac linea protensa SF sumatur punctum quodcumque M; per hoc punctum ducatur ad punctum I, superficiem refringentem HIN tangens, recta MI.

Jam angulus IMS dividatur per rectam ME in duas partes æquales, hæc recta ME protensa secabit axim in puncto C; ab hoc puncto quatenus centro & intervallo CM fiat arcus PDQ.

His peractis dico, quod hic arcus designet superficiem reflectentem desideratam, & recta DI sit distantia, quam binæ superficies HIN & PDQ inter se habere debent, ita ut radii, procedentes a puncto A , axim secant in primæ superficiei HIN puncto I , & hoc post reflexionem in occurſu secundæ superficiei PDQ factam,

DEMONSTRATIO.

CM cum sit superficiei PDQ semidiameter, ipsi perpendicularis est; sed radius refractus SM cadit in punctum M , & anguli SME , EMI per constructionem æquales sunt; ergo radius reflexus radii fracti SM coincidit cum recta (9); ergo axim secat in puncto I . Q. E. D.

139. *Nota.* Propositio hæc tres casus habere potest. Primus casus est, quod superficies data si sit convexa, desideratur superficies reflectens concava, uti in fig. 38. 40.

Secundus, si data superficies refringens sit convexa, desidereturque superficies reflectens convexa, uti in fig. 39.

Tertius denique, si data superficies refringens sit concava, uti in fig. 41. 42. in hoc casu superficies reflectens necessario concava erit.

Notandum insuper, quod in primo casu punctum M in quocumque loco lineæ indefinite protensæ SF sumi potest.

In secundo casu punctum M est necessario inter punctum G , ubi radius refractus SF axim secat, & punctum X , rectam GS æqualiter dividens; sumendo enim hoc punctum extra lineam XG , problema erit impossibile.

Insuper in eodem casu punctum A a superficie refringente ultra hujus superficiem diametrum distare debet, alias problema erit impossibile. In cæteris autem casibus hoc punctum A ad arbitrium sumi potest, proximius aut remotius; nam problema semper possibile manet.

PROPOSITIO XXIII.

140. **R**adii, a puncto dato in axi ante speculum vitreum procedentes, radii per secundam superficiem reflexi colliguntur in puncto, in quo idem axis primam superficiem tangit, binæ hæ superficies si sint concavæ, etiam possunt esse concentricæ.

DEMONSTRATIO.

HIN sit superficies concava refringens. Fig. 41. O ipsius centrum, & AD axis speculi. A sit punctum, a quo radii procedunt. Ex hoc puncto A ducatur radius AS , secans superficiem refringentem HIN in puncto S ; per centrum O ducatur FV , rectæ AS parallela, tribusque semidiametris OI vel OV æqualis.

Per puncta F & S ducatur recta FS , ad nutum protensa. Per puncta S & I , in quibus axis secat superficiem HIN , ducatur corda IS . Ex centro O ducatur perpendicularis huic cordæ

$Sf2$

$IS.$

IS. Protendetur OE usquedum secet lineam protensam FS in puncto M; ex puncto O, velut centro, & intervallo OM fiat arcus PDQ; per puncta M & I ducatur recta MI; his peractis evidens est,

1°. SM esse radium refractum radii AS (17).

2°. Duos angulos SME, EMI esse æquales; recta ME cum sit cordæ IS perpendicularis, quæ proinde divisa est in duas partes æquales in puncto E.

3°. Recta OM cum sit etiam superficiei PDQ perpendicularis, sequitur (9) radium reflexum radii SM coincidere cum linea MI, & secare axim in puncto I.

4°. Duos arcus HIN, PDQ, duas superficies repræsentantes, idem habere centrum O; ergo speculum HN PQ binas suas superficies concentricas habet, radiosque, a puncto A ad primæ superficiei punctum I, in quo axis ipsam tangit, procedentes colligit. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

141. **D**ata distantia inter binas speculi vitrei superficies, invenire 1°. quæ hæ superficies esse debeant, ut radii, axi paralleli, ipsum secant post reflexionem secundæ superficiei, antequam ex vitro egrediantur, in puncto qualicumque dato binas inter has superficies.

