J. Albrecht Eulers
Auflösung
einiger
geometrischen Aufgaben.

Erste Aufgabe.

Man soll zeigen, wie eine jede geradlinichte Figur durch Parallellinien in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zerschnitten werden kann?

1. Es sey ABCDEFG (1 Fig.) die vorgelegte Figur und MN diejenige Richtung, nach welcher dieselbe in *n* gleiche Theile zerschnitten werden soll. Man ziehe durch alle Ecken der Figur die graden Linien B*b*; G*g*; C*c*; D*d*; u. s. w. der gegebenen Richtung MN parallel, so wird hierdurch die ganze Figur theils in Dreyecke, theils in Vierecke zerschnitten werden: die Vierecke aber werden jederzeit zwey sich gleichlaufende Seiten haben.

2. Man berechne die Flächeninnhalte aller dieser Theilen, und setze den Innhalt des ersten Theils AB*b*, welcher allezeit so wie auch der letzte EF*f* ein Dreyeck ist, wenn die vorgelegte Richtung MN keiner Seiten der Figur parallel lauft — man setze

den Innhalt dieses ersten Theils AB*b* = 𝔄
den Innhalt des zweyten Theils B*b*G*g* = 𝔅
den Innhalt des dritten Theils C*c*F*f* = ℭ, u. s. w.

Endlich den Innhalt der ganzen Figur ABCDEFG = A
also daß A = 𝔄 + 𝔅 + ℭ + 𝔇 + &c. sey.

3. Man

3. Man merke sich folgende Hülfssätze —

I **Lehrsatz.** Es sey ABCD (2 Fig.) ein Viereck, dessen beyde Seiten AB und CP einander parallel laufen: BE sey seine Höhe oder eigentlicher die Entfernung der beyden Parallelseiten von einander; so wird der Flächeninnhalt des Vierecks

$$ABCD = \tfrac{1}{2} \times (AB + CD) \times BE \text{ seyn.}$$

Der Beweis dieses Satzes ist viel zu bekannt, als daß ich denselben hier beyzufügen nöthig hätte.

II **Aufgabe.** Es werden in dem ebengemeldten Viereck ABCD die beyden Parallelseiten AB, CD mit der Höhe BE gegeben, man soll durch dasselbe Viereck eine grade Linie XY der Seite AB oder CD parallel ziehen, also daß der von dem ganzen Viereck abgeschnittene Theil ABYX einer gegebenen Fläche gleich sey.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist keiner Schwierigkeit unterworfen. Es sey $AB = b$; $DC = c$; $BE = a$

ferner $BP = x$: $XY = y$;

Man ziehe BQF der Seite AD parallel

so wird $QY = y - b$; $FC = c - b$

Und weil die beyden Dreyecke BQY und BFC einander ähnlich sind $BE : FC = BP : QY$

das ist $a : c - b = x : y - b$

folglich $y - b = \frac{c-b}{a} x$ und $y = b + \frac{c-b}{a} x$

Nun setze man den Innhalt der gegebenen Fläche = B, und weil der Innhalt des abgeschnittenen Vierecks

$$ABYX = \frac{AB + XY}{2} x\, BP \text{ ist,}$$

$$\text{so muß } \frac{AB + XY}{2} XBP = B \text{ seyn.}$$

Folg-

Folglich $B = \frac{b+y}{2}x = \frac{b+b+\frac{c-b}{a}}{2}x$ und

$$2B = 2bx + \frac{c-b}{a}xx$$

Also $x = \frac{-ab + \sqrt{(aabb + 2aB(c-b))}}{c-b}$

und $y = b + \frac{c-b}{a} = \frac{\sqrt{(aabb + 2aB(c-b))}}{a}$

Es deutet aber der Buchstaben x die Perpendiculärlinie BP das ist die Entfernung der gesuchten Linie $XY = y$ von der einen Parallelseite $AB = b$ an.

III. Erster Folgesatz. Wenn die obere Parallelseite AB (3 Fig.) verschwindet, also daß das vorgelegte Viereck zum Dreyeck wird, davon das kleinere Dreyeck $ABYX = B$ abgeschnitten werden soll, so erhält man durch die eben gefundene Formuln, weil hier $b = o$ wird

die Höhe des verlangten Dreyecks $x = \frac{\sqrt{2acB}}{c}$ das ist $BP = \frac{\sqrt{2B \times BE}}{DC}$

und die Grundlinie desselben $y = \frac{\sqrt{2acB}}{a}$ das ist $YX = \sqrt{\frac{2B \times DC}{BE.}}$

IV. Zweyter Folgesatz. Verschwindet aber die untere Parallelseite DC (4 Fig.) so verwendet sich das vorgelegte Viereck in ein umgekehrtes Dreyeck. In diesem Fall muß $c = o$ gesetzt werden, und der abgeschnittene Theil ABPX wird der gegebenen Fläche B gleich seyn, wenn $x = \frac{+ab\sqrt{(aabb - 2abB)}}{b}$

und $y = \frac{\sqrt{(aabb - 2abB)}}{a}$ ist; das ist wenn die Höhe $BP = + BE \surd(BE^2 - \frac{2B \times BE}{AB})$ und

$$XY = \surd(AB^2 - \frac{2B \times AB}{BE}) \text{ gemacht wird.}$$

V. **Dritter Folgesatz.** Wann endlich die beyden Parallelseiten AB und CD (5 Fig.) einander gleich sind, und folglich das vorgelegte Viereck zum Parallelegrammum wird, so lassen sich hier, weil $b = c$ ist, die gefundenen Formuln nicht anwenden. Die vorhergehende Gleichung $2B = 2bx + \frac{c-b}{a}xx$ aber giebt uns sogleich zu erkennen, daß in diesem Fall $x = \frac{B}{b}$ und $y = b$; das ist, daß $BP = \frac{AB}{B}$ und $XV = AB$ seyn muß; welches ohnedem schon aus den ersten Anfangsgründen der Geometrie bekannt ist.

4. Durch Hülfe dieser Sätze läßt sich nunmehro gegenwärtige Aufgabe sogleich auflösen. Man darf nur alle in dem 1 §. erwehnte Theile A, B, C, D, u. s. w. der vorgelegten Figur ABCDEFG (1 Fig.) mit dem 12 Theil des ganzen Innhalts derselben A vergleichen, und falls ein oder mehrere zusammen genommen kleiner als $\frac{A}{n}$ befunden werden, das noch fehlende von dem nächstfolgenden Theil abnehmen.

5. Einige Exempel sollen diese angezeigte Art die geradlinichten Figuren durch Parallellinien in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu zerschneiden noch näher erläutern.

Erstes Exempel.

Es wird ein reguläres Achteck gegeben, dessen Seite wir = 1 (7 Fig.) setzen wollen; man soll dasselbe durch gra-

de

de Linien in fünf gleiche Theile zerschneiden, und diese Linien sollen alle einer Seite des Achtecks, der *AH* 3. Er. parallel laufen.

Man ziehe durch alle Ecken des Achtecks B, C die graden Linien BG, CF der gegebenen Richtung AH parallel. Es wird aber in diesem Fall eine jede derselben zugleich durch zwey Ecken der Figur gehen, und das ganze Achteck wird dadurch nur in drey Vierecke zerschnitten werden, davon das mittelste ein rechtwinklichtes Parallelogrammum ist, die beyden äußern aber einander vollkommen gleich und ähnlich sind.

Man berechne darauf die Flächeninnhalte dieser Vierecke, und da

$AB=1: ABI=45^\circ: AI=BI=\frac{1}{\sqrt{2}}=0,707106: BG=AH+2BG=1+\frac{2}{\sqrt{2}}$

oder $BG=1+\sqrt{2}=2,414212$ so wird der Flächeninnhalt

des Vierecks $AHBG=\mathfrak{A}=\frac{1}{2}(AH+BG)\times AI=\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $+\frac{1}{2}=1,207106$

des Vierecks $BGFC=\mathfrak{B}=BG\times BC=(1+\sqrt{2}).1=1+\sqrt{2}=2,414212$

des Vierecks $CFED=\mathfrak{C}=AHBG$ $= - - - - - =\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=1,207106$

Und der Innhalt des ganzen Achtecks

$ABCDEFGH=A=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}= - - - - - - 2+2\sqrt{2}=4,828425.$

Nun soll dieses Achteck in 5 gleiche Theile zerschnitten werden, folglich muß der Innhalt eines jeden Theils $\frac{A}{5}=\frac{2+2\sqrt{2}}{5}$ $=0,965685$ seyn: da aber der Innhalt des ersten Vierecks AHBG $=1,207106$ schon größer ist als der fünfte Theil, so lasset uns nach der in dem 11 Satze gegebenen Formul einen Theil AHYX der diesem 0,965685 gleich ist, abschneiden, und weil hier $b=AH$ $=1: c=BG=1+\sqrt{2}$; $a=AI=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $c-b=\sqrt{2}$ und $B=AHYX$ $\frac{2+2\sqrt{2}}{5}$ ist, so wird

 $x=AP$

$$x = AP = \frac{-1.\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{2+2\sqrt{2}}{5}.\sqrt{2}\right)}}{\sqrt{2}} \text{ oder}$$

$$AP = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{13}{20} + \tfrac{2}{5}\sqrt{2}\right)} = 0,602582$$

das ist ungefähr $AP = \frac{3}{5}$ seyn.

Da nun die Höhe des ersten Fünftels AHYX gefunden, $= \frac{2+2\sqrt{2}}{5} = 0,965685$ ist, so wird $XYGB = \mathfrak{A} - AHYX = \frac{1+\sqrt{2}}{10}$ $= 0,241421$ seyn, und weil dieses übrig-gebliebene Viereck XYGB kleiner ist als der fünfte Theil des ganzen Achtecks, so muß von dem folgenden Viereck $BGFC = \mathfrak{B} = 1+\sqrt{2} = 2,414212$ noch ein Stück BGVZ, das $= \frac{A}{5} - XYGB = \frac{3+3\sqrt{2}}{10} = 0,724264$ ist, abgeschnitten werden, damit nämlich XYGVZB das verlangte zweyte Fünftel ausmache.

Es ist aber BGFC ein rechtwinklichtes Parallelogrammum, folglich werden wir hier nach dem V Satz erhalten

$b = BG = CF = 1+\sqrt{2} : B = BGVZ = \frac{3+3\sqrt{2}}{10}$, und

$$x = BZ = \frac{3+3\sqrt{2}}{10(1+\sqrt{2})} = \frac{3}{10} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{3}{10}.$$

Jetzt sollte man auf eine ähnliche Weise zu der Abschneidung des dritten Fünftels fortschreiten, da die vorgelegte Figur aber ein reguläres Achteck ist, so ist man dieser Mühe überhoben: man darf nur die zwey eben abgeschnittenen erste Fünftel auch grade gegenüber abschneiden, indem man von dem dritten Theil $DEFC = \mathfrak{C}$ anfängt, so wird man das letzte und das vierte Fünftel erhalten: das dritte Fünftel aber wird sich als das mittelste von selbsten geben.

Wann man demnach in einem jeglichen regulären Achteck ABCDEFGH (7 Fig.) die grade Linie AD ziehet und auf derselben $AP = \frac{3}{5}$ AH und $DQ = \frac{3}{5}$ AH, oder genauer
$AP = 0,602582$ AH und $DQ = 0,602582$ AH, ferner
auf der Seite BC; $BZ = \frac{3}{10}$ AH und $CW = \frac{3}{10}$ AH; absticht.

