

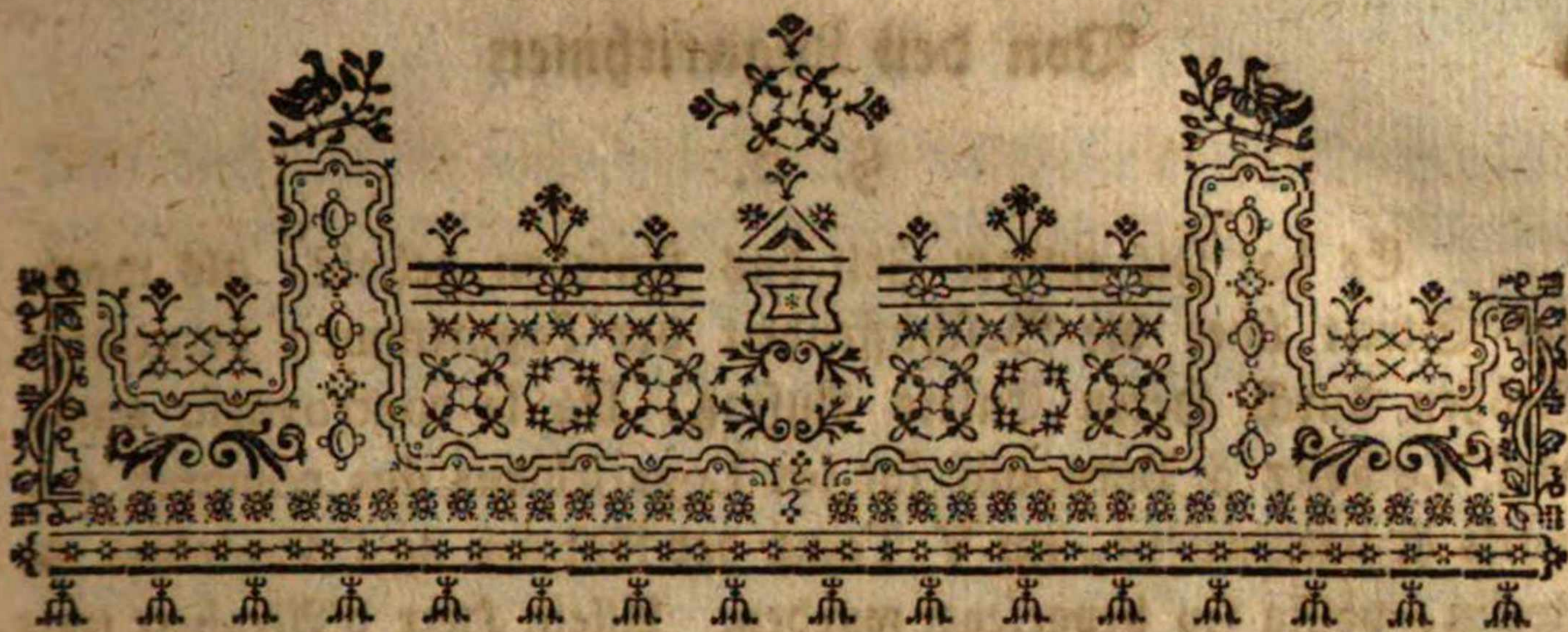
Wenceslaus Johann Gustav
Karsten,

der Weltweisheit Doctors und der Mathematik
Professors zu Bülow,

A b h a n d l u n g

von den

Logarithmen
verneinter Größen.
Erste Abtheilung.



§. I.


 enn Männer, wie Leibnitz und Bernoulli, wie Euler und d'Alenbert, über eine Lehre uneinig sind, und noch dazu über eine Lehre, worauf die erhabensten menschlichen Entdeckungen sich gründen: ja was noch mehr ist, über eine Lehre derjenigen Wissenschaft, worinn man seit Jahrtausenden den höchsten Grad der Evidenz zu finden geglaubt hat; so kann es der gelehrten Welt nicht gleichgültig seyn, wenn eine solche Uneinigkeit das Schicksal der mehresten gelehrten Streitigkeiten hat, wobey Jeder bey seiner Meynung bleibt, und nichts ausgemacht wird. Wäre die Frage: Ob die Logarithmen verneintet Größen möglich oder unmöglich sind? eine bloße speculativische Subtilität, welche in das Practische der Mathematik und der Naturlehre keinen Einfluß hätte, so würde es ziemlich gleichgültig seyn, ob man das eine oder das andere behauptete. Allein von der Beantwortung dieser Frage hängt in der Ausübung der Mathematik sehr vieles ab. So wenig es den Analisten gleichgültig seyn kann, ob man die Wurzeln gerader Exponenten aus verneinten Größen für möglich oder unmöglich hält, eben so wenig kann es ihm gleichgültig seyn, zu welcher Classe man die Logarithmen verneinter Größen rechnet.

§. 2.

Es hat seit einiger Zeit das Ansehen gehabt, als wenn der Streit über die Beschaffenheit der Logarithmen verneinter Größen durch Herrn Eulers Aufsatz: *De la controverse entre M^{rs}. Leibnitz & Bernoulli sur les Logarithmes des nombres negatifs & imaginaires*, im V Tome der *Histoire de l'Academie de Berlin*, völlig sey beygelegt worden. Allein Herr d'Alembert tritt in seinen im Jahr 1761. zu Paris gedruckten *Opuscles Mathematiques* auf des Herrn Bernoulli Seite, und sucht Herrn Eulers obangeführten Aufsatz zu widerlegen. Ich habe mir Mühe gegeben, ausfindig zu machen, worauf es bey dieser Streitigkeit ankomme, und ich mache mir die Hoffnung, daß diejenigen Gedanken, welche ich von dieser Sache in gegenwärtiger Abhandlung vorgetragen habe, vieles dazu werden beytragen können, die Streitigkeit beyzulegen.

§. 3.

Man muß sich ohne Zweifel über die Hauptbegriffe des streitigen Cases vor allen Dingen vergleichen; beyde streitende Theile müssen einerley Sache im Sinne haben, wenn sie die Wörter: *Logarithmus* und *verneinte Größe* gebrauchen, widrigenfalls ist keine Einigkeit zu hoffen. Was ist aber eine verneinte Größe? was ist ein Logarithmus? Ich glaube schwerlich, daß der Streit entschieden werden könne, wofern man bey Beantwortung dieser Fragen nicht bis auf die ersten Anfangsgründe zurück geht. Es kommt mir wenigstens so vor, als wenn man die Streitfrage in immer mehr Dunkelheit einhüllet, wenn man die Gründe sowohl für die eine, als für die andere Meynung aus der Integralrechnung und höhern Geometrie hernimmt. Herrn Eulers angeführte Abhandlung über diese Sache ist unvergleichlich:

sich: dieß darf ich wohl nicht sagen, da dieser große Mann nichts als vortrefliche Stücke liefert. Allein ich glaube Herr d'Alenbert wäre leichter überzeugt worden, wenn Herr Euler den Begriff der Logarithmen einzig und allein aus den Anfangsgründen genommen hätte. Denn gegen dem Begriff, worauf Herrn Eulers Abhandlung gebauet ist, konnte Herr d'Alenbert auf der 197 Seite, seiner vorhin angeführten Schrift, dieses erinnern, es werde dabey das schon voraus gesetzt, worüber doch erstlich gestritten wird, daß nämlich alle Logarithmen zu positiven Zahlen gehören, weil $(1 + w)^n$ nichts anders, als eine positive Zahl bedeuten kann, wenn w unendlich klein, und n unendlich groß ist. Auch Herrn d'Alenberts Abhandlung ist voll der tieffsinnigsten Untersuchungen. Vielleicht kann man sagen, sie habe noch diesen Vorzug vor der Eulerschen voraus, daß sie bis auf die ersten Begriffe zurück gehet. Allein, so wie diese vom Herrn d'Alenbert vorgetragen sind, können sie schwerlich gebraucht werden, die streitige Sache in ihr völliges Licht zu setzen. On appelle Logarithmes une suite de nombres en progression Arithmetique *quelconque*, repondans a une suite de nombres en progression Geometrique *quelconque*. Dieß ist Herrn d'Alenberts Erklärung der Logarithmen. Freylich liest man eben diese Erklärung in vielen Lehrbüchern. Ich sehe aber nicht ab, daß diese Erklärung besser sey, als wenn man sagen wollte, eine negative Größe sey eine solche, die das Zeichen — vor sich hat. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn Hr. d'Alenbert auf der 199 Seite folgendes behauptet: il n'y a aucune liaison necessaire entre une suite de nombres, & la suite des Logarithmes, qui leur repondent. Aber stellet nicht jede Hyperbel unzählige Logarithmensysteme dar? und ist zwischen den hyperbolischen Trapezien und ihren zugehörigen Abscissen keine nothwendige Verbindung? Das Willkührliche bey den Logarithmen bestehet überhaupt darinn, daß es gleichgültig ist, wie groß die Zahl

seyn soll, deren Logarithmum man $= 1$ setzet, oder sonst als gegeben annimmt. Eben so viel Willkührliches hat auch das System der trigonometrischen Linien: es ist nämlich gleich viel, wie groß der Bogen seyn soll, dessen sinus $= 1$ gesetzt wird. Aber ist dann deswegen keine nothwendige Verbindung zwischen den Bogen und ihren respondierenden trigonometrischen Linien?

§. 4.

Es ist eben so nothwendig, sich darüber zu vergleichen, was man durch das Wort negative Größe verstehen wolle, als es nöthig ist vest zu setzen, was ein Logarithmus sey, wenn man die Streitfrage gehörig beurtheilen will. Herr d'Altenbert scheint hierauf Bedacht genommen zu haben, und streuet daher in seinem Vortrag einige Gedanken von der Beschaffenheit der negativen Größen ein. Er verwirft mit Recht auf der 201 und 204 Seite die Vorstellung der negativen Größen, als solcher, die kleiner als nichts sind, ob man gleich diese Redensart, als eine Verkürzung des Ausdrucks, so wie manche andere für sich allein widersinnig lautende Redensarten, in der Analyti dulden kann. Indessen finde ich nicht, daß Herr d'Altenbert selbst von den negativen Größen genauer und bestimmter rede. Bald sind seine Ausdrücke ganz richtig und der Sache gemäß, z. E. auf der 202 Seite: C'est que le signe, que porte l'expression algebrique de cette ordonnée, n'indique que sa position, und auf der 203 Seite: En un mot toute quantité par elle meme a le signe +, elle ne porte le signe — que *relativement aux autres exprimés ou sousentendus*. Bald aber redet dieser große Geometer wie Des Cartes und Wolf, z. E. auf der 203 Seite le signe — n'indique qu'une fausse position, und auf der 205 Seite in der Anmerkung: l'équation $by = (a-x)^2$ quand $x > a$, est proprement une fausse equation, la véritable est $by = (x-a)^2$. Dieser einzige Satz, den Herr d'Alten-

bert

bert hier behauptet, würde hinlänglich seyn, seyn ganzes System zu widerlegen, wenn ich ihn als einen richtigen Satz gelten lassen konnte. Auf die Art ist ja auch die Gleichung $(-1)^2 = (+1)^2$ eine falsche Gleichung, und die wahre Gleichung diese: $(+1)^2 = (+1)^2$ Aber Herr d'Alenbert nimmt jene mit dem Hrn. Bernoulli als wahr an, und schließt daraus die Folge: $2l - 1 = 2l + 1$, und hieraus weiter, es sey $l - 1 = l + 1$. Ich weiß nicht, wie Hr. d'Alenbert diesem Beweise auf der 185 Seite eine so große Strenge zuschreiben kann, da er selbst den Hauptsatz, woraus alles übrige folgt, für falsch erklärt. Jedoch ich kann mich auf die Prüfung der beyderseitigen Gründe noch nicht einlassen, ich muß zuvörderst die ganze Lehre so vortragen, wie ich sie einsehe, und wie ich glaube, daß sie auseinander gesetzt werden muß, wenn alle Dunkelheit und Verwirrung vermieden werden soll.

Begriffe der negativen und unmöglichen Größen.

§. 5.

Es giebt Begriffe, die einander so entgegen gesetzt sind, daß man von der Geltung des einen auf die Verneinung des andern, und umgekehrt, schließen kann; und dieses entweder schlecht hin, oder in Beziehung auf einen gewissen Hauptbegriff, unter der Bedingung, daß von diesem Hauptbegriff die Rede sey. Unter der Bedingung, z. E. daß der Stand des Quecksilbers im Thermometer sich geändert habe, ist es entweder gestiegen oder gefallen. Und zum Voraus gesetzt, daß die höchste Fläche des Quecksilbers, auf einer nach reaumürscher Art eingetheilten Scale, nicht auf 0 stehe, muß sie entweder über 0 oder unter 0 stehen. Wenn man nun von zweyen solchen unter einem gemeinschaftlichen Hauptbegriff einander entgegen gesetzten Begriffen den einen anzeigen soll;

soll; so kann dieß auf eine gedoppelte Art geschehen. Man kann ihn einmal durch die Worte anzeigen, welche diesen Begriff gewöhnlicher maßen bezeichnen: man kann ihn auch durch die Verneinung des ihm entgegen gesetzten ausdeuten. Es ist gleich viel, ob ich sage: das Quecksilber im Thermometer sey von der 0 an gerechnet 3 Grade herunter gegangen, oder ob ich mich so ausdrücke: es sey von der 0 an gerechnet 3 Grade weggegangen, aber nicht aufwärts. Die Verneinung steckt hier nur im Ausdruck, und es wird in der That durch die Verneinung der einen Sache die ihr entgegen gesetzte gesetzt. Wendet man diese allgemeinen Betrachtungen auf das, was Größe heißt, gehörig an, so hat man den Begriff einer negativen Größe.

§. 6.

Es giebt Größen, die unter einem gemeinschaftlichen Begriff stehen, dabey aber einander so entgegen gesetzt sind, daß durch die Verneinung der einen die andere gesetzt wird, und umgekehrt. Diejenige von zweyen einander entgegen gesetzten Größen, welche man durch Verneinung der ihr entgegen gesetzten anzeigt, heißt eine negative Größe. Man sollte richtiger sagen: eine negativ ausgedruckte Größe. Die ihr entgegen gesetzte, wird so dann ohne Verneinung ausgedruckt, und man nennt sie eine positive Größe, da man sie eigentlich richtiger eine positiv ausgedruckte Größe nennen müßte. Das Negative steckt hier also keinesweges in der Größe, sondern blos in dem Ausdruck, der die Größe bezeichnet. Hat man von A nach B (1 Fig.) eine gerade Linie vorwärts gezogen, so kann man eben diese Linie auch rückwärts von A nach C verlängern. Soll man nun auf dieser Linie von A an gerechnet ein Stück, das z. E. drey Fuß lang ist, abschneiden, so kann dieß auf eine doppelte Art geschehen, sowohl vorwärts als rückwärts. Gesezt man verlangt, es sollen von A an

ge-

gerechnet rückwärts drey Fuß abgeschnitten werden, so kann man dieß auch so ausdrücken: Schneide von A an gerechnet 3 Fuß ab, aber nicht vorwärts. Es werden diese nicht vorwärts abgeschnittene 3 Fuß das Stück AE ausmachen, und das heißt in algebraischer Sprache: es sey $AE = - 3$ Fuß. Nun ist zwar AD eben soviel als AE, in Absicht auf die Größe, aber nicht in Absicht der Lage; denn es ist AD der Linie AE der Lage nach entgegen gesetzt. Wird also AE verneint ausgedrückt, so muß man AD ohne Verneinung oder positiv ausdrücken, und das heißt in algebraischer Sprache, es sey $AD = + 3$ Fuß. Ich darf bey diesen Erklärungen ja den Einwurf wohl nicht fürchten, als hätte ich den algebraischen Sprachgebrauch verlassen. Die Herren Hausen, von Segner, und Kästner tragen in ihren Lehrbüchern, und der Herr Collegienrath Nepinus zu Petersburg in einer zu Kistock im Jahr 1754. herausgegebenen Schrift de notatione quantitatis negativæ diese Begriffe eben so vor. Deswegen hoffe ich, berechtigt zu seyn, diese Erklärung von der negativen Größe als ungezweifelt richtig zum Grunde zu legen.

§. 7.

Die ganze mathematische Erfindungskunst beschäftigt sich damit, Regeln zu geben, wie man aus einigen bekannten Größen, und deren bekannten Verhältnissen untereinander, und gegen gewisse unbekannte Größen, die letztern finden könne. Man kann aber bekannter massen alle Größen, wenn blos von ihrem Verhältnisse die Rede ist, sowohl durch Zahlen als durch Linien ausdrücken, und die algebraischen Zeichen sind so allgemein, daß jede algebraische Formel so gut gewisse geometrische Constructionen, als arithmetische Operationen anzeigt, nachdem die Buchstaben entweder Linien oder Zahlen bedeuten. Deswegen lassen sich zwei entgegen gesetzte Größen allemal durch zwei gerade Linien vorstellen,

len, die nach entgegen gesetzten Richtungen liegen, und sobald eine mathematische Aufgabe in eine Gleichung gebracht ist, sobald läßt sie sich als eine geometrische Aufgabe ansehen, wobey es darauf ankommt, aus gegebenen Linien eine oder mehrere unbekannte Linien zu finden. Hiebey ist nun folgender Umstand allemal vorzüglich in Betrachtung zu ziehen. Man will entweder bloß wissen, wie groß eine gesuchte Linie sey, oder man will zugleich ihre Lage kennen. Eben dieser Umstand kommt bey jeder andern mathematischen Aufgabe in Betrachtung. Man will entweder bloß wissen, wie groß die gesuchte Größe sey: oder man will zugleich ihre besondre Beziehung gegen andere Größen kennen, ob sie ihnen nämlich entgegen gesetzt, oder nicht entgegen gesetzt sey. Und in dem letzten Fall muß auch dieser Umstand bey den gegebenen Größen, und ihren Verhältnissen gegen einander, in Betrachtung kommen. Wenn der Astronom die Declination eines Sterns sucht, so genügt es ihm nicht, überhaupt zu wissen, wie groß sein Abstand vom Aequator sey; er will zugleich wissen, ob er ihn auf der nördlichen oder der südlichen Halbkugel suchen müsse; ob die Declination des Sterns nördlich oder südlich sey.

§. 8.

Wenn man diese Betrachtungen auf die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen anwendet, so ist leicht zu erachten, daß alles, was davon in den Anfangsgründen der Mathematik gelehret wird, näher eingeschränkt werden müsse, sobald der Unterschied positiver und negativer Größen in Betrachtung kommt. Vergleicht man in den Anfangsgründen zwei Größen A und B miteinander, so will man bloß wissen, wie groß die eine gegen die andere sey: in der Algebra aber will man zugleich wissen, ob A und B einander entgegen gesetzt sind oder nicht. Hieraus ergiebt sich eine Einschränkung des Begriffs von der Gleichheit zweier
Ver-

Verhältnisse, oder der Proportion, worauf man um so mehr bey dieser Streitigkeit Betracht nehmen muß, da die ganze Lehre von den Logarithmen von der Lehre von den Verhältnissen abhängt. Wenn A gegen B eben so groß ist, als C gegen D, so ist das Verhältniß A B dem Verhältniß C D gleich, und es sind A, B, C, D, vier Proportionalgrößen. Dieß lehren die Anfangsgründe, und in den Anfangsgründen wird nie ein anderer Begriff von der Proportion gebraucht. Die Algebra aber, welche allemal auf die specielle Beziehung des Gegensatzes oder Nichtgegensatzes zweier Größen gegen einander mit siehet, erfordert zur Gleichheit zweier Verhältnisse noch mehr. Sind A und B einander entgegen gesetzt, so müssen auch C und D einander entgegen gesetzt seyn, sind A und B einander nicht entgegen gesetzt, so muß auch eben dieß von C und D gelten. So ist

$$+ A : + B = + C : + D.$$

$$+ A : + B = - C : - D.$$

$$+ A : - B = + C : - D.$$

$$+ A : - B = - C : + D.$$

Keinesweges aber $+ A : + B = + C : - D$, wenn gleich für sich betrachtet A gegen B so groß ist, als C gegen D. Wollte man bey Vergleichung zweier Größen gegen einander die Größe der einen gegen die andere ihre relationem quantitativam, und ihre Beziehung gegen einander, vermöge welcher sie entweder entgegen gesetzt sind oder nicht, ihre relationem qualitativam nennen; so könnte man obige Regel so ausdrücken: Wenn zwei Größen sich eben so, wie zwei andere verhalten sollen, so muß zwischen den beyden ersten, und den beyden letzten nicht nur einerley relatio quantitativa, sondern auch einerley relatio qualitativa Statt haben. Diese Regel ist so wichtig, daß man die ganze Algebra über einen Haufen wirft, wenn man sie läugnet.

§. 9.

Durch die algebraische Auflösung einer Aufgabe findet man nie die gesuchte Größe selbst, sondern nur ein Zeichen der gesuchten Größe. Ja noch mehr: man findet eigentlich nur ein Zeichen, welches das Verhältniß der gesuchten Größe gegen die als bekannt angenommene Einheit ausdrückt. Deswegen muß die algebraische Formel nicht nur die relationem quantitativam, sondern zugleich die relationem qualitativam gegen die angenommene Einheit ausdrücken. Dieß ist die Ursache, warum die Regeln der Buchstabenrechnung zugleich zeigen müssen, wie die Zeichen + und — der gegebenen Größen die Zeichen der gesuchten bestimmen. Wenn die Einheit positiv genommen wird, so giebt die Multiplication zweyer Factoren mit einerley Zeichen, ein positives Product, und entgegen gesetzte Factoren geben ein negatives Product. Würde die Einheit negativ genommen, so würde just das Gegentheil dieser Regel gelten. Aber man nimmt bey algebraischen Rechnungen die Einheit allemal positiv an. Wiederum ein Hauptumstand, darauf die Sicherheit aller algebraischen Operationen beruhet. Die bekannten Regeln der Multiplication

$$+ a \times + b = + ab$$

$$- a \times - b = + ab$$

$$+ a \times - b = - ab$$

$$- a \times + b = - ab$$

folgen aus den Proportionen

$$+ 1 : + a = + b : + ab$$

$$+ 1 : - a = - b : + ab$$

$$+ 1 : + a = - b : - ab$$

$$+ 1 : - a = + b : - ab$$

In keiner dieser Proportionen darf man das Zeichen des letzten Gliedes ändern, wofern die Proportion nicht falsch werden soll.

Men

Ändert man aber das Zeichen der Einheit, und schreibt — 1 statt + 1; so muß man in allen vier Proportionen auch das Zeichen des letzten Gliedes ändern.

§. 10.

Es wird nicht undienstlich seyn, von dieser allgemeinen Theorie eine Anwendung auf die Geometrie zu machen, indem hierdurch alles so augenscheinlich deutlich wird, daß nicht die geringste Dunkelheit übrig bleibt. Zu dem Ende sollen a und b ein paar Linien bedeuten; so ist bekanntermaßen das Product dieser beyden Linien nichts anders, als die vierte Proportionallinie zu einer Linie, die man für die Einheit annimmt, und den beyden gegebenen a und b : geometrisch findet man, wie aus den Anfangsgründen bekannt ist, diese vierte Proportionallinie auf folgende Art. Auf dem einen Schenkel CA (2 Fig.) eines willkührlich gezeichneten geradlinichten Winkels ACB schneide man die beyden ersten Glieder der Proportion ab, nämlich $CD = 1$, $CE = a$, auf dem zweyten Schenkel CB trage man das dritte Glied $CF = b$ auf, ziehe DF , und hierauf EG mit DF Parallel, so ist

$$CD : CE = CF : CG,$$

$$\text{oder } 1 : a = b : CG,$$

also $CG = ab$. Nun ist Cb in Absicht auf CB negativ, so wie Ca gegen CA negativ ist. Schneidet man also CE auf Ca ab, so ist nunmehr $CE = -a$, und wenn man CF auf Cb abschneidet, so wird $CF = -b$ seyn. Es ergiebt sich in allen diesen Fällen einerley CG der Größe nach, aber nicht der Lage nach. In dem vorigen Fall hatte man $CD = +1$, $CE = +a$, und $CF = +b$ genommen, daher fiel CG auf CB , so daß $CG = +ab$ ward. Nimmt man nun $CD = +1$, $CE = -a$, $CF = -b$ (3 Fig.) und verfähret übrigens, wie vorhin, so fällt CG noch auf CB , und es bleibt dennoch $CG = +ab$, wie die allgemeine Proportion + 1:

$a = b : + ab$ verlangt. Nimmt man drittens $CD = + 1$, $CE = + a$, $CF = - b$ (4 Fig.) und verfährt übrigens noch wie vorhin, so bleibt nicht nur $CD : CE = CF : CG$, und also $CG = ab$, sondern es fällt nun auch CG auf Cb , so das nunmehr $CG = - ab$ wird. Eben dieß erfolgt, wenn man $CD = + 1$, $CE = - a$, und $CF = + b$ (5 Fig.) abschneidet, und sodann das obige Verfahren anbringt, es bleibt zwar überhaupt $CD : CE = CF : CG$, aber CG fällt auf Cb , und wird negativ, wie im vorigen Fall. Wenn man die Einheit CD nicht positiv, sondern negativ nimmt, das ist, wenn man sie nicht auf CA , sondern auf Ca abschneidet; so wird in den ersten beyden Fällen CG auf Cb und in den beyden letztern Fällen auf CB fallen. Vielleicht hat es das Ansehen, als ob ich bey gegenwärtiger Untersuchung zu weit in die ersten Anfangsgründe zurück gehe; und in der That würde ich mir selbst diesen Vorwurf machen, wenn die Lehren, worauf es bey der Streitigkeit über die Logarithmen negativer Größen ankommt, in allen Lehrbüchern mit der nöthigen Deutlichkeit auseinander gesetzt würden. Allein ich habe dieses nur selten, außer bey den obangeführten Schriftstellern, angetroffen, und die Folge wird zeigen, daß die Streitfrage sich schwerlich in ihr gehöriges Licht setzen lasse, wenn man über die von mir eben jetzt auseinander gesetzten analytischen Grundbegriffe sich nicht völlig bestimmt erklärt.

§. II.

Man pflegte wohl ab das Rectangel der Linien a und b zu nennen, und diese Redensart ist in soferne richtig, in wie ferne das Rectangel, dessen Seiten die Linien a und b sind, sich gegen ein Quadrat, dessen Seite $= 1$ ist, verhält, wie das Product ab in Zahlen ausgedruckt zur Einheit. Uebrigens aber bedeutet ab eigentlich allemal eine Linie, nie eine Fläche. So drückt also
auch

auch a zwar das Verhältniß eines Quadrats, dessen Seite $= a$ ist, gegen ein Quadrat aus, dessen Seite $= 1$; eigentlich aber ist a nichts anders, als die dritte Proportionallinie zu 1 und a , oder auch zu 1 und $-a$. Ueberhaupt zu sagen giebt es zwischen zweyen nicht entgegen gesetzten Größen zwey der Lage nach unterschiedene mittlere Proportionallinien: Dagegen giebt es zwischen zweyen entgegen gesetzten Größen gar keine mittlere Proportionallinie. Zwischen $+1$ und $+A$ ist sowohl $+\sqrt{A}$, als auch $-\sqrt{A}$ eine mittlere Proportionallinie; aber zwischen $+1$ und $-A$ fällt gar keine. Sie müßte entweder positiv oder negativ, oder $= 0$ seyn, aber von diesen dreyen Fällen kann keiner bestehen, wofern nicht A selbst $= 0$ ist. Die Operationen, wodurch eine solche mittlere Proportionallinie gefunden werden müßte, widersprechen einander. Solche Größen aber, die man durch widereinander streitende Operationen finden müßte, heißen in der Analysis unmögliche Größen. Von der Art wäre $\sqrt{-A}$. Alles dieses macht die geometrische Construction evident. Es sey $AD = +1$, und $DB = +A$ (6 Fig.) man theile AB bey C in zwey gleiche Theile, und beschreibe mit dem Halbmesser AC einen Kreis, ziehe darauf durch D eine Perpendicullinie auf AB , und verlängere sie, bis sie den Kreis trifft. Das Stück zwischen D und dem Durchschnittpunct mit dem Kreis ist zwischen $+1$ und $+A$ die mittlere Proportionallinie. Solcher Perpendicul giebt es aber zwey, nämlich DE und DF , also verstatet die Aufgabe eine doppelte Auflösung. Nimmt man aber $AD = +1$, $DB = -A$ (7 Fig.) und verfähret wie vorhin, so kann die Perpendicullinie DE oder DF den Kreis nicht treffen, demnach ist es unmöglich zwischen $+1$ und $-A$ eine mittlere Proportionallinie zu finden: Das heißt, $\sqrt{-A}$ ist eine unmögliche Größe. Man weiß, daß es mit allen Wurzeln gerader Exponenten aus negativen Größen eben die Bewandniß habe, und eben diese Ausziehung der Wurzeln aus ne-

gativ

gativen Größen hat die Algebraisten zuerst auf die Begriffe unmöglicher Größen geleitet. Man muß aber nicht glauben, daß allein die Ausziehung der Wurzeln zuweilen eine unmögliche Operation sey. Wenn überhaupt eine algebraische Formel so beschaffen ist, daß die Operationen, welche vermöge dieser Formel vorgenommen werden müssen, einander widersprechen, so drückt sie allemal eine unmögliche Größe aus.

§. 12.

Diese bisherige Erörterung der Begriffe von der Eintheilung der Größen in positive und negative, muß ich mit einigen Anmerkungen beschließen, die um so viel wichtiger sind, je öfter man bey der Streitigkeit von den Logarithmen negativer Größen dagegen verstoßen hat. Das weitsichtigste Auge, welches das größte Feld der entlegensten Sachen sehr deutlich übersieht, entwöhnet sich, nahe liegende Kleinigkeiten deutlich genug wahrzunehmen. Fast kommt es mir so vor, daß es bey dieser Streitigkeit auf einige kleine Umstände ankomme, die dem Auge der Geometer so nahe liegen, daß die scharfsichtigsten unter ihnen, die das ganze Feld der Mathematik bis auf die entferntesten Gränzen übersehen, sie nur deswegen nicht bemerkt haben. Wenn es seine Richtigkeit hat, daß alles, was von Vergleichung der Größen untereinander in den Anfangsgründen gelehrt wird, näher eingeschränkt werden müsse, wenn der Unterscheid positiver und negativer Größen in Betrachtung kommt; so kann selbst der Begriff der Gleichheit nicht ohne Einschränkung in der Algebra gebraucht werden. Ueberhaupt sind ein paar Linien gleich groß, wenn man sie in Ansehung ihrer Größe für einander setzen kann. Dieser Umstand kann auch bey entgegen gesetzter Lage der Linien Statt haben, und dennoch kann man in der Algebra zwey entgegen gesetzte Größen nie gleiche Größen nennen, wenn sie gleich als Größen betrachtet, ohne

ohne auf die Beziehung des Gegensatzes zu sehen, einander gleich sind. Es ist keinesweges $+a = -a$ wenn gleich a einerley Linie der Größe nach bedeutet. In der Algebra sind nur diejenigen Linien gleich, die sowohl in Ansehung der Größe, als auch in Ansehung der Lage für einander gesetzt werden können. Ohne Zweifel ist $+a = +a$, wäre nun auch $+a = -a$, so müßte die Proportion richtig seyn $+a : +a = +a : -a$, welches dem 8 S. entgegen ist. Jedes Quadrat hat zwei Wurzeln, die zwar als Größen betrachtet, gleich groß, aber einander entgegen gesetzt sind: kann man denn wohl so schließen: es ist $(-a)^2 = (+a)^2$, folglich $-a = +a$? Freylich hat die Regel ihre Richtigkeit: wenn zwey Quadrate gleich sind, so sind ihre Wurzeln gleich. Aber wenn man diese Regel beweist, so denkt man überall nicht an den Unterschied positiver und negativer Größen. Sie muß also in der Algebra so angewandt werden, wie es die Natur der Sache leidet. Die Regel redet bloß von der Gleichheit der Quadrate und Wurzeln, in soferne sie Größen sind, nicht aber in soferne sie die specielle Beziehung des Gegensatzes oder Nichtgegensatzes gegen einander haben können. Soll demnach diese Regel in der Algebra gebraucht werden, so kann sie keinen andern Sinn, als diesen haben: Wenn zwey Quadrate gleich sind, so ist die positive Wurzel des einen so groß, als die positive Wurzel des andern, und die negative Wurzel des ersten gleich der negativen Wurzel des zweyten. Es hat $(-a)^2$ so gut die Wurzel $+a$ als $-a$, und $(+a)^2$ so gut die Wurzel $-a$ als $+a$, und aus der Gleichung $(-a)^2 = (+a)^2$ folgt nichts weiter als dieses, es sey $\pm a = \pm a$. Kann man also wohl mit denen Herren Bernoulli und d'Alenbert schließen: Weil $(-a)^2 = (+a)^2$ so sey $2 \log. (-a) = 2 \log. (+a)$, und folglich $\log(-a) = \log(+a)$. Ich denke, man setzt hiebey stillschweigend voraus, es habe $(-a)^2$ keine andere Wurzel, als $-a$, und $(+a)^2$ keine andere Wurzel als $+a$,

denn sonst würde die Schlußfolge so aussehen müssen: weil $(-a)^2 = (+a)^2$, (das heißt nichts anders, als weil $+a^2 = +a^2$) so ist $2 \log(+a) = 2 \log(-a)$: aber das sind zwey besondere Sätze $2 \log(+a) = \log(+a)$, und $2 l(-a) = 2 l(-a)$; dieß giebt denn weiter keine andere, als diese Folgen: $l+a = l+a$ und $l-a = l-a$. Doch ich werde im Folgenden die hier verborgen liegenden Fehlschlüsse noch ausführlicher erörtern. Jetzt wende ich mich zur nähern Aufklärung der Begriffe von den Logarithmen.

