Bemerkungen

über den Zusammenhang

zwischen dem

Bildungsgesetze eines Kettenbruches

und der Art des Fortgangs seiner Näherungsbrüche.

Von

Ludwig Seidel.

Abh. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. VII. Bd. III. Abth.

Bemerkungen
über den
Zusammenhang
zwischen dem Bildungsgesetze eines Kettenbruches
und
der Art des Fortgangs seiner Näherungsbrüche.

Von

Ludwig Seidel.

Seitdem durch den Vorgang grosser deutscher und französischer Meister die Nothwendigkeit zur Geltung gebracht worden ist, für solche mathematische Ausdrücke, welche ihren Werth unter der Form des Unendlichen verschleiern, die Existenz einer *Grenze* nachzuweisen, bevor man sich erlaubt, sie in die Rechnung einzuführen, haben die zu solchem Ende aufgestellten Arbeiten jener Männer nicht allein den höhern Disciplinen der Mathematik die Präcision und Klarheit gegeben, welche der Wissenschaft würdig ist, sondern zugleich dieselbe mit einem neuen Felde von Betrachtungen bereichert, welches für sich selbst das Interesse ebensosehr anregt als irgend ein anderes. Selbst einem gewissen, ich möchte sagen, fremdartigen Charakter, welchen Untersuchungen dieser Art für den Neuling an sich tragen, und welcher vielleicht die Hauptursache ihrer langen Vernachlässigung gewesen ist, hat der Genius der Meister eine eigenthümliche Schönheit abzugewinnen gewusst, welche nun auch manchen Andern zu dem etwas gewagten Unternehmen anreizt, in irgend einem weniger durchforschten Theile des neuen Gebietes eine Nachlese für sich zu suchen. So habe ich in meiner im Frühjahr 1846 gedruckten Habilitationsschrift*) die Untersuchung des Verhaltens einer besondern Klasse von Kettenbrüchen mir zum Ziel gesetzt, derjenigen nämlich, welche von gewisser Stelle an nur positive Partial-Zähler und -Nenner haben. Ueber diese ergab sich dabei ein Satz, welcher sich am einfachsten so in Worte fassen lässt: „Man bringe durch Multiplication seiner Zähler und Nenner mit den geeigneten Factoren den zu untersuchenden Bruch in diejenige Gestalt, in welcher alle seine Zähler $+1$ werden, und bilde aus den dadurch erhaltenen Theilnennern durch Addition eine Reihe: wenn diese convergirt, so divergirt der Bruch, und wenn sie divergirt, so convergirt er." Auf denselben Satz ist etwas später *Stern* in Göttingen in einer vom October 1847 datirten und Ende 1848 im 38. Band von Crelle's Journal (Nr. 12(erschienenen Abhandlung**) gelangt: auch er hat seine Betrachtung auf die bezeichnete einfachste Classe von Kettenbrüchen eingeschränkt, und es ist mir nicht bekannt, dass seitdem etwas weiteres in ähnlicher Richtung geleistet worden wäre. Eine allgemeine Untersuchung dieser Brüche stösst nämlich auf die Schwierigkeit, dass man im Voraus nicht einmal eine allgemeine Kenntniss von dem Gange der Näherungsbrüche hat, von welchen man entscheiden soll, ob sie sich zuletzt einer bestimmten Grenze anschliessen. Ist eine Reihe vorgelegt, deren Convergenz beurtheilt werden soll, so sieht man schon aus den blosen Vorzeichen ihrer Glieder, ob die Summen von immer wachsenden Anzahlen derselben zuletzt beständig zu- oder abnehmen oder schwanken, und die Unterscheidung dieser Fälle gewährt eine wesentliche Erleichterung. Ganz ähnlich ist das Verhalten continuirlicher Producte: in den meisten

*) „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Kettenbrüche." München 1846.