Wann

Wenn man endlich durch diese Puncte P, Z, W, Q die graden Linien XY, ZV, WT, RS der Seite AH parallel ziehet, so werden dieselben das reguläre Achteck ABCDEFGH in fünf gleiche Theile zerschneiden. Es wird nämlich

$AHYZ = YXBZVG = ZVTW = TWCRSF = RSED = \frac{1}{5} ABCDEFGH$ seyn.

Zweytes Exempel.

Es wird wiederum ein reguläres Achteck gegeben dessen Seite $= 1$ ist, man soll dasselbe gleichfalls durch Parallellinien in fünf gleiche Theile zerschneiden; (8 Fig.) die Richtung aber, nach welcher diese Linien streichen sollen, sey MN und der Winkel, den MN mit der Seite *AB* des Achtecks macht, sey $MAB = 12^\circ\ 30'$.

Man ziehe durch alle Ecken der Figur die graden Linien B*b*, H*h*, C*c*, G*g*, D*d*, F*f* der vorgelegten Richtung MN parallel, und auf diesen hinwiederum die Perpendiculärlinien AP, A*p*, *bq*, BQ, BR, *h*R, H*r*, Hr, *g*S, so bekömmt man, weil $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA = 1.$ und

$BAH = CBA = DCB = EDC = FED = GFE = HGF = AHG = 135^\circ$

$AP = \sin 12^\circ\ 30'$ - - - 0, 2164399; lAP - - - 9, 3353368.

$Bb = \dfrac{\sin 135^\circ}{\sin 32^\circ\ 30'}$ - - - 1, 3160380; lBb - - - 0, 1192685.

$Ap = \sin 32^\circ\ 30'$ - - - 0, 5372996;

$bq = Ap - AP$ - - - - - - 0, 3208600; lbq - - - 9, 5063156.

$qH = \dfrac{bq}{\tan 32^\circ\ 30'}$ - - - 0, 5036491; lqH - - - 9, 7021283.

$Qh = \dfrac{bq}{\tan 57^\circ\ 30'}$ - - - 0, 2044104; lQh - - - 9, 3105029.

$Hh = Bb + qH + Qh$ - - - 2, 0240975; lHh - - - 0, 3062313.

$BR = \sin 57^\circ\ 30'$ - - - - 0, 8433914;

$hR = B\mathfrak{R} - bq$ - - - - 0, 5225314; lhR - - - 9, 7181123.

$CR = \frac{hR}{\tan 57^\circ\, 30'}$ - - - 0, 3328892; lCR - - - 9, 5222996.

$cr = \frac{hR}{\tan 77^\circ\, 30'}$ - - - 0, 1158424; lcr - - - 9, 0638675.

$Cc = Hh + CR + cr$ - - 2, 4728291; lCc - - - 0, 3931941.

$Hr = \sin 77^\circ\, 30'$ - - - 0, 9762960; lHr - - - 9, 9895815.

$gS = Hr - hR$ - - - - 0, 4537646; lgS - - - 9, 6568306.

$Gg = Cc$ - - - - - - - - - 2, 4728291; lGg - - - 0, 3931941.

Ferner der Flächeninnhalt des

$\triangle\, ABb = \mathfrak{A} = \frac{1}{2}.\ AP \times Bb$	- - - - - -	0, 1424214.	addirt
Trap. $BbHh = \mathfrak{B} = \frac{1}{2}.\ bq \times (BbHh)$	- - -	0, 5358590.	
Trap. $HhCc = \mathfrak{C} = \frac{1}{2}.\ hR \times (HhCc)$	- - -	1, 1748925.	
Trap. $CcGg = \mathfrak{D} = gS \times Cc$	- - - - - -	1, 1220820.	
Trap. $GgDd = \mathfrak{E} =$ Trap. $HhCc$	- - - - - -	1, 1748925.	
Trap. $DdFf = \mathfrak{F} =$ Trap. $BbHh$	- - - - - -	0, 5358580.	
$\triangle\, FfE = \mathfrak{G} = \triangle\, ABb$	- - - - - - -	0, 1424214.	

Folglich des ganzen Achtecks

$ABCDEFGH = A = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}+\mathfrak{E}+\mathfrak{F}+\mathfrak{G}$ ... 4, 8284258

so wie derselbe schon in dem vorhergehenden Exempel gefunden worden ist.

Der Flächeninnhalt eines jeden Fünftels muß demnach $\frac{1}{5} A = 0,\ 965685$ seyn. Da nun $\mathfrak{A} = 0,\ 142421$ kleiner als $\frac{1}{5} A$, und auch noch $\mathfrak{A}+\mathfrak{B} = 0,\ 678279$ kleiner ist als $\frac{1}{5} A$, so muß von dem folgenden dritten Stück $\mathfrak{C}$ ein Theil $HhXY$ hinzugethan werden, damit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + HhXY = 0,\ 965685$ werde:

Das abzuschneidende Stück $HhXY$ soll also hier $= 0,287406$ seyn, und man wird für die in dem 11 Satze gegebene Formul erhalten.

$b = Hh$

$b = Hh = 2,\ 024097$; $c = Cc = 2,\ 472829$;
$a = hR = 0,\ 522537$; $c - b = 0,\ 348732$;
$B = HhXY = 0,\ 287406$; Folglich

$$x = hx = Hy = \frac{-1,\ 0576 + \sqrt{1,\ 2233}}{0,\ 3487}$$ das ist

$hx = Hy\ 0,\ 1388.$

Man ziehe also durch die Puncte x und y die grade Linie XY, so wird XYHAB das erste Fünftel des Achtecks seyn.

Richtet man aber gegenüber aus den Puncten D und d die Perpendiculärlinien D𝔇 und d𝔡 auf und sticht auf denselben die gleiche Entfernungen D𝔵 = d𝔶 = 0, 1388 ab, so wird die durch diese Puncte 𝔵 und 𝔶 gezogene grade Linie 𝔛𝔜 das letzte Fünftel 𝔛𝔜FED abschneiden; beyde Linien XY und 𝔛𝔜 aber werden der gegebenen Richtung MN parallel laufen.

Um nun auch das zweyte Fünftel zu bekommen, so ziehe man das Viereck hHXY von dem ganzen Viereck HhCc = 𝔈 ab, und weil der Rest YXCc = 0, 887486 kleiner ist als ein Fünftel des ganzen Achtecks, nämlich kleiner als $\frac{1}{5}$A = 0, 965685 so muß das noch fehlende 0,078199 von dem folgenden Viereck CcGg = 𝔇 = 1, 122082, welches ein Parallelogrammum ist, abgeschnitten werden.

Es sey CcWV dieses noch fehlende Stück oder CcWV = 0, 078199: und wir werden in dem gegenwärtigen Fall durch Hülfe des V Satzes folgende Bestimmungen erhalten
$B = CcWV = 0,\ 078199$: $b = c = Ce = Gg = 2,472829$

$$x = cw = \frac{B}{b} = \frac{78199}{2472829}$$ das ist $cw = 0,\ 031623.$

Wenn man demnach durch diesen Punct w die Linie VW der gegebenen Richtung MN parallel ziehet, so wird XYWVC das zweyte verlangte Fünftel seyn.

Und

Und wann man auf eine ähnliche Art in dem gegenüberstehenden Puncte g eine Perpendiculärlinie gS aufrichtet, und auf derselben die Höhe $gw = cw = 0,031623$ absticht, so wird die durch diesen Punct w gezogene Parallellinie 𝔚𝔙 das vierte gesuchte Fünftel 𝔛𝔜𝔖𝔙𝔚 abschneiden.

Hat man aber das I, II, IV und V Fünfthel schon abgeschnitten, so bleibt in der Mitte nothwendig das III Fünftel übrig: dieses Fünftel wird also in der Figur das Parallelogrammum VW𝔙𝔚 seyn.

Drittes Exempel.

Man soll ein irreguläres Viereck *ABCD* (10 Fig.) durch Parallellinien in vier gleiche Theile zerschneiden, und die Richtung *MN*, nach welcher diese Parallellinien streichen sollen, mache mit der Seite *AB* einen Winkel von 30 Graden. Es ist aber $AB = 100$; $AD = 200$; $BC = 400$; der Winkel $DAB = 150°$ und $ABC = 70°$.

Man ziehe Aa : Dd der gegebenen Richtung MN und Ad der Seiten BC parallel; ferner Bm, An, und Cp auf Aa und Dd perpendiculär; so werden die Winkel $BAa = 30°$; $aAD = 120°$; $DAd = 40°$; $ADd = 60°$; $BaA = 80°$; $Aad = 100°$; $adD = 80°$ und $DdC = 100°$ seyn; folglich

$Bm = AB.\ \sin BAa = 50$; $\qquad lBm = 1,6989700$

$Aa = \frac{AB.\ \sin ABa}{\sin BaA} = 95,419$; $\qquad lAa = 1,9796343$

$Ba = \frac{AB.\ \sin BAa}{\sin BaA} = 50,771$;

$An = AD.\ \sin ADd = 173,21$; $\qquad lAn = 2,2385606$

$Dd = \frac{AD.\ \sin DAd}{\sin AdD} = 130,54$; $\qquad lDd = 2,1157460$

Ad

$$A\mathfrak{d} = \frac{AD.\ \sin AD\mathfrak{d}}{\sin A\mathfrak{d}D} = 175,\ 88;$$

$Dd = Aa + D\mathfrak{d} \quad = 225,\ 96; \qquad lDd = 2,\ 3540316$

$dC = BC - Ba - A\mathfrak{d} = 173,\ 35; \qquad ldC = 2,\ 2389238$

$Cp = dC \sin pdC \quad = 170,\ 72; \qquad lCp = 2,\ 2322753$

Der Flächeninnhalt des

$\triangle\ ABa \quad = \mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}Aa \times Bm$ — — — — $2385,\ 4$

$\text{Trap.}AaDd = \mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}(Aa + Dd) \times AN$ — — $27832,\ 2$

$\triangle\ DdC \quad = \mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}Dd \times Cp$ — — — — $19287,\ 5$

$\overline{ABCD} \quad = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = A$ — — — — $49505,\ 1$

der vierte Theil hiervon ist $\frac{A}{4}$ — — — — $12376,\ 3.$

Nun ist $ABa = \mathfrak{A}$ kleiner als $\frac{A}{4}$ folglich muß das noch fehlende $\frac{A}{4} - \mathfrak{A} = 9990,\ 9$ von dem folgenden Theil $\mathfrak{B}$ abgeschnitten werden: man wird also nach dem 11 Satze bekommen

$B = Aa\mathfrak{X}x = 9990,\ 9;\ b = Aa = 95,\ 419;\ c = Dd = 225,96$

$a = An = 173,\ 21;\quad c - b = D\mathfrak{d} = 130,\ 54$

$$x = Ax = \frac{-16527 + \sqrt{(724936529)}}{130,\ 54} = 79,\ 64.$$

Wann man demnach auf der Perpendiculärlinie An, eine Entfernung $Ax = 79,\ 64$ absticht und durch x eine grade Linie $X\mathfrak{X}$ der gegebenen Richtung $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ parallel ziehet, so wird $AB\mathfrak{X}X$ das erste verlangte Viertel seyn.