Begriffe der Logarithmen.

§. 13.

Es giebt eigentlich keine Logarithmen der Größen oder Zahlen für sich betrachtet, es giebt nur Logarithmen der Verhältnisse. Dieß liegt schon in der grammaticalischen Bedeutung des Wortes *ἀριθμὸς λόγων*. Man kann sich jedes Verhältniß als ein solches vorstellen, das aus mehreren andern zusammen gesetzt ist, und man weiß auch, daß alle diese Verhältnisse, woraus man ein anders zusammen setzt, gleich groß seyn können. In dem letzten Fall, wird sich eine Zahl angeben lassen, welche ausdrückt, wie oft das einfach angenommene Verhältniß in dem zusammengesetzten enthalten sey. So ist das Verhältniß 2:1 in dem Verhältniß 16:1 viermal enthalten. Die Zahl vier drückt hier die Anzahl dergleichen Verhältnisse aus, welche das zusammengesetzte ausmachen. Man kann hier also das Verhältniß 2:1 als das Maasß des Verhältnisses 16:1 ansehen, indem die Zahl vier ebenso aus der Einheit entstehet, wie das Verhältniß 16:1 aus dem einfachen 2:1. So wie aber jedes Maasß überhaupt willkürlich ist, so ist es auch ganz willkürlich, welches Verhältniß man als einfach ansehen, und als ein Maasß der übrigen betrachten will. Diesem

fernach ist die Vergleichung der Verhältnisse unter einander der Art, wie man gerade Linien, und überhaupt alle Größen von einerley Art mit einander vergleicht, völlig ähnlich. Das Verhältniß, welches man als das einfache angenommen hat, wird nicht in jedem andern gegebenen Verhältniß, so man mit dem einfachen vergleicht, genau etlichemal enthalten seyn, und in diesem Fall hilft man sich eben so, wie bey der Ausmessung gerader Linien, wenn die angenommene Einheit in der auszumessenden Linie nicht etlichemal ganz genommen enthalten ist. Man stellt sich nämlich das einfache Verhältniß wiederum als aus andern kleinern zusammen gesetzt vor, die man als Theile des ganzen betrachtet; und wenn sodann ein solcher Theil des einfachen Verhältnisses in dem andern etlichemal genau enthalten ist; so läßt sich eine gebrochene Zahl angeben, welche aus der Einheit eben so entstehet, wie jenes Verhältniß aus dem angenommenen einfachen sich zusammen setzen läßt. So ist z. E. das Verhältniß $32:1$ aus dem Verhältniß $16:1$ so zusammen gesetzt, wie die Zahl $\frac{1}{2}$ aus der Einheit. Ist kein Theil des einfachen Verhältnisses in demjenigen, so damit verglichen wird, genau etlichemal enthalten, und wenn man auch das einfache in noch so kleine Theile eintheilet; so wird die Größe dieses Verhältnisses gegen das einfache sich nicht anders, als durch eine Irrationalzahl ausdrücken lassen. In allen diesen Fällen aber heißt diejenige Zahl, welche die Größe eines Verhältnisses $A:B$ gegen das angenommene einfache ausdrückt, oder welche aus ihrer Einheit so entstehet, wie das Verhältniß $A:B$ aus dem einfachen zusammen gesetzt ist, der Logarithmus des Verhältnisses $A:B$. In dem besondern Fall, wenn $B=1$ ist, heißt der Logarithmus des Verhältnisses $A:1$ der Kürze wegen der Logarithmus der Größe, oder der Zahl A .

§. 14.

Man kann ein für allemal ein gewisses Verhältniß $a:1$, als das einfache annehmen, und die Verhältnisse aller übrigen Zahlen zur Einheit damit vergleichen. Auf solche Art wird eine Reihe von Logarithmen bestimmt, die einer Reihe von bestimmten Zahlen oder Größen zugehört. Eine solche Reihe von Logarithmen, mit ihren zugehörigen Zahlen, macht ein logarithmisches System aus. Man kann also sagen, ein jedes Logarithmensystem sey willkürlich, weil es willkürlich ist, wie groß man das einfache Verhältniß $a:1$ annehmen will. Allein dem ohnerachtet bleibt doch zwischen den Logarithmen und ihren zugehörigen Zahlen eine nothwendige Verbindung, in soferne es nothwendig ist, daß eine bestimmte Zahl diesen und keinen andern Logarithmum haben müsse, sobald festgesetzt ist, wie groß das einfache Verhältniß $a:1$ seyn soll. Man kann auch sagen, jedes System der bekannten trigonometrischen Linien sey willkürlich, weil es willkürlich ist, wie groß man den Halbmesser des Kreises annehmen will, sowohl bey der geometrischen Verzeichnung, als auch bey der Berechnung. Allein sobald der Halbmesser bestimmt ist, sobald ist es auch nothwendig, daß ein jeder bestimmter Winkel diesen bestimmten Sinus, Cosinus, u. s. f. und keinen andern haben müsse. Es ist keinem Mathematiker unbekannt, daß beyde Systeme der Logarithmen und trigonometrischen Linien die größte Aehnlichkeit mit einander haben. Wenn die Halbmesser gleich verschieden sind, so sind doch die trigonometrischen Linien, die zu einerley Winkel gehören, in einem beständigen Verhältniß. Und eben so ist es mit verschiedenen Logarithmensystemen beschaffen. Wenn gleich die Verhältnisse verschieden sind, die man als die einfachen annimmt, so stehen dennoch die Logarithmen, die zu einerley Verhältniß gehören, in einem beständigen Verhältniß.

Man

Man nehme zwey Systeme willkührlich an, das heißt, man setze willkührlich fest, wie groß in jedem das einfache Verhältniß seyn soll, so wird dieses sogleich in die Augen fallen. In dem einen sey $a:1$, in dem andern $a^n:1$ das einfache Verhältniß, so werden die Systeme diese seyn:

1. System.

Die Zahlen

$1, a, a^2, \dots, a^n, \dots, a^{2n}, \dots, a^{3n}, \dots, a^{4n}, \dots, a^{5n}, \dots, a^{6n}, \dots, a^{rn}$

Die Logarithmen

$0, 1, 2, \dots, n, \dots, 2n, \dots, 3n, \dots, 4n, \dots, 5n, \dots, 6n, \dots, rn$

2. System.

Die Zahlen

$1, a, a^2, \dots, a^n, \dots, a^{2n}, \dots, a^{3n}, \dots, a^{4n}, \dots, a^{5n}, \dots, a^{6n}, \dots, a^{rn}$

Die Logarithmen

$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1, \dots, 2, \dots, 3, \dots, 4, \dots, 5, \dots, 6, \dots, r$

Diesemnach ist im 1 System $l(a:1) = 1$ im zweyten aber $l(a:1) = \frac{1}{n}$; im 1 System ist $l(a:1)^2 = 2$, und im zweyten System ist $l(a:1)^2 = \frac{2}{n}$ überhaupt ist im ersten System $l(a:1)^{rn} = rn$, und im zweyten wird $l(a:1)^{rn} = r$. Daß also dieß beständige Verhältniß zweyer Logarithmen beyder Systeme, die einem und eben demselben Verhältnisse zugehören, $rn:r = n:1$ ist.

§. 15.

Ich bin um des Folgenden willen genöthiget, etwas weiter in diese Theorie hinein zu gehen, weil ich glaube, daß der eigentliche Sinn der Streitfrage sich schwerlich genau festsetzen lasse, wofern man nicht alle Umstände in Betrachtung ziehet, die bey wirklicher Berechnung der Logarithmen voraus gesetzt werden. Das ganze Logarithmensystem wird bestimmt, wenn man fest setzt, welches Verhältniß das einfache seyn soll, oder wie groß

die Zahl seyn soll, deren Logarithmus $= 1$ ist, die sodann bekanntermaßen die Basis des Systems genannt wird. Eben dieß geschieht aber auch, wenn man von irgend einer andern Zahl den Logarithmum willkührlich annimmt. Denn da der angenommene Logarithmus ausdrückt, nach welchem Gesetz das Verhältniß dieser Zahl zur Einheit aus dem einfachen entstanden seyn soll, so wird hiedurch zugleich das einfache Verhältniß, und folglich die Basis des Systems bestimmt. Es ist einerley, ob ich annehme der $\log. a^n$ soll $= 1$, oder ob ich fest setze, der $\log. a^{r^n}$ soll $= r$ seyn. Nun sey der Logarithmus des Verhältnisses $1 + A : 1$, oder welches einerley ist, der Logarithmus der Zahl $1 + A = \lambda$ genommen; so bringt man durch folgende Schlüsse heraus, wie aus diesen gegebenen Stücken der Logarithmus jeder andern Zahl gefunden werde. Man theile das Verhältniß $1 + A : 1$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und diese Zahl sey m . Man setze $(1 + A)^{\frac{1}{m}} = 1 + w$, so wird w desto kleiner seyn, je größer m genommen wird, und für $m = \infty$ wird $w = 0$. Man theile jedes andere Verhältniß $1 + B : 1$ in eben so viele gleiche Theile. Ist nun $1 + B = (1 + A)^r$, so wird $(1 + B)^{\frac{1}{m}} = (1 + A)^{\frac{r}{m}} = (1 + w)^r$. Demnach hat man $\frac{1}{m} l(1 + A) = l(1 + w)$ und $\frac{1}{m} l(1 + B) = r l(1 + w)$, welches die Proportion giebt.

$\frac{1}{m} l(1 + A) : \frac{1}{m} l(1 + B) = l(1 + w) = 1 : r = w : rw$. Wird m sehr groß genommen, so ist beynähe $(1 + w)^r = 1 + rw$, so daß $1 + rw$ die letzte von den m mittlern Proportionalzahlen zwischen $1 + B$ und der Einheit, $1 + w$, aber die letzte von den m mittlern Proportionalzahlen zwischen $1 + A$ und 1 ist. Es enthält demnach obige Proportion den bekannten Satz: Wenn man zwey Verhältnisse $1 + A : 1$ und $1 + B : 1$ in eine sehr große Anzahl gleicher Theile eintheilet, und zwar so, daß diese Anzahl der Theile für beyde Verhältnisse einerley ist; so verhalten sich die

Loga

Logarithmen dieser Verhältnisse, wie die Differenzen der letzten beiden mittlern Proportionalglieder von der Einheit. Man kann obige Proportion auch so ausdrücken.

$l(1+A):l(1+B)=mw:mrw$; und weil $(1+A)^{\frac{1}{m}}=1+w$, so wie $(1+B)^{\frac{1}{m}}=1+rw$; so wird $w=(1+A)^{\frac{1}{m}}-1$, und $rw=(1+B)^{\frac{1}{m}}-1$. Diefemnach erhält man

$$l(1+A):l(1+B)=mr(1+A)^{\frac{1}{m}}-1:m(1+B)^{\frac{1}{m}}-1).$$

Da nun beständig voraus gesetzt wird, daß m eine sehr große Zahl sey, so ist

$$(1+A)^{\frac{1}{m}}-1=\frac{1}{m}(A-\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{3}A^3-\frac{1}{4}A^4+\&c.)$$

$$(1+B)^{\frac{1}{m}}-1=\frac{1}{m}(B-\frac{1}{2}B^2+\frac{1}{3}B^3-\frac{1}{4}B^4+\&c.)$$

und folglich wird

$$(1+A):l(1+B)=A-\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{3}A^3-\frac{1}{4}A^4+\&c.:B-\frac{1}{2}B^2+\frac{1}{3}B^3-\&c. \text{ Aber } l(1+A)=\lambda \text{ und } A \text{ selbst sind gegeben, folglich wird } A-\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{3}A^3-\&c.:B-\frac{1}{2}B^2+\frac{1}{3}B^3-\&c.=\lambda:$$

$$l(1+B), \text{ und } l(1+B)=\frac{\lambda}{A-\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{3}A^3-\&c.} (B-\frac{1}{2}B^2+\frac{1}{3}B^3-\frac{1}{4}A^4-).$$

Ist die gegebene Zahl $1+A=b$, und b die Basis des Systems, so wird $\lambda=1$, folglich $l(1+B)$

$$=\frac{1}{(b-1)-\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{3}(b-1)^3-\&c.} (B-\frac{1}{2}B^2+\frac{1}{3}B^3-\frac{1}{4}B^4+\&c.)$$

Dies ist der bekante allgemeine Ausdruck eines jeden Logarithmen im System, dessen gegebene Basis $=b$ ist, und man weiß,

daß der beständige Factor $\frac{1}{(b-1)-\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{3}(b-1)^3-\&c.}$ der Modulus des Systems heiße.

§. 16.

Die Logarithmen sind Verhältnißmaasse in eben dem Verstande, in welchem die Zirkelbogen Winkelmaasse sind. So wie in einerley Zirkel die Winkel verschiedener Sektoren sich wie ihre

ihre Exponenten verhalten, so verhalten sich auch, in einerley Logarithmensystem, verschiedene Verhältnisse wie ihre Logarithmen. Hr. d'Alenbert ist zwar mit dieser Redensart nicht zu frieden: mir aber kommen die Gründe, weswegen er sie will verworfen wissen, sehr schwach vor. Er sagt auf der 200 Seite: C'e feroit une grande erreur de penser, que les Logarithmes expriment les rapports; ce feroit, comme si on disoit, que $\sqrt[2]{2}$ ou $\sqrt{2} = \frac{1}{2} \log. 2$, ou en general, que $\frac{a}{b} = \log a - \log b$. Aber wer hat das letztere jemals behauptet, und wie kann Herr d'Alenbert den Satz des Hrn. Eulers: die Logarithmen verhalten sich, wie ihre zugehörigen Verhältnisse, so erklären? Wenn man behauptet, daß die Bogen Maaße ihrer zugehörigen Winkel sind, behauptet man damit, daß jeder Bogen seinem zugehörigen Winkel gleich sey? Dieß ist noch niemanden in den Sinn gekommen, da Winkel und Bogen heterogene Größen sind. Es heißt diese Redensart vielmehr so viel: Wenn ein Winkel = 1 gesetzt wird, und sein zugehöriger Bogen auch, so ist die Zahl, welche jeden andern Winkel aus seiner Einheit ausdrückt, eben so groß als die Zahl, die den zugehörigen Bogen aus seiner Einheit ausdrückt. Eben diesen und keinen andern Sinn hat die Redensart: Die Logarithmen sind Maaße ihrer zugehörigen Verhältnisse. Nimmt man ein Verhältniß als einfach an, um die Größe aller übrigen gegen dieß Verhältniß zu bestimmen, und setzt man den Logarithmum des einfachen Verhältnisses = 1, so verhält sich jedes Verhältniß zu dem einfachen, wie der zugehörige Logarithmus gegen die Einheit; oder das Verhältniß ist gegen das einfache so groß, als der zugehörige Logarithmus gegen die Einheit. Die einzige Ursache, warum Herr d'Alenbert diese Redensart mißbilliget, ist wohl diese, weil er die Vergleichung der Verhältnisse, und die Vergleichung ihrer Exponenten, als einerley Sache betrachtet, da doch die Vergleichung

der

der Verhältnisse gegen einander ganz etwas anders ist, als die Vergleichung der Exponenten. Ich muß dieses aus folgenden Worten schließen, die ich auf eben der 200 Seite der Opusculs mathematiques lese: En effet le cas de l'égalité des rapports est le seul, ou les logarithmes soient entr'eux comme les rapports. Ainsi on peut dire, que le logarithme de $\frac{1}{2}$ est à celui de $\frac{2}{4}$ comme $\frac{1}{2}$ est à $\frac{2}{4}$, mais on ne dira jamais, qu'en tout autre cas $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = 1a - 1b : 1c - 1d$. Verstehet man durch $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die Quotienten, welche heraus kommen, wenn a durch b , und c durch d dividirt wird, so kann man freylich nicht sagen, es sey $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = 1a - 1b : 1c - 1d$. Dieß hat aber weder Herr Euler, noch sonst irgend ein anderer je behauptet. Wer könnte wohl auf die Gedanken kommen, daß 3. E. im briggschen System $\frac{10}{1} : \frac{100}{1} = 1 : 2$ sey, wenn $\frac{10}{1}$ die Zahl 10 und $\frac{100}{1}$ die Zahl 100 bedeuten soll. Die ganze Sache wird hoffentlich durch folgende Betrachtung in ihr völliges Licht gesetzt, und die von Hrn. Euler eingeführte Redensart von allem Zweifel befreyet werden können.

§. 17.

Der Exponent eines Verhältnisses, oder der Quotient, welcher heraus kommt, wenn man ein Glied durch das andere dividirt, drückt keinesweges die Größe des Verhältnisses, sondern vielmehr die Größe des einen Gliedes, gegen das andere aus. So giebt 15 durch 3 dividirt den Quotienten 5, und diese Zahl 5 ist der Exponent des Verhältnisses 15 : 3, oder wie man es auch schreibt $\frac{15}{3}$. Demnach ist zwar der Bruch $\frac{15}{3} = 5$, und 15 ist gegen 3 so groß, als 5 gegen 1. Aber keinesweges heißt dieß eben so viel, als wenn man sagt, das Verhältniß 15 : 3 sey = 5. Bekanntermaßen kann man nie sagen, wie groß eine Sache sey, wenn

wenn man sie nicht mit einer andern, die mit ihr von einerley Art ist, vergleicht, und deren Größe als bekannt voraus gesetzt wird. Man kann nur ausdrücken, wie groß eine Sache gegen eine andere sey, deren Größe man schon kennet, nicht aber, wie groß sie für sich betrachtet sey. Die Frage: wie lang ist eine Ehle? läßt sich nicht beantworten, wofern ich nicht etwa sage, eine Ehle sey 2 Fuß, oder 24 Zoll lang; dann aber gebe ich nicht an, wie groß eine Ehle für sich betrachtet, sondern wie lang sie gegen die Länge eines Fußes oder eines Zolles sey. Wer nicht weiß, wie lang ein Fuß, wie lang ein Zoll sey, hört nichts verständliches, wenn ich ihm sage, eine Ehle sey 2 Fuß oder 24 Zoll lang; er ist genöthiget weiter zu fragen: wie lang ist ein Fuß? wie lang ist ein Zoll? und ich mag ihm antworten, was ich will, so wird er fortfahren müssen zu fragen, bis ich zuletzt auf eine Länge komme, die er kennet, oder bis ich ihm sinnlich zeige, wie lang die Länge sey, damit ich die Vergleichung zuletzt angestellet habe. Fragt man demnach, wie groß ist das Verhältniß $a:b$, so kann man gar nicht antworten, wofern man nicht dieß Verhältniß mit einem andern bekannten vergleicht und ausdrückt, wie groß das Verhältniß $a:b$ gegen dieses letztere sey. Die Frage: wie groß ist a gegen b , ist aber von der vorigen Frage sehr unterschieden. Die Antwort auf diese letzte Frage, giebt die Division von a durch b . So groß, als der Quotient oder der Bruch $\frac{a}{b}$ gegen 1 ist, so groß ist a gegen b . Dieß ist es aber gar nicht, was man wissen will, wenn man fragt, wie groß das Verhältniß $a:b$ sey. Diese Frage beantwortet der Logarithmus des Verhältnisses, und es ist das Verhältniß $a:b$ gegen das einfache so groß, als $1a - 1b$ gegen die Einheit. So ist auch das Verhältniß $c:d$ gegen das einfache so groß, als $1c - 1d$ gegen die Einheit. Aber beyde Proportionen

Das

Das Verh. $\frac{a}{b}$: einfachen $= la - lb : 1$.

Das einfache: verhält $\frac{c}{d} = 1 : lc - ld$

geben die dritte: das Verh. $\frac{a}{b}$: Verh. $\frac{c}{d} = la - lb : lc - ld$. Dieß heißt nun nicht so viel, der Exponent des Verhält. $\frac{a}{b}$: verhalte sich gegen den Exponenten des Verh. $\frac{c}{d}$ wie $la - lb : lc - ld$; sondern der Sinn ist dieser: das Verh. $\frac{c}{d}$ lasse sich eben so aus dem Verhältniß $\frac{a}{b}$ zusammen setzen, wie $lc - ld$ aus $la - lb$ gemacht werden kann. Man muß nämlich das Verhältniß $\frac{a}{b}$ in so viele gleiche Theile theilen, als $la - lb$ Einheiten oder Theile der Einheit enthält, und von jenen gleichen Theilen des Verh. $\frac{a}{b}$ so viele nehmen, als $lc - ld$ Einheiten oder Theile der Einheit enthält, die den Theilen in $la - lb$ gleich sind. Herr von Leibniz hat bey Gelegenheit seines Streits mit dem Hrn. Bernoulli schon die Anmerkung gemacht, daß die Brüche mit den Verhältnissen nicht schlechthin für einerley zu halten seyn, und das bisherige beweist, das er Recht gehabt habe.

§. 18.

Die Ausmessung der Verhältnisse, vermittelst der Logarithmen, hat übrigens die größte Aehnlichkeit mit der Ausmessung anderer Größen. Von der Verschiedenheit des Maaßes, dessen man sich bey den Messungen bedienet, rührt es her, daß eine und eben dieselbe Größe, bald durch diese, bald durch jene Zahl ausgedrückt wird, nachdem man dieses oder ein anderes Maaß erwählet hat; da dann die Zahlen, welche einerley Größe aus verschiedenen Maaßen ausdrücken, sich umgekehrt, wie diese Maaße

$(1 + B)$, daß also $\log (1 + B) : L (1 + B) = lb : 1 = lb : le$, d. i.
 $\log (1 + B) : L (1 + B) = \text{Verh. } (b : 1) : \text{Verh. } (e : 1)$.

§. 19.

Bei dieser bisherigen Ausführung der Theorie von den Logarithmen ist der Unterscheid der Verhältnisse von mir noch gar nicht in Betrachtung gezogen worden, vermöge dessen ihre Glieder einander entgegen gesetzt seyn können. Ich will der Kürze wegen solche Verhältnisse, deren Glieder nicht entgegen gesetzt sind, wie $+a : +b$, oder $-a : -b$ positive, diejenigen aber, deren Glieder einander entgegen gesetzt sind, wie $+a : -b$, oder $-a : +b$, negative Verhältnisse nennen. Es ist leicht zu erachten, daß dieser Unterscheid mancherley Einschränkungen bey der Theorie von den Logarithmen nothwendig machen werde, da es nun gewiß nicht mehr einerley bleibt, ob das Verhältniß, woraus alle andere zusammen gesetzt werden sollen, positiv oder negativ angenommen wird. Kommt die specielle Beziehung der Glieder gegen einander, vermöge welcher sie entweder einander entgegen gesetzt sind oder nicht, gar nicht in Betrachtung, so sind alle Verhältnisse als positiv anzusehen, und dann läßt sich jedes Verhältniß aus jedem andern zusammen setzen. Es wird nämlich entweder das eine Verhältniß ganz, oder doch ein Theil desselben, in dem andern etlichemal enthalten seyn, wenn man nämlich bey der Theilung jenes Verhältnisses auch bis auf Elementarverhältnisse gehet. Man mag übrigens bey dieser Theilung gehen, so weit man will, so wird jeder Theil allemal wiederum ein positives Verhältniß seyn. Aber es ist noch die Frage, ob sich auch jedes negative Verhältniß aus einem positiven, und umgekehrt jedes positive aus einem negativen zusammen setzen lasse. Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Frage keinesweges bejahet werden könne. Die beyden Verhältnisse $+b : +1$ und $-b^{2^m} : +1$ sind

so beschaffen, daß das letztere aus dem ersten sich gar nicht zusammen setzen läßt, und man kann die Größe des Verhältnisses $-b^{2^m} : +1$ gegen das Verhältniß $+b : +1$ gewiß durch keine mögliche Zahl ausdrücken. Wäre das Verhältniß $(-b^{2^m} : +1) : \text{Verh. } (+b : +1) = \lambda : 1$; so müßte $(-b^{2^m} : +1) = (+b : +1) \lambda$ seyn. Man setze aber statt λ eine mögliche Zahl, welche man will, so wird dieser Gleichung nie ein Genüge geschehen können. Deswegen kann λ keine mögliche Zahl seyn. Eben so erhellet, daß sich das Verhältniß $+b^{2^m} + 1 : +1$ aus dem Verhältniß $-b : +1$ gar nicht zusammen setzen lasse. Die Erinnerung ist so nöthig, daß die ganze Entscheidung der Streitigkeit von den Logarithmen verneinter Größen darauf beruhet.

§. 20.

Hiermit muß ich noch folgende Anmerkung verbinden: Eine positive und eine negative Größe sind entgegengesetzte Größen, wie z. E. $+a$ und $-a$; allein ein positives und ein negatives Verhältniß, sind keinesweges entgegengesetzte Verhältnisse. So ist z. E. das Verhältniß $+a : +1$, keinesweges ein dem Verhältniß $-a : +1$ entgegengesetztes. Entgegengesetzte Größen, müssen für sich betrachtet, unter einem gemeinschaftlichen Hauptbegriff stehen, übrigens aber so beschaffen seyn, daß wenn die eine nach und nach abnimmt, und verschwindet, sie sich in die entgegengesetzte verwandelt. Dieß ist eine allgemein bekannte Sache. Man setze nun das positive Verhältniß $+a : 1$, und lasse a nach und nach abnehmen, so wird dieses Verhältniß schon verschwinden, wenn $a = 1$. Wird $a < 1$, so gehet das Verhältniß $+a : 1$ in den entgegengesetzten Zustand über, ohne daß daraus ein negatives Verhältniß wird. So sind die Verhältnisse $+a : +1$ und $+\frac{1}{a} : +1$ entgegengesetzte für sich gleiche Verhältnisse, eben so, wie $+a$ und $-a$ entgegengesetzte für sich gleiche Größen sind.

Aber

Aber nimmermehr sind $+a: +1$ und $-a: +1$ entgegengesetzte für sich gleiche Verhältnisse. Dadurch daß man $-a$ aus $+a$ macht, setzt man nicht das Verhältniß $-a: +1$ dem Verhältniß $+a: +1$ entgegen, sondern nur die Größe $-a$ der Größe $+a$.

Die Logarithmen negativer Größen sind unmöglich.

§. 21.

Die meisten Streitigkeiten sind so gut als entschieden, sobald man über den eigentlichen Sinn der Streitfrage einig ist. Wenigstens sollte ich glauben, daß in der Mathematik aller Streit aufhören müsse, sobald beyde Partheyen, sowohl über die Bedeutung der einzelnen Worte, als auch über den Sinn des streitigen Sazes völlig einig sind. Mir kommt es so vor, als ob man bey der Streitigkeit über die Logarithmen verneinter Größen es bishero ziemlich verabsäumt habe, den eigentlichen Sinn der Streitfrage (statum controversiæ) genau fest zu setzen. Vielleicht hat man eine gewisse Zweydeutigkeit der Frage: Ob die Logarithmen verneinter Größen möglich sind? gar nicht bemerkt, weil man nicht daran gedacht hat, daß der Logarithmus einer Zahl eigentlich der Logarithmus des Verhältnisses dieser Zahl zur Einheit sey, und daß demnach die Frage so verstanden werden müsse, ob die Logarithmen der Verhältnisse negativer Zahlen zur Einheit möglich seyn? Wer sieht aber nicht, daß diese Frage, so wie sie hier ausgedruckt ist, noch nicht völlig bestimmt sey, sondern alsdann allererst bestimmt beantwortet werden könne, wenn man fest gesetzt hat, ob die positive oder negative Einheit verstanden werden solle. Auf die Frage: ob die Logarithmen der Verhältnisse negativer Zahlen zur negativen Einheit möglich sind? antworte ich mit Ja. Fast kommt es mir so vor, als ob die Herren Bernoulli und d'Alenbert die Streitfrage wenig

nigstens zuweilen in diesem Sinn genommen haben. Manche ihrer Gründe sind so beschaffen, daß sie nichts anders, als dieses beweisen können. Der erste Beweis, womit Hr. d'Alenbert auf der 185 Seite seiner Opuscles Mathematiques seine Meynung zu bestätigen sucht, lautet so: En effet 1^o, puisque les logarithmes repondans à une progression de nombres quelconque sont arbitraires, qui peut empêcher de supposer, que les deux progressions

$$- 1 - 2 - 3 - 4 \text{ \&c.}$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \text{ \&c.}$$

considerées comme de progressions *differentes & independantes* l'une de l'autre ont les memes logarithmes $o, p, q, \text{ \&c.}$ Soll dieß so viel heißen: $\log. \text{rat. } \frac{-1}{1} = o = \log. \text{rat. } \frac{+1}{1}$; $\log. \text{rat. } \frac{-2}{1} = p = \log. \text{rat. } \frac{+2}{1}$; $\log. \text{rat. } \frac{-3}{1} = q = \log. \text{rat. } \frac{+3}{1}$, &c. so hindert nicht nur nichts, diese Voraussetzung anzunehmen, sondern es ist auch sogar nothwendig derselben beizupflichten. Weil überhaupt $-n: -1 = +n: +1$, so ist $\log. (-n: -1) = \log. (+n: +1)$, das heißt der Logarithmus des Verhältnisses einer negativen Zahl zur negativen Einheit, ist gleich dem Logarithmus des Verhältnisses eben der Zahl positiv genommen zur positiven Einheit. Hierüber ist aber wohl eigentlich kein Streit. Herr von Leibniz hat dieß nicht geklagt, Herr Euler auch nicht. Es muß demnach die Streitfrage wohl ohne Zweifel diesen Sinn haben: Sind die Logarithmen der Verhältnisse negativer Zahlen zur positiven Einheit möglich? Man nimmt bey allen algebraischen Rechnungen die Einheit positiv an, und man darf diese Voraussetzung nie ändern (S. 9.) Ich denke also, wenn von den Logarithmen einer negativen Zahl die Frage ist, daß man den Logarithmus des Verhältnisses der negativen Zahl zur positiven Einheit verstehen müsse. Hat nun dieß seine Richtigkeit, so ist $l - 1$ soviel als $\log. \text{rat. } \frac{-1}{1}$, und überhaupt $l - a$ soviel als $\log. \text{rat. } \frac{-a}{1}$. In diesem

sem

sem Sinn aber beantwortete ich die Frage: Ob die Logarithmen negativer Zahlen möglich sind? mit Nein: und ich behaupte mit dem Herrn von Leibniz und Euler: die Logarithmen negativer Zahlen sind unmöglich.