**) „Ueber die Kennzeichen der Convergenz eines Kettenbruchs."

Fällen sieht man ganz unmittelbar, ob zuletzt die Factoren, aus welchen sich dieselben zusammen setzen, grösser oder kleiner als Eins sind, und welchen Gang in Folge dessen die Producte einer wachsenden Factorenzahl zuletzt nehmen. Dagegen hängt das Verhalten eines Kettenbruchs bei gleicher Einfachheit der Grössen, aus welchen er sich zusammensetzt, von ungleich complicirteren Umständen ab: hat man nicht einen solchen der vorhin bezeichneten allereinfachsten Classe vor sich, so muss man sich erst nach besondern Kriterien umsehen, um auch nur einigermassen beurtheilen zu können, in welcher Weise seine Näherungsbrüche zuletzt fortschreiten. Einiges was hiemit zusammenhängt, soll in dem Folgenden mitgetheilt werden: weil es aber in dem *allgemeinen* Falle kaum möglich scheint, etwas weiter vorzudringen, so werden den hauptsächlichsten Gegenstand der vorliegenden Arbeit hernach solche Brüche ausmachen, die bei negativen Partialzählern positive Partialnenner haben: diese bilden gewissermassen die Normalklasse, denn Reihen von Grössen, die zuletzt immer in Einem Sinne fortschreiten, führen auf solche Brüche, doch sind auch gewisse andere Reihen durch Brüche derselben Art repräsentirt.

1.

Es sei angenommen, der vorgelegte Kettenbruch sei folgender:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_m}{b_m + \cfrac{a_{m+1}}{b_{m+1} + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}}$$

(wobei $m < n$)
das von b_m bis b_n (beide inclusive) reichende Stück desselben sei bezeichnet mit $v_{m,n}$:

1) $$v_{m,n} = b_m + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}}$$

bei welcher Bezeichnung ich mir erlauben werde, den ersten Index (m) alsdann wegzulassen, wenn derselbe $= 0$ ist, so dass der ganze Bruch nach Belieben mit $v_{0,n}$ oder blos v_n bezeichnet werde. Verwandelt man den Kettenbruch $v_{m,n}$ nach dem gewöhnlichen Algorithmus, also ohne Einführung unnöthiger Factoren, in einen ihm gleichen gemeinen Bruch, so möge der Zähler des letzteren mit $Z_{m,n}$, sein Nenner mit $N_{m,n}$ bezeichnet sein, so dass

2) $$v_{m,n} = \frac{Z_{m,n}}{N_{m,n}}$$

wobei die Grössen Z und N sich recurrirend berechnen aus den Gleichungen

3) $$\left\{\begin{array}{l} Z_{m,n+1} = b_{n+1}\, Z_{m,n} + a_{n+1}\, Z_{m,n-1} \\ N_{m,n+1} = b_{n+1}\, N_{m,n} + a_{n+1}\, N_{m,n-1} \end{array}\right.$$

mit Hilfe von vier Anfangswerthen

4) $$\left\{\begin{array}{lll} Z_{m,m-1} = 1 & ; & Z_{m,m} = b_m \\ N_{m,m-1} = 0 & ; & N_{m,m} = 1 \end{array}\right.$$

wobei übrigens auch allgemein ist:

5) $$N_{m,n} = Z_{m+1,n}$$

Bei den Z und N werde ich ebenso wie bei v nur den zweiten Index schreiben, wenn der erste $= 0$ ist:

$$Z_n = Z_{0,n} \quad ; \quad N_n = N_{0,n}$$

Als Folge der Gleichungen 3) ergibt sich die bekannte Relation

6) $Z_{m,n+1} N_{m,n} - Z_{m,n} N_{m,n+1} = (-1)^{n-m} a_{m+1} a_{m+2} a_{m+3} \ldots a_{n+1}$

und aus dieser wieder, speciell für den Fall $m = 0$, die nachstehenden

7) $$v_{n+1} - v_n = (-1)^n \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n+1}}{N_n N_{n+1}}$$

und

8) $$v_{n+1} = b_0 + \frac{a_1}{N_0 N_1} - \frac{a_1 a_2}{N_1 N_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{N_2 N_3} - \ldots + (-1)^n \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{N_n N_{n+1}}$$

Durch die letztere Gleichung wird der Kettenbruch verwandelt in eine Reihe, welche man ihm *äquivalent* nennen kann, in so ferne nicht nur die Summe der ganzen Reihe dem Werthe des vollständigen Bruches gleich ist, sondern auch die Summen von einem, 2, 3, 4 u. s. w. Gliedern der Reihe alle consecutiven Näherungsbrüche $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots$ wiedergeben. Weil indessen das allgemeine Glied der Reihe nur in Ausnahmsfällen explicite hergestellt werden kann, so ist damit die Untersuchung des Bruches im Allgemeinen keineswegs auf die Theorie der Reihen zurückgeführt.