Da ferner der Rest $X\mathfrak{X}dD = \mathfrak{B} - Aa\mathfrak{X}X = 17841,\ 3$ annoch größer ist, als es einem Viertel des ganzen Vierecks zukömmt, so muß man das zweyte Viertel $X\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Y$ von diesem Reste abschneiden; oder welches auf eins hinaus läuft, man muß von dem ganzen Theil $AadD = \mathfrak{B}$ das Viereck $Aa\mathfrak{Y}Y = Aa\mathfrak{X}x$ +

$+\frac{A}{4} = 22367,2$ abschneiden; folglich wird hier wiederum nach dem 2 Satze $b = Aa = 95,419$; $c = Dd = 225,96$; $c - b = DD = 130,54$; $a = An = 173,21$; B aber $= Aa\mathfrak{Y}Y = 22367,2$ seyn, und also

$$x = Ay = \frac{-16527 + \sqrt{1284598429}}{130,54} = 147,95$$

Man mache derowegen $Ay = 147,95$ und ziehe durch dieses Punct y die g[..]de Linie $Y\mathfrak{Y}$ der gegebenen Richtung MN parallel, so wird $X\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Y$ das zweyte verlangte Viertel seyn.

Da nun $Y\mathfrak{Y}dD = AadD - Aa\mathfrak{Y}X = 5465$ kleiner als $\frac{A}{4} = 12376,3$ ist, so muß noch von dem folgenden Stück $DdC = \mathfrak{C}$, ein gewisser Theil $Dd\mathfrak{Z}Z = 6911,3$ hinzugethan werden, damit nämlich $Y\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}ZD$ das dritte Viertel gebe.

Hier werden wir, weil $DdC = \mathfrak{C}$ ein umgekehrtes Dreyeck ist, nach dem IV Satze erhalten

$a = Cp = 170,72$; $b = Dd = 225,96$; $B = Dd\mathfrak{Z}Z = 6911,3$;

$$x = pz = \frac{38575 - \sqrt{954822625}}{225,96} = 33,96$$

Wenn man demnach $pz = 33,96$ oder $Cz = 136,76$ nimmt und durch das Punct z, die Linie $Z\mathfrak{Z}$ der gegebenen Richtung MN parallel ziehet, so wird $Y\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}ZD$ das dritte verlangte Viertel, und folglich das Dreyeck $Z\mathfrak{Z}C$ das letzte Viertel seyn. Es wird nämlich

$AB\mathfrak{X}X = X\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Y = Y\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}ZD = Z\mathfrak{Z}C = \frac{1}{4}ABCD$ seyn.

Anhang.

6. Wollte man sich eines Proportionalzirkels bedienen, und eine vorgelegte gradlinichte Figur durch eine Verzeichniß in

eine

eine gegebene Anzahl gleicher Theile zerschneiden, so will ich noch kürzlich folgender Art erwähnen, welche zu der gegenwärtigen Absicht weit bequemer seyn wird.

7. Die Hauptsache, wie ich schon angemerket habe, kömmt auf die Auflösung des zweyten Satzes an, und diesen werde ich anjetzo durch eine geometrische Verzeichniß besonders aufzulösen mich bemühen.

8. Es sey ABCD (9 Fig.) ein Viereck, dessen zwey Seiten AB und DC einander parallel laufen. Man verlängere die beyden anderen Seiten AD und BC bis dieselben in O zusammen stossen, und von diesem Punct O lasse man eine Perpendiculärlinie OE auf AB herunter. Nun sey ABXY der gesuchte abgeschnittene Theil, dessen Flächeninnhalt von einer vorgeschriebenen Größe seyn soll; die grade Linie XY muß also der Seite AB parallel laufen, und da die vorgeschriebene Größe allemal in ein Quadrat verwandelt werden kann, die Gestalt derselben mag beschaffen seyn wie man auch immer will, so lasset uns setzen, die grade Linie MN wäre die Seite dieses Quadrats.

9. Weil die Dreyecke AOB und XOY einander ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate ihrer ähnlichen Seiten oder Linien; das ist $\triangle AOB : \triangle XOY = AO^2 : XO^2$

oder $\triangle AOB : ABYX + \triangle AOB = AO^2 : XO^2$

Es sey o die Mitte der Höhe OE oder $Eo = \frac{1}{2}EO$, so wird der Innhalt des Dreyecks $AOB = AB \times Eo$ seyn, und weil der Innhalt von $ABYX = MN \times MN$ seyn soll, so erhält man

$$AB \times Eo : MN \times MN + AB \times Eo = AO^2 : XO^2$$

folglich $\sqrt{AB \times Eo} : \sqrt{(MN \times MN + AB \times Eo)} = AO : XO.$

10. Nun deutet $\sqrt{AB \times Eo}$ die mittlere Proportionallinie zwischen AB und Eo, das ist, zwischen der Grundlinie und der hal-

halben Höhe des Dreyecks AOB an, und man kann dieselbe leicht vermittelst des Proportionalzirkels finden: Es sey also $ab = \sqrt{AB \times Eo}$, so wird

$$ab : \sqrt{(MN \times MN + ab \times ab)} = AO : OX.$$

Ferner da $\sqrt{(MN \times MN + ab \times ab)}$ die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks andeutet, dessen beyde Catheti MN und ab sind, und diese Hypothenuse bc durch die wirkliche Verzeichniß des rechtwinklichten Dreyecks abN leicht gefunden wird, so werden wir erhalten

$$ab : bc = AO : OX.$$

Das ist die Linie OX wird die vierte Proportionallinie zwischen den beyden gefundenen Linien ab, bc und der Seite AO des Dreyecks AOB andeuten; da nun diese OX vermittelst eines Proportionalzirkels gefunden wird, so wird, wenn wir dieselbe wirklich auf der Seite OD von O nach D auftragen, und durch das Punct X die Linie XY der Seite AB oder DC parallel ziehen, diese Linie den verlangten Theil ABYX = MN × MN abschneiden.

Anmerkung.

11. Wollte man auf die eben angezeigte Art die Weite XO durch die Rechnung bestimmen, so würde man auf eine ähnliche Wurzelformul gerathen, wie wir durch die vorige Auflösung erhalten haben.

Erster Zusatz.

12. Wann von einem Dreyeck ADC (3 Fig.) ein Stück AXY von einer gegebenen Größe MN × MN abgeschnitten werden soll, also daß die abschneidende Linie XY der Grundlinie DC parallel laufe, so kann man es am leichtesten auf folgende Art angreifen.

I. Man

I. Man lasse aus der Spitze A auf der Grundlinie DC die Perpendicularlinie AE herunter

II. Man suche die mittlere Proportionallinie *ab* zwischen dieser halben Höhe $\frac{1}{2}$AE und der Grundlinie DC.

III. Nehme man die vierte Proportionallinie *cd* zwischen der eben gefundenen *ab*, der Seite MN des gegebenen Quadrats, und der einen Seiten AD des vorgelegten Dreyecks ADC.

IV. Trage man diese Linie AX = *cd* auf der Seite AD von A nach D hin: endlich

V. Ziehe man durch X die Linie XY der Grundlinie DC parallel; so wird AXY der verlangte Theil nämlich AXY = MN × MN seyn.

Zweyter Zusatz.

13. Wann von einem umgekehrten Dreyeck ACB (4 Fig.) ein Stück AXYB von einer gegebenen Größe MN × MN abgeschnitten werden soll, so darf man nur auf der im vorigen Zusatze erwehnten Art den Ueberschuß des Innhalts des ganzen Dreyecks über das gegebene Quadrat MN × MN, nämlich CXY = ABC — MN × MN, von der Spitze C an abschneiden.

Dritter Zusatz.

14. Wann von einem Parallelogrammum ABCD (5 Fig.) ein Stück ABXY von einer gegebenen Größe MN × MN abgeschnitten werden soll, so ziehe man die Perpendiculärlinie BE und steche auf derselben die dritte Proportionallinie BP zu der Seite AB und der Seite MN des gegebenen Quadrats MN × MN ab

AB : MN = MN : BP

und die durch diesen Punct P gezogene Parallellinie XY wird das verlangte Stück ABYX abschneiden.

Anmerkung.

15. Wenn die obere Seite AB (9 Fig.) des Vierecks ABCD größer ist, als die untere Parallelseite DC, so wird das Punct O unter der Seite DC fallen. Um aber in diesem Fall von dem Viereck ABCD ein Stück ABYX von einer gegebenen Größe $MN \times MN$ abzuschneiden, so richte man

1. Aus dem Puncte O auf der obern Parallelseite AB die Perpendicularlinie OE auf, und theile dieselbe in o in zwey gleiche Theile.
2. Suche man die mittlere Proportionallinie ab zwischen AB und Oo oder $Eo = \frac{1}{2}EO$; $AB : ab = ab : Oo$.
3. Suche man den andern Cathetum bc eines rechtwinklichten Dreyecks Mbc, davon der eine Cathetus $Mb = MN$ die Hypothenuse Mb aber $= ab$ ist:
$$bc = \sqrt{(AB \times Oo - MN \times MN)}.$$
4. Suche man die vierte Proportionallinie cd zu ab, bc und OA
$$ab : bc = OA : cd.$$
5. Nehme man auf der Seite OA, $OX = cd$: Endlich
6. Ziehe man durch dieses Punct X die Linie XY der Seite AB parallel; so wird
7. Das Stück ABYX der verlangte Theil des ganzen Vierecks ABCD seyn: $ABYX = MN \times MN$.

Zweyte Aufgabe.

Eine Zirkelfläche durch Parallellinien in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu zerschneiden.

1. Es sey AMM^1BN^1NA eine Zirkelfläche, welche durch Parallellinien MN, mn, (1 Fig.) u. s. w. in n gleiche Theile zerschnit-

schnitten werden soll; die Richtung dieser Parallellinien MN aber mag beschaffen seyn wie man auch nur immer will, so wird die Auflösung gegenwärtiger Aufgabe keiner Abänderung unterworfen seyn; aus einer ähnlichen Ursache wird es uns auch erlaubt seyn den halben Durchmesser der vorgelegten Zirkelfläche $= 1$ anzunehmen; weil nämlich alle Zirkel einander vollkommen ähnlich und die Krümmung eines jeden Zirkels an allen Orten gleich groß ist.

2. Es stelle MANM den ersten Theil der Zirkelfläche vor, oder MANM sey $= \frac{1}{n}$ AMBNA; der Bogen MAN aber, oder der Winkel MCN der diesen ersten Theil einfaßt begreife m Grade: MCN $= m$. Da nun der halbe Durchmesser unsers Zirkels $= 1$ ist, so wird der halbe Umkreis desselben seyn $= 3{,}1415926$, folglich der Innhalt der ganzen Zirkelfläche $= 3{,}1415926$ Flächenmaas und der n Theil derselben MANM $= \frac{3{,}1415926}{n}$.