§. 22.

Wenigstens ist soviel gewiß, daß in einem System, in welchem $l + 1 = 0$ ist, nicht zugleich $l - 1 = 0$ seyn könne. Das heißt, es kann nicht $l \frac{+1}{+1} = l \frac{-1}{+1}$ gesetzt werden. Denn wenn in einerley System die Logarithmen zweyer Verhältnisse gleich sind, so müssen auch die Verhältnisse selbst gleich seyn; dieß kann Niemand läugnen. Wäre also einerley System $l \frac{+1}{+1} = l \frac{-1}{+1}$, so müßte $+1 : +1 = -1 : +1$ seyn. Aber diese Proportion kann schlechterdings nicht als eine wahre Proportion gelten (S. 8.) also kann keinesweges in einerley System $l \frac{+1}{+1} = l \frac{-1}{+1}$ gesetzt werden. Auf eben die Art erhellet, daß überhaupt in einerley System eine positive Zahl mit der ihr entgegengesetzten negativen nicht einerley Logarithmen haben könne. Setze man $l + a = l - a$, so hieße das soviel, $l \frac{+a}{+1} = l \frac{-a}{+1}$, demnach wäre $+a : +1 = -a : +1$, daß aber diese Proportion gewiß nicht als eine wahre Proportion gelten könne, habe ich im 8 S. umständlich bewiesen. Indessen scheint der zweyte Beweis, womit Herr d'Altenbert seine Meynung zu bestätigen sucht, so etwas zu erhärten. Der Beweis ist dieser. Weil $(-1)^2 = (+1)^2$, so sey $2 \log. -1 = 2 \log. +1$, folglich $\log. -1 = \log. +1 = 0$. Wenn aber $\log. -1 = 0$, so sey $\log. -a = \log. (+a \times -1) = \log + a + \log. -1 = \log. + a$. Hr. Bernoulli schließt eben so: Wenn $(-a)^2 = (+a)^2$, so sey $2 l - a = 2 l + a$, folglich $l - a = l + a$. Ich weis nicht wie es möglich ist, daß beyde Männer die Verwirrungen nicht bemerkt haben, die in diesen Schlüssen stecken. Ich habe bereits

im 12 S. einige Erinnerungen gegen diese Art zu schließen vortragen, und ich werde sie jetzt noch etwas genauer prüfen. Herr d'Alenbert meint zwar, daß dieser Beweis unwiderleglich sey: allein seine eigenen Grundsätze widerlegen ihn. Ich habe schon im 3 S. eine Stelle aus den Opusculs des Herrn d'Alenbert angeführt, woselbst von ihm behauptet wird, die Gleichung $by = (a - x)^2$ sey eigentlich eine falsche Gleichung, wenn $x > a$: die wahre sey diese: $by = (x - a)^2$. Wenn dieß richtig ist, so muß auch $(-a)^2 = (+a)^2$ eigentlich eine falsche Gleichung, und die wahre Gleichung diese seyn $(+a)^2 = (+a)^2$. Daraus folgt weiter nichts, als es sey $l + a = l + a$. Doch dieß sey nur im Vorbeygehen angeführt, um zu zeigen, daß das System des Herrn d'Alenbert mit sich selbst nicht genau zusammen hängt. Ich gebe es zu, daß die Gleichung $(-a)^2 = (+a)^2$ völlig richtig sey: allein die Folge kann ich nicht billigen, wenn man daraus schließt, es sey $2l - a = 2l + a$, und ich hoffe, daß folgende Betrachtungen die Unrichtigkeit dieser Folge völlig ins Licht setzen werden.

§. 23.

Man ergänze alle ausgelassene Zwischensätze: so muß der Beweis so lauten:

$$\text{Es ist } (-a)^2 = (+a)^2$$

Wenn die Zahlen gleich sind, so sind die Logarithmen gleich, es versteht sich in einerley Logarithmensystem. Also ist $l(-a)^2 = l(+a)^2$.

Der Logarithmus des Quadrats ist doppelst so groß, als der Logarithmus der Wurzel, folglich ist

$$2l\sqrt{(-a)^2} = 2l\sqrt{(+a)^2}.$$

$$\text{Es ist aber } \sqrt{(-a)^2} = -a \text{ und } \sqrt{(+a)^2} = +a;$$

$$\text{daher wird } 2l - a = 2l + a$$

$$\text{und } l - a = l + a.$$

Ist es wahr, daß man an diesem Beweise nichts aussetzen könne, so wird dadurch dargethan, daß in einerley Logarithmensystem $l - a = l + a$ sey. Aber nun kann man weiter schließen. Wenn in einerley Logarithmensystem die Logarithmen gleich sind, so sind auch die Zahlen gleich, demnach müßte $-a = +a$ seyn. Daß dieß falsch sey, habe ich schon mehrmalen erinnert. Wenn man es sich indessen einmal erlaubt hat, bey dem Calculiren nicht an die Sache zu denken, sondern blos bey den Zeichen stehen zu bleiben; so darf man nur noch hinzu setzen: Es ist auch

$+a = +a$, das wird man nicht läugnen.

Nun war auch $-a = +a$, wie erwiesen worden.

Demnach ist $0 = 2a$, weil ohne Zweifel gleiches heraus kommt, wenn gleiches zu gleichem addirt wird. Also ist jede Zahl $= 0$, denn man kann statt a was man will setzen. Ich denke, diese Ungereimtheit sey zu arg, als daß man nicht gezwungen seyn sollte zuzugeben, es müsse in den Schlüssen ein wichtiger Fehler stecken, die auf so wunderliche Schlußfolgen leiten. Dieser Fehler steckt nun wirklich in den beyden Sätzen $\sqrt{(-a)^2} = -a$ und $\sqrt{(+a)^2} = +a$. Diese Sätze sind so wie sie hier angewandt werden unvollständig. Es hat $\sqrt{(-a)^2}$ keinesweges die Wurzel $-a$ allein mit Ausschließung der Wurzel $+a$, und $\sqrt{(+a)^2}$ hat keinesweges die Wurzel $+a$ allein mit Ausschließung der Wurzel $-a$. Es ist vielmehr $\sqrt{(-a)^2}$ sowohl als $\sqrt{(+a)^2} = \pm a$, und also kommt kein anderer als dieser Schlußsatz heraus: $l \pm a = l \pm a$. Wenn Hr. Euler in der Histoire de l'Academie de Berlin pour l'année 1749. auf der 147 Seite eben diesen Beweis beurtheilet, so zeigt er, daß man auf eben die Art beweisen könne, es sey $l(a \sqrt{-1}) = l a$ wenn man nämlich schließen wollte $(a \sqrt{-1})^4 = (+a)^4$, also $4 l(a \sqrt{-1}) = 4 l a$, folglich $l(a \sqrt{-1}) = l a$. In diesen und allen ähnlichen Beweisen, steckt

mit dem vorigen einerley Fehler; $(a \sqrt{-1})^4$ hat so gut die Wurzeln $+a$, $-a$, $+a \sqrt{-1}$, $-a \sqrt{-1}$, als sie $(+a)^4$ hat, und es folget also nur dieses, es sey $l \pm a$
 $\pm a \sqrt{-1} = l \pm a \sqrt{-1}$.

§. 24.

Wenn demnach keinesweges $l + a = l - a$ seyn kann, und zwar, wie ich ausdrücklich dabey erinnert habe, in einem und eben demselben System; so fragt es sich weiter: was ist dann $l - a$ in eben dem System, in welchem $l + a$ eine mögliche Zahl ist? Ich behaupte: in einem System, in welchem $l + a$ eine mögliche Größe seyn soll, muß $l - a$ eine eben so unmögliche Größe seyn, als nach aller Geständniß in der Algebra $\sqrt[m]{-a}$ ist. Denn es sey $l + a : l - a = 1 : \lambda$, so muß $l - a = \lambda l + a$, und $-a = (+a)\lambda$ seyn. Nun ist es schlechterdings unmöglich statt λ eine Zahl zu setzen, welche macht, daß beyde Glieder dieser Gleichung einander gleich werden. Demnach ist λ eine unmögliche Zahl, folglich ist es auch $l - a = \lambda l + a$, wenn $l + a$ möglich seyn soll. Man beweist auf eben die Art, daß $\sqrt{-a^2}$ unmöglich sey. Man schließt: es sey $\sqrt{-a^2} = y$, so müßte $y \times y = -a^2$ seyn. Nun kann man statt y keine mögliche Zahl setzen, dieser Gleichung ein Gnüge zu leisten: also ist y unmöglich. Kann man an diesem Beweise nichts aussetzen, so kann man es gewiß auch an jenem nicht; hat es aber mit diesem Beweise seine Richtigkeit, so schließe ich weiter. In einem Systeme, worinn alle positive Zahlen mögliche Logarithmen haben, sind die Logarithmen aller negativen Zahlen unmöglich. Denn man setze in der Gleichung $-a = (+a)\lambda$ statt a eine positive Zahl, welche man will, so wird λ allemal unmöglich bleiben, folglich auch $\lambda l + a$, wenn $l + a$ allemal möglich ist. Nun darf ich nur hinzusetzen: Im nepperschen und briggischen System sind die Logarithmen aller positiven Zahlen

len möglich, dieß ist eine Voraussetzung, die allgemein angenommen wird. Also folgt der Schluß: Im nepperschen und briggischen System sind die Logarithmen aller negativen Zahlen unmöglich.

§. 25.

Wenn die Voraussetzung nicht beybehalten wird, daß von einem und eben demselben System die Rede sey, so verliert der Beweis sein ganzes Gewicht. Es versteht sich von selbst, daß die Regel nicht mehr gelte: wenn die Logarithmen gleich sind, so sind die Zahlen, oder die Verhältnisse derselben zur Einheit gleich, wenn der eine Logarithmus zu einem andern System, als der andere gehört. Hieraus ergiebt sich eine neue Zweydeutigkeit der Streitfrage über die Logarithmen verneinter Größen, welche man, wie es mir wenigstens vorkommt, ebenfalls von beyden Seiten nicht genug in Betrachtung gezogen hat. Die Frage: sind die Logarithmen verneinter Größen möglich? kann so viel heißen: Sind die nepperschen oder die briggischen Logarithmen verneinter Größen, oder auch noch allgemeiner; Sind die Logarithmen verneinter Größen, in einem gegebenen System möglich? Eben diese Frage kann auch so erkläret werden: Läßt sich gar kein Logarithmensystem angeben, worinn die verneinten Zahlen mögliche Logarithmen haben. In der That hat dieser doppelte Sinn der Streitfrage zu mancher Verwirrung Gelegenheit gegeben. Die Gründe des Hrn. d'Alenbert sind zum Theil so beschaffen, daß sie nichts weiter beweisen können, als man müsse überhaupt zugeben, daß sich gar wohl Logarithmensysteme angeben lassen, worinn die Logarithmen negativer Zahlen möglich sind. Da er inzwischen mit dem Hrn. Bernoulli darauf dringt, es müsse allemal $l + a = l - a$ seyn, so sieht man wohl, daß er auch die Frage, in dem ersten Sinn genommen, bejahet habe. Denn

bey ihm kann in der Gleichung $l + a = l - a$ das l sowohl einem Nepperschen, als auch Briggischen, ja eines jeden andern Systems Logarithmen bedeuten. Herr Euler beweist, daß die nepperschen Logarithmen negativer Zahlen alle unmöglich sind, da sich im Gegentheil unter den unzählig vielen nepperschen Logarithmen einer positiven Zahl allemal ein möglicher befindet. Hr. d'Alenbert beweist wenigstens mit manchen von seinen Gründen nichts weiter als dieses, man könne Logarithmensysteme angeben, worinn negative Zahlen mögliche Logarithmen haben. Das pflegte man sonst in der Vernunftlehre eine fallaciam ignorationis elechi zu nennen.

§. 26.

Beide Partheyen werden, wie ich wenigstens glaube, einen ziemlichen Schritt zum Vergleich thun, sobald von beyden Seiten zugegeben wird, daß sich allerdings Logarithmensysteme angeben lassen, worinn negative Zahlen mögliche Logarithmen haben. Herr d'Alenbert redet zuweilen so: Les logarithmes des quantités negatives peuvent être regardés comme réels (183 Seite) le log. -1 est ou peut être supposé $= 0$ (185 S.) zuweilen aber ganz anders: le logarithme de 2 & le logarithme de -2 doivent être les mêmes, puisque faisant log. $1 = 0$ & log. $4 = p$ on aura log. 2 & log. $-2 = \frac{1}{2}p$ (187 S.) eben dieß sagt er auf der 198 Seite. En effet soient 1 & a^2 deux nombres positifs & réels, qui ayent 0 & p pour logarithmes; il est evident, que la moyenne proportionnelle entre 1 & a^2 sera également $+a$ & $-a$, & que le logarithme correspondant sera $\frac{1}{2}p$. Donec $\frac{1}{2}p = l + a$ & $\frac{1}{2}p = l - a$. Nichts ist gewisser, als daß sowohl $+a$ als $-a$ zwischen $+1$ und $+a^2$ eine mittlere Proportionalgröße sey. Und eben von diesem Umstand rührt alle anscheinende Schwierigkeit bey der Streitfrage her. Hätte Herr d'Alenbert daraus nichts weiter als
die

Dieses geschlossen: Wenn $l + 1 = 0$ und $l + a^2 = p$ sey, so könne überhaupt zu sagen $l + a = \frac{1}{2}p$, es könne auch $l - a = \frac{1}{2}p$ gesetzt werden; so würde ich ihm völlig Beyfall geben. Allein weiter folgt auch nichts daraus, und am allerwenigsten dieses, daß in eben dem System, wo man $l + a = \frac{1}{2}p$ gesetzt hat, auch zugleich $l - a = \frac{1}{2}p$ gesetzt werden müsse. Entweder man muß voraussetzen, daß $+a = -a$ sey, und dann muß zuorderst ausgemacht werden, ob diese Voraussetzung bestehen könne; oder man muß zugeben, daß ein ganz anderes System heraus komme, wenn man $l + a = \frac{1}{2}p$ setzt, als heraus kommt, wenn $l - a = \frac{1}{2}p$ gesetzt worden. Beyde Systeme werden diese seyn.

1. System.

Die Zahlen

$$1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10} + a^{12} + a^{14} + \&c.$$

Die Logarithmen

$$\frac{1}{2}p \quad p \quad \frac{3}{2}p \quad 2p \quad \frac{5}{2}p \quad 3p \quad \frac{7}{2}p \quad \&c.$$

2. System.

Die Zahlen

$$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 + \&c.$$

Die Logarithmen

$$\frac{1}{2}p \quad p \quad \frac{3}{2}p \quad 2p \quad \frac{5}{2}p \quad 3p \quad \frac{7}{2}p \quad \&c.$$

§. 27.

Es ist nicht zu läugnen, daß im zweyten System $\log -a$, $\log -a^3$ und überhaupt $\log -a^{2m+1}$ mögliche Zahlen sind. Dagegen aber sind $\log. -a$, $\log. -a^3$, und überhaupt $\log -a^{2m+1}$ im ersten System unmöglich. (S. 24.) Wäre im ersten System $l + a^{2m+1} \quad l - a^{2m+1} = 1$; λ , so würde $l - a^{2m+1} = \lambda \quad l + a^{2m+1}$,
und

und $-a^{2^m+1} = (+a^{2^m+1})\lambda$. Hier läßt sich gewiß keine mögliche Zahl statt λ setzen, daher ist unstreitig $l - a^{2^m+1} = \lambda l + a^{2^m+1} = \lambda \frac{(2^m+1)p}{2}$ unmöglich, wenn p möglich ist, wie hier vorausgesetzt wird. Wenn aber in einem System eine Zahl keinesweges den Logarithmum haben kann, den sie in dem andern hat, so sind beyde Systeme gewiß nicht einerley. Im zweyten von diesen beyden Systemen ist also überhaupt $l - a^{2^m+1}$ möglich: allein bey dem allen bleiben $l - a^2$, $l - a^4$, und überhaupt $l - a^{2^m}$ unmöglich, nämlich in eben diesem System. (S. 24.) Wäre in diesem System $l + a^{2^m} : l - a^{2^m} = 1 : \lambda$, so würde $l - a^{2^m} = \lambda l + a^{2^m}$, folglich $-a^{2^m} = (+a^{2^m})\lambda$ seyn. Daß hier abermal λ unmöglich sey, fällt in die Augen: also ist es auch $l - a^{2^m} = \lambda l + a^{2^m} = m\lambda p$, weil p möglich ist. Wenn also gleich in einem gewissen System einige negative Zahlen mögliche Logarithmen haben, so folgt daraus noch nicht, daß die Logarithmen aller negativen Zahlen in eben diesem Systeme möglich sind. Zugleich fällt in die Augen, daß in eben diesem System $l + a^{2^m+1}$ unmöglich sey. Verhielte sich nämlich $l - a^{2^m+1} : l + a^{2^m+1} = 1 : \lambda$, so würde $l + a^{2^m+1} = \lambda l - a^{2^m+1}$ seyn müssen, und folglich $+a^{2^m+1} = (-a^{2^m+1})\lambda$. Aber es thut keine mögliche Zahl, die man statt λ setzen könnte, dieser Gleichung ein Genüge. Also ist λ unmöglich, folglich auch $l + a^{2^m+1} = \lambda l - a^{2^m+1} = \lambda \frac{(2^m+1)p}{2}$ unmöglich, wenn p möglich ist.

§. 28.

Aus dieser Vergleichung beyder Systeme schließe ich die wichtige Folge. Wenn der Unterschied, positiver und negativer Verhältnisse in Betrachtung kommt; so bestimmt die gegebene Basis allein nicht das ganze Logarithmensystem. Wenn man nämlich in dem System die übrigen Verhältnisse, welche aus dem Ver-

Verhältniß der Basis zur Einheit, ganz genommen, nicht können zusammen gesetzt werden, aus Theilen des einfachen, zusammen setzt; so kann der Theil des einfachen, welchen man hierzu erwählt, so gut negativ als positiv seyn, wenn gleich das angenommene einfache Verhältniß positiv ist. Soll demnach die ganze Reihe der übrigen Zahlen nebst ihren Logarithmen bestimmt werden; so kommt es noch darauf an, was man für einen Theil des einfachen Verhältnisses erwählen will. Wählt man einen negativen Theil, so kann nicht alles dasjenige schlechthin bestehen, was sonst von den Logarithmen in den Lehrbüchern bewiesen wird, weil dabey der Unterschied positiver und negativer Verhältnisse gar nicht in Betrachtung gezogen zu werden pflegte. (S. 19.) So fällt es gleich in die Augen, daß die sonst gewöhnlichen Lehren von den Modulis verschiedener Systeme nun nicht schlechthin mehr gelten können. Wenn sonst in verschiedenen Systemen, die zu einerley Zahl gehörigen Logarithmen durchgängig ungleich sind, so sind sie es bey Systemen, wie im S. 26. angenommen worden, nicht durchgängig. So sind $1 + a^2$, $1 + a^4$ und so f. in beyden Systemen gleich. Hierüber muß man sich nicht wundern, da viele andere sonst allgemeine Lehren nicht mehr gelten, sobald der Unterschied des Positiven und Negativen in Betrachtung kommt. Wenn die Wurzeln ungleich sind, so sind auch die Quadrate ungleich: Dieß ist sonst eine allgemeine Regel. Aber $+a$ und $-a$ sind ungleich, dem ohnerachtet sind $(+a)^2$ und $(-a)^2$ einander gleich. Sonst hängen die Logarithmen verschiedener Systeme nach einem beständigen Modulo von einander ab, und zu einerley Zahl gehörige Logarithmen verhalten sich in verschiedenen Systemen, wie die Moduli. Dieß hat den Grund, weil das einfache Verhältniß nur auf einerley Art in zwei Hälften, in vier Viertel, u. s. f. eingetheilt werden kann, wenn an die negativen Verhältnisse gar nicht gedacht wird. Wenn

daher ein anderes Verhältniß, als vorher, für die Hälfte, den vierten Theil, und so f. des ganzen genommen wird, so muß auch nothwendig das jetzige Ganze ein anders als das Vorige seyn. Ist vorher $l a = \frac{1}{2}$ gewesen, so war $l a^2 = 1$. Nimmt man nun $l a = \frac{1}{2}$, so wird $l a^2 = 1$. Man kann keine Aenderung von dieser Art vornehmen, ohne zugleich die Basis, und hiemit die Logarithmen aller Zahlen zu ändern, und zwar umgekehrt, wie sich diejenigen Verhältnisse ändern, welche man in diesen verschiedenen Voraussetzungen, als die Hälfte des ganzen, u. s. f. ansieht. Allein, wenn man einmal $l + a = \frac{1}{2}$ genommen hat, und setzt nun $l - a = \frac{1}{2}$, so bleibt das Ganze eben dasselbe, und es ändern sich nicht aller Zahlen Logarithmen. Kommt demnach der Unterschied negativer und positiver Verhältnisse in Betrachtung, so bestimmt zwar die Basis alle Verhältnisse, die aus dem einfachen, nach einem ganzen Exponenten können zusammen gesetzt werden, nicht aber alle diejenigen, so man nach einem gebrochenen Exponenten daraus zusammen setzen kann.

S. 29.

Hieraus schließe ich die Folge, wenn der Unterschied positiver und negativer Verhältnisse in Betrachtung kommt, so wird das Logarithmensystem alsdann allererst völlig bestimmt, wenn man fest setzt, welcher Theil des einfachen Verhältnisses für das gemeinschaftliche Maaß aller angenommen werden soll. Die Logarithmen des Systems sollen die Größe aller Verhältnisse gegen das einfache aus einem gemeinschaftlichen Maaß ausdrücken (S. 13.). Jeder Logarithmus muß ausdrücken, aus welchem Theil des einfachen Verhältnisses, und wie oft genommen dasjenige zusammen gesetzt sey, welches diesen Logarithmen zugehört. Nachdem nun dieß gemeinschaftliche Maaß verschieden ist, nachdem kommen unstreitig verschiedene Systeme heraus, und
wenn

wenn dieß gemeinschaftliche Maaß, ein negatives Verhältniß ist, so kommt gewiß ein anderes System heraus, als wenn dazu ein positives Verhältniß erwählt wird. Denn es können in diesen verschiedenen Voraussetzungen nicht durchgängig einerley Zahlen einerley Logarithmen zugehören. Es sey $+b: +1$ das einfache Verhältniß, und man theile es in 2^m gleiche Theile, so daß das gemeinschaftliche Maaß aller $= (+b)^{\frac{1}{2^m}}: +1$ sey. Nimmt man $+ (+b)^{\frac{1}{2^m}}: +1$ für das gemeinschaftliche Maaß aller andern Verhältnisse, so gehört der Logarithmus $\frac{2^{n+1}}{2^m}$ dem positiven Verhältniß $+b^{\frac{2^{n+1}}{2^m}}: +1$, und der Logarithmus des negativen $-b^{\frac{2^{n+1}}{2^m}}: +1$ ist unmöglich (§. 24. 26.). Umgekehrt nimmt man $- (+b)^{\frac{1}{2^m}}: +1$ für das gemeinschaftliche Maaß aller, so ist $\frac{2^{n+1}}{2^m}$ der Logarithmus des negativen Verhältnisses $-b^{\frac{2^{n+1}}{2^m}}: +1$, und der Logarithmus des positiven $+b^{\frac{2^{n+1}}{2^m}}: +1$ ist unmöglich. (§. 27.) In dem System, welches $+b^{\frac{1}{2^m}}: +1$ für das gemeinschaftliche Maaß aller Verhältnisse nimmt, sind die Logarithmen aller positiven Zahlen möglich, und die Logarithmen aller negativen Zahlen unmöglich. In dem System aber, welches $-b^{\frac{1}{2^m}}: +1$ für das gemeinschaftliche Maaß aller Verhältnisse nimmt, sind die Logarithmen der positiven Zahlen $+b^{\frac{2^n}{2^m}}$ möglich, und der negativen $-b^{\frac{2^n}{2^m}}$ unmöglich, aber die Logarithmen der positiven Zahlen $+b^{\frac{2^{n+r}}{2^m}}$ unmöglich, und die Logarithmen der negativen $-b^{\frac{2^{n+r}}{2^m}}$ möglich.

§. 30.

Wenn das einfache Verhältniß $+b: +1$ sich in eine ungerade Anzahl von Theilen $2m+1$ so eintheilen läßt, daß $(+b)^{\frac{1}{2m+1}}: +1$ das gemeinschaftliche Maaß, aller andern Verhältnisse wird; so fällt alle Schwierigkeit weg, und es haben nothwendig alle positive Verhältnisse mögliche, und alle negative Verhältnisse

unmögliche Logarithmen. Aber es kann weder $(+b)^{\frac{1}{2m}} : +1$, nach $(+b)^{\frac{1}{2m+1}} : +1$ das gemeinschaftliche Maaß aller Verhältnisse seyn, wosern nicht m unendlich groß genommen, und also $(+b)^{\frac{1}{2m}} : +1$, oder auch $(+b)^{\frac{1}{2m+1}} : +1$ ein Elementarverhältniß wird. Das Verhältniß $(+b)^{\frac{1}{2m+1}} : +1$ ist allemal positiv, was auch m bedeutet, und daher ist kein Zweifel, daß nicht $(+b)^{\frac{1}{2m+1}} : +1 = +1 : +1$ seyn sollte, wenn $m = \infty$. Aber $(+b)^{\frac{1}{2m}} : +1$ ist allemal zweydeutig, m mag so groß genommen werden, wie man will. Ich sehe also auch nicht ab, daß man so schlechthin behaupten könne, es sey $(+b)^{\frac{1}{2m}} : +1 = +1 : +1$, wenn m unendlich groß ist, mit unbedingter Ausschließung des andern möglichen Werths $+b^{\frac{1}{2m}} : +1 = -1 : +1$. Es ist wahr, für $m = \infty$ wird $2m+1 = 2m$, und daher $(+b)^{\frac{1}{2m}} : +1 = (+b)^{\frac{1}{2m+1}} : +1$. Dieß scheint zu beweisen, daß für $m = \infty$ alle Zweydeutigkeit aufhöre: Allein man könnte einwenden, weil für $m = \infty$, $2m = 2m + 1$, so sey dieß vielmehr ein Beweis, daß jedes Elementarverhältniß zweydeutig werde, indem die 1 gegen $2m$ verschwinde. Soll man also genöthiget seyn $(+b)^{\frac{1}{2m}}$ allemal $= +1$ zu nehmen, so muß dieses von einer andern Ursache herrühren. Diese Ursache ist nun in nichts anders, als darinn zu suchen, weil dieß bey dem gebräuchlichen Logarithmensystemen eine unläugbare allgemeine Voraussetzung ist, daß alle positive Größen mögliche Logarithmen haben sollen, und weil in keinem System der Logarithmus einer positiven und der ihr entgegengesetzten negativen Größe beyde zugleich möglich seyn können. (S. 24. 27.) Aus diesen beyden Sätzen folgt schon, es müsse $b^{\frac{1}{\infty}}$ allemal $= +1$ genommen werden, damit $1 + 1 = \frac{1}{\infty} \mid b = 0$ werde. Denn setzte man $b^{\frac{1}{\infty}} = -1$, so würde $1 - 1 = 0$ und $1 + 1$ unmöglich werden.

§. 31.

Ein Logarithmensystem, worinn man alle und jede Verhältnisse aus dem Elementarverhältnisse — $b^{\frac{1}{m}} : + 1$ zusammen setze, würde ohne Zweifel von demjenigen sehr unterschieden seyn, in welchem $+ b^{\frac{1}{m}} : + 1$ für das Elementarverhältniß genommen wird. Ist $b^{\frac{1}{m}} : + 1$ von dem einfachen Verhältniß derjenigen Theile, woraus alle andere zusammen gesetzt werden sollen; so stellt der Ausdruck $(b^{\frac{1}{m}} : + 1)^n$ alle andere Verhältnisse vor, da dann, wenn m unendlich groß ist, auch n unendlich groß wird; Man setze $\frac{n}{m} = z$, so ist der allgemeine Ausdruck aller Verhältnisse $b^z : + 1$. Wächst z um das Differential dz , so hat man $b^{z+dz} : + 1 = (b^z : + 1) \times (b^{dz} : + 1)$. Wächst aber $(b^{\frac{1}{m}} : + 1)^n = b^{\frac{n}{m}} : + 1$ um ein Elementarverhältniß, so erhält man $(b^{\frac{n}{m}} : + 1) \times (b^{\frac{1}{m}} : + 1)$. Da aber $b^z : + 1 = b^{\frac{n}{m}} : + 1$, so ist $b^{dz} : + 1 = b^{\frac{1}{m}} : + 1$ und $dz = \frac{1}{m}$. Ist nun das Elementarverhältniß $b^{\frac{1}{m}} : + 1$ positiv, so kann durch die Zusammensetzung nie ein negatives daraus werden, es ist vielmehr $b^z : + 1$ allemal positiv, und z beständig. Der Logarithmus einer positiven Größe b^z , was auch statt z gesetzt wird, da denn allemal $1 - b^z$ unmöglich seyn muß. Ist aber $b^{\frac{1}{m}} : + 1$ negativ, so kann b^z weder alle positive, noch alle negative Größen bedeuten, und b^z ist gar kein quantum secundum legem continui variabile. Nun ist nämlich $b^{dz} = - 1$, also $b^{z+dz} = b^z \times - 1 = - b^z$; so daß b^z gleich in den entgegengesetzten Zustand übergeht, wenn z um das Differential dz anwächst, wenn gleich b^z einen endlichen Werth hat. Dieß ist allen Begriffen des continui zuwider. Soll b^z ein continuum seyn, so muß man $b^{z+dz} = b^z$ setzen können. Dieß geht aber schlechterdings nicht an, sobald $b^{dz} = - 1$ seyn, und also das Elementarverhältniß, woraus man alle andere zusammen setzt, ein negatives seyn soll.

§. 32.