Ist irgend ein Kettenbruch vorgelegt, so bieten sich hauptsächlich zweierlei Methoden zu seiner Umgestaltung in einer andern dar. Die erste derselben lässt nicht nur den Werth des ganzen Bruches, sondern auch alle seine einzelnen Näherungsbrüche unverändert: sie besteht nämlich einfach in der Multiplication der einzelnen Zähler und Nenner mit willkührlichen Factoren A, die nur nicht Null und nicht Unendlich sein dürfen:

9) $$v_n = b_0 + \cfrac{1.A_1 a_1}{A_1 b_1 + \cfrac{A_1 A_2 a_2}{A_2 b_2 + \cfrac{A_2 A_3 a_3}{A_3 b_3 + \cdots + \cfrac{A_{n-1} A_n a_n}{A_n b_n}}}}$$

Bezeichnet man momentan mit $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{N}$ die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche des so umgestalteten Kettenbruchs, so hat man dabei

$$9^*)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_r = A_1 A_2 \ldots A_r Z_r \\ \mathfrak{N}_r = A_1 A_2 \ldots A_r N_r \end{cases}$$

woraus sich, um dies im Vorbeigehen zu bemerken, auch ergibt, dass in der Form 9) *jeder Kettenbruch* enthalten ist, der mit dem ursprünglich vorgelegten dieselbe Reihe von Näherungsbrüchen hat, oder ihm äquivalent ist.

Das Factorensystem $A_1, A_2 \ldots A_n$ kann benützt werden, um, der vollen Allgemeinheit unbeschadet, das Willkührliche in der Form eines Kettenbruches zu beseitigen, indem man jeden auf eine beliebig gewählte Normalform reducirt. Man könnte den Gedanken haben, zu dieser Form eine derjenigen besondern Gestalten zu wählen, aus welcher der Bruch sich in eine vollständig angebbare Reihe verwandeln lässt, (welches am einfachsten dann geschieht, wenn die $N_0, N_1, N_2 \ldots$ in Gl. 8. sämmtlich $= 1$ gemacht werden); ein solcher Versuch wird indess durch den Umstand vereitelt, dass die Bestimmung der A gemäss der angedeuteten Bedingung zwar immer möglich ist, aber diese Factoren sich dabei selbst nur durch Kettenbrüche immer zunehmender Gliederzahl ergeben, so dass man sich nur in einem Cirkel bewegen und aus dem Gebiete, in welchem man sich einmal befindet, nicht hinauskommen würde. Man kann daher keine passendere Wahl der Factoren A treffen, als diejenige, durch welche die Zähler des Bruches in 9) sämmtlich auf Eins gebracht werden: die *negative* Einheit empfiehlt sich dabei vor der positiven durch verschiedene Rücksichten, von welchen die Betrachtung, dass mit $a = +1$, nicht wie mit $a = -1$ die alternirenden Zeichen der Reihe 8) in gleiche Zeichen übergehen, die zunächst sich darbietende, aber nicht die erheblichste ist*). Die Be-

*) Wichtiger ist schon die Bemerkung, dass, wenn alle Partialzähler auf ne-

stimmung der A, durch welche alle Zähler des umgeformten Bruches 9) zu — 1 werden, ist enthalten in den Gleichungen:

$$10)\ A_{2r-1} = -\frac{1 . a_2 a_4 \ldots a_{2r-2}}{a_1 a_3 a_5 \ldots a_{2r-1}}\ ;\ A_{2r} = +\frac{a_1 a_3 \ldots a_{2r-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2r}},$$

welche immer brauchbare Werthe geben, da die Ausnahmsfälle, wo eines der a mit endlichem Index o oder unendlich wäre, ohnehin keine Untersuchung erheischen. Man kann daher, ohne von der Allgemeinheit etwas aufzuopfern, annehmen, dass alle Theilzähler des vorgelegten Kettenbruches auf den Werth — 1 gebracht seien; diese Gestalt des Bruches werde ich im Folgenden zur Abkürzung seine *reducirte Form* nennen.