3. Nun ist der Innhalt des Ausschnitts AMCNA $= \frac{m}{360} \times 3{,}1415926$. Und, wenn aus dem Puncte M auf dem halben Durchmesser NC die Perpendiculärlinie MP $=$ sin m gezogen wird. Der Innhalt des Dreyecks NMC $= \frac{1}{2}$MP. NC $= \frac{1}{2}$ sin m folglich wird der Innhalt des Abschnitts MANM seyn

$$\text{AMCNA} - \triangle\text{NMC} = \frac{m}{360} \times 3{,}1415926 - \tfrac{1}{2}\sin m.$$

Da nun dieser Innhalt gleich dem 12 Theil der ganzen Zirkelfläche 3, 1415926 seyn soll, so erhält man diese Gleichung

$$\frac{3{,}1415\ \&c.}{360} m - \tfrac{1}{2}\sin m = \frac{3{,}1415\ \&c.}{n}$$

welche durch $\frac{3{,}1415\ \&c.}{360}$ getheilt giebt

$$m - \frac{180}{3,1415\ \&c.} \sin m = \frac{360}{n} \text{ oder}$$

$$m - 57,295\ \&c. \times \sin m = \frac{360}{n}.$$

Es ist aber der Logarithme von 57, 295 &c. = 1, 7581226.

4. Diese gefundene Gleichung läßt sich durch keinen andern Weg, als durch die Annäherung auflösen: hat man aber den Werth von m daraus berechnet, so ist der diesem Winkel oder Bogen m zukommender Abschnitt MANM der erste verlangte 12 Theil der ganzen Zirkelfläche.

5. Um aber den zweyten, dritten, vierten, u. s. w. 12 Theil der ganzen Zirkelfläche zu bestimmen, so setze man in der eben herausgebrachten Gleichung $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{3}n$, $\frac{1}{4}n$, u. s. w. für n; und die correspondirende Werthe von m werden diejenige Bogen seyn, deren Sehnen die ganze Zirkelfläche in 12 gleiche Theile zerschneiden.

Dann wenn das Stück MmaN der zweyte 12 Theil der Zirkelfläche ist, so muß der ganze Abschnitt mnAm zweyen 12 Theilen gleich seyn: folglich wenn in der gefundenen Gleichung $\frac{1}{2}$ 12 für n geschrieben wird, so wird m den Bogen mAn andeuten.

6. Hiernächst muß ich bemerken, daß man bey der Theilung der Zirkelflächen nur bis auf die Hälfte zu gehen nöthig hat; weil die schon gefundenen ersteren Theile auch zugleich die letzteren Theile geben, wenn man dieselben grade gegenüber auf der Seite B des Zirkels absticht; so wird, wenn $M^1BN^1 = MAN$, $mBn^1 = mAn$, und s. w. gemacht wird, der Abschnitt $M^1N^1BM^1$ der letzte 12 Theil, $m^1M^1N^1n^1$ der letzt ohneine 12 Theil, u. s. w. der ganzen Zirkelfläche seyn.

Exempel.

7. **Man soll eine Zirkelfläche durch Parallellinien in sechs gleiche Theile zerschneiden.**

Da

Da hier $n=6$ ist, so erhält man folgende Gleichung

$$m - 57,295 \text{ \&c. } \sin m = 60$$

und die ganze Sache läuft da hinaus, daß wir aus dieser Gleichung den Werth des Bogens m durch die Annäherung berechnen. Ich merke aber sogleich an, daß dieser Werth von m größer sey als 90 Grade, weil sonsten $m - 57,295$ &c. $\sin m$ allemal kleiner wäre als 60.

Lasset uns also folgende Sätze annehmen und berechnen

	I.	II.	III.	IV.
m - - - - - - - - - -	100	110	112	113
l 57, 295 &c. - - - -	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
$l \sin m$ - - - - - - -	9,9933515	9,9729858	9,9671659	9,9640261
l 57, 295 &c. $\sin m$ -	1,7514741	1,7311084	1,7252885	1,7221487
57, 295 &c. $\sin m$ -	56, 425	53, 840	53, 123	52, 741
m — 57, 295 &c. $\sin m$.	43, 575	56, 160	58, 877	60, 259
	fehlt noch 16, 425	fehlt noch 3, 840	fehlt noch 1, 123	ist zu groß um 0, 259

Hieraus folgt, daß der Winkel m zwischen den 112 und 113 Grad enthalten sey, und da wir hier nur von einem Grad zu dem folgenden gegangen, so läßt sich der wahre Werth von m ganz leicht und ziemlich genau vermöge einer gemeinen Regeldetrie bestimmen, dann man darf nur sprechen 1, 123 + 0, 259 das ist 1, 482 Unterschied in der Formul $m - 57,295$ &c. $\sin m$ geben 1° oder $60'$ Zuwachs in dem Winkel m, um wie viele Minuten muß man diesen Winkel m über 112° vermehren, damit der Unterschied in der Formul genau 1, 123 werde: das ist

1, 480 geben $60'$ was geben 1, 123? Antwort. $46'$

Es ist also ziemlich genau $m = 112^\circ\ 46'$.

Wollte man aber diesen Winkel noch genauer bestimmen, so berechne man zwey neue Satzungen auf die eben erwähnte Art, welche aber nur um etliche Minuten von einander unterschieden sind, und berechne aus den Fehlern, welche daraus in der Formul $m - 57,295$ &c. $\sin m$ entspringen, den Unterschied zwischen dem wahren Winkel m und dem vorausgesetzten

Satzungen	V.	VI.
m	112° 45′	112° 50′
$l57,295$ &c.	1,7581226	1,7581226
$l\sin m$	9,9648256	9,9645692
$l57,295$ &c. $\sin m$	1,7229482	1,7226828
$57,295$ &c. $\sin m$	52,838	52,806
$m - 57,295$ &c. $\sin m$	59,912	60,060
	fehlt noch 0,088	ist zu groß um 0,060

Folglich da $0,088 + 0,060$ oder $0,148$ geben $5'$ oder $300''$, so werden $0,088$ geben $\frac{300 \times 0,088}{0,148}$ das ist $178''$; also ist $m = 112°$ $45' + 178''$ oder $m = 112°\ 47'\ 58''$ sehr genau.

Um anjetzo den zweyten sechsten Theil zu berechnen, so setze man in der gefundenen allgemeinen Gleichung $\frac{1}{n} = \frac{2}{6}$ oder $n = 3$, und die daraus erstandene Gleichung

$$m - 57,295 \text{ \&c. } \sin m = 120$$

wird uns denjenigen Winkel m geben, welcher die beyden ersten sechsten Theile zusammen einfaßt.

Man setze	I.	II.	III.	IV.
m	150°	149°	149° 15′	149° 20′
$l57,295$ &c.	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
$l\sin m$	9,6989700	9,7118393	9,7086699	9,7076064
$l57,295$ &c. $\sin m$	1,4570926	1,4699619	1,4667925	1,4657290
$57,295$ &c. $\sin m$	28,648	29,510	29,295	29,223
$m - 57,295$ &c. $\sin m$	121,352	119,490	119,955	120,110
	ist zu groß um 1,352	ist zu klein um 0,510	ist zu klein um 0,045	ist zu groß um 0,110

Folglich

Folglich
$1,352+0,510:1^\circ=0,510:{}^*$
$1,862:60'=0,510:16'$
also
$m=149^\circ\ 16'$
ziemlich genau

Also
$0,045+0,110:5'=0,045:{}^*$
$0,155:300''=0,045:87''$
folglich
$m=149^\circ\ 16'\ 27''$
sehr genau

Setzen wir nun um den dritten Theil zu finden $\frac{1}{n}=\frac{3}{6}$ oder $n=2$, also daß $m-57,295$ &c. $\sin m=180$ werde, so erhellet sogleich, daß hier $m=180^\circ$ seyn müsse, weil alsdann $\sin m=0$ und der ganzen Gleichung ein völliges Genügen geleistet wird.

Der erste zweyte und dritte sechste Theil aber geben auch zugleich den letzten, fünften und vierten Theil.

Um also die Zirkelfläche ABA′D (2 Fig.) durch Parallellinien nach der Richtung MN in sechs gleiche Theile zu zerschneiden, so ziehe man den Durchmesser AA′ auf der gegebenen Richtung MN perpendiculär. Man nehme alsdann $AM=AN$ $=\frac{112^\circ\ 47'\ 58''}{2}=56^\circ\ 23'\ 59''$ ingleichen $A'M'=A'N'=56^\circ\ 23'\ 59''$ und ziehe die Sehnen MN und M′N′, so wird MANM der erste Theil, und M′A′N′M′ der letzte Theil seyn. Ferner mache man $Am=An=\frac{149^\circ\ 16'\ 27''}{2}=74^\circ\ 38'\ 13\frac{1}{2}''$ ingleichen $A'm'=A'n'=74^\circ\ 38'\ 13\frac{1}{2}''$ und ziehe die Sehnen mn, $m'n'$, so wird MNnm der zweyte Theil, und M′N′$n'm'$ der fünfte Theil seyn. Endlich ziehe man den Durchmesser DB auf AA perpendiculär, so wird mnBD der dritte Theil, $m'n'$BD der vierte Theil der nunmehro in sechs gleiche Theile zerschnittenen Zirkelfläche seyn.

Dritte Aufgabe.

Die Höhe und Grundlinie einer aufrechtstehenden geschlossenen Parabelfläche ist gegeben, man soll dieselbe durch Parallellinien in n gleiche Theile zerschneiden.

1. Es sey CADC (1, 2, 3, 4 und 5 Fig.) die vorgelegte Parabel, $AB = a$ die Höhe und $CB = BD = b$ die halbe Grundlinie, so wird $\frac{4ab}{3}$ der Flächeninnhalt der ganzen Parabel CADC und $\frac{4ab}{3n}$ der Flächeninnhalt eines jeden verlangten Theils seyn.

2. Da die Auflösung gegenwärtiger Aufgabe von der Lage der vorgelegten Richtung in Ansehung der Axe der Parabel wesentlich abhängt, so muß auch dieselbe für eine jede Lage besonders eingerichtet werden. Ich werde hier nur drey Fälle entwickeln, welche aber dennoch so beschaffen sind, daß sie auch zugleich alle übrige in sich begreifen.

Erster Fall.

Wenn die Richtung MN (1 Fig.) nach welcher die Parabel durch Parallellinien in *n* gleiche Theile zerschnitten werden soll, auf der Axe *AB* der Parabel perpendiculär ist, und folglich der Grundlinie *CD* parallel läuft.

3. Es sey $AMMA = \frac{4ab}{3n}$ der erste gesuchte n Theil der ganzen Parabel und $AP = x$ die derselben zugehörige Abscisse, so wird $PM = \sqrt{\frac{bbx}{a}}$; $MM = 2\sqrt{\frac{bbx}{a}}$ und der Flächeninnhalt des Stücks $AMMA = \frac{4}{3}x\sqrt{\frac{bbx}{a}}$. Folglich $\frac{4}{3}x\sqrt{\frac{bbx}{a}} = \frac{4ab}{3n}$, und also x, das ist $AP = \frac{a}{\sqrt[3]{nn}}$ oder $AP = \frac{AB}{\sqrt[3]{nn}} = AB\sqrt[3]{(\frac{1}{n})^2}$. Es sey ferner $MM'M'M = \frac{4ab}{3n}$ der zweyte gesuchte n Theil der ganzen Parabelfläche, und weil dann $AM'M'A = \frac{8ab}{3n} = \frac{4ab}{3 \times \frac{1}{2}n}$ seyn muß, so werden wir auf

eine

eine ähnliche Art für diesen 2 Theil $MM^{\mathrm{I}}M^{\mathrm{I}}M$ erhalten die Abscisse $AP' = AB\sqrt[3]{(\frac{2}{n})^2}$ folglich die Höhe dieses Theils $PP' = AB \sqrt[3]{(\frac{1}{n})^2} \times (\sqrt[3]{2^2} - 1)$. Eben so werden wir auch für den dritten Theil $M'M''\ M''M'$ die Abscisse AP'' finden, wenn wir in dem für AP gefundenen Werth $\frac{1}{3}n$ anstatt n schreiben: es wird nämlich für diesen dritten Theil seyn die Abscisse $AP'' = AB \sqrt[3]{(\frac{3}{n})^2}$ und folglich die Höhe desselben $P'P'' = AB \sqrt[3]{(\frac{1}{n})^2} \times (\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2^2})$.