Aus diesem allen wird die Richtigkeit folgender Sätze erhellen. Wenn das Elementarverhältniß, woraus man in einem Logarithmensystem alle andere zusammen setzt, ein positives, und also $b^{\frac{1}{m}} : +1 = b^{d^z} : +1 = +1 : +1$ seyn soll, so haben alle positive Verhältnisse mögliche, und alle negative Verhältnisse unmögliche Logarithmen; es ist ferner b^z ein continuum variable, so daß $b^{z+d^z} = b^z$. Umgekehrt, wenn b^z ein continuum variable seyn soll, so muß $b^{d^z} = +1$, folglich das Elementarverhältniß positiv seyn; es müssen also wiederum alle positive Zahlen mögliche und alle negative Zahlen unmögliche Logarithmen haben. Es muß auch diese Folge richtig seyn: Wenn alle positive Zahlen mögliche Logarithmen haben sollen, so muß $b^{d^z} = +1$ seyn, und es darf nicht $b^{d^z} = -1$ gesetzt werden, weil sonst nicht alle positive Zahlen mögliche Logarithmen behalten würden. Man setzt in allen algebraischen Rechnungen $b^0 = +1$, und das bisherige rechtfertiget diese Voraussetzung. Zugleich aber erhellet, daß $b^0 = +1$ setzen, so viel heiße, als ein Logarithmensystem bestimmen, worinn alle positive Zahlen mögliche und alle negative Zahlen, unmögliche Logarithmen haben. Wenn ich nun hievon die Anwendung mache auf die Art, wie die Logarithmen in den gewöhnlichen Systemen berechnet werden; so beweisen alle Umstände, daß der im 24 S. behauptete Satz weiter gar keinen Zweifeln unterworfen sey. Wenn man im 15 S. $(1+A)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(1+A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 \text{ \&c.})$ setzt, so ist offenbar, daß man $(1+A)^{\frac{1}{m}}$ positiv nehme, weil sonst alle Glieder dieser Reihe die entgegengesetzten Zeichen haben müßten. Man setze $(1+A)^{\frac{1}{m}} = (1+w)$, da man sonst auch $(1+A)^{\frac{1}{m}} = (-1+w)$ nehmen könnte, wenn m , wie hier vorausgesetzt wird, eine sehr große Zahl ist, die eigentlich, wenn im S. 15. alles in der Schärfe richtig seyn soll, unendlich

sich groß seyn muß. Ist nun, wie S. 31. auch n unendlich groß, und $\frac{n}{m} = z$, so wird $(1 + A)^z = (1 + w)^n$, und wenn $1 + A$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist, (S. 18.) so wird $(1 + A)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}$, also $w = \frac{1}{m}$, und $(1 + A)^z = (1 + \frac{1}{m})^{mz}$, weil $n = mz$, oder auch $(1 + A)^z = (1 + \frac{z}{m})^m$, daß also $1 + A = (1 + \frac{1}{m})^m$. Man setze $1 + A = e$, so ist $e = (1 + \frac{1}{m})^m$, und $e^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}$, daß man also $e^{\frac{1}{m}} : + 1 = 1 + \frac{1}{m} : + 1$, folglich das Elementarverhältniß positiv nimmt. Diesemnach ist vermöge dieser Voraussetzung e^z ein *variable continuum*, und jede positive Größe e^z hat den Logarithmum z , jede negative Größe aber einen unmöglichen Logarithmum, weil es gänzlich unmöglich ist, aus dem Elementarverhältniß $+ e^{\frac{1}{m}} : + 1$ ein negatives zusammen zu setzen. Hiedurch wird zugleich Hrn. Eulers im 3 S. angeführte Erklärung der natürlichen Logarithmen gegen Hrn. d'Alenberts Erinnerungen vertheidiget. Es wird nämlich nothwendig $l e^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}$, oder $l 1 + w = w$, so daß $l (1 + w)^n = n w = z$ seyn muß.

§. 33.

Die beyden Gründe des Hrn. d'Alenbert, welche ich im 21 und 23 S. beurtheilet habe, sind diejenigen seiner Beweise, die von ihm *raisons purement métaphysiques* genannt werden. Ehe er diese beyden Gründe vorträgt, schickt er eine allgemeine Betrachtung voran, die er zwar für keinen eigentlichen Beweis ausgiebt, die aber dennoch dazu dienen soll, seine Meynung einigermaßen wahrscheinlich zu machen. Sie ist diese, wenn x eine algebraische Function von y ist, und zwar so, daß jedem Werth von y nur ein Werth von x zugehört, so muß in dieser Function die Größe y unter keinem Wurzelzeichen enthalten seyn, so einen geraden Exponenten hat. Sodann aber wird x nicht unmöglich, wenn y negativ ist. Aber wenn $x = l y$, so setzt man nach Leibnizens

nigens Lehre voraus, jedem gehöre nur ein Werth von x zu. Demnach sey $x = \infty$ für $y = \infty$, $x = -\infty$ für $y = 0$, x unmöglich, wenn y negativ. Nun könne man zwar von der Beschaffenheit algebraischer Functionen, auf die Beschaffenheit der Transcendenten nicht schlechthin schließen. Allein es sey doch viel natürlicher, bey der Aehnlichkeit zu bleiben, und anzunehmen, daß wenn y negativ sey, auch x möglich bleibe, und negativ abnehme, so daß beyde Reihen diese werden.

$$y = -\infty \dots -3 -2 -1 -\frac{1}{2} \dots -\frac{1}{n} 0 \dots +\frac{1}{n} \dots +\frac{1}{2} +1 +2 +3 \dots +\infty.$$

$$x = +\infty \dots +q + p 0 -p \dots -r \dots -\infty \dots -r \dots -p 0 +p +q \dots +\infty.$$

Hiebey muß ich folgendes erinnern. Gesezt, daß man diese Aehnlichkeit beizubehalten berechtigt wäre, so würde doch das nicht so schlechterdings folgen, was Herr d'Alenbert daraus schließt, daß es nämlich wahrscheinlich sey, man müsse $l + a = l - a$ nehmen. Man könnte eben so gut auch daraus schließen, daß $l - a = -l + a$ genommen werden müsse. Es ist bekannt, wenn eine veränderliche Größe positiv genommen, bis zu $+\infty$ wächst, und ihre folgenden Werthe möglich bleiben, daß diese nicht nothwendig positiv sind, sondern negativ seyn können, und umgekehrt, wenn diese Größe negativ genommen, bis zu $-\infty$ wächst, daß ihre folgenden Werthe, wenn sie möglich bleiben, nicht nothwendig negativ bleiben, sondern auch positiv werden können. Die Reihen könnten demnach auch so aussehen:

$$y = -\infty \dots -3 -2 -1 -\frac{1}{2} -\frac{1}{n} \dots 0 \dots +\frac{1}{n} \dots +\frac{1}{2} +1 +2 +3 \dots +\infty.$$

$$x = -\infty \dots -q -p 0 +p +r -\infty \dots -r \dots -p 0 +p +q \dots +\infty.$$

Wäre also $\log. +2 = +p$, so könnte auch $\log. -2 = -p$ seyn, wodurch also dieser Grund sein ganzes Gewicht verlieret.

§. 34.

Ich würde nunmehr auch diejenigen Beweise des Herrn d'Alenbert, welche er preuves géométriques nennet, prüfen, wenn nicht diese Abhandlung ohnedem schon ziemlich weitläufig gerathen wäre. Es läßt sich dasjenige, was ich von diesen verneinten Beweisen zu sagen habe, nicht wohl ins Kurze zusammen ziehen. Die Lehren, worauf bey dieser Beurtheilung alles ankommen wird, sind in den gewöhnlichen Lehrbüchern eben nicht mit derjenigen Vollständigkeit auseinander gesetzt, daß ich nicht Gelegenheit haben sollte, manches in ein besseres Licht zu setzen. Aus dieser Ursache beschließe ich hiemit die erste Abtheilung, und werde in der zweyten alles dasjenige zu widerlegen bemühet seyn, was mit irgend einem Schein gegen die bisherige Lehre eingewandt werden kann. Es wird sich bald finden, wenn man alles nur genau erwägen will, daß die Geometrie der Meynung des Hrn. von Leibniz keinesweges entgegen sey, sondern sie vielmehr vollkommen bestätige.



Zweite Abtheilung.

§. I.

Die Geometrie stimmt in allen Stücken so unvergleichlich mit der Analysis überein, daß die allgemeinen Lehren der letztern Wissenschaft, wenn man sie auf die Geometrie anwendet, oft dadurch allererst in ihr völliges Licht gesetzt werden. Es ist dieß eine Wahrheit, die kein Kunstverständiger bezweifelt. Inzwischen ist so viel gewiß, daß man bey der Anwendung der Analysis auf die Geometrie, in manchen Fällen behutsam verfahren müsse, in-

dem die allgemeinen analytischen Sätze zum Theil etwas unbestimmt lauten. Man hat oft, um der Bequemlichkeit willen die Ausdrücke verkürzt, und daher können sie in der Anwendung leicht zu Fehlschlüssen Gelegenheit geben, wenn man gewisse notwendige Einschränkungen dabey aus der Acht läßt. Wäre dieß in der Lehre von den Logarithmen nicht geschehen, so würde Niemand auf die Gedanken gekommen seyn, daß man durch geometrische Constructionen für die negativen Größen mögliche Logarithmen herausbringen könne, wenn nämlich die Streitfrage in dem Sinn genommen wird, den ich in der ersten Abtheilung dieser Abhandlung festgesetzt habe. Es ist ein bekannter Satz in der Lehre von den Kegelschnitten, daß die, zwischen den Aesten der Hyperbel, und ihren Asymptoten enthaltenen Trapezien, oder auch die ihnen gleichen Sektoren, sich wie die Logarithmen der ihnen zugehörigen Abscissen verhalten, wenn man diese vom Mittelpunct rechnet. Man hat geglaubt, daß diese hyperbolischen Flächen möglich bleiben, wenn die zugehörigen Abscissen negativ werden, und davon auf die Möglichkeit der Logarithmen negativer Größen den Schluß gemacht. Dieß ist von Herrn Bernoulli, dieß ist auch von Herrn d'Alenbert geschehen: ja letzterer glaubt diesem Beweise erstlich seine rechte Evidenz gegeben zu haben.

§. 2.

Es sey OPVGpF (8 Fig.) die gleichseitige Hyperbel, OG und KZ ihre Asymptoten, ferner $AN = y$; so ist $PN = \frac{1}{y}$, wenn die Potenz der Hyperbel $= 1$ ist, und die Ordinaten PN mit der Asymptote OG Parallel gezogen werden. Ist nun RS eine andere Ordinate, so ist eigentlich NPSR dem Logarithmen des Verhältnisses $\frac{AR}{AN}$ proportional, und in dem Fall, wenn $AN = 1$, ist es eine bloße Verkürzung des Ausdrucks, wenn man sagt, es sey
NPSR

NPSR der Logarithme der Abscisse AR. (1 Abtheil. S. 13.) Man muß eigentlich sagen; jedes Trapezium der Hyperbel, so zwischen zweyen mit der einen Asymtote parallelen Ordinaten fällt, sey der Logarithme des Verhältnisses der diesen Ordinaten auf der andern Asymtote zugehörigen Abscissen: Das unbestimmte Integral $\int \frac{dy}{y} + C$ kann bekanntermaßen ein Trapezium zwischen jeden zweyen parallelen Ordinaten ausdrücken, und es werden zwey Bestimmungen erfordert, wenn man in jedem besondern Fall wissen will, welches das Trapezium sey, so dieses Integral ausdrückt. Die eine Bestimmung erhält man dadurch, daß man die beständige Größe C bestimmt, indem hiedurch festgesetzt wird, welches die Ordinate seyn soll, von welcher die quadrirte Fläche ihren Anfang nimmt: Die andere Bestimmung kömmt hinzu, wenn man für y einen bestimmten Werth setzt; hiedurch bestimmt man die Ordinate, wo die quadrirte Fläche aufhört. Wenn nun $AN = 1$ ist, so ist die gewöhnliche Voraussetzung diese, die Fläche soll von PN an gerechnet werden, oder das Integral soll $= 0$ seyn, wenn $y = 1$ ist. Dieß giebt $ly + C = 0$, also $C = -l 1$, und dann wird das Integral $= ly - l 1 = l \frac{y}{1} = ly$. Wenn demnach $y = AR$ gesetzt wird; so ist $NPSR = l \frac{AR}{NA} = l AR$, weil $AN = 1$. Man setze diese Fläche, welche durch Bestimmung der beständigen Größe in soferne bestimmt ist, daß sie von PN ihren Anfang nehmen soll, überhaupt $= S$; so ist $S = ly$. Will man nun aus dieser Gleichung alle die Werthe von S folgern, welche allen möglichen, sowohl positiven, als negativen Werthen von y zugehören; so ist unumgänglich nothwendig, daß man den Ausdruck ly nach seinem ganzen Umfang schon kenne, und wisse, was er bedeutet, man mag statt y setzen, was man wolle. Sonst läuft man Gefahr, daß man das schon voraussetze, was erstlich erwiesen werden soll. Da nun hierüber der Streit entstand, so fieng man an, die Sache

umzukehren, und aus den Werthen von S auf die Werthe von ly zu schließen. Man meynte, die Fläche S bleibe möglich für negative y , also müsse auch $l - y$ möglich bleiben. Herr Bernoulli glaubte, die Sache lasse sich am besten aus der Differentialgleichung beurtheilen. Es sey nämlich $dS = \frac{dy}{y}$; wenn man nun $-y$ statt y nehme, so erhalte man $dS = \frac{-dy}{-y} = \frac{dy}{y}$, und also wiederum $S = l - y = l + y$. Folglich gehöre gleichen und entgegengesetzten y eine gleiche Fläche S zu. Hiedurch beweist Hr. Bernoulli ganz richtig, daß zu gleichen und entgegengesetzten x einerley Differential der Fläche S gehöre; und es folgt also richtig daraus, daß die Differentiallinien der Logarithmen negativer Größen möglich seyn, welches Niemand läugnet. Aber die Differentialgleichung ist ganz unbestimmt, die Integralgleichung enthält schon eine Bestimmung mehr, wenn die beständige Größe bestimmt ist, und diese Bestimmungen sind es eben, worauf hier alles ankommt. Es ist wahr, für negative y ist $dS = \frac{-dy}{-y}$, aber hieraus folgt durch die Integration $S = l - y + C$. Soll nun S noch von eben der Ordinate angerechnet werden, wie vorhin, so muß dieß Integral $= 0$ werden für $y = +1$ und es wird also nun $C = -l + 1$, und $S = l - y - l + 1 = l - y$, aber keinesweges $= l + y$. Wenn demnach $y = -Ar$, so bedeutet dieß S , die zwischen PN und rs enthaltene Fläche, wie es der ersten Voraussetzung gemäß ist. Will man im Gegentheil, in dem Integral $S = \int \frac{-dy}{y} + C$ die beständige Größe so bestimmen, daß dieß Integral $= 0$ werde für $y = -1 = -An$, so erhält man $C = -l - 1$, und $S = l - y - l - 1 = l - y - 1$, aber nun bedeutet dieß S die Fläche, $npsr$, und keinesweges die vorige, welche zwischen PN und rs enthalten war. Hiemit wird also bewiesen, daß $l \frac{-Ar}{-An} = l \frac{+AR}{+AN}$ sey; und dieß läugnet Niemand (Abtheil. S. 21.) Ueberhaupt erhellet hier

hieraus, daß es nicht einerley sey, wenn man fragt: ob von der Asymptot OG an gerechnet sich auf beyden Seiten, von A nach Z und von A nach K hin, so weit man will, mögliche Flächen erstrecken? und wenn man so fragt: ob sich von einer gegebenen Ordinate PN an gerechnet, auf beyden Seiten von N nach Z und von N nach K hin, so weit man will, mögliche Flächen erstrecken? Die erste Frage muß man bejahen; daß aber die andere zu verneinen sey, wird die Folge beweisen.

§. 3.

Herr d'Alenbert hält diesen Beweis des Herrn Bernoulli zwar an sich für richtig, glaubt aber, er könne noch verbessert werden, so daß die Sache dadurch außer allen Zweifel gesetzt werde. In solcher Absicht trägt er ihn auf der 188 S. der Opusculs, in einer allgemeineren Form vor. Da Hr. d'Alenbert diesen Beweis für entscheidend hält, und in der Folge sich allemal darauf wieder bezieht, so werde ich ihn nach allen Puncten genau prüfen müssen. In dieser Absicht wird es am besten seyn, wenn ich denselben zuörderst mit des Herrn Verfassers eigenen Worten ganz herseze.

Supposons en général $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$, n étant un nombre entier positif impair, il est certain qu'on pourra construire la courbe à laquelle cette équation appartient. Il faut d'abord tracer les hyperboles OPV, GTK, dans les quelles l'abscisse $AN = y$, & l'ordonnée $PN = \frac{a^n}{y^n}$; il faut ensuite chercher l'aire $\int \frac{a^n dy}{y^n}$ respondante à une abscisse quelconque AR, en supposant, que cette aire soit $= 0$, lorsque $y = AN$; la courbe, dont les ordonnées seront proportionnelles à ces aires fera la courbe cherchée. Or l'on trouvera facilement, qu'à une abscisse quelconque y , positive ou negative, il repond la meme valeur de l'aire. Car soit

$An = AN$ & $Ar = AR$; l'aire repondante à l'abscisse Ar fera $NPoA + AnpG + npfr$. Or les aires $AnpG$, $npfr$ étant negatives par rapport à l'aire $NPOA$, qui est negative elle meme par rapport à l'aire $NPSR$; il s'ensuit que l'aire repondante à l'abscisse negative Ar , c'est a dire, l'ordonnée x repondante à cette abscisse, équivaut à la quantité suivante — $NPOA + NPOA + NPSR = NPSR$; d'ou il s'ensuit, qu'à deux valeurs de y égales & de differens signes, il répond une même valeur de x . Donc toute courbe, dans laquelle $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$, n étant un nombre impair quelconque, a deux branches égales, semblables & semblablement situées de part & d'autre de la ligne de x . Il est vrai, que dans le cas de $n=1$ l'integration n'a pas lieu. Mais la methode, que nous venons de donner pour construire la courbe $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$, par la quadrature d'une hyperbole, dont les ordonnées soient $= \frac{a^n}{y^n}$, lève toute difficulté. Car l'hyperbole ordinaire, dont les ordonnées sont $\frac{a}{y}$, est précisément dans le même cas, que les autres; & il est impossible de rien établir sur les aires repondantes aux abscisses de celles ci, qui ne convienne également à l'hyperbole ordinaire.

§. 4.

Herr d'Altenbert nimmt hier, wie es scheint, ganz richtig an, daß vermöge der Voraussetzung, nach welcher bey der Integration die beständige Größe bestimmt werden soll, die der Abscisse $y = Ar$ zugehörige Fläche sich von der Ordinate PN bis zur Ordinate rv erstrecken müsse. Er sagt nämlich diese Fläche müsse $= NPOA + AnpG + npfr$ seyn. Hiergegen habe ich noch nichts zu erinnern. Zwar kommen Fälle vor, welche dieser Voraussetzung ihre Gränzen setzen, und in der That findet ein solcher Fall hier in gewisser Absicht Statt. Inzwischen muß ich diese

Be-

Betrachtung noch aussetzen, und bloß dem Herrn d'Alenbert in seinen Schlüssen folgen. Diese hängen nun eigentlich so zusammen, wenigstens bin ich nicht im Stande, einen andern Sinn, als diesen herauszubringen, ob ich gleich noch immer zweifle, daß Hr. d'Alenbert im Ernst so habe schließen können. Es ist die ganze Fläche zwischen AG und sr der Fläche NPOA entgegen gesetzt. Aber NPOA ist negativ in Absicht auf NPSR. Was einer negativen Größe entgegen gesetzt ist, muß positiv seyn; also ist die ganze Fläche $AGsr = AnpG + npsr$ positiv. Da nun NPOA für sich $= AnpG$ und $npsr$ für sich $= NPSR$, so ist die zwischen PN und rs enthaltene Fläche $= -NPOA + NPOA + npsr = npsr = NPSR$. Aber wenn das richtig schließen heißt, so lassen sich die sonderbarsten Sätze von der Welt demonstrieren. Läßt sich nicht auf eben die Art darthun, daß die Abscisse $Nr = +NR$ sey? Es ist Ar negativ gegen AN, und NA negativ gegen NR. Weil also Ar der negativen Größe AN entgegen gesetzt ist; so ist Ar positiv, und $Nr = -NA + An + nr = -NA + AN + nr = nr = NR$. Also hätte Hr. d'Alenbert erwiesen, daß einer positiven Abscisse, die $= NR$ ist, eine mögliche Fläche $= NPSR$ zugehöre, und er wollte doch beweisen, daß sie zu einer negativen Abscisse gehöre. Der Satz; eine Größe, die einer negativen entgegen gesetzt ist, ist positiv, gilt natürlicher Weise nur, wenn beyde sich auf eben dieselbe Gränze beziehen. Soll N die Gränze seyn, welche die positiven Abscissen NR von den negativen Nr absondert, und man soll nun eine Abscisse nehmen die NA entgegen gesetzt ist; so muß man sie von dem Punct N an rechnen, und dann fällt sie freylich auf der positiven Seite NZ. Und ob man gleich in einem richtigen Sinn sagen kann, es sey $AN = An$, wenn statt N nunmehr A für den Anfangspunct genommen wird; so wird doch wohl Niemand, wenn die Frage ist, wie groß die Linie Nr sey? im Ernst antworten, es sey $Nr = -AN + AN + nr = nr$;

$= nr$: Das hieße ja behaupten, ein Theil sey dem ganzen gleich. Wenn man die algebraischen Zeichen und Redensarten, welche sonst bey entgegen gesetzten Größen gewöhnlich sind, hier richtig anwenden will, so muß man vielmehr sagen, es sey $Nr = nr + An - (-An) = nr + An + An = nr + An + AN$. Es ist nämlich Nr nicht die algebraische Summe, sondern die algebraische Differenz von Ar und $-AN$. Wenn also gleich alles übrige in den vorigen Schlüssen seine Richtigkeit hätte; wenn man gleich in einem richtigen Verstande sagen könnte, es sey $NPOA = -AnpG$, so würde man doch sagen müssen, es sey die zwischen NP und sr enthaltene Fläche $= npsr + AnpG - (-NPOA) = npsr + AnpG + NPOA$.

§. 5.

Ueberdem aber ist auch dieß eine falsche Voraussetzung, daß die Fläche $NPOA$ der Fläche $AnpG$ entgegen gesetzt sey, ob es gleich seine Richtigkeit hat, daß $NPOA$ der Fläche $NPSR$ entgegen gesetzt ist, wenn PN die Grenze ist, von welcher man die Flächen anrechnet. Zwar sind die Ordinaten, welche unter der Abscissenlinie einer krummen Linie fallen, denjenigen entgegen gesetzt, welche über der Abscissenlinie stehen. Aber hievon kann man keinen Schluß machen, auf das Zeichen, welches der Ausdruck der Fläche vor sich haben muß. Dieß kann $+$ oder $-$ seyn, die Fläche mag über oder unter der Axe liegen. Man muß sich nämlich von der Art und Weise, wie eine positive geometrische Größe negativ wird, folgende Vorstellung machen. Jede geometrische Größe ist zwischen gewissen Gränzen eingeschlossen, und nachdem sich diese Gränzen erweitern, oder verengern, nimmt die Größe zu, oder ab. Eine grade Linie hat derselben nur zwei, nämlich den Anfangs- und Endepunct (9 Fig.). Ist ihr Anfangspunct O bestimmt und der Abstand des Endepuncts B von demselben, so

ist

ist ihre Größe bestimmt: Es kann aber bey dem allen der Endepunct sowohl auf der einen als der andern Seite des Anfangspuncts C liegen. Gesezt B liegt oberhalb des Puncts C , so wird CB kleiner, wenn B gegen C rückt, und größer, wenn B sich von C entfernt. Sobald aber B unterhalb C irgendwo in b fällt, wird Cb negativ, nämlich gegen CB : es sey nun, daß B durch c nach b hinrückt, oder daß die Construction, welche den Ort des Puncts B bestimmt, auf andere Art ergiebt, daß b unter C fallen müsse. Hier ist also ein Punct die Gränze, welche das Negative von dem Positiven unterscheidet. Der Ort dieses Puncts kann unbestimmt seyn, so daß z. E. eine grade Linie gegeben ist, worinn er liegen soll, wie AD : und dieß ist der Fall bey den krummen Linien, wenn AD die Axe der Abscissen, CB aber eine Ordinate ist. Mit den ebenen Figuren ist es schon anders bewandt. Ihre Grenzen sind Linien, und es hat dabey eine große Mannigfaltigkeit Statt. Eine ebene Figur kann durch die Erweiterung oder Verengerung ihrer Gränzen auf mannigfaltige Art wachsen, oder abnehmen. Es können alle ihre Gränzen sich nach allen Seiten erweitern, oder umgekehrt verengern, wie wenn der Halbmesser eines Kreises größer oder kleiner würde, oder wenn in einem Parallelogramm sich jede zwey entgegen gesetzte Seiten von einander entfernten. Es kann aber auch seyn, daß nach dieser oder jener Seite die Gränzen sich nicht ändern, da dieß gegentheils nach andern Seiten erfolgt; so können zwey entgegen gesetzte Seiten eines Parallelogramms sich von einander entfernen, indem die beyden übrigen ihre Lage unverändert behalten. Es kann der Winkel am Mittelpunct im Ausschnitt eines Cirkels wachsen oder abnehmen, ohne daß sich der Halbmesser ändert, u. s. f. Wenn man die Quadratur einer Linie sucht, deren Natur durch eine Gleichung für parallele Ordinaten ausgedrückt ist, so setzt man voraus, daß die Fläche, deren Größe man finden will, zwischen

zweyen von den parallelen Ordinaten, wie PN, RS, (8 Fig.) und denjenigen Stücken der Aye, und der zu quadrirenden Linie selbst, die zwischen diesen parallelen Ordinaten fallen, wie NR, PS, enthalten sey. Durch die Integration bringt man einen noch ganz unbestimmten Ausdruck für diese Fläche heraus, der ein Stück derselben zwischen jeden zweyen parallelen Ordinaten bedeuten kann. Von diesen parallelen Ordinaten wird die eine durch Hinzufügung der beständigen Größe bestimmt, z. E. PN, und nunmehr drückt das Integral das Gesetz aus, nach welchem sich die Größe der Fläche ändert, wenn die zweyte Ordinate RS von der ersten entweder weiter fortrückt, oder sich derselben nähert, und es muß die Gränze, welche die positiven Werthe der Fläche von den negativen unterscheidet, eine von den Ordinaten der krummen Linie seyn. Sie ist also entweder PN selbst, oder doch wenigstens eine Linie, die mit PN parallel liegt, wenn etwa das Integral eine solche Function ist, die noch für andere Werthe, als $x = AN$ verschwindet. Deswegen kann es nie die Aye der Abscissen seyn, (es sey dann, daß man die Coordinaten verwechselt, wie sich von selbst verstehet) und der Umstand, ob die quadrirte Fläche unter oder über der Abscissenlinie liege, kann die Frage, ob sie positiv oder negativ sey? gar nicht entscheiden.

§. 6.

Hat nun dieses alles seine Richtigkeit; so bin ich berechtiget zu behaupten, es sey von Hrn. d'Alenbert keinesweges bewiesen, daß der Abscisse Ar die Fläche $nprs = NPRS$ zugehöre. Wenn inzwischen der Beweis eines Satzes fehlerhaft ist, so folgt daraus die Falschheit des Satzes selbst noch nicht. Es kann seyn, daß der Satz selbst aus andern Gründen sich richtig herleiten lasse. Und in der That hat es mit dem eben genannten Satz diese Bewandniß. Nur muß dieser Satz richtig verstanden werden.

den. Ich sage nicht, die zwischen den Ordinaten PN und rs enthaltene Fläche sey $= npsr$, dieß wäre offenbar ungereimt. Ich sage vielmehr so: die der Abscisse $y = -Ar$ in der Integralgleichung $\int \frac{a^n dy}{y^n} + C$ zugehörige Fläche, sey $= npsr$; oder mit andern Worten: wenn man in dem Ausdruck $\int \frac{a^n dy}{y^n}$ die Abscisse $y = -Ar$ setzt, so drückt diese Formel nicht die Fläche zwischen PN und rs, sondern $npsr$ aus. Dieß ergibt sich sogleich, wenn man die Integration selbst vornimmt, und wenn Hr. d'Alenbert seinem Beweise diese Wendung gegeben hätte, so würde er dadurch sehr gewonnen haben, obgleich der Hauptsatz, welcher eigentlich erwiesen werden soll, doch daraus nicht folgt. Vielleicht hat Hr. d'Alenbert in der That aus dieser Integralformel geschlossen, und seine Schlüsse nur nicht vollständig entwickelt. Er hat es dem Leser überlassen, die ausgelassenen Zwischensätze selbst zu ergänzen. Ich werde aus dieser Ursache diese Integration, nebst ihren Folgen vollständig auseinander setzen, und bemühet seyn, dem Beweise des Hrn. d'Alenberts alle Stärke zu geben, deren er fähig ist. Damit ich nicht genöthiget sey, in der Folge allemal zu erinnern, daß in der Gleichung $PN = \frac{a^n}{y^n}$ die Zahl n eine ungerade Zahl seyn soll, will ich $2m+1$ statt n schreiben, da dann a eigentlich den Exponenten $2m+2$ haben muß, wenn die Abmessungen auf beyden Seiten gleich seyn sollen. Es wird also die Gleichung für die Hyperbel OPVGpF (8 Fig.) eigentlich diese: $= \frac{a^{2m+1}}{y^{2m+1}}$, wenn man $PN = z$ sagt, und $AN = y$. Die Integration giebt, $\int \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}} dy = C - \frac{a^{2m+2}}{2m y^{2m}}$. Weil dieß Integral $= 0$ seyn soll, wenn $y = AN$ ist, welche Linie ich $= b$ setzen will; so wird $\int \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}} dy = \frac{a^{2m+2}}{2m b^{2m}} - \frac{a^{2m+2}}{2m y^{2m}} = \frac{a^{2m+2}}{2m} \left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}} \right)$. Setzt man nun, um die Gleichheit der Abmessungen zu erhalten, $ax = \frac{a^{2m+2}}{2m} \left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}} \right)$, so wird die Gleichung der Quadratricis diese: $x = \frac{a^{2m+1}}{2m} \left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}} \right)$.

§. 7.

Da der veränderliche Theil dieses Integrals abnimmt, wenn y wächst, so wächst das Integral selbst mit y , so lange $y > b$ ist, und drückt diesernach die Fläche NPSR aus. Für $y = b$ ist das Integral $= 0$, wie vorausgesetzt worden; aber für $y < b$ wird es negativ, und wächst bis $y = 0$ wird, da es negativ unendlich ist. Zwischen den Gränzen $y = b$ und $y = 0$ drückt es also die Fläche NPML aus, für $y = AL$. Wird y negativ, so bleibt dieß Integral Anfangs noch negativ, so lange nämlich $-y < -b$ ist, aber es nimmt ab, wenn y wächst. Nimmt man demnach $y = -AL$, und den Punct l zwischen A und n , so daß lm die der Abscisse $-AL$ zugehörige Ordinate ist; so würde es ungereimt seyn zu sagen, daß das Integral noch die zwischen PN und lm enthaltene Fläche ausdrücke, da es offenbar ist, daß diese mit $-AL$ wachsen müsse. Diesernach muß die Fläche, welche jetzt das Integral ausdrückt, auf der andern Seite der Ordinate lm liegen, und sie ist keine andere als $lnpm$, weil für $y = -An = -b$ das Integral abermal $= 0$ wird. Wächst endlich $-y$ über $-b$ hinaus, so wird das Integral wieder positiv, und wächst mit $-y$, da es dann die Fläche $nprs$ ausdrückt. Vermöge dieser Rechnung muß man also so viel zugeben, daß in allen Hyperbeln, welche die Gleichung $= \frac{n^{2m+2}}{y^{2m+1}}$ ausdrückt, den negativen Abscissen mögliche, und eben so große Flächen, als den ihnen gleichen und entgegengesetzten positiven Abscissen zugehören. Nur in dem Fall, da $m=0$, oder die Hyperbel die Apollonianische ist, könnte es zweifelhaft seyn, weil man in diesem Fall aus der Integralformel $\frac{n^1}{y^0} (\frac{1}{b^0} - \frac{1}{y^0})$ so unmittelbar nichts schließen kann. Hr. d'Alenbert selbst ist genöthiget dieses einzugestehen. Il est vrai (sagt er) que dans le cas de $n = 1$ l'integration n'a pas lieu. Allein eben deswegen setzt er einen Grund hinzu, der nach seiner Meynung überzeugend darthun

thun soll, daß alles Borige noch für die apollonianische Hyperbel gelte. Er ist in den Worten enthalten: L'hyperbole ordinaire est précisément dans le même cas, que les autres, & il est impossible de rien établir sur les aires repondantes aux abscisses de celles-ci, qui ne convienne également a l'hyperbole ordinaire. Ich weis nicht, ob dieß nicht eben dasselbe ist, was Hr. d'Alenbert doch erst beweisen wollte. Doch vielleicht hat Hr. d'Alenbert sich auch hier nicht vollständig ausgedrückt, und dem Leser überlassen, die ausgelassenen Zwischensätze zu ergänzen. Vermuthlich sind die Schlüsse, welche Hr. d'Alenbert hier im Sinne gehabt hat, eigentlich folgende.