2°. Quales hæ superficies esse debeant, ut radii, ab axeos puncto dato procedentes, ipsum secent, antequam vitrum egrediantur, in puncto qualicunque dato duas inter has superficies.

Horum problematum solutio nullam patitur difficultatem, quia ex præcedentium propositionum demonstrationibus per se ipsam evidens est. Unde

PROPOSITIO XXV.

142. **D**atis binis superficiebus, speculum vitreum terminantibus, dataque vitri densitate invenire, utrum radii, axi paralleli, ipsum secabunt post reflexionem, in occurſu superficiæ reflectentis factam, in puncto inter has superficies, antequam ex vitro per primam superficiem egrediantur.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

$HNPQ$ sit speculum vitreum, cujus superficies refringens sit HIN ; fig. 32. 33. 34. PDQ sit superficies reflectens & DI vitri densitas. AS sit radius, axi parallelus; per punctum F , a superficie refringente HIN tribus semidiametris distans, & punctum S ducatur recta SF , protensa, usquedum secet superficiem reflectentem PDQ in puncto M ; SM repræsentabit ergo (17) radium refractum radii AS .

Ab hoc puncto M ducatur ad centrum C superficiæ reflectentis PDQ semidiameter CM , qui huic superficiæ perpendicularis erit, formabitque cum recta MS angulum CMS ; per punctum M ducatur recta MI , formans angulum $CMI = CMS$.

§ f 3

His

His peractis evidens est, rectam MI repræsentare radium reflexum radii MS (9), sique protendatur, indicabit, utrum punctum I , in quo axim secat, sit intra vel ultra vitri densitatem.

PROPOSITIO XXVI.

143. **N**otis duabus superficiebus sphaericis speculum vitreum terminantibus, dataque vitri densitate, cum axeos puncto ante speculum, a quo radii obliqui in speculum cadentes procedunt, cognoscere, utrum hi radii post reflexionem in occurso secundæ superficiei factam, axim secturi sint in puncto binas inter has superficies, antequam per primam egrediantur.

SOLUTIO.

Speculum vitreum tale esse potest, fig. 38. 39. 40. 41. 42. ut radii, axi paralleli, in ipsum cadentes axim secant, antequam ex vitro egrediantur, in puncto binas inter superficies; attamen, hoc speculo eodem manente, radii, si fiant eidem axi obliqui, procedantque a puncto dato ejusdem axis, ipsum secant mox ante mox post egressum e speculo, reflexi per secundam superficiem; quid in hoc casu accadat, hoc modo innotescet.

A sit punctum datum in axi, a quo radius, cadens in superficiem refringentem HIN , procedit; per punctum O , velut hujus superficiei centrum ducatur VF , rectæ AS parallela, tribusque suis semidiamentris æqualis; per puncta F & S ducatur recta FS , protendaturque, usquedum fecet superficiem reflectentem PDQ in puncto M , rectaque SM repræsentabit radium refractum radii SA (17).

Per

Per punctum M & per punctum C, superficiei reflectentis centrum ducatur semidiameter MC, & protendatur usque in E; consequenter ME huic superficiei PDQ perpendicularis erit, facietque cum linea MS angulum SME; per punctum M ducatur linea MI, quæ faciat angulum IME = SME.

His peractis, evidens est (9) lineam MI representare radium reflexum radii SM; proinde si protendatur, usquedum axim secet, cognoscetur, utrum ipsum secet ante vel post egressum per primam superficiem.

PROPOSITIO XXVII.

144. **C**onstrui possunt specula vitrea utrinque concava, vel utrinque convexa, aut convexo-concava, objecta repræsentantia, quin augeantur vel diminuantur.

Ea specula dico utrinque concava, quorum superficies refringens æque ac reflectens concavæ sunt, utrinque convexa autem ea, quorum binæ superficies convexæ sunt.