Wenn man demnach von der Spitze A an auf der Axe der Parabel die Entfernungen

$$AP = AB \sqrt[3]{(\tfrac{1}{n})^2}$$
$$PP' = (\sqrt[3]{2^2} - 1)\ AB \sqrt[3]{(\tfrac{1}{n})^2}$$
$$P'P'' = (\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2^2})\ AB\sqrt[3]{(\tfrac{1}{n})^2}$$
$$P''P''' = (\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{3^2}) AB\sqrt[3]{(\tfrac{1}{n})^2}$$

und so weiter absticht, und durch diese Puncte P, P', P'', P''', u. s. w. die graden Linien MM, M'M', M'' M'', M''' M''', und s. w. der Richtung MN, das ist in dem gegenwärtigen Fall, der Grundlinie CD parallel ziehet, so werden dieselben die ganze Parabelfläche in n gleiche Theile zerschneiden.

Anmerkung. Da hier der Buchstabe b, so die halbe Grundlinie andeutet, gänzlich aus der Rechnung gegangen, so folgt hieraus, daß die Linien MM, M'M', M'' M'', M''' M''', u. s. w. nicht nur die vorgelegte Parabel ACDA, sondern überhaupt alle Parabeln von der gleichen Höhe AB in n gleiche Theile zerschneiden, die Grundlinien derselben mögen groß oder klein seyn.

Zweyter Fall.

Wenn die Richtung MN, nach welcher die Parabel in *n* gleiche Theile zerschnitten werden soll, der Axe *AB* der Parabel parallel läuft.

4. Es sey MND (2 Fig.) der erste Theil, und also MND $= \frac{4}{3}.\frac{ab}{n}$; Man setze für denselben die Entfernung von der Axe BN $= y$, so wird auch PM $= y$ und die Abscisse AP $= \frac{ayy}{bb}$ seyn; folglich

der Innhalt APMA $= \frac{2ay^3}{3bb}$; ABDA $= \frac{2}{3}ab$

der Innhalt PMDB $=$ ABDA—APMA $= \frac{2}{3}ab - \frac{2}{3}\frac{ay^3}{bb} = \frac{2a}{3bb}(b^3 - y^3)$

der Innhalt PMNB $= (a - \frac{ayy}{bb})\, y = ay.\frac{bb-yy}{bb}$

der Innhalt MND $=$ PMDB—PMNB $= \frac{2}{3}\, a.\, \frac{b^3-y^3}{bb} - ay.\frac{bb-yy}{bb}$

oder

der Innhalt MND $= \frac{a}{bb}(\frac{1}{3}y^3 - bby + \frac{2}{3}b^3)$

Da nun der Innhalt von MND $= \frac{4}{3}.\frac{ab}{n}$ seyn muß, so erhalten wir diese Gleichheit $\frac{a}{bb}(\frac{1}{3}y^3 - bby + \frac{2}{3}b^3) = \frac{4}{3}.\frac{ab}{n}$ oder

diese —— $y^3 - 3bby = \frac{-2b^3(n-2)}{n}$

welche allemal drey mögliche Wurzeln hat, und nach des Cardani Regel aufgelößt folgenden Werth für $y =$ BN giebet

$$y = \sqrt[3]{(-b^3(-1\tfrac{2}{n}) + \sqrt{(b^6(-1\tfrac{2}{n})^2 - b^6)})} +$$
$$\sqrt[3]{(-b^3(1-\tfrac{2}{n}) - \sqrt{(b^6(1-\tfrac{2}{n})^2 - b^6)})}$$

oder $y = b \times (\sqrt[3]{(-1+\frac{2}{n} + 2\sqrt{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)})} + \sqrt[3]{(-1+\frac{2}{n} - 2\sqrt{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)})})$

das ist BN $=$ BD $\times (\sqrt[3]{-1+\frac{2}{n}+2\sqrt{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)}} + \sqrt[3]{(-1+\frac{2}{n}-2\sqrt{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)})})$.

Erste

Erste Anmerkung. Dieser gefundene Werth von BN erhält allemal die Gestalt einer unmöglichen Größe, weil nämlich $\frac{1}{n}<1$ und folglich $\sqrt{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)}=\sqrt{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})}\times\sqrt{-1}$; wenn man aber die beyden cubischen Wurzel-Formeln in unendliche Reyhen entwickelt, so heben sich die imaginären Glieder gegen einander auf, und der Werth von BN wird möglich.

Zweyte Anmerkung. Will man aber, um alle Weitläuftigkeit zu vermeiden, die Gleichung $y^3-3bby=-2b^3(1-\frac{2}{n})$ durch die Trisectionem anguli auflösen; so suche man erstlich einen Winkel Z dessen Cosinus $=-1+\frac{2}{n}$ ist, und die drey Wurzeln der vorgefundenen Gleichung werden alsdann alle unter dieser Formul begriffen seyn

$$y = 2b\cos(m\times 120+\tfrac{1}{3}Z)$$

Wo für m eine ganze Zahl nach Belieben angenommen werden kann. Also daß auch $m=0$ eine Wurzel der Gleichung, nämlich

$$y = 2b\cos\tfrac{1}{3}Z;\ \text{weil}\ \cos-\tfrac{1}{3}Z = \cos+\tfrac{1}{3}Z)$$

giebt.

Von den drey gefundenen Werthen für y aber muß nur derjenige erwählet werden, welcher kleiner als $\frac{1}{2}$CD ist. Es werden aber allemal zwey Werthe größer als $\frac{1}{2}$CD seyn, und zu den beyden niedersteigenden Aesten der Parabel unter der Grundlinie gehören.

Dritte Anmerkung. Hätte man anstatt der Entfernung BN die Abscisse AP gesucht, so würde man auf folgende cubische Gleichung gerathen seyn

$$AP^3-6.AB.AP^2+9.AB^2.AP=4AB^3(1-\tfrac{2}{n})^2$$

welche ebenfalls drey mögliche Wurzeln hat, und welche folglich auch am bequemsten durch die Trisectionem angulorum aufgelößt werden kann.

Vierte

Vierte Anmerkung. Da wir die Entfernung BN gesucht haben, so fiel die Höhe der Parabel AB aus der Rechnung, und als die Absciſſe AP geſucht worden, so fiel die Grundlinie CD weg. Folglich werden einerley Parallellinien MN in dem ersten Fall alle Parabeln, die verschiedene Höhen aber eine und eben dieselbe Grundlinie CD haben, und in dem andern Fall alle Parabeln, die verschiedene Grundlinien aber eine und eben dieselbe Höhe AB haben, in n gleiche Theile zerschneiden.

Fünfte Anmerkung. Ich habe zwar hier nur gezeiget, wie der Ort N der ersten Parallellinie MN, welche nämlich den ersten n Theil MND abschneidet, bestimmt werden soll. Die Oerter N′, N″, N‴, und s. w. der übrigen Parallellinien M′N′, M″ N″, M‴ N‴, und s. w. aber werden aus eben derselben Gleichung

$$BN^3 - 3\,BD^2 \times BN = 2BD^3 \times (1 - \tfrac{2}{n})$$

oder $AP^3 - 6\,AB \times AP^2 + 9\,AB^2 \times AP = 4AB^3\,(1 - \tfrac{2}{n})^2$

berechnet, wenn man für n nacheinander $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{3}n$, $\frac{1}{4}n$, und s. w. oder für $\frac{1}{n}$ nacheinander $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{4}{n}$, u. s. w. schreibt.

Dritter und letzter Fall.

Wenn die Richtung MN, (3 Fig.) nach welcher die Parabel in n gleiche Theile zerschnitten werden soll, mit der Grundlinie *CD* einen gegebenen Winkel MNC = a macht.

5. Es sey MENM der erste gesuchte Theil, also daß MN der gegebenen Richtung MN parallel laufe und MENM $= \frac{4ab}{3n}$ sey. Man setze den Tangenten des Winkels MNC $= m$ oder tang $a = m$, so wird auch tang QNM $= m$ seyn. Es sey ferner PM $= x$, und QN $= y$, so wird AP $= \frac{axx}{bb}$ und AQ $= \frac{ayy}{bb}$ seyn;

folg-

folglich $PQ = \frac{a}{bb}(yy - xx) = \frac{a}{bb}(y+x)(y-x)$. Nun aber ist $PQ = MO = ON$ tang. $MNO = (QN - PM)$ tang. MNO das ist $PQ = (y-x)m$; folglich muß $\frac{a}{bb}(y+x)(y-x) = (y-x)m$ das ist $\frac{a}{bb}(y+x) = m$ seyn, durch welche Gleichung sogleich y durch x bestimmt wird; es ist nämlich $y = \frac{mbb}{a} - x$, folglich $AQ = \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{a} - x)^2$; $PQ = \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{a} - x)^2 - \frac{a}{bb}x^2 = \frac{mmbb}{a} - 2mx$ $QN = y = \frac{mbb}{a} - x$ und der Flächeninnhalt von

$$AQNA = \tfrac{2}{3} AQ.\, QN = \tfrac{2}{3} \times \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{a} - x)^3$$

$$APMA = \tfrac{2}{3} AP.\, PM = \tfrac{2}{3} \times \frac{a}{bb} x^3$$

$$PMNQ = \tfrac{1}{2} PQ\,(PM + QN) = \frac{mmbb}{2a}(\frac{mbb}{a} - 2x)$$

Da nun $MENM = \frac{4ab}{3n} = AQNA - APMA - PMNQ$ ist, so erhalten wir folgende Gleichung

$$\frac{4ab}{3n} = \frac{2a}{3bb}(\frac{mbb}{a} - x)^3 - \frac{mmbb}{2a}(\frac{mbb}{a} - 2x) - \frac{2a}{3bb}x^3$$