§. 8.

Wenn in der allgemeinen Gleichung $\int \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}} dy = \frac{a^{2m+2}}{2m}$ $(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}})$ nunmehr $m = 0$ gesetzt wird, so erhält man $\int \frac{a^2}{y} dy = \frac{a^2}{2 \times 0} (\frac{1}{b^{2 \times 0}} - \frac{1}{y^{2 \times 0}}) = \frac{a^2}{2 \times 0} (\frac{1}{(b^2)^0} - \frac{1}{(y^2)^0})$. Weil nun $\frac{1}{(b^2)^0} = \frac{1}{(b^2)^0} = (b^2)^0$, und $\frac{1}{(y^2)^0} = \frac{1}{(y^2)^0} = (y^2)^0$, so wird das Integral $= \frac{a^2}{2 \times 0} (b^{2 \times 0} - y^{2 \times 0})$; und weil $\frac{a^2}{2 \times 0} = \frac{a^2}{2 \times -0}$, so wird eben dieses Integral auch $= \frac{a^2}{2 \times 0} (y^{2 \times 0} - b^{2 \times 0}) = \frac{a^2}{2 \times 0} (\frac{y^2}{b^2})^0 - 1) = = = \frac{a^2}{2} \frac{aa}{bb} (\frac{yy}{bb})^{-1}$. Nun mag diese Formel für sich bedeuten, was sie

wolle, so ist doch so viel gewiß, daß sie für gleiche und entgegengesetzte y einerley gebe, eben so, wie der allgemeine Ausdruck, wenn m nicht $= 0$ ist. Wosern die Schlüsse des Hrn. d'Alenberts, wie ich glaube, so zusammen hängen, so habe ich nichts weiter dagegen einzuwenden, vielmehr behaupte ich mit dem Hrn. d'Alenbert, que l'hyperbole ordinaire soit précisément dans le même cas, que les autres. Es gehören nämlich nun in der apollonianischen Hyperbel gleichen und entgegengesetzten Abscissen gleiche Flächen zu. So gehört die Fläche NPSR zur Abscisse + AR, und

zur Abscisse $Ar = -AR$ gehört die Fläche $npsr = NPSR$. Aber eben dieß ist dem Satz schnurstracks entgegen, daß zur Abscisse Ar die zwischen PN und rs enthaltene Fläche gehöre. Und also läugne ich, daß Hr. d'Alenbert ferner so schließen könne; die den negativen Abscissen zugehörigen Flächen sind die Logarithmen dieser Abscissen; also sind die Logarithmen negativer Größen möglich, weil jene Flächen möglich sind. Der Satz: Die den negativen Abscissen zugehörigen Flächen sind die Logarithmen dieser negativen Abscissen, ist zweydeutig. Er kann so viel heißen: jene Flächen sind die Logarithmen der Verhältnisse dieser negativen Abscissen zur negativen Einheit, so daß zum E.

$nprs = l \frac{Ar}{An} = l \frac{-AR}{-AN}$; und in dieser Bedeutung ist er richtig. Aber denn hat der Schlusssatz diesen Sinn: also sind die Logarithmen der Verhältnisse negativer Größen zur negativen Einheit möglich. Dieß läugnet Niemand, und dieß war es nicht, was Hr. d'Alenbert beweisen wollte. Es kann aber auch der vorhin genannte zweydeutige Satz diesen Sinn haben: Die den negativen Abscissen zugehörigen Flächen sind die Logarithmen der Verhältnisse dieser negativen Abscissen zur positiven Einheit. Wäre dieß der rechte Sinn, und wäre der Satz in diesem Sinn genommen; so würde kein Zweifel übrig seyn, daß die Möglichkeit der Logarithmen der Verhältnisse negativer Größen zur positiven Einheit nicht daraus folgen sollte. Aber in diesem Sinn genommen, ist der Satz grundfalsch. Es ist keinesweges $npsr$ der Logarithme des Verhältnisses $\frac{Ar}{AN} = \frac{-AR}{+AN}$ sondern vielmehr der Logarithme des Verhältnisses $\frac{Ar}{An} = \frac{-AR}{-AN}$. Also schließt Hr. d'Alenbert entweder aus einem grundfalschen Satz: oder sein Beweis erhärtet auch nichts weiter, als was seine Gegner gerne zugeben, und worüber eigentlich nie ist gestritten worden.

§. 9.

Wenn ich behaupte, es sey grundfalsch, daß npr der Logarithme des Verhältnisses $\frac{Ar}{AN}$ sey, so fürchte ich zwar im Ernst keinen Zweifel dagegen: inzwischen könnte man vielleicht so schließen: bey der Integration ist vorausgesetzt worden, daß die Fläche von NP angerechnet werden solle; es mag also y bedeuten, was es wolle, so muß man die Fläche von dieser Grenze anrechnen. Nun drückt für $y = Ar$ freylich das Integral nur eine Fläche $= npr$ aus, aber das ist eben ein Beweis, daß die beyden Flächen ANPO und AnpG einander aufheben, und daß die zwischen PN und rs enthaltene Fläche $= -ANPO + AnpG + npr = npr$ sey, und deswegen muß man einräumen, daß $npr = l \frac{Ar}{AN}$ sey. Wie gesagt, ich fürchte im Ernst diese Einwendung nicht. Um inzwischen alles aus dem Wege zu räumen, was mit irgend einigem Schein eingewandt werden könnte, will ich auch hierauf antworten. Es ist eine Sache, die man bey den Schriftstellern in der Integralrechnung nicht eben allemal angemerkt findet, die aber für sich leicht in die Augen fällt, daß die erste Voraussetzung, welche bey Bestimmung der beständigen Größe angenommen worden, nicht allemal durch die ganze Fläche der Linie ausschließungsweise bestehen könne. Ich will so viel sagen; wenn man annimmt, es soll das Integral für einen gewissen Werth von y (z. E. für $y = AN$) $= 0$ seyn, so folget hieraus nicht, daß eben das Integral nicht auch für andere Werthe von y verschwinden könne. Die Function, welche man durch die Integration heraus bringt, kann aus mehreren möglichen einfachen Factoren bestehen, und dann giebt es so viele mögliche Werthe der Abscisse, für welche das Integral verschwindet, als mögliche Factoren da sind. Dann aber kann das Integral nicht allemal die Fläche

zwi

zwischen jeden zweyen parallelen Ordinaten ausdrücken, wenn man mit dem Integral auf die sonst gewöhnliche Art umgehet. Es giebt nämlich in solchen Fällen unter den Werthen des Integrals mehrere Maxima und Minima, als man Anfangs vorausgesetzt hat. Wenn man annimmt, das Integral soll für $y = AN$ verschwinden, so nimmt man stillschweigends dabey an, es soll für größere y mit diesem y beständig wachsen, und für kleinere y mit diesen abnehmenden y auf die entgegengesetzte Art beständig wachsen. (Zu den abnehmenden y gehören den auch die negativ wachsenden). Wäre dieß, so müßte das Integral nie mehr, als höchstens ein Minimum und ein Maximum geben. Jenes würde der größte negative, und dieses der größte positive Werth desselben seyn, wenn auf beyden Seiten von PN mögliche Flächen fielen. Aber das Integral giebt oft mehr Maxima und Minima, und sodann muß man in jedem besondern Fall mehreres zu Hülfe nehmen, wenn man bestimmen will, welches Stück der zu quadrirenden Fläche für jeden bestimmten Werth von y das Integral ausdrücken könne. Man muß hiebey zugleich in Betrachtung ziehen, daß zdy nicht allein das Differential der Fläche $NPSR$, sondern zugleich auch das Differential derjenigen Fläche sey, welche auf der andern Seite der Ordinate z , wie in diesem Fall gegen VZ zuliegt. Aus allen diesen Umständen zusammen genommen, muß es sich ergeben, welches Stück der Fläche das Integral für jeden Werth von y ausdrücke. Die letzte sehr erhebliche Anmerkung hat Hr. Varignon schon in den memoires de l'Academie de Paris l'année 1706. gemacht, da er die von Hrn. Wallis sogenannten mehr als unendlichen Räume beurtheilte. Das Integral drückt eigentlich nur im Allgemeinen das Gesetz aus, nach welchem sich die Fläche ändert, wenn die Abscisse wächst, oder abnimmt. Die Abscisse aber mag wachsen, oder abnehmen, so ist noch nicht bestimmt, ob die Fläche wachse oder abnehme.

Dieß

Dieß letztere hängt noch von andern Umständen ab, und die Lage der Fläche gegen die veränderliche Ordinate, kann sehr oft abwechseln. Diesemnach ist es nicht einerley, wenn man fragt: wie groß ist die Fläche, welche zwischen zweyen gegebenen Ordinaten liegt? und wenn man so fragt: welches ist die Fläche, welche die Integralformul für einen gegebenen Werth der Abscisse ausdrückt? Es ist also etwas anders, wenn man fragt: wie groß ist die Fläche zwischen den beyden Ordinaten, die durch die Endpuncte der Abscissen AN und Ar durchgehen; und wenn man so fragt: welches ist dasjenige Stück der Fläche, so die Integralformul ausdrückt, wenn man die Abscisse $= Ar$ setze.

§. 10.

Daß eine solche Abwechselung von der Lage der quadrirten Fläche gar nicht ungewöhnlich sey, und daß das Integral, so man auf die gewöhnliche Art heraus bringt, nicht allemal diejenige Fläche ausdrücke, die es nach der ersten Voraussetzung auszudrücken scheinen möchte, davon giebt schon die Quadratur der graden Linie ein Beyspiel ab. Es schneide nämlich die gerade Linie MN die Aye BC in A (10 Fig.) unter einen Winkel, dessen Tangente $= n$. Man nehme den Anfangspunct der Abscissen in A , und es sey $AP = x$, $PM = y$, so ist $y = nx$, und $\int y dx = \frac{1}{2} nx^2 + C$. Wenn man die Fläche, welche dieß Integral ausdrückt, von der Ordinate durch A an rechnet, so ist $C = 0$, und es drückt allemal das Stück der Fläche aus, das zwischen der Ordinate durch A und derjenigen Ordinate fällt, die durch den Endpunct der Abscisse gehet, man mag x positiv, oder negativ nehmen. Dieß Integral bleibt positiv, wenn x negativ, z. Exempel $= -AQ$ genommen wird, obgleich AQN die dadurch ausgedruckte Fläche ist, und dieß Stück unter der Abscissenlinie liegt. Wendet man die vorige Voraussetzung, und nimmt an, die Fläche

soll von der Ordinate DE an gerechnet werden, die vom Anfangspunct der Abscissen um das Stück $AD = a$ abstehet, so muß $\frac{1}{2}nxx + C$ verschwinden für $x = a$, also wird $C = -\frac{1}{2}naa$, welches $\int y dx = \frac{1}{2}n(xx - aa)$ giebt. Dieß Integral ist positiv, wenn x positiv und größer als a ist, und es wächst mit x ; also drückt es die Fläche DEMP aus, so lange $x = AP$ positiv und größer als a bleibt. Wird $x < a$, so wird dieß Integral negativ und wächst, wenn x abnimmt. Es drückt demnach für $x = Ap$ die Fläche DEmp aus, so lange bis $x = 0$, da es $= -\frac{1}{2}naa$ wird, und die Fläche DEA giebt. Für negative x bleibt das Integral Anfangs noch negativ, so lange $-x < -a$ genommen wird. Aber es nimmt ab, wenn $-x$ zunimmt: deswegen kann es für $x = -Aq$ die Fläche DEAqn nicht mehr ausdrücken, es muß vielmehr eine Fläche ausdrücken, die auf der andern Seite von qn liegt; und dieß ist keine andere, als FqnG, weil für $x = -AF = -a$ das Integral wieder verschwindet. Wenn $-x$ über $-AF$ hinaus wächst, so wird das Integral wieder positiv, und wächst mit $-x$. Wenn also $x = -AQ$, so drückt das Integral die Fläche FQNG, keinesweges aber die Fläche DEAQN aus. Will man die Größe dieser letztern wissen, so muß man die drey Werthe DEA, AFG, FQNG ohne Absicht auf die Zeichen + oder - zusammen addiren. Denn es wäre doch wohl sehr sonderbar, wenn man $DEAQN = -ADE + AFG + FQNG = FQNG$ setzen wollte. Ueberdem giebt die Integration nicht einmal diese Zeichen; sondern vielmehr $-ADE$, $-AFG$, und $+FQNG$. Aber das Zeichen - hat vor ADE eine andere Beziehung, als vor AFG. Die Integration giebt ADE negativ gegen DEMP, und AFG negativ gegen FQNG. Just eben die Verwandtniß hat es mit allen den hyperbolischen Flächen, davon beyrn Hrn. d'Alenbert die Rede ist. (8 Fig.) Die Integration giebt AOPN sowohl, als AnpG negativ, aber jene Fläche in Absicht auf NPSR, und diese in Absicht auf npsr.

§. II.

Ich habe gesagt, es habe eben dieselbe Verwandtniß mit allen den hyperbolischen Flächen, davon beyrn Hrn. d'Alenbert die Rede ist, das ist, mit den Flächen aller derjenigen Hyperbeln, welche die Gleichung $z = \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}}$ ausdrückt. Ich habe dieß bereits aus der allgemeinen Formel des Integrals $\int x dy \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}}$ ($\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}}$) hergeleitet, und es wird nicht undienlich seyn, über den Fall, wenn $m=0$, und die Hyperbel die Apollonianische ist, noch einige besondere Betrachtungen anzustellen. Nun wird $z = \frac{a^2}{y}$ und $\int x dy = \frac{1}{2} aa \frac{(\frac{yy}{bb})^0}{0}$ (S. 8.) $= \frac{1}{2} aa \infty \left(\left(\frac{yy}{bb} \right)^{1:\infty} - 1 \right)$. Vermöge des 15 und 18 S. der 1 Abtheilung ist der Ausdruck $\infty \left(\left(\frac{yy}{bb} \right)^{1:\infty} - 1 \right) = l \frac{yy}{bb}$ wenn l den natürlichen Logarithmen bedeutet. Also wird $\int x dy = \frac{1}{2} a^2 l \frac{yy}{bb}$. Dieß bestätigt nun alles dasjenige vollkommen, was ich von den Flächen der apollonianischen Hyperbel im 8 S. behauptet habe. Dieser Ausdruck ist positiv für positive y , so lange $y > b$, und wird negativ für $y < b$, er wird $-\infty$, wenn $y=0$, er bleibt noch negativ für negative y , die kleiner sind als b , nimmt aber ab, wenn $-y$ wächst, und verschwindet, für $y = -b$, da er dann für größere y wieder positiv wird, und mit ihnen wächst. Man kann eben das aus dem Ausdruck $\frac{1}{2} aa \infty \left(\left(\frac{yy}{bb} \right)^{1:\infty} - 1 \right)$ herleiten, wenn man sich vermittle der Reihe aus dem 15 S. der 1 Abtheilung davon versichert hat, daß dieser Ausdruck positiv sey, wenn y nur etwas wenig größer als b genommen wird, so daß $\frac{yy}{bb}$ nicht größer als 2, oder $y < b\sqrt{2}$ ist. In dieser Voraussetzung also, daß $y = f$, und $f < b\sqrt{2}$ sey, werde $\left(\frac{ff}{bb} \right)^{1:\infty} = 1 + \frac{1}{\infty} \beta$, so wird sich β aus der angeführten Reihe bestimmen lassen.

Nun sey überhaupt $\frac{yy}{bb} = (\frac{ff}{bb})^r$, so wird $(\frac{yy}{bb})^{1:\infty} = (\frac{ff}{bb})^{r:\infty} = (1 + \frac{1}{\infty}\beta)^r$
 $= 1 + \frac{1}{\infty} r \beta$. Also wird $\frac{1}{2} aa \infty \left((\frac{ff}{bb})^{1:\infty} - 1 \right) = \frac{1}{2} aa (\infty + \beta - \infty)$
 $= \frac{1}{2} aa \beta$, und überhaupt $\frac{1}{2} aa \infty \left((\frac{yy}{bb})^{1:\infty} - 1 \right) = \frac{1}{2} aa r \beta$. So
 lange nun $y > b$ ist, muß r positiv seyn, und mit y wachsen, für
 $y = b$ aber verschwinden. Wenn $y < b$ wird, so muß r negativ
 seyn, und für $y = 0$, muß r negativ unendlich werden. Für ne-
 gative y bleibt Anfangs r negativ, so lange $y < b$ ist, nimmt aber
 ab, wenn y wächst, bis für $y = -b$, wiederum $r = 0$ wird. Für
 größere negative y wächst r wieder positiv. Also hat es seine Rich-
 tigkeit, daß die Werthe für $m = 0$ in dem Integral $\frac{a^{2m+2}}{2m} (b^{\frac{1}{2m}} - y^{\frac{1}{2m}})$
 noch eben so abwechseln, wie in den Fällen, da m nicht $= 0$, son-
 dern einer bestimmten ganzen Zahl gleich ist. Ich habe dieß mit
 Fleiß besonders bewiesen, um den Gründen des Hrn. d'Alenbert
 alles mögliche Gewicht zu geben.

§. 12.

Man construire nämlich nunmehr nach Vorschrift des Hrn.
 d'Alenbert die Gleichung $dx = \frac{a^{2m+1} dy}{y^{2m+1}}$, oder $x = \frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}} - \frac{a^{2m+2}}{2my^{m+2}}$,
 wo die Gleichheit der Abmessungen gehörig hergestellt ist; so fällt
 in die Augen, daß die Linie MNnm, (11 Fig.) welche diese Glei-
 chung ausdrückt, die Hyperbel der Ordnung $2m+1$ sey, deren
 Asymptoten EF, CD sind, und worinn die Abscissenlinie mit der
 Asymtote EF in der Distanz $CA = \frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}}$ parallel liegt, der An-
 fangspunct der Abscissen aber im Durchschnitt A der Abscissenli-
 nie mit der Asymtote CD genommen worden. Man kann hieraus
 diese Folge ziehen. Die Quadratrix einer jeden Hyperbel, deren
 Exponent der Ordnung eine gerade Zahl ist, aber so, daß die

Dr

Ordinate eine einförmige Function der Abscisse bleibt, sey die nächst niedrigere Hyperbel, die zum Exponenten ihrer Ordnung, die nächst kleinere ungrade Zahl hat. Man kann daraus ferner in einem richtigen Verstande schließen, die Quadratrix der Hyperbel der zweyten Ordnung sey eine Hyperbel der ersten Ordnung, und dann wird die Hyperbel der ersten Ordnung einerley mit der logarithmischen Linie seyn. So wie nun alle Hyperbeln ungerader Ordnungen aus zweyen gleichen ähnlichen, und gegen die mit den Ordinaten parallele Asymtote ähnlich liegenden Stücken bestehen; so wird dieß auch von der Hyperbel der ersten Ordnung, oder der logarithmischen Linie gelten. Alles wird in sein völliges Licht gesetzt, wenn man den besondern Fall, wenn $m = 0$ ist, gehörig entwickelt. In diesem Fall wird die beständige Größe

$\frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}} = AC = PR$ unendlich. Also behält die Linie eigentlich nur die eine Asymtote CD . Ferner drückt in der allgemeinen Gleichung

$x = \frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}} - \frac{a^{2m+1}}{2my^{2m}}$ der veränderliche Theil das Stück PM

aus, welches gleichfalls unendlich wird, so daß nunmehr die Ordinate RM , die Differenz zweyer unendlichen Größen RP , und PM wird, wie die Gleichung richtig angiebt. Uebrigens erhellet,

1) daß x zweymal $= 0$ werde, nämlich für $y = +b = +AN$, und für $y = -b = An$; 2) daß x einmal negativ unendlich werde, für $y = 0$, und 3) daß x zweymal positiv unendlich werde, für $y = +\infty$, und $y = -\infty$. Zwischen den Gränzen $y = +b$, und $y = +\infty$ wächst x von 0 bis ∞ , zwischen den Gränzen $y = +b$ und $y = 0$ ist x negativ und wächst bis zu ∞ ; zwischen den Gränzen $y = 0$, und $y = -b$ bleibt x negativ, und nimmt ab bis zur 0; endlich zwischen den Gränzen $y = -b$, und $y = -\infty$ wird x wieder positiv und wächst bis $+\infty$. Vermöge dieser Verzeichnung ergeben sich nun ohne Zweifel zwey gleiche und ähnliche Stücke der logarithmischen Linie, nämlich VNm und vnm . Jede positive Abscisse

AR hat mit der ihr gleichen und entgegengesetzten negativen Ar eine gleiche Ordinate $RN = rn$. So weit ist an allen diesen Schlüssen nichts auszusetzen, und man kann ohne Bedenken zugeben, daß die logarithmische Linie, wenn sie als die Quadratrix der Hyperbel angesehen wird, und ihre Ordinaten den möglichen Flächen der Hyperbel auf beyden Seiten proportional seyn sollen, einen Durchmesser habe, oder aus zweyen gleichen und ähnlichen Stücken bestehe. Sobald man aber weiter schließt, wenn $AN = 1$; so ist $RM = l AR$, und $rm = l - Ar = l + AR = RM$, also hat $-Ar$ eben den Logarithmen, welchen $+AR$ hat, und so weiter; so läugne ich diese fernere Folge. Vermöge der Verzeichnung ist freylich $RM = l AR$, wenn $AN = r$ ist, oder eigentlich $RM = l \frac{AR}{1}$; aber es ist keinesweges $rm = l \frac{Ar}{+1}$, es ist vielmehr $rm = l \frac{Ar}{An} = l \frac{-AR}{-1}$, denn diese Ordinate ist der Fläche $npsr$ (8 Fig.) proportional, und diese Fläche ist $= l \frac{-AR}{-1}$ (S. 8.) und keinesweges $= l \frac{-RA}{+1}$.

§. 13.

Die Gleichung dieser Linie wird nun diese seyn: $x = \frac{1}{2} a l \frac{yy}{bb}$, und es bedeutet hier x die Ordinate, und y die Abscisse. Wenn man aber MQ mit AR parallel zieht, so wird $x = RM = AQ$ und $y = AR = QM$. Nimmt man also die Abscissen AQ, auf der Asymtote, und die Ordinaten MQ auf derselben perpendicular, so dienet eben die Gleichung, nur mit dem Unterscheid, daß die Bedeutung der Buchstaben x und y sich verwechselt, und x die Abscisse, y aber die Ordinate anzeigt. Wenn nun e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, so giebt die Gleichung $x = \frac{1}{2} a l \frac{yy}{bb}$ auch diese $e^{2x:n} = \frac{yy}{bb}$, und es wird $y = \pm b e^{x:n}$, so daß jeder Abscisse x zwey gleiche und entgegengesetzte y zugehören. Nun sind die Abscissen die Logarithmen der Ordinaten. Man kann zugeben, daß

daß die Abscissen auch die Logarithmen der negativen Ordinaten sind. Aber so, wie die Abscissen eigentlich die Logarithmen der Verhältnisse der positiven Ordinaten gegeneinander sind; so sind sie zugleich die Logarithmen der Verhältnisse der negativen Ordinaten gegeneinander. So wie nun $AQ = l \frac{QM}{AN}$ ist, so ist zugleich $AQ = l \frac{Qm}{An} = l \frac{-QM}{-AN}$, aber keinesweges $AQ = l \frac{-QM}{+AN}$. Man kann demnach der logarithmischen Linie zwei Aeste lassen, man kann zugeben, daß sie einen Durchmesser habe: inzwischen behalten die Hrn. von Leibniz und Euler noch immer recht, wann sie es läugnen, daß diese Linie einen Durchmesser habe. Denn sie haben es in einem andern Verstande geläugnet, als es hier erwiesen ist. Gemeiniglich wird die Gleichung für die logarithmische Linie so ausgedrückt $x = a l \frac{y}{b}$, oder $e^{x:a} = \frac{y}{b}$, und es ist offenbar, daß diese Gleichung nur einen Ast allein ausdrücken könne, deswegen würde die Frage seyn, welche Gleichung man nehmen müsse? Es ist nun nicht schwer, hierauf zu antworten, und es in sein gehöriges Licht zu setzen, worauf die ganze Streitigkeit von der Gestalt der logarithmischen Linie ankomme. Gegen die Folge des Satzes: wenn alle die Linien, welche die Gleichung $dx = \frac{dy}{y^{2m+1}}$ ausdrückt, einen Durchmesser haben, so muß dieser Durchmesser noch bleiben, wenn $m = 0$ ist, hatte Hr. Euler in den Memoires de Berlin das Nöthige schon erinnert. Man ist nur so lange davon versichert, daß alle diese Linien einen Durchmesser haben, als diese Gleichung algebraisch integrabel ist. Aber das Integral bleibt nicht algebraisch, wenn $m = 0$ ist, also kann man auch nicht versichert seyn, daß der Durchmesser bleibe. Um desto überzeugender darzuthun, daß dergleichen Sätze, so allgemein sie scheinen möchten, dennoch in speciellen Fällen zuweilen Ausnahmen leiden, führt er die Gleichung zum Exem. an $y = \sqrt{ax + \frac{1}{4}a^2} (b + x)$. Alle Linien, welche diese Gleichung ausdrückt, sind algebraisch

gebrauch und haben einen Durchmesser; dennoch aber behält die Linie keinen Durchmesser mehr, wenn $b = 0$ ist. Hierauf antwortet Hr. d'Alenbert, das habe zwar seine Richtigkeit, aber es rühre eigentlich daher, weil in dem Fall die Gleichung des achten Grades, welche $y = \sqrt{ax + \sqrt[4]{a^3(b+x)}}$ giebt, sich in zwey rationale Gleichungen der vierten Ordnung theile, und also in der That zwey unterschiedene Linien ausdrücke, die für einerley Axe und Anfangspunct der Abscisse beschrieben worden. Hierauf erwiedere ich nun, daß just derselbe Fall Statt habe, wenn von der Gleichung $x = \frac{a^{2m+1}}{2m} (\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}})$ die Rede ist. Wenn $m = 0$ ist, so wird daraus $\frac{2x}{a} = l \frac{yy}{bb}$, oder $e^{2x:a} = \frac{yy}{bb}$. Diese theilt sich in die beyden Gleichungen $\frac{x}{a} = l \frac{y}{b}$ und $\frac{x}{a} = l \frac{-y}{b}$, und diese in die beyden Gleichungen $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ und $e^{x:a} = \frac{-y}{b}$; also gehören die beyden Aeste der logarithmischen Linie, welche die allgemeine Gleichung giebt, eigentlich nicht weiter zusammen, als ein paar Linien, die für einerley Axe und Anfangspunct der Abscissen beschrieben sind. Beyde Aeste drücken auch keine verschiedene Logarithmensysteme aus, sondern der eine Aest drückt gerade dasselbe System aus, was der andere ausdrückt. In der That hat es also damit eben die Bewandniß, wie mit der Gleichung $yy = nnxx$, welche ein System zweyer gegen die gemeinschaftliche Axe auf beyden Seiten ähnlich liegender geraden Linien giebt. Wer wollte aber hieraus die Folge ziehen, daß zu einer jeden geraden Linie eine andere gehöre, die auf der andern Seite gegen die Axe eine ähnliche Lage hat. Inzwischen kommt man doch oft bey Auflösung einer Aufgabe auf diese Gleichung, da es denn ein Beweis ist, daß zur vollständigen Verzeichnung zwey grade Linien erfordert werden, wie wenn man die Gleichung für den Schnitt eines senkrechten Kegels sucht, der durch die Axe gehet. Ein und eben derselbe Logarithme gehöret nicht nur dem Verhältnisse $\frac{y}{b}$, sondern auch dem

Ver-

Verhältnisse $\frac{-y}{b}$ zu. Weder die Gleichung $x = l \frac{y}{b}$, noch die Gleichung $x = l \frac{-y}{b}$ kann beydes zugleich ausdrücken; will man eine Gleichung haben, die beydes zugleich ausdrückt, so muß man beyde zusammen addiren, oder welches einerley ist die Gleichungen $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ und $e^{x:a} = \frac{-y}{b}$ in einander multipliciren. Bey obiger Art, die Hyperbel zu quadriren, enthielte das Integral die Logarithmen der Verhältnisse der positiven Abscissen zur positiven Einheit sowohl, als der negativen Abscissen zur negativen Einheit. Also mußte eine Gleichung heraus kommen, die beydes ausdrückte, und die Quadratrix mußte aus zweyen Stücken bestehen, so wie der Kegelschnitt durch die Aye des Kegels aus zweyen graden Linien.

§. 14.

Hr. d'Alenbert braucht noch verschiedene andere Gründe zu beweisen, daß die logarithmische Linie einen Durchmesser haben müsse. Auf der 191 und 192 Seite der Opuscules, finde ich folgende Schlüsse: Die Gleichung $y = e^x$ giebt für unzählige Werthe von x einen doppelten Werth von y , allemal nämlich, wenn $x = \frac{n}{2m}$ ist; also hat die logarithmische Linie auf der andern Seite der Aye wenigstens unzählige puncta discreta. Dieß geben auch wohl andere Geometer zu, die sonst auf des Herrn von Leibniz Seite sind. Ich muß aber die Richtigkeit desselben läugnen, weil e^x keine andere, als positive Werthe haben kann, was auch x bedeutet, (1 Abth. S. 31.) daferne es nur eine mögliche Größe ist, wie an dem angeführten Ort vorausgesetzt wird. Hr. d'Alenbert gehet noch weiter und behauptet, daß diese puncta discreta eine stätige Linie ausmachen. Denn sagt er, man muß voraussetzen, daß e einen doppelten Werth habe, einen positiven und einen negativen, und dieß deswegen, weil e die Zahl ist, deren Logarithmen $= 1$ und nach seinem System jedem Logarithmen zwey gleiche

und ~~angesezte~~ ~~angesezte~~ Zahlen zugehören. Dieser letzte Satz ist, wie ich glaube, hinlänglich widerlegt, also fällt der ganze Beweis für den doppelten Werth von c weg. Ueberdem ist die Voraussetzung dieses doppelten Werths von c deswegen unrichtig, weil ein Logarithmensystem, dessen Basis $= -c$ seyn soll, von demjenigen dessen Basis $= +c$ ist, so gewiß unterschieden seyn muß, als ein System, dessen Basis $= 10$, unterschieden ist von demjenigen, dessen Basis $= 8$, oder einer andern von 10 unterschiedenen Zahl. Ferner ist diese Voraussetzung wider alle Begriffe der in den analytischen Gleichungen vorkommenden beständigen Größen. Diese müssen ganz bestimmt seyn, sowohl in Ansehung der Größe, als auch in Ansehung der Lage, ehe und bevor man die Linie, welche die Gleichung ausdrückt, verzeichnen kann. Man könnte sonst auf eben die Art allerhand sonderbare Sätze heraus bringen. Wenn Hr. d'Alenbert behauptet, es habe mit der Gleichung $y = c^x$ eben die Bewandniß, wie mit der Gleichung $y = \sqrt{x}$ für die Parabel; so muß ich aufrichtig gestehen, daß ich dieß gar nicht verstehen könne, wie es eigentlich gemeynet sey. Diese Gleichung muß deswegen quadriert werden, weil sie irrational ist. Das ist die Ursache, warum weder $y = +\sqrt{x}$, noch $y = -\sqrt{x}$ die Parabel ganz ausdrückt, sondern vielmehr die Gleichung $yy = x$. Hier muß also die auf die Potenz $\frac{1}{2}$ schon erhöhte Größe nämlich $x^{1/2}$ beyde Zeichen haben. Aber Hr. d'Alenbert wollte beweisen, daß c , die Größe unter dem Exponenten beyde Zeichen haben müsse. Wie das nun aus dem angebrachten Exempel der Parabel folge, weiß ich nicht.