Hic bene notandum est, ne confundantur idæ, convexumque accipiatur pro concavo, quod eadem vitri superficies, stanno non obducta, convexa est, obducta autem concava. Evidens enim est, quod stanno obductio reflexionem produciens est concava; cum autem hanc superficiem consideremus tantum quatenus reflectentem, concava dici debet eodem modo vitri superficies, ante stanno obductionem concava, post stanno obductionem convexa est. Jam demonstretur propositio.

DE-

DEMONSTRATIO.

In propositione 13. (115) demonstravi, dari specula vitrea utrinque concava aut utrinque convexa, & alia convexo-concava, quæ parallelas remittunt radios, axi parallelas in ipsa cadentes; ergo hæc specula objecta non aliter repræsentant quam specula plana, consequenter ipsa repræsentant naturaliter nec majora, nec minora.

145. *Nota.* Hoc ut in praxi ad amissim fiat, horum speculorum superficies non debent esse portiones sphaeræ nimium parvæ, ipsorumque densitas tam parva sit, ut fieri potest; horum speculorum latitudo etiam non sit majoris numeri graduum; alias objecta prope margines repræsentata deformata apparerent.

PROPOSITIO XXVIII.

146. **P**ossibile est construere specula vitrea objecta inverse repræsentantia, quin appareant majora aut minora.

DEMONSTRATIO.

In propositione 11. demonstravi, dari specula vitrea, quæ parallelas remittunt radios, axi parallelas in ipsa cadentes, radiosque in specula versus unam axeos partem ingredientes versus partem oppositam egredi; ergo objectum si ab his speculis tantum distet, ut radii ab eodem puncto procedentes sint sensibilibus paralleli, dum in specula cadunt, ex iis etiam paralleli egredientur, radiique, a puncto objecti ad partem dexteram procedentes, per partem sinistram egredientur;

tur; consequenter oculus hæc objecta per radios in his speculis reflexos percipiens, ipsa videbit inversa, quin majora aut minora appareant. Q. E. D.

147. *Nota.* Hoc in praxi difficile est 1° quia hæc specula horrendæ magnitudinis esse deberent, consequenter ad elaborandum difficillima, & elaboratorum usus difficilis foret.

2° quia vitri densitas si esset major aut minor, radiorum parallelismus multum turbaretur, consequenter non sequeretur idem effectus; sed ut vitri densitas non fieret nimium major aut minor, in elaborandis his speculis maxima requiretur dexteritas, quæ in artificibus difficile invenitur. Sufficit ergo, horum speculorum possibilitatem demonstrasse.

148. Eos autem, quibus horum speculorum perfectio placeret, monitos volo, quod hujus speciei speculum, sagaciter elaboratum, ut optimos habeat effectus, sit illud, cujus binæ superficies sunt portiones sphaerarum, in quibus diameter unius sit triplus diametri alterius, cujusque prima superficies sit convexa & portio sphaeræ minoris, & secunda concava & portio sphaeræ majoris, uti fig. 30.

PROPOSITIO XXIX.

149. **P**ossibile est construere specula vitrea, objecta perfecte repræsentantia, quin videantur majora aut minora, in quocumque loco oculus collocatus sit, prope aut procul a speculo, quæ tamen focum habeant, in quo radii solares collecti maximum calorem producant.

S O L U T I O.

HNPQ sit speculum, fig. 27. cujus prima superficies HNS sit convexa & secunda PDQ concava, in quo aliunde vitri densitas major sit tribus semidiametris superficiei HNS, centrumque superficiei reflectentis PDQ sit in axeos puncto C, a superficie refringente HSN tribus hujus superficiei semidiametris distante. Dico, hoc speculum producere effectum supra dictum.

D E M O N S T R A T I O.

Evidens est, quod radii inter se paralleli in primam superficiem HSN cadentes post refractionem colliguntur in puncto C (17); consequenter radii, a sole procedentes, vi hujus collectionis maximum calorem producent in puncto C.