Eine zweite Art von Transformation eines gegebenen Kettenbruches v besteht in der Ableitung eines andern V, dessen einzelne Näherungsbrüche V_0, V_1, V_2 . . . nicht wie bei der ersten Art *allen* Näherungsbrüchen v_0, v_1, v_2 . . . des ursprünglichen der Reihe nach gleich sind, sondern nur bestimmte ausgewählte unter denselben wiedergeben, so dass z. B. sei $V_0 = v_m$, $V_1 = v_p$, $V_2 = v_q$, $V_3 = v_r$, etc., wo $m < p < q < r < \ldots$ Einen Bruch V, welcher in solchem Zusammenhange mit v steht, kann man einen aus dem letztern *contrahirten* nennen: es ist leicht Formeln abzuleiten, welche zur Ausführung solcher Zusammenziehung dienen. Weil nämlich allgemein der Bruch $v_{h,k}$ übergeht in den vollständigen $v_{h,x}$ (dessen Näherungsbruch er ist)

---

gative Werthe gebracht sind, ein positives Increment. an irgend einem der Partialnenner angebracht, immer auch eine positive Aenderung des Bruches selbst erzeugt, so lange er nur bei der Variation des Nenners nicht durch das Unendliche geht. Man hat nämlich immer die leicht zu erweisende Differentialgleichung:

$$\frac{dv_{m,p}}{db_n} = (-1)^{n-m}\ a_{m+1}\, a_{m+2} \ldots a_n \left(\frac{N_{n,p}}{N_{m,p}}\right)^2 \text{wenn } m < n < p$$

wenn man an die Stelle von b_k treten lässt $b_k + \frac{a_{k+1}}{v_{k+1,\infty}}$, so hat man

$$v_{h,\infty} = \frac{\left(b_k + \frac{a_{k+1}}{v_{k+1,\infty}}\right) Z_{h,k-1} + a_k Z_{h,k-2}}{\left(b_k + \frac{a_{k+1}}{v_{k+1,\infty}}\right) N_{h,k-1} + a_k N_{h,k-2}} = \frac{Z_{h,k} + Z_{h,k-1}\frac{a_{k+1}}{v_{k+1,\infty}}}{N_{h,k} + N_{h,k-1}\frac{a_{k+1}}{v_{k+1,\infty}}}$$

$$= v_{h,k} + \frac{(-1)^{k-h}\, a_{h+1}\, a_{h+2}\, a_{h+3} \ldots a_{k+1} : N_{h,k}^2}{\frac{N_{h,k-1}}{N_{h,k}}\, a_{k+1} + v_{k+1,\infty}}$$

Setzt man hier nach und nach für h und k zusammengehörige Werthe aus den beiden Reihen

für h	für k
o	m
m + 1	p
p + 1	q
q + 1	r
etc.	etc.

und wendet jede folgende Gleichung dieser Art auf den Ausdruck zur Rechten in der vorhergehenden an, so wird dadurch der gegebene Bruch in einen solchen transformirt, in welchem an die Stelle von b_0, b_1, b_2, b_3 . . . die Grössen treten:

11) $v_{o,m}$

$\frac{N_{o,m-1}}{N_{o,m}} a_{m+1} + v_{m+1,p}$

$\frac{N_{m+1,p-1}}{N_{m+1,p}} a_{p+1} + v_{p+1,q}$

$\frac{N_{p+1,q-1}}{N_{p+1,q}} a_{q+1} + v_{q+1,r}$

etc.,

während gleichzeitig die a_1, a_2, a_3 . . durch folgende Ausdrücke ersetzt werden:

$$(-1)^m a_1 a_2 a_3 \ldots a_{m+1} : N^2_{0,m}$$
$$(-1)^{p-m-1} a_{m+2} a_{m+3} \ldots a_{p+1} : N^2_{m+1,p}$$
$$(-1)^{q-p-1} a_{p+2} a_{p+3} \ldots a_{q+1} : N^2_{p+1,q}$$
etc.