Man setze der Kürze halben $\frac{mbb}{a} = c$ so wird

$$\frac{4ab}{3n} = \frac{2a}{3bb}(c-x)^3 - \frac{mc}{2}(c - 2x) - \frac{2a}{3bb}x^3 \text{ oder}$$

$$\frac{2b^3}{n} = (c-x)^3 - \frac{3mcbb}{4a}(c-2x) - x^3 \text{ das ist, wei } \frac{mbb}{a} = c$$

$$\frac{2b^3}{n} = (c-x)^3 - \tfrac{3}{2}cc(\tfrac{1}{2}c - x) - x^3; \text{ oder da}$$

$$(c-x)^3 = (\tfrac{1}{2}c + (\tfrac{1}{2}c - x))^3 = \tfrac{1}{8}c^3 + \tfrac{3}{4}cc(\tfrac{1}{2}c - x) + \tfrac{3}{2}c(\tfrac{1}{2}c - x)^2 + (\tfrac{1}{2}c - x)^3$$

und $x^3 = (\frac{1}{2}c - (\frac{1}{2}c - x))^3 = \frac{1}{8}c^3 - \frac{3}{4}cc(\frac{1}{2}c - x) + \frac{3}{2}c(\frac{1}{2}c - x)^2 - (\frac{1}{2}c - x)^3$

so wird $\frac{2b^3}{n} = \frac{3}{2}cc(\frac{1}{2}c - x) + 2(\frac{1}{2}c - x)^3 - \frac{3}{2}cc(\frac{1}{2}c - x)$

das ist $(\frac{1}{2}c - x)^3 = \frac{b^3}{n}$ und folglich $\frac{1}{2}c - x = \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$

$$\text{also } x = \tfrac{1}{2}c - \frac{b}{\sqrt[3]{n}} = \frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$$

Wir bekommen also für den ersten gesuchten n Theil MENM

$PM = \frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$ und folglich

$QN = \frac{mbb}{2a} + \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$; $PM + QN = \frac{mbb}{a}$; $PM - QN = \frac{-2b}{\sqrt[3]{n}}$

$AP = \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}})^2 = a(\frac{mb}{2a} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}})^2$

$AQ = \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}})^2 = a(\frac{mb}{2a} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}})^2$

Setzet man nun weiter für n; $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{3}n$, $\frac{1}{4}n$, u. s. w. so bekömmt man aus diesen Formuln die Lage der II, III, IV, und s. w. Pırallellinie, welche nämlich die ganze Parabel in n gleiche Theile zrschneiden.

Erste Anmerkung. Bey dieser Auflösung aber ist wohl zu beobacten, daß weil wir die Parabel nur bis an die Grundlinie CD engeschrenkt haben, die Applicate NQ nicht größer werden kann, as die halbe Grundlinie BD; das ist $\frac{mb}{2a} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ muß < seyn als 1. Im Fall nun dieses nicht gefunden würde, oder daß $\frac{mb}{2a} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > 1$, so wird der Punct der Parabel N unter der Grundlinie fallen, und die Auflösung der Aufgabe selbsten ganz anders eingerichtet werden müssen.

Man

Man setze also die Linie MN (4 Fig.) die den gegebenen Theil der ganzen Parabel abschneidet, falle mit dem andern Ende N auf der Grundlinie BD; also daß hier MEDNM der gesuchte Theil oder MEDNM $= \frac{4ab}{3n}$; tang MNO aber $= m$ sey.

Es sey wiederum PM $= x$, so wird

$$AP = \frac{axx}{bb};\ PB = a - \frac{axx}{bb};\ ON = \frac{a}{m}\left(1 - \frac{xx}{bb}\right);\ BN = x + \frac{a}{m}\left(1 - \frac{xx}{bb}\right)$$

der Innhalt von PMNB $= \frac{1}{2}$ PB (PM + BN)

$$\frac{1}{2}\left(a - \frac{axx}{bb}\right)\left(2x + \frac{a}{m}\left(1 - \frac{xx}{bb}\right)\right)$$

oder PMNB $= ax\left(1 - \frac{xx}{bb}\right) + \frac{aa}{2m}\left(1 - \frac{xx}{bb}\right)^2$

Es ist aber der Innhalt von

APMA $= \frac{2a}{3bb}x^3$ und

ABDA $= \frac{2ab}{3}$

Da nun der Innhalt von MEDN $= \frac{4ab}{3n} =$ ABDA $-$ APMA $-$ PMNB ist, so erhalten wir folgende Gleichung

$$\frac{4ab}{3n} = \frac{2ab}{3} - \frac{2a}{3bb}x^3 - ax\left(1 - \frac{xx}{bb}\right) - \frac{aa}{2m}\left(1 - \frac{xx}{bb}\right)^2$$

welche sich durch die Entwickelung in diese verwandelt

$$x^4 - \frac{2mbb}{3a}x^3 - 2bbxx + \frac{2mb^4}{a}x + b^4 - \frac{4mb^5}{3a}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 0.$$

Zweyte Anmerkung. Wann wir in der eben gefundenen Gleichung m das ist tang MNO unendlich groß annehmen, so erhalten wir für den schon oben behandelten zweyten Fall

$$-\frac{2mbb}{3a}x^3 + \frac{2mb^4}{a}x - \frac{4mb^5}{3a}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 0.$$

 Und

Und wenn man diese Gleichung durch $\frac{-2mbb}{3a}$ theilt

$$x^3 - 3bbx + 2b^3\left(1 - \frac{2}{n}\right) = o.$$

So wie wir diese Gleichung auch schon an dem eben bemeldten Orte herausgebracht haben. (§. 4.)

Auf eine ähnliche Art kann man auch den Werth von AP in dem ersten Fall (§. 3.) aus der in dem dritten Falle für AP (§. 5.) gefundenen Werthe herausbringen, wenn man nämlich in diesem m das ist tang MNO $= o$ setzt.

Dritte Anmerkung. Wenn bey einer Berechnung des dritten Falles für die Linie PM ein negativer Werth gefunden wird, so muß das Punct M der Parallellinie MN auf der andern Seite AC der Parabel angenommen oder abgestochen werden. Und dieses war auch der Grund, warum ich hier nicht die der Parallellinie MN zukommende Abscisse AP, wie bey den beyden vorhergehenden Fällen gesuchet, sondern derselben lieber die Entfernung PM vorgezogen. Es bestimmt nämlich jene (Abscisse) nicht diejenige Seite, wo das eine End M der Parallellinie MN hinfällt; bey den beyden ersten Fällen aber war diese Behutsamkeit nicht so nöthig.

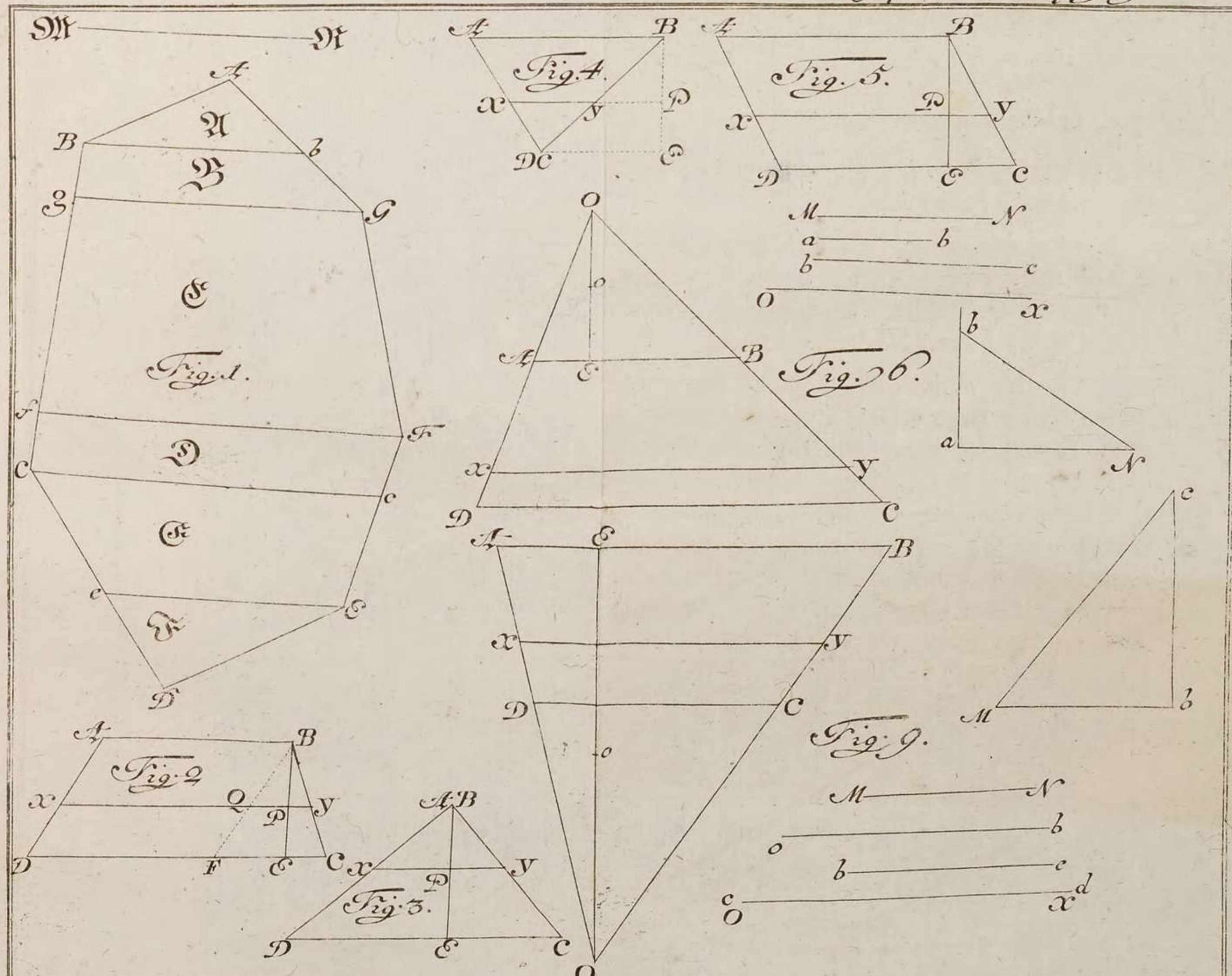


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 9.