Hi iidem radii, progredientes ultra C, in superficiem reflectentem PDQ cadent, hoc punctum C cum sit hujus superficiei centrum: ergo reflexi per eandem viam revertentur, & secundo colliguntur in puncto C & primo productum calorem augebunt, proindeque in hoc puncto erit calor maximus.

Hi iidemque radii, in puncto C in transversum secti, egredientur per idem superficiei HIN punctum, per quod ingressi erant; ergo paralleli egredientur, sicuti paralleli ingressi fuerant.

Evidens ergo est, quod, objectum quodcumque ante hoc speculum ponatur in tali distantia, ut radii, ab eodem puncto procedentes, sint sensibilibiter paralleli, post reflexionem e speculo adhuc egredientur paralleli; ergo etiam evidens est, quod oculus ante speculum positus sive prope sive procul, per radios

dios parallelos hæc objecta semper percipiet; sed oculus non-nisi extra speculum collocari potest; ergo hoc speculum objecta neque majora neque minora repræsentabit, attamen focum habebit, in quo maximum calorem producet. Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

150. **C**onstrui possunt specula vitrea concava objecta minora semper repræsentantia. Fig. 10.

DEMONSTRATIO.

Pro secundo casu corollarii 8. tertiæ propositionis (57) vidimus, dari specula vitrea concava, quæ omnes radios, in ipsa parallele cadentes, post reflexionem divergentes remittunt; ergo objecta, per horum speculorum reflexionem percepta, minora semper apparebunt. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

151. **C**onstrui possunt specula vitrea concava, quæ solis ardoribus exposita, in focus suis neque ignem, neque calorem sensibilem producere queunt.

DEMONSTRATIO.

Evidens est 1^o quod specula, de quibus in præcedenti propositione, calorem nunquam producant.

2^o In propositione 13^a (115) demonstravimus, fig. 8. dari specula vitrea concava, quæ radios, in ipsa parallele cadentes, remittunt parallelos; ergo hæc specula radiis solaribus exposita, calorem nunquam producent. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXII.

152. **C**onstrui possunt specula vitrea convexa, quæ objecta majora repræsentare possunt, quæque, radiis solaribus exposita, in focus suis ignem producent.

DEMONSTRATIO.

Pro secundo casu corollarii 7. tertiæ propositionis (55) vidimus, fig. 4. quod dentur specula vitrea convexa, quæ radios, in ipsa axi parallele cadentes, colligunt in puncto axeos ante primam superficiem; evidens ergo est, hæc specula objecta majora repræsentare posse, & soli opposita colligere radios in uno puncto, in quo ignem producere queunt. Q. E. D.

153. *Corollarium.* Erravit ergo P. Schottus affirmando (in Mag. univers. part. 1. lib. 7. prop. 6.) lenticulam ante convexam & retro concavam, in parte concava stanno obductam, soli expositam, ignem producere non posse.

PROPOSITIO XXXIII.

154. **C**onstrui possunt specula vitrea, in quibus objecta percipiuntur distantia præcise, ac si in prima superficie depicta essent.

DEMONSTRATIO.

Vidimus in propositionibus XV. XVI. XVII. XVIII. & XIX. fig. 32. 33. 34. 31. dari specula vitrea, quæ radios axi parallelos colligunt in puncto, primam superficiem tangente; evidens ergo est, quod objecta remota, quorum radii, ab unico puncto procedentes, in speculum cadunt, cum sint sensibilibiter paralleli, imaginem suam in prima horum speculorum superficie pictam

etiam habebunt; consequenter oculus, extra speculum collocatus, ea in hac superficie semper percipiet. Q. E. D.

In hoc casu objecta percipientur inversa.

In praxi, speculum optimum effectum producturum, foret illud, cujus prima superficies convexa est, & secunda plana, cujus mentionem fecimus in propositione XV. (fig. 31.)

Speculum minoris densitatis, in hoc casu optimum effectum producens, est illud propositionis XVI. vel XIX. (fig. 33.)