Die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche V_0, V_1, V_2, V_3, . . . dieses neuen Bruches werden alsdann, wie gefordert, den Gleichungen genügen:

$$V_0 = v_m \;,\quad V_1 = v_p \;,\quad V_2 = v_q \;,\quad V_3 = v_r \text{ etc.}$$

In jedem besondern Falle der Anwendung sind für die in 11) rechts noch vorkommenden Grössen N und v ihre Werthe, ausgedrückt durch die a und b, zu setzen, was keine Schwierigkeit hat, da diese Grössen nur mit einer beschränkten Anzahl von Gliedern zu bilden sind. Uebrigens geben die Ausdrücke 11) nur Einen von den unendlich vielen continuirlichen Brüchen, welche die gestellten Bedingungen erfüllen; um den allgemeinsten Ausdruck eines solchen Bruches zu erhalten, müsste man noch, nach Analogie der Gl. 9) den einzelnen Theilzählern und Nennern beliebige Factoren A beifügen.

Wenn es sich um Convergenzuntersuchungen handelt, so darf (im Gegensatz gegen die erste Art der Umformung) die Zusammenziehung eines Kettenbruches in einen andern offenbar nur mit gewissen Cautelen angewandt werden, denn da zur Convergenz erforderlich ist, dass zuletzt *alle* Näherungsbrüche sich einer bestimmten Grenze nähern, der contrahirte Bruch aber nur mehr eine Auswahl der Näherungsbrüche in sich schliesst, so ist es sehr möglich, dass dieser convergirt, während der ursprüngliche divergirte; ganz ebenso wie etwa die divergirende Reihe:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \ldots$$

in die convergirende übergehen würde,

$$-\frac{1}{2.3} - \frac{1}{4.5} - \frac{1}{6.7} - \ldots$$

wenn man sich erlauben wollte, je zwei aufeinanderfolgende Glieder der erstern zu Einem zu vereinigen.

2.

In vielen Fällen wird die Untersuchung des Verhaltens eines Kettenbruches bequemer, wenn man zu ihrem Gegenstande zunächst nicht den ganzen vorgelegten Bruch macht, sondern seine Ergänzung, von irgend einer beliebigen Stelle an. Bezeichnet man die Ergänzung, welche zu b_m in dem Bruche $v_{0,m}$ hinzugefügt aus diesem den vollständigen Bruch $v_{0,\infty}$ macht, mit E_{m+1}, so dass E_{m+1} gleichbedeutend ist mit $\frac{a_{m+1}}{v_{m+1,\infty}}$, so findet zwischen $v_{0,m}$, $v_{0,\infty}$ und E_{m+1} eine sehr einfache Beziehung statt, welche in derselben Gleichung ausgesprochen ist, die in §. 1 zur Ableitung der Transformationsformel 11) gedient hat. Wenn man nämlich in dieser Gleichung anstatt h . . o, anstatt k . . m und anstatt $v_{k+1,\infty}$ . . . $\frac{a_{m+1}}{E_{m+1}}$ schreibt, so erhält man sogleich:

$$12)\quad v_{0,\infty} - = v_{0,m} (-1)^m a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \frac{E_{m+1}}{N_m (N_m + N_{m-1} E_{m+1})}$$

welche Gleichung natürlich auch richtig ist, wenn E selbst nicht in's Unendliche fortläuft, sondern irgendwo abbricht, wo dann unter $v_{0,\infty}$ ebenfalls der abbrechende Bruch zu verstehen ist, welcher mit E gleiches Ende hat. Denkt man sich, dass E auf irgend eine Weise verändert werde um $\triangle E$ (etwa in Folge einer Verlängerung die man ihm selbst an seinem Schlusse hinzufügt) so wird der eben bezeichnete Bruch eine correspondirende Aenderung $\triangle v$ annehmen, welche sich aus Gl. 12) in folgender Art ergibt:

$$13)\ \triangle v = (-1)^m a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \frac{\triangle E}{(N_m + N_{m-1} E_{m+1})(N_m + N_{m-1} E_{m+1} + N_{m-1} \triangle E)}$$

In Bezug auf die Convergenz oder Divergenz kann E ein dreifaches Verhalten zeigen: 1) es kann bei wachsender Gliederzahl sich einem bestimmten Werthe nähern: alsdann wird nach Gl. 12) auch der mit früheren Gliedern a und b anfangende und ebensoweit als E fortlaufende Bruch $v_{0,\infty}$ dasselbe thun, so ferne nicht zufällig der Grenzwerth von $E = -\frac{N_m}{N_{m-1}}$ ist, in welchem Ausnahmsfall v zuletzt Werthe annimmt, welche ausserhalb aller endlichen Schranken fallen; — 2) es kann E selbst zuletzt unendlich werden; alsdann wird $v_{0,\infty}$ offenbar zuletzt den Grenzwerth annehmen $= v_{0,m-1}$, also convergent sein mit Ausnahme des besondern Falls $N_{m-1} = 0$; — endlich kann 3) E bei immer wachsender Gliederzahl zuletzt regellos hin und her schwanken; — alsdann wird v sich ebenso verhalten.