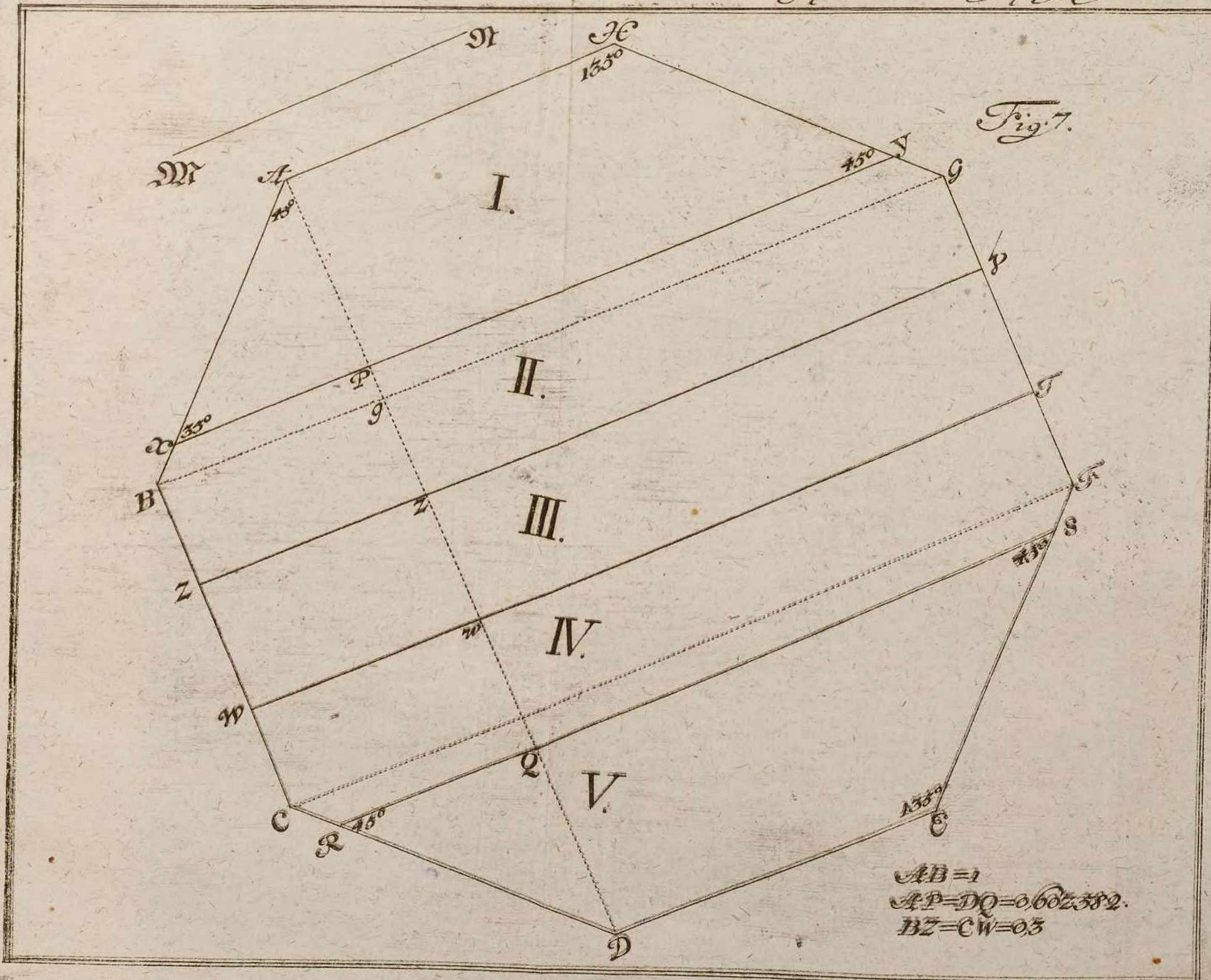


Fig. 7.
M
N
H
135°
A
45°
I.
Y
45°
G
p
P
II.
g
X
35°
B
T
z
III.
K
S
45°
Z
w
IV.
W
Q
V.
C
R
45°
135°
E
D
AB=1
AP=DQ=0,602382.
BZ=CW=0,3

Fig. 8.

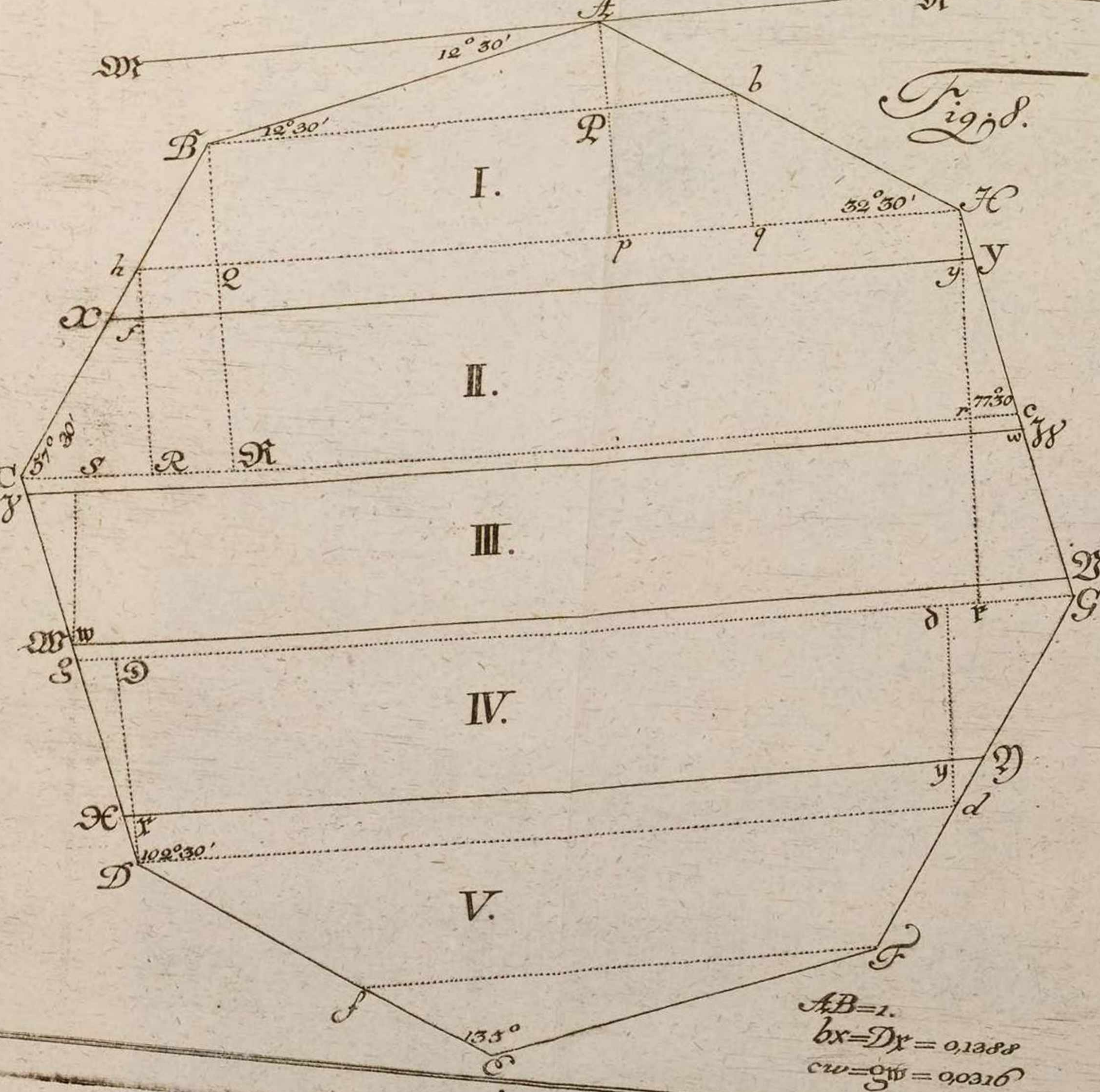
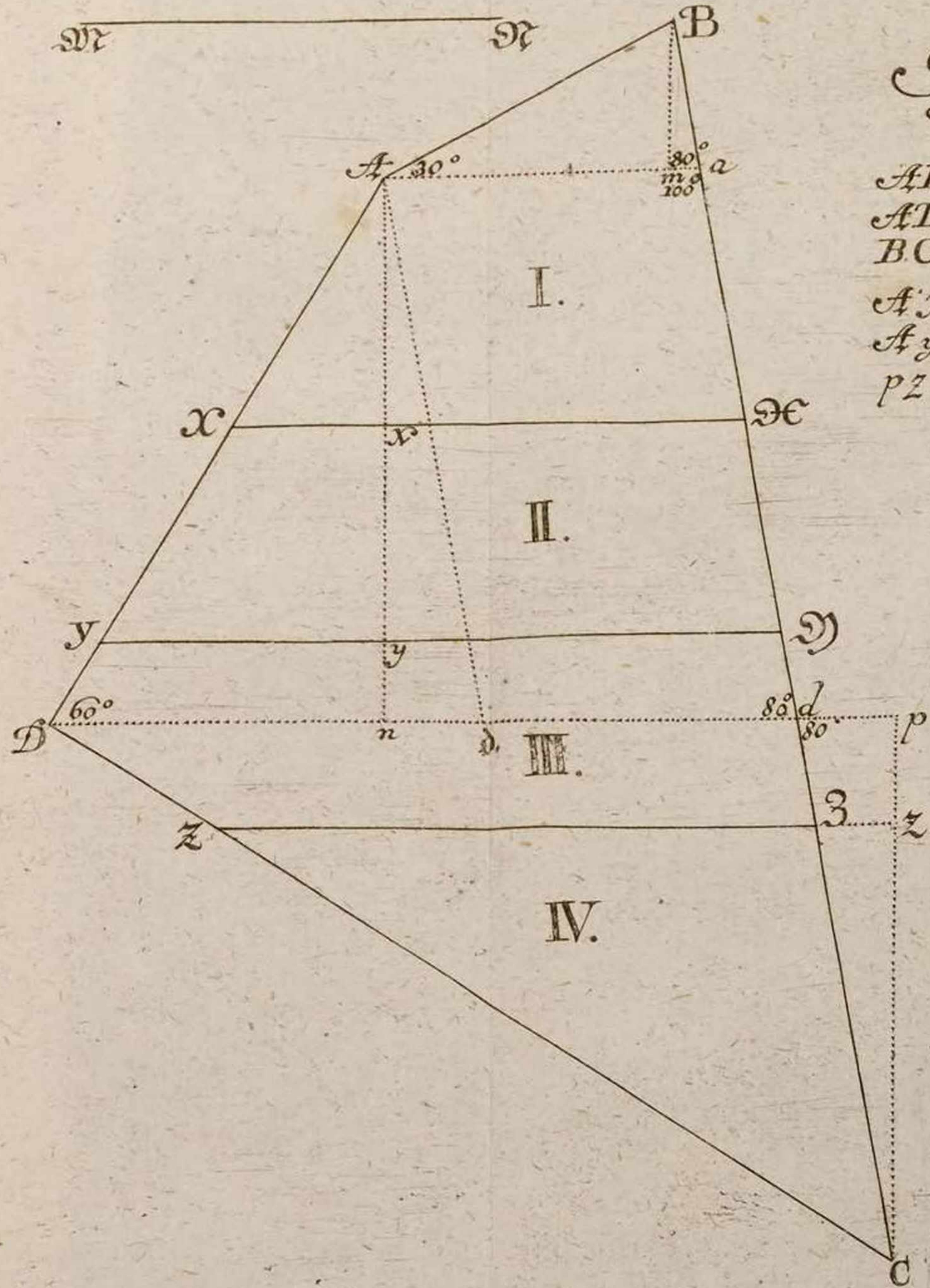

A
M
M
12° 30'
b
P
B
12° 30'
I.
32° 30'
H
p
q
h
Q
y
Y
X
f
II.
77° 30
r
c
w
C
57° 30'
s
R
R
g
III.
V
G
W
w
d
r
g
D
IV.
y
Y
X
x
d
102° 30'
D
V.
F
f
135°
E
AB = 1.
bx = Dx = 0,1388
cw = gw = 0,0316

Fig. 10.