PROPOSITIO XXXIV.

155. **C**onstrui possunt specula vitrea, objecta ita remota repræsentantia, ac si essent in secunda superficie depicta.

DEMONSTRATIO.

Evidens est, quod omnia specula, quorum in propositione XIV. mentionem fecimus, radios axi parallelos in uno puncto secundam superficiem tangente præcise colligunt; ergo objecta remota, quorum radii, ab unico puncto procedentes, sunt sensibilibiter paralleli, in secunda superficie percipientur. Q. E. D.

Hoc in casu objecta inversa percipientur.

Specula, quæ in hoc casu optimos præstant effectus, sunt ea, quorum prima superficies convexa est, secunda autem concava, ita ut semidiameter secundæ superficiæ sit triplus diametri primæ, centrumque secundæ superficiæ sit in axeos puncto primam superficiem tangente. Fig. 30.

PROPOSITIO XXXV.

156. **C**onstrui possunt specula vitrea, in quibus, si quis se aspiciat, faciem suam in prima superficie percipiet. Fig. 37. 38. 39. 40. 41. 36. 42.

DEMONSTRATIO.

In propositionibus XX. XXI. XXII. XXIII. jam vidimus, dari specula vitrea, quæ in axeos puncto, primam superficiem tangente, colligunt radios ab ejusdem axeos puncto extra speculum procedentes; ergo evidens est, quod homo, in hoc puncto collocatus, faciem suam in prima superficie percipiet. Q. E. D.

Imago intuentis hinc in speculis inversa est.

PROPOSITIO XXXVI.

157. **P**ossunt construi specula vitrea, in quibus prospiciens imaginem suam in intimo speculi super secundam superficiem percipiet.

DEMONSTRATIO.

Ex secundo corollario propositionis XIV. evidens est, dari specula vitrea, in quibus radii, ab axeos puncto extra speculum procedentes, colliguntur in puncto secundam superficiem tangente; ergo quidam coram speculo in hoc puncto collocatus in intimo speculi imaginem suam percipiet.

PROPOSITIO XXXVII.

158. **C**onstrui possunt specula vitrea, quæ objecta remota in qualicunque axeos puncto binas inter superficies in ipsamet vitri densitate repræsentant.

159. Alia construi possunt, in quibus propria imago videri potest in qualicunque axeos puncto binas inter superficies.

Totum hoc per se evidens est, nullaque demonstratione indiget; de his sufficienter in propositione XXIV. locuti sumus.

PROPOSITIO XXXVIII.

160. **C**onstrui possunt specula vitrea, quæ extra speculum nullum calorem producant, etiamsi radiis solaribus exponantur, licet ipsamet specula ita calefiant, ut ardentia evadant.

DEMONSTRATIO.

Evidens est, quod omnia specula vitrea, radios axi parallellos, antequam e speculo egrediantur, in ejusdem axeos puncto binas inter superficies colligentia, de quibus in pluribus præcedentibus propositionibus mentionem fecimus, hanc proprietatem habent.

PROPOSITIO XXXIX.

161. **P**ossibile est construere specula sphaerica concava, quæ radiis solaribus exposita in centro concavitatis suæ comburunt.

P. Casparus Schotti in magia sua universalis part. 1. lib. 7. post propositionem VIII. hanc quæstionem proponit: nempe, utrum possibile sit, ita construere speculum, ut punctum ardens in speculo concavo in centro inveniatur. P. Marinus Bettinus, ab ipso citatus hanc quæstionem affirmative solvit; imo pretendit, maximum calorem produci posse, si specula concava ita elaborentur, ut punctum ardens præcise in ipsorum centro inveniatur.

162. Hoc ut obtineatur, speculum ita confici debet, ut radii solares, antequam in speculum sphaericum concavum cadant, colligantur & sese in transversum secant in centro; unde necessario sequetur, quod omnes radii in superficiem speculi sphaerici concavi perpendiculariter cadant, seque reflectentes secunda vice in centro colligantur; consequenter per hanc duplicem collectionem, radii solares insolitam in centro comburendi vim obtinebunt.