Es treten sich also zwei Hauptfälle gegenüber:

α) Convergenz oder auch Divergenz gegen $\pm\infty$

β) oscillirende Divergenz (Fall 3.)

von der Geltung, dass jederzeit der ganze Bruch v sich in demselben dieser beiden Fälle befindet, wie seine von irgend einer Stelle an genommene Ergänzung E; hat man bei der letzteren den Hauptfall α, so ist eine sehr grosse Wahrscheinlichkeit für die *Convergenz* des ganzen Bruchs vorhanden, indem die Divergenz nur Folge der Erfüllung ganz specieller Gleichungen sein kann. Die Divergenz gegen $\pm\infty$ erscheint daher bei

Kettenbrüchen (anders als bei Reihen) da wo sie vorkommt als etwas Zufälliges: sie macht sofort der Convergenz Platz, wenn ein Einziges der a oder b verändert, oder wenn dem Bruche an seinem Anfang ein Glied beigefügt oder weggenommen wird. In den meisten Fällen wird es, wenn einmal constatirt ist, dass man sich im Hauptfalle α befindet, nicht schwer sein nachzuweisen, dass die Bedingungen der Divergenz gegen $\pm\infty$ nicht zutreffen.

In Folge des Umstandes, dass die Kettenbruchform dieser Art der Divergenz nicht günstig ist, können bei solchen Brüchen auffallende Discontinuitäten zum Vorschein kommen. Verwandelt man z. B. die Reihe

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

in einen ihr äquivalenten Bruch (etwa nach Gl. 8), indem man der Einfachheit wegen alle N = 1 macht,) so erhält man

$$\cfrac{x}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x + \cfrac{\frac{2}{3}x}{1 - \frac{2}{3}x + \cfrac{\frac{3}{4}x}{1 - \frac{3}{4}x + }}}}$$

Nun ist die Reihe = log. $(1 + x)$, so lange $x^2 < 1$ ist, den Fall $x = + 1$ eingeschlossen; wird hingegen $x > 1$, so divergirt die Reihe gegen ∞, indem nämlich, wenn dabei x negativ ist (den Fall -1 eingeschlossen) der beständig negative Zahlenwerth ihrer Summe ohne Ende wächst, während, wenn x positiv und > 1 ist, zuletzt die Summen von ungeraden Anzahlen ihrer Glieder über jede positive Grösse hinaus fortwährend steigen, während die Summen von geraden Glieder-

Anzahlen unter jede negative Grösse herab sinken. Identisch denselben Gang haben in allen Fällen die Näherungsbrüche des Kettenbruches, welcher der Reihe gleichgeltend ist; die Divergenz gegen unendliche Werthe, welche demnach auch hier auftreten muss, wenn $x^2 > 1$ ist, kann aber nur dadurch hervorgebracht werden, dass der Bruch

$$\cfrac{\frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x + \cfrac{\frac{2}{3}x}{1 - \frac{2}{3}x + \cfrac{\frac{3}{4}x}{1 - \frac{3}{4}x + \ldots}}}$$