§. 15.

Mit dem vorigen Beweise verbindet Herr d'Alenbert an eben der Stelle noch einen andern. (12 Fig.) Er sagt so: man nehme auf der Axe der logarithmischen Linie, einen Punct Q nach

Bes

Belieben, schneide auf der Axc zwey gleiche Stücke AQ, QP ab, und ziehe die Ordinaten AB, PM; so ist die Ordinate in Q zwischen AB und PM die mittlere Proportionallinie, welche allemal einen doppelten Werth hat, QS und QR = — QS, u. s. f. In der That ist dieß eben das, was die Gleichung $c^{2x:a} = \frac{yy}{bb}$ ausdrückt, und Hr. d'Alenbert hätte hieraus eben diese Gleichung herleiten können. Inzwischen bleibt dieser Grund für sich allein allemal unzulänglich, weil man sonst auf eben die Art beweisen könnte, daß jede Linie, wenn gleich in ihrer Gleichung die Ordinate y eine rationale ganze Function von der Abscisse x ist, dennoch aus zweyen gleichen und ähnlichen Stücken bestehen müsse, indem es eben so viel ist, als ob man die Gleichung quadrirte. So ist z. E. $y = nxx$ die Gleichung einer Parabel ASM, (13 Fig.) von der sich eben so beweisen läßt, daß jeder Abscisse AQ zwey gleiche entgegengesetzte Ordinaten QS und QR zugehören. Man nehme nämlich einen Punct D nach Gefallen zwischen A und Q, und P so, daß $AD^2 : AQ^2 = AQ^2 : AP^2$ wird, und ziehe die Ordinaten DE und PM, so ist nun die Ordinate in Q zwischen DE und RM die mittlere Proportionallinie, welche einen doppelten Werth haben muß, QS und QR = — QS. Man kann die Gleichung leicht so einrichten, daß sie diesen Umstand ausdrückt. Es sey nämlich $AQ = x$, und $QS = y$, so ist $DE = n AD^2$ und $PM = n AP^2$, folglich $DE \cdot PM = nn AD^2 \cdot AP^2$; das ist aber eben so viel, als $QS^2 = nn AQ^4$ oder überhaupt $yy = nn x^4$. So wenig diese Schlüsse beweisen können, daß die Parabel auf beyden Seiten der Abscissenslinie AP gleiche und ähnliche Stücke habe; eben so wenig können es jene Schlüsse des Hrn. d'Alenbert von der logarithmischen Linie dathun. Würde man inzwischen bey Auflösung einer Aufgabe auf jene Gleichung $yy = nn x^4$ geleitet; so würden beyde Parabeln deswegen, weil sie den sogenannten Ort der Aufgabe ausmachen, zusammen gehören. Hievon ist die An-

wendung leicht auf die logarithmische Linie zu machen. Ihre Gleichung $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ ist für sich schon rational, und deswegen ist es nicht verstatet sie zu quadriren, wofern es nicht wegen anderer Gründe geschehen muß. Diese sind aber vorhanden, wenn man sie als die Quadratricem der Hyperbel ansiehet, welche die möglichen Flächen der Hyperbel auf beyden Seiten ausdrücken soll.

§. 16.

Gegen diese bisher von mir beurtheilte Lehre, von den beyden gleichen und ähnlichen Stücken der logarithmischen Linie, macht sich Hr. d'Alenbert auf der 222 Seite folgenden Zweifel. On pourroit faire contre l'argument tiré des aires hyperboliques une objection que voici, & qui paroît avoir échappé à tous ceux, qui ont jusqu'ici traité cette matière. Soit $AP = x$, $PM = y$, $AC = a$, & $y = \frac{1}{(a-x)^n}$ n étant un nombre pair positif; il est visible, que cette équation sera celle d'une hyperbole du degré n , qui aura pour asymptote CO , & dont les deux branches BMQ , qmb , seront du même côté de l'Axe Aa . Il est visible de plus, que l'intégrale de ydx , ou l'aire $ABMP = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \right)$; & comme les deux branches BMQ , qmb , appartiennent à une seule & même courbe, il semble, que cette intégrale devroit exprimer aussi l'aire $AQqmp$, dans laquelle Ap est $> AC$. Cependant elle ne l'exprime pas. Car quand x est $> a$, l'intégrale précédente est toujours finie, au lieu, que l'aire $AQqmp$ est infinie, étant composée des deux aires infinies $ABQC$, $qmpc$. Voila donc un exemple ou l'équation des aires n'est pas assujettie à la loi de continuité, quoique celle des branches le soit. Or dira-t-on, ne pourroit-il pas en être de même de l'hyperbole équilateré? Ich merke hiebey an, daß in dem Ausdruck des Integrals $APMP = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \right)$ ohne Zweifel ein Druckfehler eingeschlichen

chen sey, und daß es $\frac{1}{a^{n-1}}$ statt $\frac{1}{a^n}$ heißen müsse. Es ist nämlich $\int \frac{dx}{(a-x)^n} = \frac{1}{(n-1)(a-x)^{n-1}} + C$, und dieß Integral soll $= 0$ seyn, für $x = 0$. Also wird $C = -\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$, und $\int y dx = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \right)$. Da n hier eine grade Zahl bedeutet, so will ich wegen mehrerer Deutlichkeit $2m$ statt n schreiben; so wird $\int y dx = \frac{1}{2m-1} \left(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}} \right)$. Diese Gleichung soll, wie Herr d'Alenbert glaubt, für $x > a$ nicht mehr gelten, und zwar aus dem Grunde, weil dieß Integral für $x > a$ allemal unendlich, die Fläche $AQqmp$ aber, die es in diesem Fall ausdrücken sollte, allemal unendlich groß ist. Aber warum kann man nicht hier auch sagen, es sey $AQqmp = ABMP + PMQC - pmQC = ABMP + PMQC - PMQC = ABMP$, da in einem unstreitig richtigen Verstande die Fläche $pmQC = -PMQC$ ist? Hr. d'Alenbert drückt sich hier so aus: Die Gleichung der Flächen sey dem Gesetz der Stätigkeit nicht unterworfen, und es kommt hiebey also darauf an, daß der Sinn der Redensart, eine Integralgleichung sey dem Gesetz der Stätigkeit unterworfen festgesetzt werde. Will man dieß so erklären, eine Gleichung von dieser Art, wenn sie die Quadratur einer Linie ausdrückt, sey alsdann nur dem Gesetz der Stätigkeit unterworfen, wenn das Integraal für jeden möglichen Werth der Abscisse x die zwischen denjenigen Ordinaten enthaltene Fläche ausdrückt, davon die eine bey Hinzusetzung der beständigen Größe bestimmt worden, die andere aber durch den Endpunct der Abscisse gehet; so muß man zugeben, daß obige Gleichung für die Quadratur der Hyperbel $\int y dx = \frac{1}{2m-1} \left(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}} \right)$ dem Gesetz der Stätigkeit nicht unterworfen sey. Aber alsdann ist auch die Gleichung $\int y dx = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{(a-x)^{2m}} - \frac{1}{a^{2m}} \right)$ diesem Gesetz nicht unterworfen, wenn $y = \frac{1}{(a-x)^{2m+1}}$ ist. Denn diese der

Hyperbel $MPVmpF$ (8 Fig.) zugehörige Gleichung, wenn nämlich die Abscissen von N gerechnet werden, und $NA = a$ ist, drückt für $x = Nr > a$ ebenfalls die zwischen PN und rs enthaltene Fläche nicht aus. Wosern dieß also ein Beweis seyn soll, daß die Integralgleichung gar keine zu eben der Linie gehörige Flächen mehr ausdrücken könne, wenn $x > a$ ist; so widerspricht Hr. d'Alenbert seinem eigenen System von den beyden gleichen und ähnlichen Stücken der logarithmischen Linie, denn es hat in der That mit beyden Gleichungen einerley Verwandtniß.

§. 17.

Meine Gedanken von der Sache sind diese. Das Gesetz der Stätigkeit erfordert nur, daß das Integral jedesmal eine zwischen zweyen parallelen Ordinaten enthaltene Fläche ausdrücke. Die übrigen Umstände müssen es ergeben, welche Ordinaten diejenigen sind, zwischen denen die Fläche jedesmal fällt. Der Ausdruck ydx giebt nicht allein das Differential der Fläche zwischen AB und PM (14 Fig.); sondern es ist zugleich ydx das Differential einer Fläche, die auf der andern Seite von PM liegt, und um das Differential ydx abnimmt, wenn $ABPM$ um dieses Differential anwächst. Das ist die Ursache, warum das Integral $\int ydx$ sowohl die eine, als die andere dieser Flächen ausdrücken kann, und es ergiebt sich in jedem besondern Fall ohne Schwierigkeit, welche von diesen beyden Flächen verstanden werden müsse. Wenn in der Gleichung $\int ydx = \frac{1}{2m-1} \left(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}} \right)$ die Abscisse $x > a$ genommen wird, so ist dieß Integral negativ, und nimmt ab, wenn x wächst. Dieß ist ein Beweis, daß die dadurch ausgedrückte Fläche auf der andern Seite von pm falle, welche der vorigen entgegen gesetzt ist. Man nehme an, die Axe der Abscissen sey auf beyden Seiten nach S und s bis ins Unendliche verlängert, und zugleich die beyden zugehörigen Aeste der krummen

men Linie nach V und v ; so erhält, daß die Fläche $pmvs$ abnehme, wenn x wächst, so wie es der Ausdruck des Integrals erfordert. Für $x = \infty$, wird das Integral $= -\frac{1}{(2m-1)a^{2m-1}}$. Für $x = -\infty$ behält das Integral denselben Werth, da es die Fläche $ABVS$ ausdrückt, dieß erhellet daraus, weil es noch weiter abnimmt, wenn $-x$ kleiner wird. So drückt es für $x = -AR$ die Fläche $ABNR$ aus, so lange bis $x = 0$ ist, da dann das Integral wieder verschwindet. Diefemnach drückt das Integral, wenn $x > a$ genommen wird, die Flächen $pmvs$ und $VSAB$ zusammen genommen aus. So sonderbar dieß scheinen möchte, so gewiß ist es, daß es damit seine völlige Richtigkeit habe, und daß es eben hiedurch völlig einleuchte, wie die Flächen auf beyden Seiten durch einerley Integralformul ausgedrückt werden, oder wie Hr. d'Alenbert redet, nach dem Gesetz der Stätigkeit zusammen hängen. Das anscheinende sonderbare rühret blos von der Voraussetzung her, die man bey der Addition der beständigen Größe angenommen hat. Es kann nämlich die beständige Größe $-\frac{1}{a^{2m-1}}$ nicht hinzu kommen, wofern man nicht voraussetzt, daß das Integral $= 0$ seyn soll, wenn $x = 0$ ist. Aber die natürlichste Voraussetzung ist, das Integral $= 0$ zu setzen, wenn $x = \infty$ ist, da dann die beständige Größe $= 0$, und das Integral $\int y dx = \frac{1}{(2m-1)(a-x)^{2m-1}}$ wird. Nun drückt es für $x > a$ die Fläche $pmvs$ aus, und das Integral ist zwischen den Gränzen $x = a$, und $x = +\infty$, negativ. Wird aber x negativ, so wird das Integral positiv, und drückt z. E. für $x = -AR$ die Fläche $VSRN$ aus, welche wächst, wenn AR abnimmt, so wie es das Integral verlangt; für $x = 0$ ist das Integral $= \frac{1}{(2m-1)a^{2m-1}}$, welches die Fläche $VSAB$ ausdrückt. Wird x positiv, so wächst diese Fläche noch über $VSAB$ hinaus, bis sie für $x = a$ unendlich, und für $x > a$ wie-

wieder negativ wird. Durch die Voraussetzung also, daß das Integral $= 0$ seyn soll, wenn $x = 0$ ist, vermindert man die ganze Reihe der positiven Flächen um das Stück VSAB. Wenn aber eine positive veränderliche Größe mit einer andern negativen nach dem Gesetz der Stätigkeit zusammen hängt, und 0 die Gränze zwischen beyden ist, so kann man die positive Größe, nicht um ein gewisses Stück vermindern, daß man nicht die damit zusammen hängende negative um eben dieses Stück vermehren sollte. Vermindert man die positiven Abscissen einer krummen Linie um die beständige Größe b dadurch, daß man den Anfangspunct der Abscissen um die Distanz b vorwärts rückt; so werden zugleich alle negative Abscissen um eben dieses Stück vermehret. Vermindert man die positiven Ordinaten dadurch, daß man mit der vorigen Abscissenlinie eine andere in der Distanz b parallel legt, so werden zugleich alle negative Ordinaten um eben dieses Stück vergrößert. Dieser Umstand hat nur alsdann Statt, wenn die positiven Werthe mit den negativen nach dem Gesetz der Stätigkeit zusammen hängen. Also giebt er in dem obigen Fall einen Beweis ab, daß wirklich die Flächen VSPM und $vspm$ nach dem

Gesetz der Stätigkeit verbunden sind. Wenn man $dx = \frac{dx}{(a-x)^{2m}}$ setzt, und diese Gleichung construirt, oder welches einerley ist, die Quadratricem der Hyperbel $y = \frac{1}{(a-x)^{2m}}$ verzeichnet, so wird dieß alles dadurch vollständig erläutert. Allein ich enthalte mich darüber weitläuftiger zu seyn, da dieß in der That bekannte Dinge sind.

§. 18.

Ich glaube nunmehr, daß die Schwäche des Hauptbeweises, womit Herr d'Alenbert gegen dem Hrn. von Leibniz die
Mög

Möglichkeit der Logarithmen verneinter Größen, hat erhärten wollen, völlig ins Licht gesetzt sey. Ob dieses gleich hinlänglich ist, das ganze System des Hrn. d'Alenberts von den Logarithmen verneinter Größen zu widerlegen; so wird es doch nicht undienlich seyn, auch die vornehmsten von denjenigen Gründen, welche Hr. d'Alenbert insbesondere dem Hrn. Euler entgegen gesetzt hat, zu prüfen. Ich habe schon im 2 S. angeführet, daß Hr. Bernoulli unter andern diesen Beweis gebraucht habe: weil $\frac{-dx}{-dx} = \frac{+dx}{+dx}$, so sey $1 - x = 1 + x$. Hierauf antwortet Hr. Euler mit Recht, man könne aus der Gleichheit der Differentiale auf die Gleichheit der Integrale nicht schließen, weil die Integrale um eine beständige Größe unterschieden seyn können, die bey der Differentiation wegfällt. So ist hier wirklich $1 - x = 1x + 1 - 1$, woraus es ganz deutlich erhellet, warum $d1 - x = d1 + x$ werde, ohne daß deswegen $1 - x = 1 + x$ sey, wofern man nicht schon voraussetzt, daß $1 - 1 = 0$ sey, welches doch erst bewiesen werden soll. Man könnte also auf eben die Art beweisen, daß $\ln x = lx$ sey, weil $d. \ln x = \frac{n dx}{nx} = \frac{dx}{x} = d lx$; ein Satz von dem Hr. Euler sagt, daß ihn Hr. Bernoulli selbst ohne Zweifel für falsch erklären würde, und den ja wohl ein Jeder für falsch erklären muß. Inzwischen thut es Hr. d'Alenbert nicht, sondern er sagt ausdrücklich: je ne vois pas ce que cette conséquence avoit de choquant. So wie sich Hr. d'Alenbert aber darüber erklärt, hat freylich der Satz $\ln x = lx$ nichts anstößiges, wenn nämlich von verschiedenen Systemen die Rede ist. Aber in einem und eben demselben System kann doch wohl unmöglich $\ln x = lx$ seyn, und dieß ist es, was aus der obgedachten Art zu schließen folgen würde. Es ist d. log. naturalis $nx = \frac{n dx}{nx}$ und d. log. nat. $x = \frac{dx}{x}$, also würde log. naturalis $nx = \log. nat. x$ seyn, und dieß ist es, dessen Unmöglichkeit Hr. Euler behauptet. Hr. d'Alenbert selbst will ja auch nebst dem Hrn.

Bernoulli auf diese Art beweisen, es sey $\log. \text{nat.} - x = \log. \text{nat.} + x$. Doch ich muß auch dasjenige nicht verschweigen, was Hr. d'Alenbert beybringt, um dieses alles zu rechtfertigen. En effet (so heißt es auf der 194 Seite) qu'est-ce que lx en regardant x comme l'ordonnée d'une Logarithmique? c'est le logarithme du rapport de x à une ordonnée b , que l'on prend pour unité (Hr. d'Alenbert nimmt also an dieser Stelle selbst den Begriff eines Logarithmen so an, wie ich ihn im 13 S. der 1 Abth. gebildet habe.) Qu'est-ce que lnx ? C'est en general le logarithme du rapport de nx à une ligne quelconque c , que l'on prend pour l'unité. Si on fait $c = b$ on trouvera aisément, que $\log. \frac{nx}{c} = l \frac{x}{b} + l \frac{nx}{b}$, ou $lnx = lx + ln$; mais si on fait $c = nb$, on aura $l \frac{nx}{nb} = l \frac{x}{b} = lx$. En general il est évident, que si on prend ln pour zero, ou ce qui revient au même, si on prend n pour représenter l'unité, lnx sera égal au logarithme de x . Pourquoi donc en prenant -1 pour représenter l'unité, c'est à dire, pour le nombre dont le $\log. = 0$, n'auroit-on pas $lnx = l-x = lx$? Entweder die bisherige Theorie von den Logarithmen muß ganz umgearbeitet werden, oder alles dieses will nichts weiter sagen, als so viel: Die Logarithmen sind gleich, wenn die Verhältnisse gleich sind, und es heißt $l-x = l+x$ nach der eigenen Erklärung des Hrn. d'Alenberts, die an dieser Stelle wenigstens sehr deutlich angetroffen wird, nichts anders, als $l_{-1}^x = l_{+1}^x$. Hr. d'Alenbert giebt nämlich zu, daß lnx nicht $= lx$ seyn könne, wenn die Einheiten einerley sind, womit man x und nx vergleicht. Dagegen sagt er, wenn die Einheit, womit x verglichen wird $= b$, diejenige aber, womit man nx vergleicht $= nb$ genommen werde, so sey $lx = lnx$; das heißt nach seiner eigenen Erklärung $l_{-1}^x = l_{+1}^x$. Hierauf folgt nun der Zusatz: wenn also $n = -1$, oder -1 selbst die Einheit ist, womit man

nx , so nun $-x$ ist, vergleicht, warum sollte nicht $\ln x = l-x = lx$ seyn? Demnach kann diese Frage nichts anders, als so viel sagen wollen: Warum sollte nicht $l^{\frac{x}{n}} = l^{\frac{-x}{1}} = l^{\frac{x}{1}}$ seyn? das hat Niemand bestritten, und es wird nie bestritten werden.

§. 19.

Hr. Euler hatte gesagt, wenn man die Gleichung $\ln x = lx$ gelten lasse, so bestehe die logarithmische Linie nicht aus zweyen, sondern unzählig vielen Stücken. Auch diese Folge läugnet Hr. d'Alenbert, und zwar setzt er die Ursache hinzu: wenn man $\ln x = lx$ setze, so verrücke man nur den Anfangspunct der Abscissen. Allein so viel ich einsahe, wird hiedurch der Sinn der Streitfrage wiederum von Hrn. d'Alenbert ganz verändert. Bey ihm ist $\ln x$ so viel als $l^{\frac{x}{n}}$; wenn nun in der logarithmischen Linie BMN, die Ordinate $PM = x$, $AB = 1$, (12 Fig.) und also $AP = lx$ ist; wenn ferner $LN = nx$ und $GH = n$ ist, so ist freylich $GL = AP = \frac{LN}{GH} = l^{\frac{nx}{n}}$, und also $AP = \ln x \rightarrow \ln$ oder $AP + \ln = \ln x = GL + \ln$. Will man also nunmehr wieder x statt nx schreiben, und die Gleichung $GL + \ln = lx$ statt der vorigen $AP = \ln$ nehmen, so heißt dieß freylich nur, den Anfangspunct der Abscissen von A nach G rücken. Aber beym Hr. Euler heißt $\ln x$ nicht so viel als $l^{\frac{x}{n}}$, sondern vielmehr so viel als $l^{\frac{x}{1}}$, wo eben diejenige Einheit verstanden werden muß, womit man x vergleicht. Wäre nämlich der Schluß richtig $\frac{-dx}{x} = \frac{+dx}{+x}$, also $l-x = l+x$, so müßte man auch schließen können, $\frac{n dx}{nx} = \frac{dx}{x}$, also $\ln x = lx$, was auch n bedeutet. Es kann demnach n jede Linie bedeuten, die von derjenigen unterschieden ist, welche man $= 1$ gesetzt hat: und wenn dieß ist, so wird die Gleichung $AP = \ln x$ für jede Abscisse unzählig viele Ordinaten geben, und also die Linie unstreitig unzäh-

lig viele verschiedene Nester bekommen. Uebrigens ist es eine allgemein bekannte Sache, daß zwar eine und eben dieselbe logarithmische Linie unzählig viele Logarithmensysteme ausdrücken könne, aber dieß aus keiner andern Ursache, als weil man bey der ersten Voraussetzung die Freyheit hat, die Subtangente, oder welches auf eins hinaus läuft, den Logarithmen eines angenommenen Verhältnisses durch jede beliebige Zahl auszudrücken. Es ist aber auch ferner ausgemacht, daß sich das System sogleich ändere, wenn man die Subtangente, oder auch den Logarithmen eben desselben Verhältnisses, durch eine andere Zahl ausdrückt. Wenn also in dem ersten System $\lambda = l_T^x$ gewesen, so kann in dem zweyten $\lambda = l_{\frac{n}{T}}^x$ seyn. Aber sodann ist in dem zweyten nicht mehr $\lambda = l_T^x$, wofern man nicht glauben will, es könne z. Ex. im briggischen System $l_{10} = l_{2 \times 10} = l_{3 \times 10} = l_{4 \times 10}$ u. s. f. seyn. Es sey also in dem zweyten System $L = l_T^x$ die Basis des ersten e , die Basis des zweyten b , so wird $l^\lambda = x$, und $b^L = x$. Wenn nun $b = e^\mu$, so wird $e^\lambda = e^{\mu L}$, folglich $\lambda = \mu L$, oder $L = \frac{\lambda}{\mu}$: und der Modulus des zweyten Systems $= \frac{1}{\mu}$, wenn der Modulus des ersten $= 1$ ist. Alles dieses sind ganz bekannte und unläugbare Sätze: also wird der Satz, daß $lx = lnx$ seyn könne, wenn man ihn so erklärt, wie ihn ein Jeder natürlicher Weise verstehen wird, nur zugegeben seyn, wenn von verschiedenen Systemen die Rede ist. Es scheint, daß Hr. d'Alenbert dieß auch endlich selbst eingestehet. Er setzt aber hinzu, wenn gleich zugegeben würde, daß die Voraussetzung $lx = lnx$ nur von verschiedenen Systemen gelte, so würde doch nicht folgen, daß auch dieß noch bey der Voraussetzung $l-x = l+x$ wahr sey: denn er habe das Gegentheil bewiesen. Daß dieß geschehen sey, muß ich vermöge des Vorigen läugnen. Hr. d'Alenbert hat nichts weniger bewiesen, als

als daß $l_{+1}^{-x} = l_{+1}^{+x}$, wohl aber, daß $l_{-1}^{-x} = l_{+1}^{+x}$ sey, und das ist es gar nicht, worauf hier die Sache ankommt.

§. 20.

Wenn Hr. Bernoulli behauptet hatte, es sey $l-1 = l+1=0$, so folgert Hr. Euler daraus, es müsse demnach auch $l\sqrt{-1}=0$, $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=0$ seyn u. s. f., womit aber, die sonst bekannten Lehren von den unmöglichen Größen nicht bestehen können. Hr. d'Alenbert findet auch in diesen Folgen nichts ungereimtes. Er sagt auf der 195 S. En effet tout système de Logarithmes est arbitraire en soi; & il est clair, que 0, 0, 0, 0, &c. formant une progression Arithmetique, je puis au dessus d'une progression Géométrique quelconque imaginer une suite de zeros, qui seront chacun les logar. du nombre qui leur répond. Ainsi posant 0 pour le Logarithme de 1 & de --- 1. j'aurai 0 pour le Logarithme de $\sqrt{-1}$ & de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Aber heißt das nicht wieder den Sinn der Streitfrage ganz verändern? Die Frage ist nicht; ob sich ein System angeben lasse, worinn $l+1 = l-1 = l\sqrt{-1}$ &c. $= 0$ sey; es ist vielmehr die Frage, ob in den gebräuchlichen Systemen, im Neperischen, Briggischen und andern, die davon nach einem beständigen Modulo abhängen $l-1$, $l\sqrt{-1}$, und s. f. $= 0$ sey. Auf die Art kann ich behaupten, es sey $23. 12 = 1002$; und wenn man mir entgegen setzt, dieß sey wider alle Rechnungsregeln, so darf ich nur folgendes antworten. Die Art, wie wir unsere Zahlen schreiben ist ganz willkührlich. Statt dessen, daß man die ersten neun Zahlen durch einfache Ziffern ausdrückt, kann man auch, wie Weigelius gewiesen hat, die ersten drey Zahlen durch einfache Ziffern ausdrücken, und sodann die Werthe der Classen von der rechten gegen die linke Hand in ratione quadrupla steigen lassen, statt dessen, daß sie sonst in ratione decupla steigen. Dann

aber ist $23 = \text{elf}$, und $12 = \text{sechs}$; aber sechsmal elf ist sechs und sechzig, und eben soviel drückt die Ziffer 1002 in der angenommenen Voranssetzung aus. So wenig hiedurch dargethan werden kann, daß nach dem einmal eingeführten decadischen Algorithmus $23. 12 = 1002$ sey: eben so wenig beweisen auch die Schlüsse des Hrn. d'Alenbert, daß in den gebräuchlichen Systemen $l-1 \text{ } l\sqrt{-1}$, u. s. f. $= 0$ sey, und dieß ist es doch eigentlich, was geläugnet wird. Hr. Euler schließt weiter, wenn $l\sqrt{-1} = 0$ sey, so müsse der Satz falsch seyn, davon selbst Hr. Bernoulli der Erfinder ist, daß der Halbmesser sich zum Quadranten verhalte, wie $\sqrt{-1} : l\sqrt{-1}$, und hierauf erwidert Hr. d'Alenbert folgendes. Si dans cette proposition $l\sqrt{-1}$ n'est pas $= 0$, mais imaginaire, cela vient du système de Logarithmes, que l'on suppose dans l'équation entre les arcs de cercle x & leurs sinus x . En effet $dx = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ donne $dx = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{xx-1}} = \frac{-dx}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{xx-1}}$; d'où l'on tire $x = \frac{1}{\sqrt{-1}} l \frac{\sqrt{-1}}{x + \sqrt{xx-1}}$. Cette equation appartient à un système de Logarithmes tel, 1) que la soutangente de la Logarithmique, qui le represente, soit $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, c'est à dire imaginaire, 2) que le Logarithme de $\frac{\sqrt{-1}}{x + \sqrt{xx-1}}$ soit imaginaire en donnant à x toutes les valeurs possibles depuis 0 jusqu'à l'unité. C'est un système, qui n'a rien de commun avec l'équation de la Logarithmique $x = ly$, dans laquelle y est supposée toujours réelle. Allein, entweder die Integration ist falsch, oder das l bedeutet hier den natürlichen Logarithmen von $\frac{\sqrt{-1}}{xx\sqrt{xx-1}}$, und das System mag durch den Modul $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ verändert werden, wie es wolle, so muß doch durch die Division mit diesem Modul das natürliche System wieder heraus kommen, und also $x\sqrt{-1} = \log.\text{nat.} \frac{\sqrt{-1}}{x + \sqrt{xx-1}}$ seyn,

seyn, welches für $x = 1$ diese Gleichung giebt $\frac{x}{2} \sqrt{-1} = \log. \text{nat. } \sqrt{-1}$, und also giebt Hr. d'Alenbert hier zu, daß $\log. \text{nat. } \sqrt{-1}$ nicht $= 0$ sey. Was übrigens diese Art Gleichungen eigentlich sagen wollen, werde ich bald ausführlicher zeigen.

§. 21.

Hr. Euler bedienet sich, um den scheinbaren Schwierigkeiten in der Lehre von den Logarithmen abzuheffen, des Satzes: daß jede GröÙe unzählig viele Logarithmen habe, und bereichert eben hiedurch die Analysis mit einer neuen überaus sinnreichen Theorie. Was die möglichen GröÙen betrifft, so war es nur nöthig zu beweisen, daß $l + 1$ sowohl, als $l - 1$ unzählig viele Werthe habe, indem überhaupt $l + a = la + l1$ und $l - a = la + l - 1$ seyn muß. Nun ergiebt die Gleichung, welche alle Werthe von $l + 1$ ausdrückt, einen möglichen Werth dieses Logarithmen, nämlich den Werth $= 0$. Die übrigen Werthe sind alle unmöglich. Die Gleichung aber, welche alle Werthe von $l - 1$ ausdrückt, giebt für diesen Logarithmen gar keinen möglichen Werth. Die Gleichung selbst, ist folgende $1 + y:n = \cos \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n}$, worinn π die halbe Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$, $y = l - 1$ und $n = \infty$ ist, λ aber alle ganze Zahlen bedeuten kann, selbst die 0 nicht ausgeschlossen. Diese Gleichung nun giebt $y = \pm (2\lambda - 1)\pi \sqrt{-1}$, welcher Werth nie $= 0$ seyn kann, sondern allemal unmöglich ist. Inzwischen macht Hr. d'Alenbert auf der 197 S. der Opusculs dagegen diesen Zweifel. Er meynet, aus jener Gleichung $1 + y:n = \cos \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n}$ folge nicht allein diejenige, welche Hr. Euler daraus geschlossen hat, sondern noch überdem diese Gleichung $y = 0$, oder $l - 1 = 0$. Wenn man nämlich in jener Gleichung $y = 0$, und $n = \infty$ setze, so werde sie identisch, und gebe $1 = 1$. Hr. d'Alenbert hat vermuthet

muthlich so geschlossen, es sey $0:\infty$ unendlich klein, und könne also weggelassen werden; eben so sey auch $\frac{(2\lambda-1)\pi}{\infty} \sqrt{-1}$ unendlich klein, und falle daher ebenfalls weg: welches denn $1=1$ giebt. Hierauf muß ich aber dieses erwidern. Wenn man aus obgedachter Gleichung den Werth von y herleiten, und mit der Gleichung selbst regelmäßig umgehen will, so muß man erwägen, daß diese Gleichung aus endlichen und unendlich kleinen Theilen bestehe, daß die endlichen Theile einander aufheben, und y in einem unendlich kleinen Theil der Gleichung enthalten sey. Nun ist bekannt, wenn gleich unendlich kleine Größen sonst gegen endliche verschwinden, daß doch in Gleichungen von dieser Art die unendlich kleinen Größen selbst untereinander verglichen werden müssen, und man also alle endliche Größen erstlich wegzuschaffen habe, bevor man aus der Gleichung weiter schließen kann. Man muß in obiger Gleichung zuerst untersuchen, was aus der Voraussetzung $n = \infty$ folgt, bevor man daran denken kann y zu bestimmen. Aber die Voraussetzung $n = \infty$ giebt $1 + y:\infty = 1 + \frac{(2\lambda-1)\pi}{\infty} \sqrt{-1}$. Nun läßt sich der Werth von y nur durch die Vergleichung des Theils $y:\infty$ mit $\frac{(2\lambda-1)\pi}{\infty} \sqrt{-1}$ bestimmen, da 1 auf beyden Seiten durch die Subtraction wegfällt. Sonst kann man beweisen, daß y jeder endlichen Zahl gleich sey. Man setze z. Ex. $y = 3$, so giebt das auch $1 = 1$, wenn man wie Hr. d'Alenbert schließen will: also ist auch $1-1 = 3$, und s. f. Aus eben der Gleichung glaubt Hr. d'Alenbert, noch auf eine andere Art den Werth $y = 0$ herzuleiten. Er schließt so. Man setze $\lambda = n = \infty$, so hat man $1 + y:n = \cos. 2\pi = \sqrt{-1} \sin 2\pi$, oder $1 + y:n = 1$, also $y = 0$. Allein wenn die Gleichung $1 + y:n = 1$ auch richtig aus der Voraussetzung folgte, so würde man doch nichts weiter als $y = 0$ n daraus schließen können. Da aber $n = \infty$, so ist $0n$ ein ganz unbestimmter

ter Werth, den man keinesweges so schlechtthin $= 0$ setzen kann. Ueberdem gilt die vorige Erinnerung auch hier: denn es wird eigentlich $1 + \frac{y}{n} = \cos. (2\pi - \frac{\pi}{n}) \pm \sqrt{-1} \sin (2\pi - \frac{\pi}{n})$. Aber $\sin (2\pi - \frac{\pi}{n})$ ist $= - \sin \frac{\pi}{n} = - \frac{\pi}{n}$, also wird vielmehr $1 + \frac{y}{n} = 1 + \frac{\pi}{n} \sqrt{-1}$, welches $y = \pm \pi \sqrt{-1}$ giebt; und dieß ist eben der Werth, der gefunden wird, wenn man $\lambda = 0$ setzt, welches der Natur dieser Formeln völlig gemäß ist. Inzwischen muß ich auch dieses erinnern, daß eigentlich λ nie unendlich groß genommen werden müsse, wie sogleich unten erhellen wird.