163. Ut autem radii solares colligantur, seque in centro speculi sphaerici concavi in inversum secant, P. Marinus Bettinus vult, ut construatur speculum parabolicum concavum, in medio perforatum, focusque ipsius sit retro hoc speculum, ut speculi parabolici concavi axis coincidat cum axi speculi sphaerici concavi, utriusque focus, nempe speculi parabolici & speculi sphaerici, sit in eodem puncto axis communis; his ita praeparatis, evidens est, quod, duo haec specula ita conjuncta si soli exponantur, radii se colligent in centro speculi sphaerici concavi, antequam in suam superficiem cadant.

164. P. Schottus, allato hoc P. Bettini processu, quem ingeniosum sed parum solidum vocat, concludit, impossibile esse, construere speculum sphaericum concavum, ita ut in centro comburat; fatetur tamen, per hunc processum vim comburendi augeri; attamen negat, hoc medio effectum realiter comburendi obtineri posse.

165. Hujus rationem allegat, quod corpus combustibile, in centro collocatum, intercipiet omnes radios, qui in hoc puncto sese in inversum secare deberent, consequenter nullus radius in speculum sphaericum concavum caderet; unde demum concludit,

dit, impossibile esse, ut hoc medio speculum sphaericum concavum ullum effectum in centro producat.

166. Observandum est, tam quoad crism P. Schotti, quam quoad P. Bettini processum ipsum 1^o. dari corpora combustibilia transparentia; unde sequitur, hæc corpora, foco speculorum P. Bettini exposita non impedire, quin radii solares progrediantur, cadantque in speculum sphaericum concavum; proinde objectio P. Schotti impossibilitatem absolutam effectus horum speculorum non probat.

167. 2^o. P. Bettinus facilius medium administrare potuisset, si loco speculi parabolici (quod in constructione impossibile puto) usus esset lenticula sphaerica convexa ex vitro, cujus refractionis focus coincidisset cum centro speculi sphaerici concavi.

168. Attamen fateri debemus, inconveniens a P. Schotto rationabiliter objectum per hoc non vitari in singulis casibus, ubi in foco collocarentur materiae combustibiles opacæ.

169. 3^o. P. Bettini methodus plura exigit specula, cum idem unico speculo fieri possit; quod per propositionem XXIX. (149) evidens est; in hoc tamen inconveniens est, nempe quod nullum corpus combustibile in foco collocari possit; consequenter hoc medio nullus alius effectus obtineri potest, quam ut vitrum hoc speculum componens egregie calefiat, cum in foco maximus calor produceretur.

170. Concludendum ergo est, hoc problema nulla ex his methodis perfecte solutum esse. Attamen per specula vitrea facile solvetur.

SOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

171. Sit speculum vitreum, cujus focus absolutus sit præcise in centro primæ superficiæ, uti descripsimus in propositione IX. (89).

172. Evidens est, quod quodlibet horum speculorum omnis generis materias combustibiles, five opacas, five transparentes comburet; primum in centro secundæ superficiæ, & secundum in centro primæ, & hoc eodem modo eademque facilitate, ac alia specula caustica. Q. E. D.

173. Hæc unica methodus est, qua speculum concavum in centro suæ concavitatis comburere possit. Hujus praxis facilis est, nullæque occurrent aliæ difficultates, quam quæ generales sunt in construendis cæteris speculis.

174. Erravit ergo P. Schottus, affirmando impossibile esse, ut speculum sphæricum concavum præcise in centro suo comburat; *combustio*, inquit, *non potest fieri in centro speculi concavi*.

175. Adhuc observandum est, non tantum fieri posse, ut speculum præcise in centro suæ concavitatis comburat, sed data etiam qualicumque concavitate sphærica vitrea speculum ex ea constructum comburit in qualicumque axeos puncto dato ante hanc concavitatem: quod per propositionem XI. (140) evidens est.