gegen die constante Grenze -1 convergirt, wenn $x = -1$ oder $x^2 > 1$ ist, während derselbe Bruch nach der variablen Grenze $\frac{x}{\log.(1+x)} - 1$ convergirt, so oft $x^2 < 1$ ist, den Fall $x = +1$ eingeschlossen. Bei dem Uebergange von $x = +1$ auf Werthe, die um beliebig wenig grösser sind, findet in dem Gange der Function, die durch den *immer convergirenden* Bruch ausgedrückt ist, ein plötzlicher Sprung von dem Betrage $\frac{1}{\log. 2}$ Statt. Sollen bei Reihen ähnliche Erscheinungen zu Tage kommen, so müssen bekanntlich die einzelnen Glieder derselben ungleich complicirtere Functionen von x sein, als hier die Partialzähler und Nenner sind, aus welchen der Bruch constituirt ist. Uebrigens versteht es sich, dass hier, ähnlich wie bei den Reihen, die Discontinuität nur dadurch möglich wird, dass in der unmittelbaren Nachbarschaft des Werthes $x = 1$ Werthe von x angebbar sein müssen, für welche der Index m, bis zu welchem man bei der Berechnung des Bruches fortgeschritten sein muss, um seinem Grenzwerth bis auf höchstens die kleine aber bestimmte Grösse ϱ nahe gekommen zu sein, grösser ist, als eine beliebig grosse Zahl M*).

3.

Wenn eine beliebige Reihe von reellen Grössen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ gegeben ist, so kann man vermittelst Gl. 7) sofort einen Kettenbruch aufstellen, welcher diese v zu Näherungsbrüchen hat. Man hat dabei noch eine Willkühr, vermöge deren man etwa die a wählen, sie z. B. $= -1$ setzen kann; die Gleichung 7) ergibt dann der Reihe nach die Werthe der N, mit Hilfe deren man aus der 2ten Gl. in 3) die b findet. Zwischen den Vorzeichen der b und zwischen dem steigenden oder sinkenden Gange der v findet dabei ein sehr einfacher Zusammenhang statt, welcher ausgesprochen ist in der aus 3) und 7) hervorgehenden Gleichung:

$$14) \qquad b_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n+1}}{N_n N_n} \left\{ \frac{1}{v_{n-1} - v_n} + \frac{1}{v_n - v_{n+1}} \right\}$$

Am elegantesten stellt sich diese Relation dar, wenn alle $a = -1$ angenommen werden, also wenn der Kettenbruch in reducirter Form verlangt wird; für diesen Fall lässt sich in Worten die folgende Regel aufstellen: *Um das Vorzeichen von* b_{n+1} *zu bestimmen, nehme man von den beiden Intervallen* $v_{n-1} \ldots v_n$ *und* $v_n \ldots v_{n+1}$ *das kleinere: ist dieses sinkend, so ist* b_{n+1} *positiv, ist es aber steigend, negativ.* $b_0 = v_0$ ist die einzige dieser Grössen, auf welche die Regel nicht passt; auf b_1 kann sie ausgedehnt werden, wenn man das Intervall $v_{-1} \ldots v_0$ als unendlich gross ansieht. ($v_{-1} = \frac{Z_{-1}}{N_{-1}} = \frac{1}{0}$).

---

*) Vergl. meine „Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen," Bd. V. Abth. II. dieser Denkschriften.

Wenn man sich alle möglichen Kettenbrüche erst in die reducirte Form gebracht denkt, und hierauf in *Classen* in der Weise abgetheilt, dass bei allen Brüchen derselben Classe die Aufeinanderfolge der Zeichen der Partialnenner b dieselbe sei, so erweist sich jetzt unmittelbar, dass es keine privilegirte Classe gibt, welche entweder nur convergirende oder nur divergirende Brüche in sich schlösse. Denn man kann sogleich nach Belieben convergirende oder divergirende Brüche aufstellen, welche in irgend eine vorgeschriebene Classe gehören. Um das Erstere zu thun, denke man sich irgend eine convergirende Reihe

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots$$

deren Glieder sämmtlich positiv sein und beständig abnehmen mögen:

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \cdots \qquad > 0$$

wähle hierauf eine Grösse v_0, die dasselbe Vorzeichen hat, welches b_0 haben soll, und bilde v_1, v_2, $v_3 \ldots$ indem man setze

$$\begin{aligned} v_0 - v_1 &= \pm \varrho_1 \text{ je nachdem } b_1 \pm \text{ sein soll} \\ v_1 - v_2 &= \pm \varrho_2 \text{ je nachdem } b_2 \pm \text{ sein soll} \\ v_2 - v_3 &= \pm \varrho_3 \text{ je nachdem } b_3 \pm \text{ sein soll} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Die auf solche Weise berechneten v werden Näherungsbrüche eines Kettenbruches sein, dessen b, zufolge der obigen Regel, wirklich die vorgeschriebenen Zeichen erhalten; zugleich wird dieser Bruch sicherlich convergiren, denn es ist für ihn

$$v_m = v_0 \pm \varrho_1 \pm \varrho_2 \pm \varrho_3 \pm \cdots \pm \varrho_m$$

welche Reihe, in's Unendliche fortgesetzt, selbst dann convergirt, wenn alle ihre Glieder gleiches Zeichen haben.