$AB = 100$; $BAD = 150°$;
$AD = 200$; $ABC = 70°$;
$BC = 400$;
$Ax = 79,64$;
$Ay = 147,95$;
$pz = 33,96$;



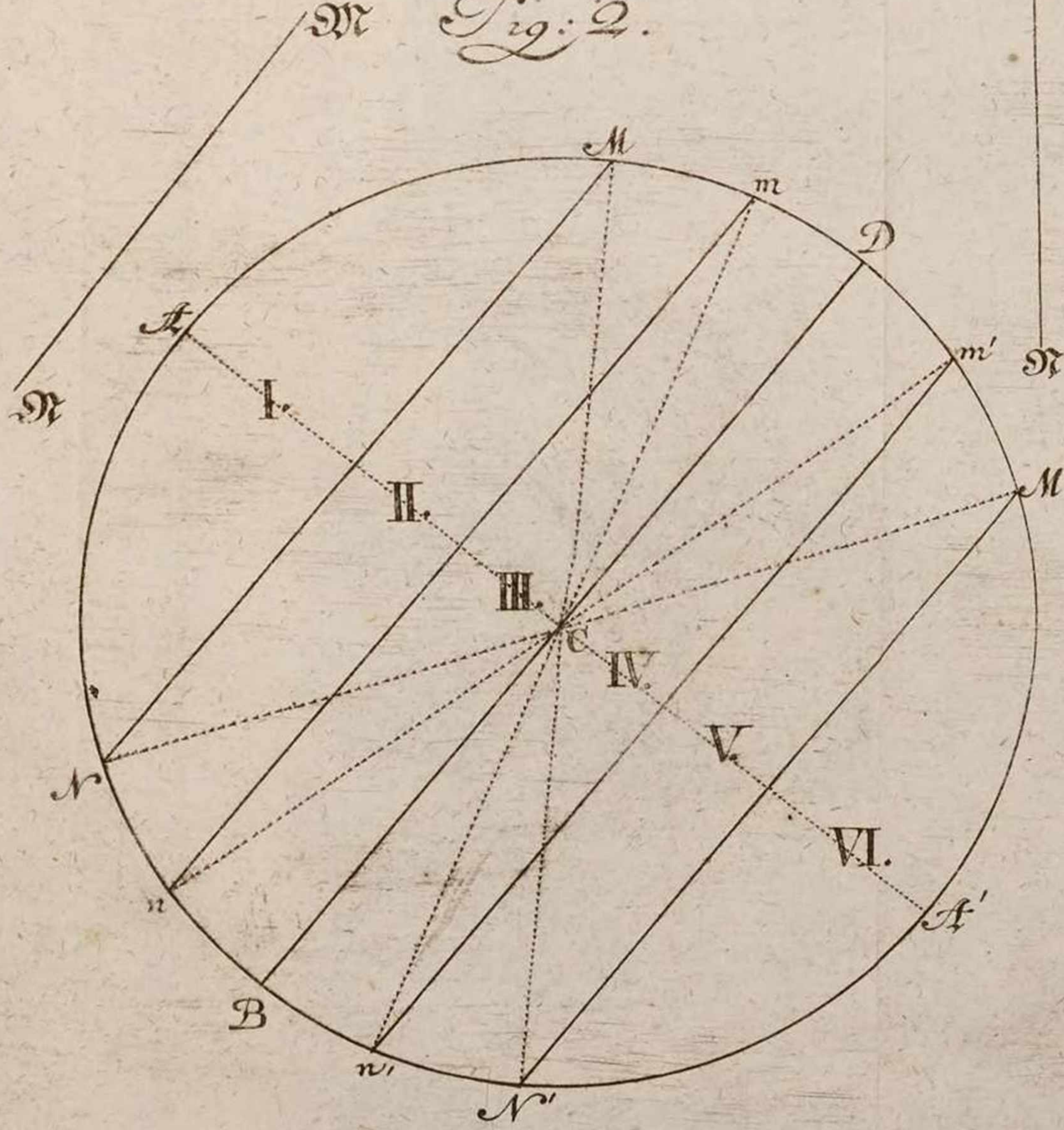


Fig: 2.

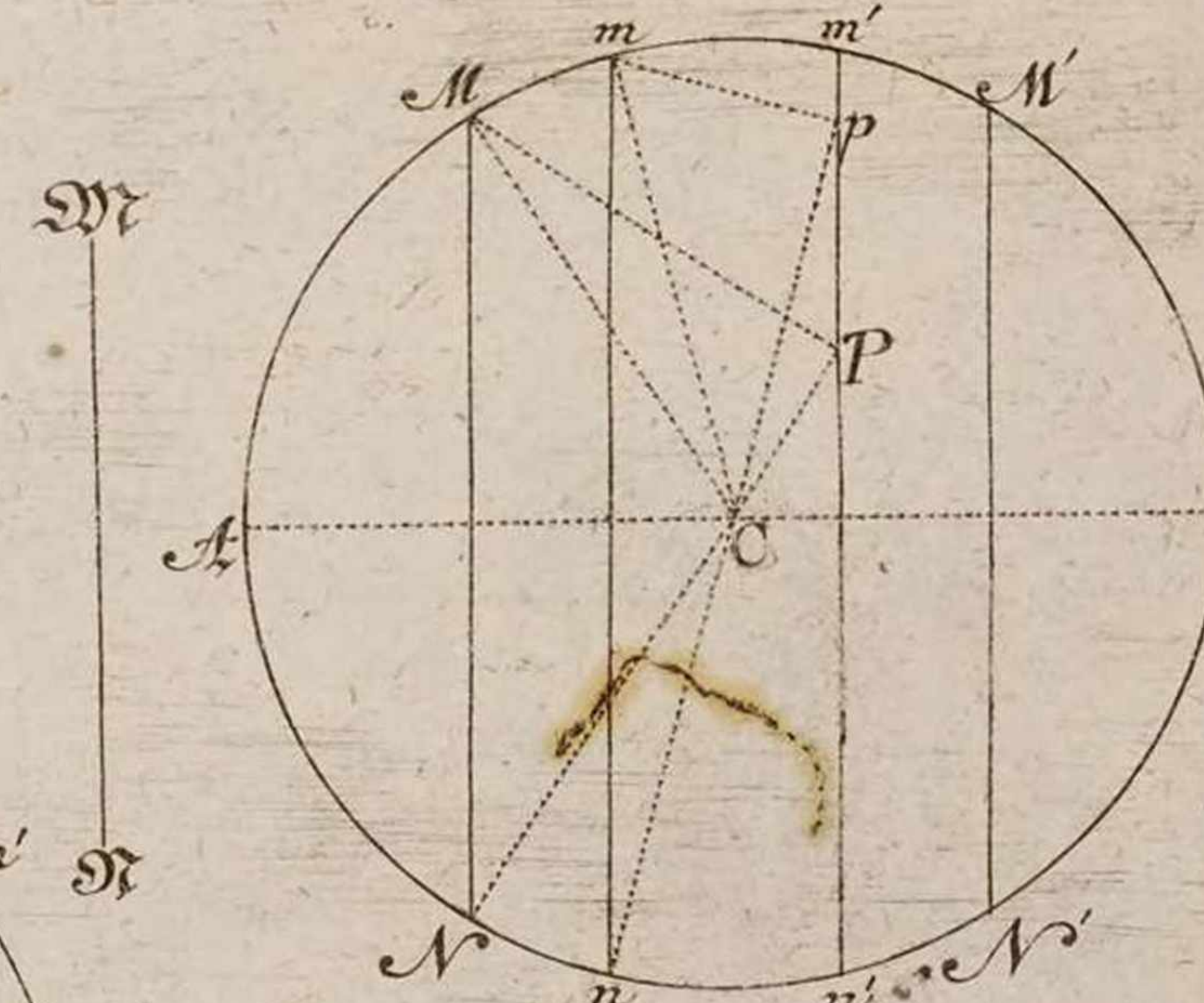


Fig: 1.

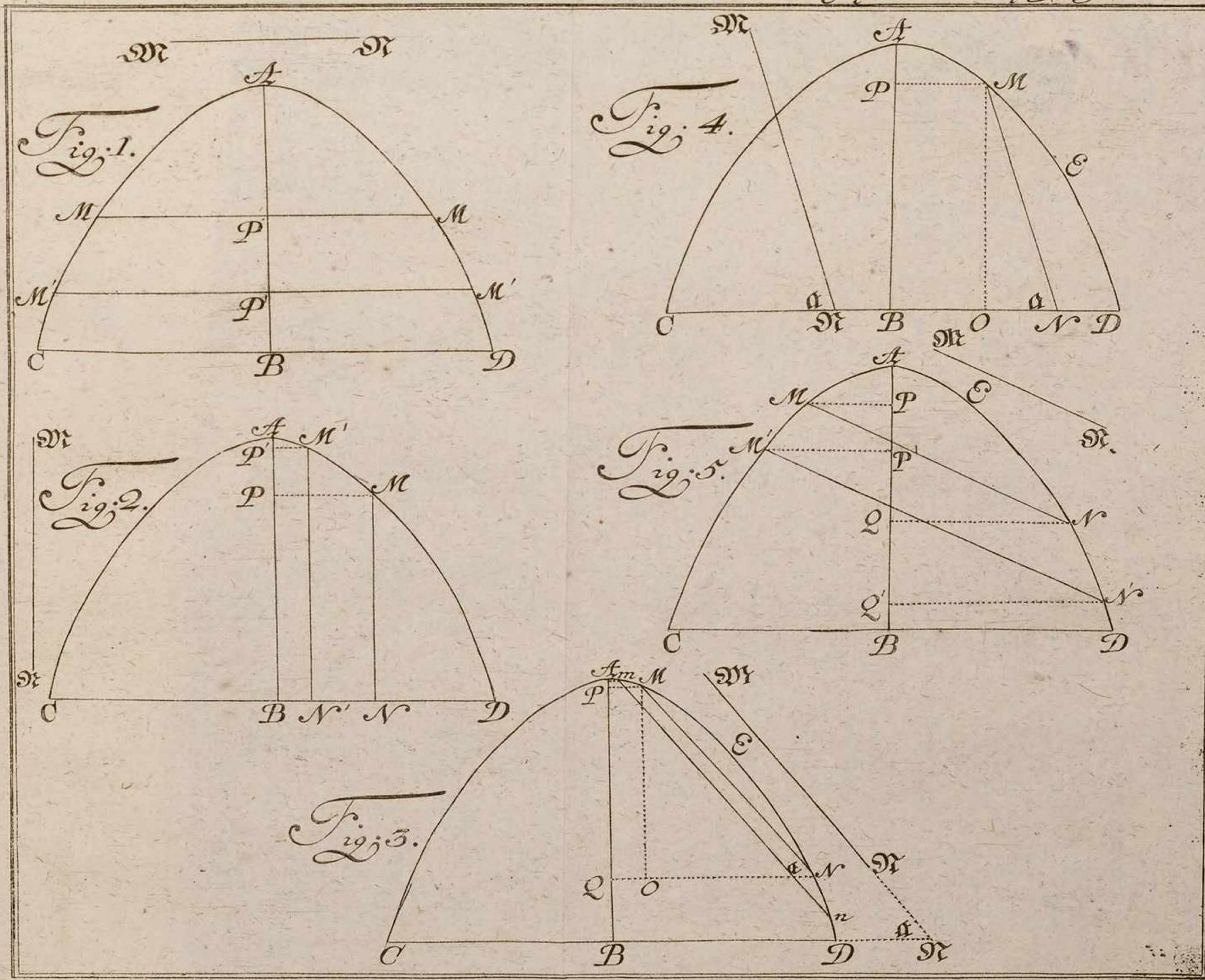


Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig: 5.
A
B
C
D
M
N
P
Q
O
E
M'
N'
P'
Q'