§. 22.

Gegen den Satz selbst: daß jede Zahl unzählig viele Logarithmen habe, und gegen den Beweis desselben, womit Herr Euler ihn bestätigt, bringt Hr. d'Alenbert an der angezogenen Stelle weiter keine Zweifel vor. Inzwischen ist er doch nicht so schlechterdings mit dem Hrn. de Forcenex zufrieden, welcher in den Miscellaneis societatis privatae Taurinensis der Lehre des Hrn. Euler beytritt: er setzt ihm in dem Supplement au memoire sur les logarithmes des quantités négatives, auf der 210 und f. S. der Opuscules Mathematiques solche Zweifel entgegen, die auch gewissermaßen wider die Theorie des Hrn. Eulers gerichtet sind. Allein ich hoffe, daß ich nicht allein im Stande seyn werde, auch diese Zweifel zu widerlegen, sondern bey dieser Gelegenheit zugleich verschiedene Anmerkungen beyzufügen, die dazu dienen können, diese ganze Theorie von der Mannigfaltigkeit der Werthe der Logarithmen in ihr völliges Licht zu setzen. Die Analysis des Hrn. Eulers setzt es außer Zweifel, daß der Satz selbst richtig sey: jede Zahl hat unzählig viele Logarithmen. Hr. von Segner setzt im IV Theil seines vortreflichen Cursus mathematici diese Analysis noch vollständiger auseinander, und trägt dadurch zur Aufklärung

M

die

dieser Theorie nicht wenig bey. Inzwischen scheint die Theorie noch in der Absicht unvollständig zu seyn, weil, so viel mir bekannt ist, noch Niemand gewiesen hat, daß die geometrische Construction alle diese unzähligen Logarithmen einer Zahl ebenfalls darstelle, und also die Geometrie auf die Frage: welches ist der Logarithmus einer gegebenen Größe? grade eben so viele Antworten ertheile, als die Analysis. Es scheint mir der Mühe nicht unwerth zu seyn, diese Untersuchung vorzunehmen, nicht allein deswegen, weil sich daraus aufs deutlichste ergibt, woher diese Mannigfaltigkeit ihren Ursprung habe; sondern auch um deswillen, weil sich eben dadurch ein weit größeres Licht über manche andere hiemit verwandte analytische Theorien verbreitet, wovon der Ausspruch des Hrn. Bernoulli (Mem. de l'Acad., de Prusse 1753. p. 148.) welchen auch Hr. Kaestner bey einer ähnlichen Gelegenheit einmal anführt, sonst gelten möchte: une Analyse abstraite, qu'on écoute sans aucun examen synthétique de la question proposée, est sujette à nous surprendre plutôt, qu'à nous éclairer. Bevor ich aber die Construction selbst vortrage, werde ich zuorderst einige wenige die analytische Theorie selbst betreffende Anmerkungen voran setzen.

§. 23.

In der ersten Abtheilung dieser Abhandlung war meine Absicht nur, den Satz überhaupt zu beweisen: In den gewöhnlichen Systemen sind die Logarithmen negativer Größen unmöglich, da ich dann zugleich Gelegenheit hatte, beyläufig verschiedene von den Zweifeln, die Hr. d'Alenbert dagegen gemacht hatte, zu beantworten. Aber nun kann man weiter fragen: Läßt sich denn der Logarithme einer negativen Zahl gar nicht durch eine analytische Formel ausdrücken? Man muß mit Ja antworten, und die Formel die man sucht, läßt sich

sich ohne alle Schwierigkeit so heraus bringen. Es sey e die Basis der natürlichen Logarithmen, und man setze $\log -a = p + q \sqrt{-1}$, so muß $-a = e^{p+q\sqrt{-1}}$ seyn. Man theile beyde Verhältnisse $e:1$ und $-a:1$ oder $e^{p+q\sqrt{-1}}:1$ in m gleiche Theile, und setze der Kürze wegen $p + q \sqrt{-1} = f$, so erhält man für den m ten Theil eines jeden dieser Verhältnisse folgende $e^{f/m}:1$ und $e^{f/m}:1$. Es werde $m = \infty$, so ist $e^{f/m}:1 = 1 + \frac{f}{m}:1$ (1 Abtheil. S. 32.), also $e^{f/m}:1 = 1 + \frac{f}{m}:1$, und $e^f = (1 + \frac{f}{m})^m = -a$. Aus dieser Gleichung muß nun f gesucht werden. Sie giebt $1 + \frac{f}{m} = (-a)^{1/m}$ und also ist die Frage, was $(-a)^{1/m}$ bedeute? Es sey m eine sehr große Zahl, aber noch nicht in der Schärfe $= \infty$, so ist kein Zweifel, daß $(-a)^{1/m}$ nicht sollte unmöglich seyn, wenn m eine grade Zahl ist. Eigentlich nämlich hat $(-a)^{1/m}$ so viele Werthe, als m Einheiten enthält, diese sind aber gewiß alle unmöglich, wenn m gerade ist. Wäre m ungerade, so würde unter allen diesen Werthen einer möglich und negativ seyn. Aber dieser mögliche Werth, welchen $(-a)^{1/m}$ haben könnte, wenn m ungerade wäre, kann hier gar nicht gebraucht werden. Um alle die übrigen Werthe auf einmal zu übersehen, muß man bekanntermaßen die Zahl $-a$ mit der allgemeinen Form $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ oder $c(\cos\phi + \sin\phi \sqrt{-1})$ vergleichen, welche jede Zahl, sie mag möglich oder unmöglich seyn, ausdrücken kann, wenn $c = \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}$, $\sin\phi = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$ und $\cos\phi = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$, also $\alpha = c \cos\phi$ und $\beta = c \sin\phi$ ist. Setzt man nun $-a = c(\cos\phi + \sin\phi \sqrt{-1})$ so wird $(-a)^{1/m} = c^{1/m} (\cos\frac{\phi}{m} + \sin\frac{\phi}{m} \sqrt{-1})$. Nun ist im gegenwärtigen Fall $\alpha = -a$, und $\beta = 0$, also $\cos\phi = -1$, $\sin\phi = 0$, und $c = a$. Diesemnach $\phi = \pm (2\lambda - 1)\pi$, und $(-a)^{1/m} = 1 + \frac{f}{m} = a^{1/m} \times (\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{m})$. Hiebey ist nun

vor allen Dingen dieses zu merken, daß zwar λ alle ganze Zahlen 0, 1, 2, 3 und s. f. nach der Reihe bedeuten könne, aber nie eine so große Zahl, welche gegen m ein endliches Verhältniß hat. Wenn man alle Wurzeln haben wollte, so müßte man freylich fortgehen, bis $2\lambda - 1 = m$, oder $\lambda = \frac{m+1}{2}$ würde. Wäre nun m eine ungrade Zahl, so würde für $\lambda = \frac{m+1}{2}$, heraus kommen $1 + \frac{f}{m} = a^{1:m} \times -1$, welches nicht angehet, und der Voraussetzung zuwider ist; (denn $a^{1:m}$ ist $= 1 + \frac{l}{m}$, und hat hier keinen andern Werth, vermöge der Natur der Formel), diese mögliche negative Wurzel fällt also ganz weg. Ist m grade, so kann ohnehin keine einzige Wurzel möglich seyn. Aber unter allen diesen unmöglichen Wurzeln, sind nur diejenigen um ein unmögliches Element von 1 unterschieden, die aus der Formel ihren Ursprung haben, so lange $\frac{2\lambda - 1}{m}$ unendlich klein, und also $\cos \frac{(2\lambda - 1)\pi}{m} = 1$ und $\sin \frac{2\lambda - 1\pi}{m} = \frac{(2\lambda - 1)\pi}{m}$ ist, und diese können nur gebraucht werden. In dieser Voraussetzung also: daß λ gegen m kein endliches Verhältniß bekomme, wird $1 + \frac{f}{m} = a^{1:m} (1 + \frac{(2\lambda - 1)\pi}{m} \times \sqrt{-1})$. Es sey der natürliche Logarithme von $a = l$, so ist $a = e^l$, und $a^{1:m} = e^{l:m} = (1 + \frac{l}{m})^l = 1 + \frac{l}{m}$, also $1 + \frac{f}{m} = (1 + \frac{l}{m}) (1 + \frac{(2\lambda - 1)\pi}{m} \sqrt{-1}) = 1 + \frac{l}{m} + \frac{(2\lambda - 1)\pi \sqrt{-1}}{m} + \frac{l(2\lambda - 1)\pi}{mm} \sqrt{-1}$. Hieraus folgt $\frac{f}{m} = \frac{l}{m} + \frac{(2\lambda - 1)\pi \sqrt{-1}}{m} + \frac{l(2\lambda - 1)\pi \sqrt{-1}}{mm}$, und $f = l + (2\lambda - 1)\pi \sqrt{-1}$.

§. 24.

In diesen Formeln bedeutet $a^{1:m}$ die positive mögliche Wurzel der Ordnung m von a , keine andere, obgleich $a^{1:m}$ für sich ebenfalls m verschiedene Werthe hat. Diese Wurzel, welche hier allein verstanden werden muß, ist $1 + \frac{l}{m}$, wenn $a = e^l$ und $e^{1:m} = 1 + \frac{l}{m}$ ist. Weil man nun bey der gewöhnlichen Berechnung der Logarithmen positiver Größen keinen andern, als diesen einzigen möglichen Werth von $e^{1:m}$ und $a^{1:m}$ in Betrachtung zieht, so erhält man auch nur einen einzigen Werth für $l+a$. Man setzt nämlich alle mögliche positive Verhältnisse aus dem Elementarverhältniß $1 + \frac{l}{m}:1$ nach einem möglichen Exponenten zusammen. Das Elementarverhältniß muß positiv seyn, wofern alle mögliche Zahlen mögliche Logarithmen haben sollen. (1 Abtheil. S. 30). Aber aus eben dem positiven Elementarverhältniß lassen sich die positiven Verhältnisse, auch nach einem unmöglichen Exponenten, zusammen setzen. Es folgt also nicht, wenn das Elementarverhältniß positiv ist, daß die positiven Verhältnisse keine andere als mögliche Logarithmen haben sollten. Denn man nehme nun an, es sey der allgemeine Ausdruck des Logarithmen eines positiven Verhältnisses dieser: $p + q\sqrt{-1}$, so daß $l+a = p + q\sqrt{-1}$ ist, und es wird $a = e^{p+q\sqrt{-1}}$ seyn müssen. Der Kürze wegen sey auch hier $p + q\sqrt{-1} = f$, so hat man $(+a)^{1:m} = e^{f:m} = (1 + \frac{l}{m})^f = 1 + \frac{f}{m}$, wo $1 + \frac{l}{m}$ die positive mögliche Wurzel der Ordnung m von e ist. Wenn man nun $+a = \alpha + \beta\sqrt{-1} = c(\cos\phi + \sqrt{-1}\sin\phi)$ setzt, so erhält man $+a = \alpha$, $\phi = 0$, also $\sin\phi = 0$, $\cos\phi = +1$, $c = a$, $\phi = 2\lambda\pi$, und $a^{1:m}(\cos\frac{2\lambda\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\lambda\pi}{m})$. Es sey der positive mögliche Werth von $a^{1:m} = 1 + \frac{l}{m}$, so wird $a^{1:m} = (1 + \frac{l}{m})(\cos\frac{2\lambda\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\lambda\pi}{m}) = 1 + \frac{f}{m}$, wo

statt λ wiederum alle ganze Zahlen 0. 1. 2. 3. u. s. w. gesetzt werden können. Man würde alsdann allererst alle diese Wurzeln haben, wenn man bis auf $\lambda = \frac{1}{2} m$ gekommen wäre. Aber dieß würde die zweyte mögliche Wurzel $-(1 + \frac{l}{m})$ geben, welche schlechthin ausgeschlossen wird. Ueberdem können nur alle diejenigen Wurzeln, welche von 1 um ein unmögliches Element unterschieden sind, der Gleichung ein Genüge thun. Also darf man nur diejenigen nehmen, welche die Formel giebt, so lang λ gegen m kein endliches Verhältniß hat. Man darf also λ nicht unendlich groß nehmen, und in dieser Voraussetzung wird $1 + \frac{f}{m} = (1 + \frac{l}{m}) (1 + \frac{2\lambda\pi}{m} \sqrt{-1}) = 1 + \frac{l}{m} + \frac{2\lambda\pi}{m} \sqrt{-1} + \frac{l \cdot 2\lambda\pi \cdot \sqrt{-1}}{m m}$. Dieß giebt $\frac{f}{m} = \frac{l}{m} + \frac{2\lambda\pi \sqrt{-1}}{m} \sqrt{-1} + \frac{l \cdot 2\lambda\pi \sqrt{-1}}{m \cdot m}$, und $f = l + 2\lambda\pi \sqrt{-1}$. Vermöge dieser Analysis wird also dasjenige bestätigt, was ich im 21 S. gegen den Hrn. d'Alenbert erinnert habe, daß nämlich eigentlich λ nie unendlich groß genommen werden müsse. Daß aber des Hrn. d'Alenberts Voraussetzung einen richtigen Werth von y gab, wenn man mit der Gleichung gehörig umgieng, rührte daher, weil allemal, wenn man bis $\lambda = m$ gekommen ist, die Reihe der Wurzeln wieder von neuem anfängt.

§. 25.

Auf die unmöglichen Größen, werde ich die Analysis nicht anwenden, da sie sowohl von Hr. Euler, als auch von Hrn. von Segner vollständig genug ausgeföhret, und die Anwendung leicht zu machen ist. Hier kam es mir nur darauf an, es völlig evident zu machen, daß nicht alle Wurzeln, welche die Formel überhaupt geben kann, sondern nur diejenigen genommen werden müssen, welche von 1 um ein unmögliches Element unterschieden sind. Ich setze deswegen nur noch diese Anmerkung hinzu. Wenn

$a = e$ ist, so ist $le = 1$, also wird $e^{1:m} = (1 + \frac{1}{m}) (1 + \frac{2\lambda\pi}{m} \sqrt{-1}) = 1 + \frac{1}{m} + \frac{2\lambda\pi}{m} \sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{m} (1 + 2\lambda\pi \sqrt{-1})$ und es enthält die Formel $1 + \frac{1}{m} (1 + 2\lambda\pi \sqrt{-1}) : 1$ alle Werthe, die das Elementarverhältniß haben kann, wenn ein positives Endliches daraus zusammen gesetzt werden soll. Auf eben die Art findet man aus dem S. 23. $1 + \frac{1}{m} (1 + (2\lambda - 1)\pi \sqrt{-1}) : 1$ für den Ausdruck des Elementarverhältnisses, daraus sich alle negative Verhältnisse zusammen setzen lassen. Jenes Verhältniß ist $= (1 + \frac{1}{m})^{1 + 2\lambda\pi \sqrt{-1}}$, und dieses $= (1 + \frac{1}{m})^{1 + (2\lambda - 1)\pi \sqrt{-1}}$. Beide Verhältnisse kann man als solche ansehen, die das gemeinschaftliche Maas $1 + \frac{1}{m} : 1$ haben, obgleich letzteres gar nicht anders, als nach einem unmöglichen Exponenten daraus zusammen gesetzt werden kann. Also ist das Verhältniß $1 + \frac{1}{m} : 1$ das gemeinschaftliche Maas aller möglichen, sowohl positiven, als negativen Verhältnisse. Man kann aber jedes positive Verhältniß sowohl, als auch jedes negative, auf unzählig viele verschiedene Arten daraus zusammen setzen, wenn die unmöglichen indices multiplicitatis nicht ausgeschlossen werden: und dieß ist der Ursprung der mannigfaltigen Werthe, welche die Logarithmen einer und eben derselben Zahl, in einem und eben demselben System haben können. Das System bleibt dasselbe so lange $l(1 + \frac{1}{m})^n = n:m$ bleibt, oder, wenn man $\frac{n}{m} = x$ setzt, so lange $l(1 + \frac{x}{m})^m = x$ bleibt. Aber nun wird auch $l(1 + \frac{1}{m})^n (\cos\phi + \sqrt{-1} \sin\phi) = \frac{n(\cos\phi + \sqrt{-1} \sin\phi)}{m}$. Wenn also nunmehr $\frac{n(\cos\phi + \sqrt{-1} \sin\phi)}{m} = f$ gesetzt wird, so erhält man $n(\cos\phi + \sqrt{-1} \sin\phi) = mf$ und $(1 + \frac{1}{m})^n (\cos\phi + \sqrt{-1} \sin\phi) = (1 + \frac{1}{m})^{mf} = (1 + \frac{f}{m})^m$, und $l(1 + \frac{f}{m})^m = f$. Aber $(1 + \frac{f}{m})^m$ kann

Kann jede gegebene Zahl bedeuten, und es kann f noch unzählige Werthe haben. Also gehören alle diese mannigfaltigen Werthe von f dennoch zu einerley System, dessen Modulus $= 1$ ist. Nun mag x bedeuten, was es wolle, so kann man $x = (1 + \frac{f}{m})^m$ setzen, das giebt $x^{1:m} = 1 + \frac{f}{m}$, und $f = mx^{1:n} - m = lx$, wo also unter allen möglichen Werthen von $x^{1:m}$ nur diejenigen zu nehmen sind, die von der 1 um ein mögliches oder unmögliches Element unterschieden sind, nachdem f möglich oder unmöglich ist. Denn die übrigen können mit der Voraussetzung nicht bestehen, daß $1 + \frac{1}{m}$ das gemeinschaftliche Maas aller Verhältnisse seyn soll. Und hiedurch wird die völlige Richtigkeit der Analysis des Hrn. Eulers erwiesen, wenn er in seinen Gleichungen statt λ keine andere, als endliche Zahlen setzt.

§. 26.

Nunmehr sey die gleichseitige Hyperbel gewöhnlicher maassen zwischen ihren Asymptoten, TV, XY, verzeichnet, und die halbe Zwergaxe CA, welche der halben conjugirten Aye CE gleich ist, sey $= 1$ genommen. Ist nun $MP = y$ eine rechtwinklichte Ordinate, der auf der Zwergaxe die Abscisse $CP = x$ zugehört; so hat man für die Hyperbel die Gleichung $y = \pm \sqrt{(xx-1)}$. Man weis, daß beyde Werthe nur so lange möglich sind, als $+x > +1$ und $-x > -1$ genommen wird. Inzwischen nehme man $CQ < 1$, so wird $y = \pm \sqrt{(CQ^2-1)} = \pm \sqrt{(1-CQ^2)} \sqrt{-1}$. Man mache die Ordinate $QG = + \sqrt{(1-CQ^2)}$ und $QH = - \sqrt{(1-CQ^2)}$, so wird die der Abscisse $x = CQ$ zugehörige Ordinate $y = \pm QG \sqrt{-1}$ und $\pm QG = \frac{y}{\sqrt{-1}} = -y \sqrt{-1}$. Diesemnach ist QG eine unmögliche Ordinate der Hyperbel in eben dem Verstande, in welchem CE die unmögliche halbe conjugirte Aye der Hyperbel heißt. Es wird nämlich $y = \pm \sqrt{-1}$ für $x = 0$, oder $y = \pm 1, \sqrt{-1}$. Nimmt man

man nun $CE = CF = 1$, so wird $y = \pm CE \sqrt{-1}$, und $\pm CE = \frac{y}{\sqrt{-1}} = -y \sqrt{-1}$. Auf eben die Art kann man für alle x , die zwischen den Gränzen $+1$ und -1 fallen, die zugehörigen Ordinaten zeichnen, welche zwar an sich mögliche Größen sind, aber deswegen hier als unmögliche Größen in der Rechnung vorkommen, weil sie Ordinaten der Hyperbel seyn sollen, und es doch nicht sind. Man setze $z = \pm \sqrt{(1 - xx)}$, so wird für die Hyperbel $y = z \sqrt{-1}$, aber $z = \pm \sqrt{(1 - xx)}$ ist eine Gleichung für den Zirkel, der aus dem Mittelpunct C mit dem Halbmesser $CA = 1$ beschrieben werden kann. Alle Ordinaten dieses Zirkels sind unmögliche Ordinaten der Hyperbel, weil $z = \frac{y}{\sqrt{-1}} = -y \sqrt{-1}$ ist. Aber auch umgekehrt, alle Ordinaten der Hyperbel sind unmögliche Ordinaten des Zirkels, weil $y = z \sqrt{-1}$ ist. Hieraus folgt, daß der Zirkel ein unmögliches Stück der Hyperbel sey, so wie die Hyperbel ein unmögliches Stück des Zirkels ist. Der Zirkel hängt mit der Hyperbel in zweyen Puncten A und B zusammen. Deswegen giebt es Bogen, die in der Hyperbel den einen Endpunct z. E. M, und im Zirkel den andern Endpunct z. E. G haben. Alle Bogen von dieser Art können sowohl unmögliche Bogen des Zirkels, als auch unmögliche Bogen der Hyperbel heißen. Beyde Linien haben bey A und B eine gemeinschaftliche Tangente, und formiren bey diesen Puncten zwey entgegengesetzte Spitzen MAG, NAH, ingleichen mBF, nBE. Weil überdem alle die Bogen, welche in A sowohl, als B zusammen stoßen, durch eine gemeinschaftliche Gleichung ausgedrückt werden, so ist jeder von den vier Bogen, die in A oder B zusammen stoßen, die Fortsetzung eines jeden der drey übrigen. Zwischen jeden zweyen Puncten also, davon der eine in der Hyperbel, der andre im Zirkel liegt, fallen unzählig viele verschiedene Bogen. So fallen zwischen M und G folgende:

M

MAG,

MAG, MAGEBFHAG, und überhaupt $MAG + 2\lambda\pi$ ferner auch diese

MAHFBEG, und überhaupt $MAHFBEG + 2\lambda\pi$, wo λ und π die vorhin schon gebrauchte Bedeutung haben. Wenn nun der Ausdruck Arc. Absc. x den Bogen bedeutet, welcher in A anfängt, und da aufhört, wo die zu x gehörige Ordinate PM, oder PN die Hyperbel trifft; so bezeichnet dieser Ausdruck unzählig viele verschiedene Bogen, nämlich alle folgende.

AM, AEBFAM, AEBFAEBFAM u. s. w. ingleichen AM, AFBEAM, AFBEAFBEAM, u. s. w.

Wenn die Bogen, so sich von A durch E erstrecken, mit + bezeichnet werden, so muß man diejenigen, so sich von A durch F erstrecken mit — bezeichnen. Also gehören dahin alle Bogen, welche der Ausdruck $+ \lambda AEBFA + AM$ bezeichnet, wenn λ alle ganze Zahlen, 0, 1, 2, 3, u. s. w. andeutet. Wenn demnach der Ausdruck Sect. Absc. x den Ausschnitt bedeutet, welchen der jeder Abscisse x zugehörige Bogen der Hyperbel einschließt, so bezeichnet eben dieser Ausdruck unzählig viele verschiedene Ausschnitte, die alle zwischen CA, CM, und den von A bis M fortgehenden Bogen enthalten sind.

§. 27.

Man weis aus den bekannten Eigenschaften der Hyperbel,

daß D. Sect. $ACM = \frac{dx}{2\sqrt{(xx-1)}} = \frac{dx}{2\sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}}$ sey. Aber dieß ist nicht allein ein Differential des Ausschnitts, dem der Bogen AM zugehört, sondern eines jeden andern, dem einer von den übrigen Bogen zugehört, die sich von A bis M erstrecken. Demnach ist eigentlich D. Sect. Absc. $x = \frac{dx}{2\sqrt{(xx-1)}} = \frac{dx}{2\sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}}$,
und

und durch die Integration erhält man Sect. Absc. $x = \frac{1}{2} l(x + \sqrt{xx-1}) = \sqrt{-1} \times \frac{1}{2} \text{Arc. cos } x = \sqrt{-1} \cdot \text{Sect. cos } x$, in der Voraussetzung nämlich, daß dieser Ausschnitt $= 0$ sey, wenn $x = 1$, wie denn dieß auch wirklich einer von den Werthen dieses Ausschnitts ist, für $x = 0$. Frägt man also, welches der natürliche Logarithme von $x + \sqrt{xx-1}$ sey, so fragt man in der That nach etwas, daß auf unzählig viele verschiedene Arten beantwortet werden kann. So lange x kleiner als 1 ist, wird Sect. cos x zwar für sich eine mögliche Größe, weil aber dieser Ausschnitt hier als ein Ausschnitt der Hyperbel angesehen wird; so ist er unmöglich. Für $x = 1$ ist dieser Ausschnitt $= \pm \lambda \pi \sqrt{-1}$. Der natürliche Logarithme von $x + \sqrt{xx-1}$ ist vermöge der Formel doppelt so groß, als dieser Ausschnitt, also erhält man $l + 1 = \pm 2\lambda \pi \sqrt{-1}$. In der That drückt auch dieses alle hyperbolische Sektoren aus, deren Bogen in A anfangen und wieder aufhören. Sie sind

AE BFA, 2 AE BFA, 3 AE BFA, u. s. w. oder
AF BEA, 2 AF BEA, 3 AF BEA, u. s. w.

Wenn $x > 1$ genommen wird, so hat man $l(x + \sqrt{xx-1}) = 2 \text{ Sect. Absc. } x$, das ist, $l(x + \sqrt{xx-1})$, hat folgende Werthe. 2 ACM ; $2 \text{ ACM} \pm 2 \text{ Sect. AE BFA}$; $2 \text{ ACM} \pm 4 \text{ Sect. AE BFA}$; u. s. w. oder 2 ACM ; $2 \text{ ACM} \pm 2 \pi \sqrt{-1}$; $2 \text{ ACM} \pm 4 \pi \sqrt{-1}$; u. s. w. also überhaupt $l(x + \sqrt{xx-1}) = 2 \text{ ACM} \pm 2 \lambda \pi \sqrt{-1}$, welches mit der Analysis, völlig übereinstimmt. Es kann nun $x + \sqrt{xx-1}$ eine jede positive mögliche Zahl, die > 1 ist, ausdrücken, und man kann x allemal so nehmen, daß $x + \sqrt{xx-1}$ einer Zahl von dieser Art gleich wird. Soll $x + \sqrt{xx-1} = 1 + A$ seyn, so wird $\sqrt{xx-1} = 1 + A - x$. Es ist offenbar, daß dieß allemal eine einfache Gleichung werde: denn wenn man qua-

dritt, so erhält man $xx - 1 = (1 + A)^2 - 2x(1 + A) + xx$, wo xx nothwendig allemal heraus fällt; so daß $x = \frac{(1+A)^2 + 1}{2(1+A)} = 1 + \frac{AA}{2(1+A)}$, und folglich allemal größer als 1 wird. Der Ausdruck 2 Sect. $\cos x \sqrt{-1}$ bezeichnet nun noch immer ebenfalls den $l(x + \sqrt{xx - 1})$, oder wie man es auch ausdrücken kann, den $l(x + \sqrt{1 - xx}) \sqrt{-1}$. Nun muß man sich aber durch die Zeichen $\sqrt{-1}$ nicht verführen lassen, hier eine andere Unmöglichkeit zu suchen, als wirklich da ist. Da $x > 1$ ist, so ist $\sqrt{1 - xx} \sqrt{-1}$ eine mögliche Größe. Der hyperbolische Ausschnitt, den man sucht, ist wirklich ein unmöglicher Zirkelausschnitt, weil man aber keinen Zirkelausschnitt sucht, sondern den Hyperbolischen, so ist in dem Ausdruck 2 Sect. $\cos. x \sqrt{-1}$ die Unmöglichkeit auch nur scheinbar. Die Zeichen Sect. Absc. x , und Sect. $\cos. x \sqrt{-1}$ sind nun äquivalent, denn eigentlich ist jetzt der Zirkelausschnitt unmöglich, und Sect. $\cos. x = -$ Sect. Absc. $x \sqrt{-1}$. Wenn man dieß in dem Ausdruck Sect. $\cos. x \sqrt{-1}$ substituirt, so hat man Sect. Absc. x . Die möglichen Logarithmen sind also mögliche Ausschnitte der Hyperbel, diese aber sind zugleich unmögliche Ausschnitte des Zirkels, dessen Durchmesser mit der Aye der Hyperbel einerley ist. Von einer andern Unmöglichkeit ist hier gar die Rede nicht. Uebrigens ist hiebey noch anzumerken, daß der Ausdruck $\sqrt{xx - 1}$ seiner Natur nach zweydeutig sey, man kann ihn also auch negativ nehmen, und so hat man überhaupt 2 Sect. Absc. $x = l(x + \sqrt{xx - 1})$. Es ist nämlich vermöge der bekannten Eigenschaften der Hyperbel $\frac{x + \sqrt{xx - 1}}{1} = \frac{1}{x - \sqrt{xx - 1}}$, also $l x - \sqrt{xx - 1} = -l(x + \sqrt{xx - 1})$. Weil nun der Ausschnitt $ACN = -ACM$; so wird $ACN = -l(x + \sqrt{xx - 1}) = l x - \sqrt{xx - 1}$. Wenn man also in dem allgemeinen Ausdruck 2 Sect. Absc. $x = l x + \sqrt{xx - 1}$ das untere Zeichen braucht, so muß allemal der Ausschnitt ver-

verstanden werden, dessen Bogen sich von A bis N erstreckt. Aber solcher Ausschnitte giebt es wiederum unzählige, und also findet man für den Logarithmen eines jeden Bruchs folgende: 2 ACN ; $2 \text{ ACN} + \text{Sect. } 2 \text{ AEBFA}$; $2 \text{ ACN} + 4 \text{ Sect. AEBFA}$; u. s. w. oder 2 ACN ; $2 \text{ ACN} \mp 2\pi\sqrt{-1}$; $2 \text{ ACN} \mp 4\pi\sqrt{-1}$ u. s. w. also überhaupt $l(x - \sqrt{xx-1}) = 2 \text{ ACN} + 2\lambda\pi\sqrt{-1} = -2 \text{ ACM} + 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. Es läßt sich auch hier allemal x so nehmen, daß $x - \sqrt{xx-1}$ jeden gegebenen eigentlichen Bruch ausdrückt, wovon man sich eben so, wie vorhin, überzeugen kann.

§. 28.

Die bisherige Verzeichnung, giebt also die Logarithmen aller positiven Zahlen von $+\infty$ bis zur 0. Wird nun $x < 1$, so wird $x + \sqrt{xx-1}$ eine unmögliche Zahl. Man kann sie jetzt am bequemsten auf diese Art ausdrücken: $x + \sqrt{1-xx}\sqrt{-1}$. Es sey $x = \text{CQ}$, so ist $\text{QG} = \sqrt{1-xx}$ eine unmögliche Ordinate der Hyperbel, aber eine mögliche Ordinate des Kreises, und wenn man den Bogen $\text{AG} = \rho$ setzt, so ist $x = \cos\rho$ und $\sqrt{1-xx} = \sin\rho$. Braucht man diese Ausdrücke, so wird $2 \text{ Sect. Absc. } x = l(\cos\rho \pm \sin\rho\sqrt{-1})$. Die Größe $\cos\rho + \sin\rho\sqrt{-1}$ ist unmöglich, und sie hat unzählige Logarithmen, die ebenfalls insgesamt unmöglich sind. Jeder Ausschnitt nämlich, der zwischen CA, CG, und dem von A nach G sich erstreckenden Bogen fällt, doppelt genommen, ist ihr natürlicher Logarithme. Diese Bogen sind aber

AG ; $\text{AG} + \text{GBFAG}$; $\text{AG} + 2 \text{ GBFAG}$, u. s. w. oder auch AFBG ; $\text{AFBG} + \text{GAFBG}$; $\text{AFBG} + 2 \text{ GAFBG}$, u. s. f.

Also sind auch obiger Ausschnitte unzählige, welche die Formel $\frac{1}{2}\rho\sqrt{-1} + \lambda\pi\sqrt{-1}$ überhaupt ausdrückt; daher erhält man $l(\cos\rho + \sin\rho\sqrt{-1})$

$+ \sin \rho \sqrt{-1}) = \rho \sqrt{-1} + 2\lambda \pi \sqrt{-1}$ hat $\sin \rho \sqrt{-1}$. Das Zeichen
 $-$ vor sich, so ist auch ρ negativ, und man muß die entgegengesetzten Ausschnitte nehmen, deren Bogen sich von A nach H erstrecken, und man erhält $l(\cos \rho - \sin \rho \sqrt{-1}) = -\rho \sqrt{-1} + 2\lambda \pi \sqrt{-1}$.
 Wird $x=0$, so fällt G in E und H in F, und es wird $l + \sqrt{-1} = +(\frac{1}{2} \pi \sqrt{-1} + 2\lambda \pi \sqrt{-1})$. Weil man auch $\lambda = 0$ nehmen kann, so ist dieß die bernoullische Regel $l \sqrt{-1} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{-1}$, oder $\frac{l \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} \pi$, und es erhellet, daß $l \sqrt{-1}$ hier kein anderer, als der natürliche Logarithme von $\sqrt{-1}$ seyn könne. Für negative x bleibt die Verzeichnung eben so, aber nur so lange, als $-x < -1$ ist. Es wird nunmehr $\rho > 90^\circ$, da dann noch $\sin \rho$ entweder positiv oder negativ seyn kann, obgleich $\cos \rho$ nun negativ ist. Um nun hieraus abzunehmen, wie der Logarithme einer jeden unmöglichen Zahl sich geometrisch verzeichnen lasse, darf man nur bemerken, daß sie allemal unter der Form $a + b \sqrt{-1}$, begriffen seyn werde. Demnach nehme man ρ so, daß $\tan \rho = b:a$ wird, so hat man $\sin \rho = \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$, $\cos \rho = \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$ und $a + b \sqrt{-1} = (\cos \rho + \sin \rho \sqrt{-1}) \sqrt{(aa+bb)}$. Nun nehme man $ACM = l \sqrt{(aa+bb)}$, und $CQ = \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$, da denn $QG = \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ wird, (man müßte QH nehmen, wenn b negativ wäre) so sind alle Ausschnitte, deren Bogen sich von M nach G, oder auch von M nach H erstrecken, diejenigen, welche man sucht. Die hieher gehörigen Bogen sind MAG; MAG + GBFAG; MAG + 2 GBFAG, und s. f. in gleichen MAFBG; MAFBG + GAFBG; MAFBG + 2 GAFBG, und s. w. welches alles den eulerischen Formeln völlig gemäß ist.

§. 29.

Es werde nun $x = -1 = CB$, so ist $x + \sqrt{(xx-1)} = -1$,
 $\varphi = 180^\circ$, und der Bogen, welche zwischen A und B fallen, sind
keine andere, als AEB; AEB + BFAEB; AEB + 2 BFAEB, u. s. f.
oder auch AFB; AFB + BEAFB; AFB + 2 BEAFB, u. s. f. daraus
folgt, daß die Ausschnitte, denen diese Bogen zugehören, dop-
pelt genommen, die natürlichen Logarithmen von -1 sind. Unter
diesen ist gewiß keiner $= 0$, sondern sie sind alle in der Formel
begriffen $l(-1) = \pm (2\lambda+1)\pi \sqrt{-1}$, und ich fürchte nicht, daß dies
se Verzeichnung einer Unrichtigkeit beschuldiget werden könne.
Wird $-x > -1$ so wird $-x + \sqrt{(xx-1)}$ eine negative Zahl, und
auch hier stimmt die Verzeichnung mit der Analysis völlig überein.
Es sey $x = -Cp$, und $+ \sqrt{(xx-1)} = pn$, so ist $l(-x + \sqrt{(xx-1)})$
der doppelte Ausschnitt, zwischen CA, Cn und dem Bogen, wel-
cher sich von A bis n erstreckt: dahin gehören nun die Bogen AEBn;
AEBFAEBn, u. s. f. ingleichen AFBn, AFBEAFBn, u. s. f. dem-
nach wird $l(-x + \sqrt{(xx-1)}) = \pm (2\lambda+1)\pi \sqrt{-1} + 2 BCn$. Aber
es ist $Bn = ACn = \frac{1}{2} l(+x - \sqrt{(xx-1)})$ wenn hier der mögliche
Logarithme allein verstanden wird. Also hat man $l(-x + \sqrt{(xx-1)})$
 $= l(+x - \sqrt{(xx-1)}) + \pm (2\lambda+1)\pi \sqrt{-1}$. Für eben die
Abscisse $x = -Cp$ sey $pm = -\sqrt{(xx-1)}$, so ist $l(-x - \sqrt{(xx-1)})$
der doppelte Ausschnitt zwischen CA, Cm, und dem Bogen, der
sich von A bis m erstreckt. Aber solcher Bogen giebt es wiederum
folgende: AEBm; AEBFAEBm, u. s. f. ingleichen AFBm; AFBE
AFBm, u. s. f. diesemnach wird $l(-x - \sqrt{(xx-1)}) = \pm (2\lambda+1)$
 $\pi \sqrt{-1} + 2 BEm$. Da nun wiederum $BCm = ACM = \frac{1}{2} l(x + \sqrt{(xx-1)})$,
so erhält man $l(-x - \sqrt{(xx-1)}) = l(+x + \sqrt{(xx-1)})$
 $+ \pm (2\lambda+1)\pi \sqrt{-1}$. Die Geometrie ist also der leibnizischen Lehre,
daß die Logarithmen negativer Größen unmöglich seyn, so wenig
ents

entgegen, daß sie vielmehr dieselbe völlig bestätigt. Und wie die bisher vorgetragenen geometrischen Verzeichnungen aufs genaueste für jede Zahl alle diejenigen unzähligen Logarithmen ergeben, welche derselben vermöge der eulerschen Analysis zugehören; so ist dieß ein vortreffliches Beyspiel davon, wie genau die geometrische Verzeichnung mit der Analysis übereinstimme, dafern nur die Verzeichnung der analytischen Formel genau angemessen ist, und sie völlig erschöpft. So erschöpft dasjenige die Formel $x + \sqrt{xx-1}$ bey weitem nicht, was Hr. d'Alenbert auf der 215 und 216 S. der Opusculs davon sagt: und wenn Hr. d'Alenbert behauptet, daß die hyperbolischen Ausschnitte, wenn $-x > -1$ genommen wird, wieder möglich werden, so muß ich dieß schlechterdings läugnen, es sey denn, daß man sie von B an rechnet, und also für $x = -1$ wieder $= 0$ setzt: aber dann sind sie die Logarithmen von $\frac{-x + \sqrt{xx-1}}{-1} = +x + \sqrt{xx-1}$, und keinesweges die Logarithmen von $-x + \sqrt{xx-1}$.

§. 30.

Man kann die Gleichung Sect. Absc. $x = lx + \sqrt{xx-1}$ überhaupt so ausdrücken $\rho \sqrt{-1} = l(\cos \rho + \sin \rho \sqrt{-1})$, dann wird $\cos \rho$ unmöglich als Abscisse des Zirkels, aber eine mögliche Abscisse der Hyperbel, wenn $\cos \rho > +1$ genommen wird. Zugleich wird $\sin \rho$ sowohl, als der Ausschnitt ρ selbst unmöglich, aber $\sin \rho \sqrt{-1}$ wird eine mögliche Ordinate und $\rho \sqrt{-1}$ ein möglicher Ausschnitt der Hyperbel. Diese Gleichung braucht Herr Foncenex. Allein Hr. d'Alenbert ist damit auf der 217 u. f. Seite gar nicht zufrieden. Inzwischen fallen nunmehr die Zweifel, so er dagegen macht, alle von selbst weg. Sie sind durch die vorhergehende Verzeichnung alle beantwortet, diese zeigt, daß man sowohl
eine

eine Idée nette, als auch exacte (wie Herr d'Alenbert sich ausdrückt, von einem unmöglichen Zirkelbogen haben könne. Es hat seine unstreitige Richtigkeit, daß $\rho\sqrt{-1}$ den hyperbolischen Ausschchnitt allemal bezeichne, und so, wie es gewiß ist, daß $\rho\sqrt{-1}$ unzählige Werthe habe, wenn $x = \pm 1$; so ist es auch gewiß, daß der hyperbolische Ausschchnitt in eben den Fällen unzählige Werthe habe, und es ist höchst unrichtig, daß der hyperbolische Ausschchnitt $= 0$ sey, wenn $x = -1$. Es ist ferner unrichtig, daß $\rho\sqrt{-1}$ wieder möglich werde, wenn man $x > -1$ nimmt, denn die Bogen oder Winkel ρ werden von A angerechnet, und für $x = -C\rho$, bestehet ρ aus einem möglichen Stück $+AEB$, oder überhaupt $+(2\lambda+1)\pi$, und einem unmöglichen Winkel BCn , oder BCm ; daher besteht auch $\rho\sqrt{-1}$ aus einem unmöglichen und einem möglichen Stück, deren Summe gewiß unmöglich ist. Für $+x > +1$ hat $\rho\sqrt{-1}$ deswegen einen möglichen Werth, weil der Winkel ACM unmöglich, und dieß einer von denen ist, welche ρ in dieser Voraussetzung bedeutet.

§. 31.

Die hyperbolischen Trapezien lassen sich bey dieser Verzeichnung so bequem nicht, wie die Ausschnitte, gebrauchen: und bey Verzeichnung der Logarithmen unmöglicher Größen dienen sie gar nicht. Dieß rühret daher, weil in dem unmöglichen Stück der Hyperbel, dem Zirkel nämlich, die Gleichheit der Ausschnitte, und der ihnen respondirenden Trapezien wegfällt; denn in dem Zirkel ist das sogenannte Parallelogrammum inscriptum nicht mehr von beständiger Größe. Wenn man inzwischen die Trapezien gebrauchen will, so weit es angehet, so bestätigen sie alles dasjenige, was vermittelst der Ausschnitte gefunden wird. Es sey, wie sonst gewöhnlich ist, $AD = CD = 1$ gesetzt, so ist $AC = \sqrt{2}$,

und $ADKM = l \frac{CK}{CD} = l CK$. Wenn $CK = t$, und $km = u$; so

schließt man jene Gleichung daraus, weil d. $ADKM = \frac{dt}{t}$ ist; aber eben dieß Differential gehöret zu allen Trapezien, die zwischen DK, AD, MK, und den Bogen fallen, der sich von A nach M erstreckt. Also gehöret hieher auch das Trapezium

$$ADI + IEBl + LHAD, ADKM$$

und überhaupt

$$\lambda. (ADI + IEBl + LHAD) + ADKM.$$

Ferner: $ADHL + LBEI + IDA + ADKM$.

und überhaupt

$$\lambda (ADHL + LBEI + IDA) + ADKM.$$

Da aber nunmehr die Peripherie des Kreises, welcher das unmögliche Stück der Hyperbel ausmacht, $= 2\pi\sqrt{2}\sqrt{-1}$ und also die Fläche desselben $ADI + IEBl + LHAD = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{-1} \times \frac{1}{2} = 2\pi\sqrt{-1}$ ist, so wird eigentlich das Trapez. Absc. $t = ADKM + 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. Nimmt man $-Ck$ statt CK , so ist das Trapez. Absc. $-t$ keinesweges $= Bdkm$, wenn die Voraussetzung bleibt, daß das Integral $\int \frac{dt}{t} = 0$ seyn soll, wenn $t = +1$ ist. Soll das Trapez. Absc. $t = Bdkm$ seyn können, so muß das Integral $\int \frac{dt}{t} = 0$ seyn, wenn $t = -1$ ist. Dann aber wird Trapez. Absc. $-t = l - t - l - 1 = l \frac{-t}{-1} = l + t$. Aber in der Voraussetzung, daß das Integral nur $= 0$ sey, wann $t = +1$ ist, welche nicht geändert werden darf, hat das Trapez. Absc. $-t$ folgende Werthe

$$ADI + IEBl + Bdkm,$$

$$ADI + IEBl + BdL + LHAi + IEBl + Bdkm, \text{ u. s. f. }$$

ungleichen

CAHL

$$DAHL + LdB + Bdkm$$

$$DAHL + LdB + dBEI + LAHL + LdB + BDkm, \text{ u. s. f.}$$

$$\text{oder überhaupt diese } (2\lambda+1)\pi \sqrt{-1} + Bdkm = (2\lambda+1)\pi \sqrt{-1} + l + t.$$

§. 32.

So leidet es also wohl weiter gar keinen Zweifel, daß dasjenige seine Richtigkeit habe, was ich am Ende des S. 2. behauptet habe. Zwischen jeden zweyen mit der Asymtote xy parallelen Ordinaten fällt eine mögliche Fläche der Hyperbel, dafern beyde Ordinaten auf einer und eben derselben Seite der Asymtote xy liegen. Aber jede Fläche der Hyperbel ist unmöglich, die zwischen zweyen solchen Ordinaten fällt, davon die eine auf der einen, die andere auf der andern Seite der Asymtote xy liegt, dergleichen AD und mk sind. Es wird nämlich vorausgesetzt, daß die Fläche zwischen den beyden parallelen Ordinaten AD und mk , dem Stück der Abscisse Dk , und demjenigen Bogen der Hyperbel enthalten sey, der sich von A nach m erstreckt: aber von A nach m erstreckt sich gar kein möglicher Bogen der Hyperbel. Wenn man sich, wie gewöhnlich die Vorstellung macht, der Bogen werde beschrieben, indem der Punct A von A nach m vorgehet, so ist es schlechterdings unmöglich, daß A durch den möglichen Ast AN fortgehen, niemals aus diesem Ast durch einen ununterbrochnen möglichen Weg in den Ast Bn hinein kommen, und sodann durch B nach m hin gelangen könne. Weil nämlich die Aeste AN und Bn auf entgegengesetzten Seiten der Asymtote xy liegen, und längst den entgegengesetzten Stücken derselben Cx , Cy sich bis ins unendliche erstrecken, so ist es schlechterdings unmöglich, daß sie einmal zusammen stoßen könnten. Ich denke nicht, daß man sagen werde, sie stoßen im unendlichen zusammen, das wäre eben so ungereimt, als wenn man sagen wollte, die beyden entgegengesetzten Stücke Cx und Cy der graden Linie

xy, wenn man sie nach beyden entgegengesetzten Seite verlängerte, müßten einmal im unendlichen im x und y zusammen stoßen. Es ist gar kein möglicher Weg von A nach m zu kommen, wenn der Punct A in der Hyperbel bleiben soll. Inzwischen verbindet die Gleichung der Hyperbel die beyden entgegengesetzten Stücke derselben MAN , mBn , vermittelst des Zirkels $AEBF$, und macht denselben zu einem unmöglichen Stück der Hyperbel. Deswegen kann A in der Peripherie des Zirkels fortgehen, und auf die Art durch B nach m hinkommen, weil aber der Weg, welchen A auf solche Art nehmen muß, aus einem unmöglichen und möglichen Stück der Hyperbel bestehet, so ist doch allemal der Bogen der Hyperbel von A bis m ein unmöglicher Bogen, und diesem nach sowohl das Trapezium zwischen AD und mk , als auch der Ausschnitt zwischen CA und Cm eine unmögliche Fläche der Hyperbel.



C E A D B

Fig. 1.

Fig. 2.

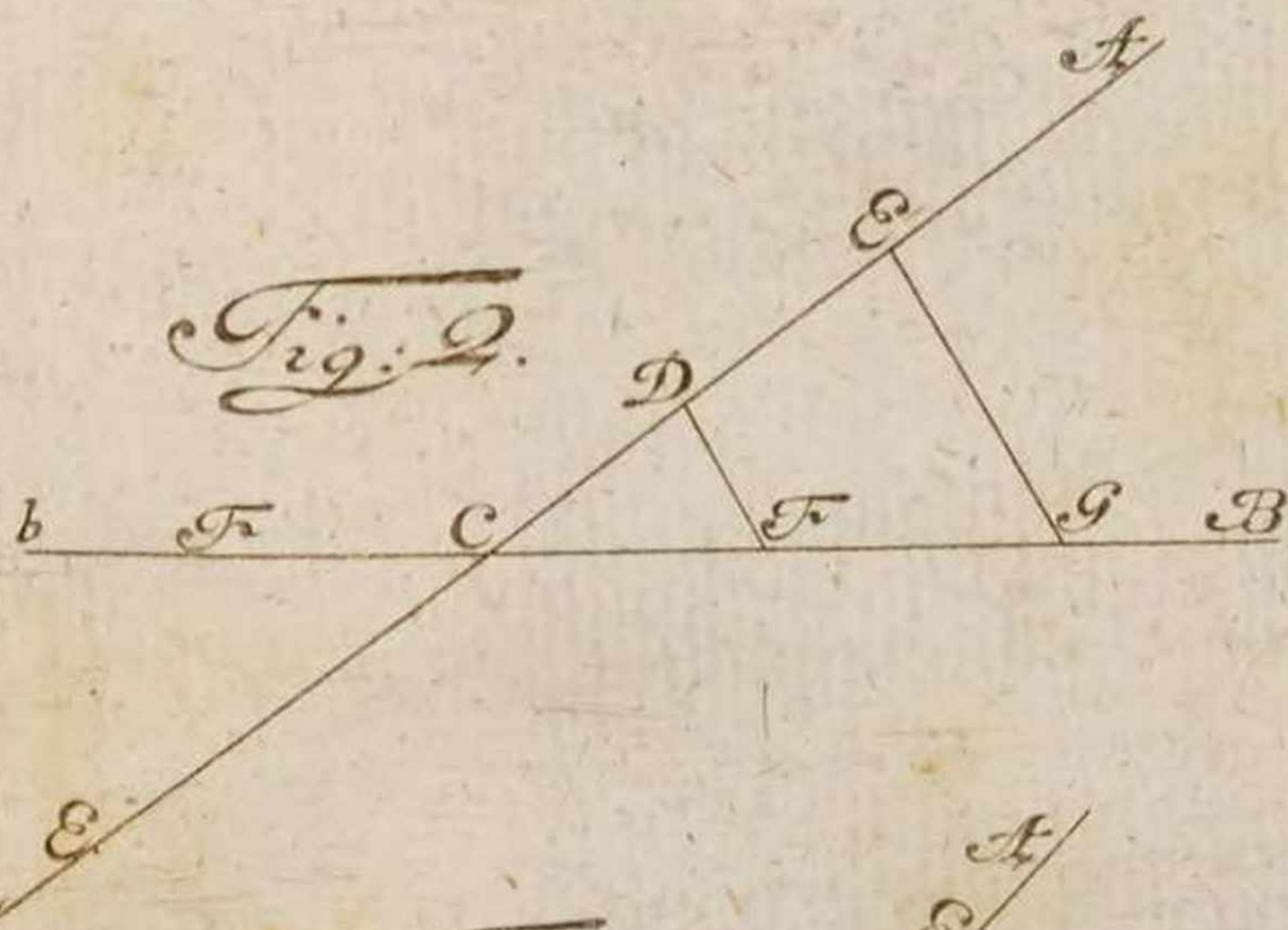


Fig. 3.

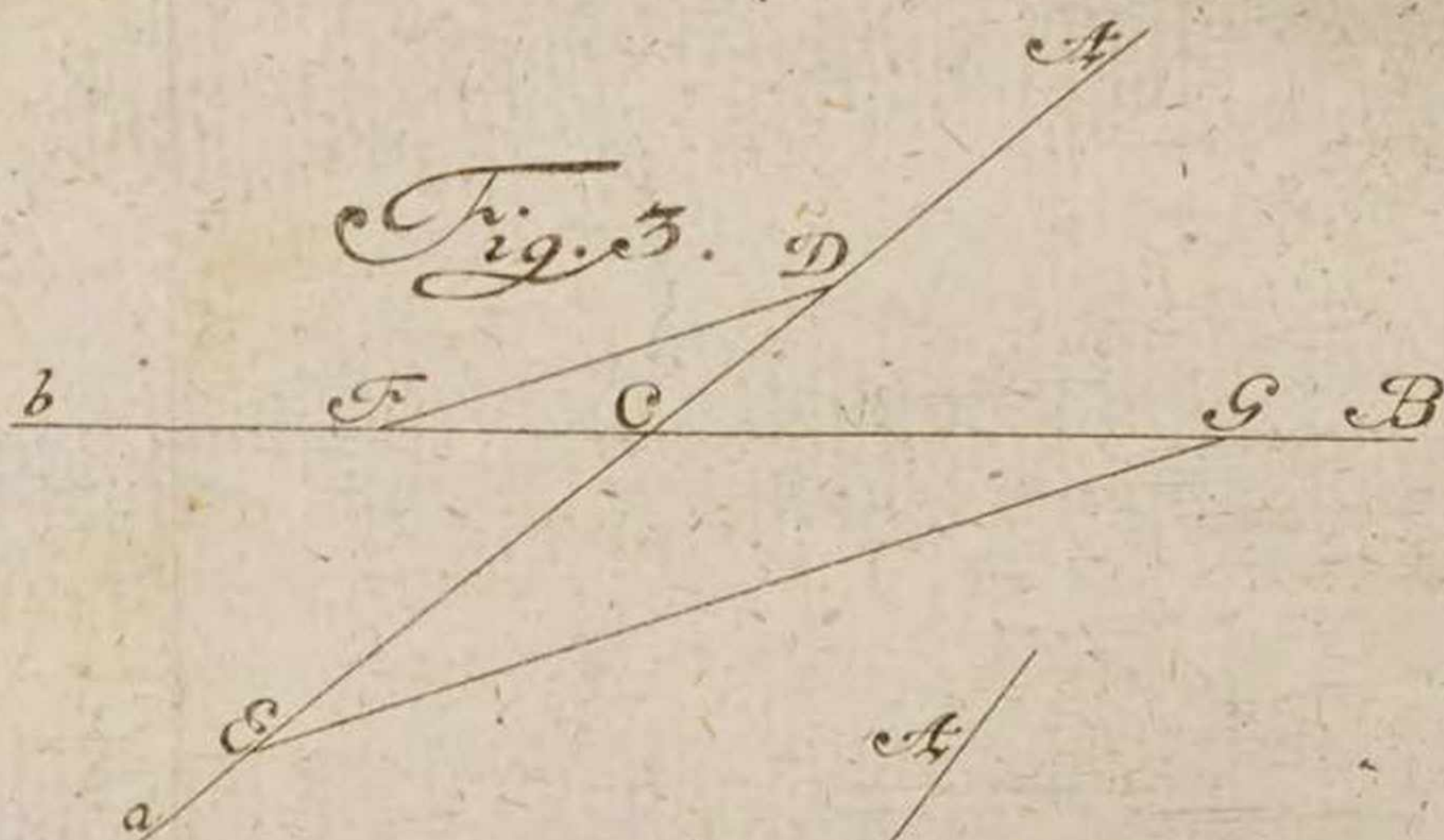


Fig. 4.

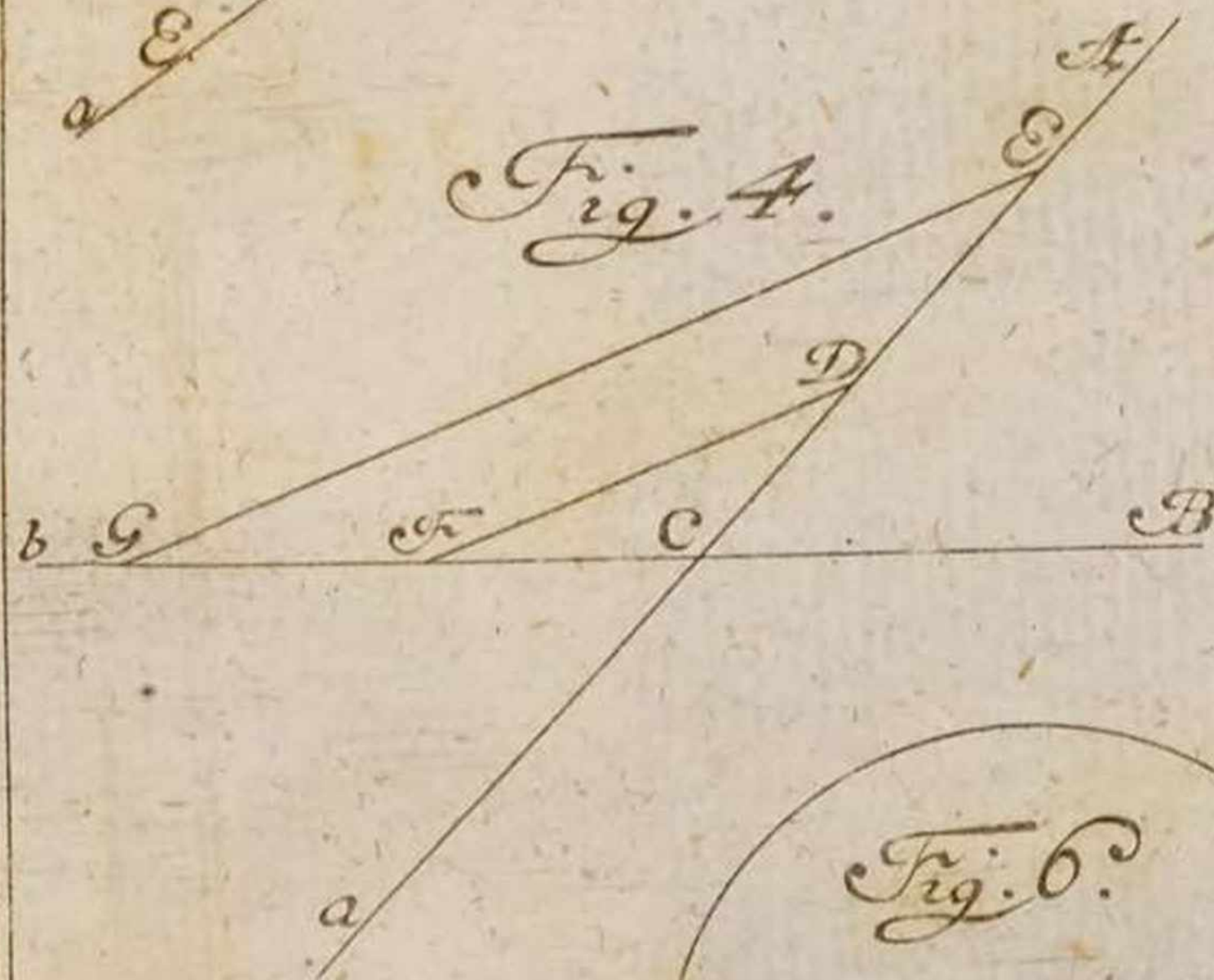


Fig. 5.



Fig. 6.

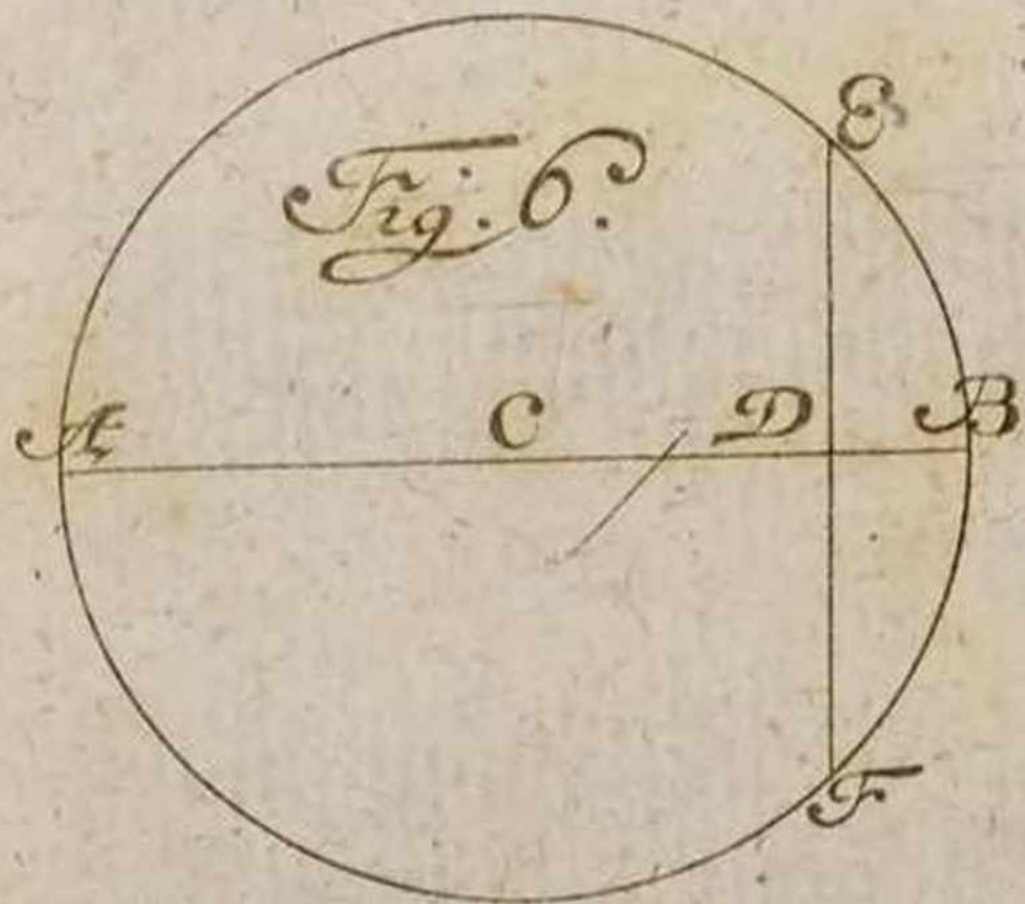


Fig. 7.