Auf ganz ähnliche Weise wird das Vorhandensein divergirender Brüche in jeder Classe bewiesen, indem man statt der ϱ sich eine Reihe positiver Grössen σ denkt, von der Art, dass

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \cdots > s$$

wo s eine positive von Null verschiedene Grösse vorstellt, so dass die Reihe

$$\pm \sigma_1 \pm \sigma_2 \pm \sigma_3 \pm \ldots .$$

in allen Fällen divergent sein muss.

Man könnte geneigt sein, statt solcher Grössen σ, hier eine Reihe von Grössen τ zu Grunde zu legen, von der Art, dass

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \ldots .$$

Wenn der Versuch gelänge, in allen Fällen die Unterschiede der consecutiven v der Grösse nach solchen τ gleich zu machen, und dabei ihre Vorzeichen so zu bestimmen, wie es der Regel über die Zeichen angemessen ist, so wäre damit bewiesen, dass es in jeder Classe von Kettenbrüchen nicht nur überhaupt divergirende gäbe, sondern sogar solche, bei welchen die Unterschiede der Näherungsbrüche immer grösser werden. Der Umstand, an welchem dieser Versuch in der That scheitert, führt auf eine nicht uninteressante Bemerkung. Damit nämlich nach der obigen Regel bei immer wachsenden Intervallen der v die im Voraus bestimmten Zeichen der b sich richtig ergeben, müsste man hier machen:

$$\left\{\begin{array}{l} v_0 - v_1 = \pm \tau_1 \text{ je nachdem } b_1 \pm \text{ sein soll} \\ v_0 - v_1 = \pm \tau_1 \text{ je nachdem } b_2 \pm \text{ sein soll} \end{array}\right.$$
$$v_1 - v_2 = \pm \tau_2 \text{ je nachdem } b_3 \pm \text{ sein soll}$$
$$v_2 - v_3 = \pm \tau_3 \text{ je nachdem } b_4 \pm \text{ sein soll}$$
etc.

Es treten also für das Vorzeichen von $v_0 - v_1$ zwei Bedingungen auf, welche einander widersprechen, im Falle für b_1 und b_2 verschiedene Zeichen vorgeschrieben sind. Man könnte die doppelte Bestimmung des Zeichens auf das nächstfolgende Intervall wälzen, und dabei doch zuletzt stets wachsende Unterschiede behalten, wenn man die immer positiven τ eine Reihe dieser Art bilden liesse:

$$\tau_1 > \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 < \ldots$$

wird aber hier auf dasselbe Hinderniss stossen, wenn auch b_2 und b_3 verschiedene Zeichen haben. Es bleibt nun wieder die Zuflucht zum nächsten Intervall, und von diesem zum nachfolgenden, und so ferner: kurz, wenn b_r und b_{r+1} das erste Paar consecutiver b sind, welche gleiches Zeichen erhalten sollen (das Paar b_0, b_1 ausgeschlossen), so denke man sich die positiven Grössen τ so angeordnet, dass

$$\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \ldots > \tau_r < \tau_{r+1} < \tau_{r+2} < \ldots$$

ist, und mache, nachdem für v_0 eine Grösse von dem Vorzeichen von b_0 gewählt worden ist:

$$\begin{array}{llllll}
 & v_0 - v_1 = \pm \tau_1 & \text{je} & \text{nachdem} & b_1 \pm & \text{sein soll} \\
 & v_1 - v_2 = \pm \tau_2 & „ & „ & b_2 \pm & „ \quad „ \\
 & v_2 - v_3 = \pm \tau_3 & „ & „ & b_3 \pm & „ \quad „ \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{l} v_{r-1} - v_r = \pm \tau_r \\ v_{r-1} - v_r = \pm \tau_r \end{array} & \begin{array}{l} „ \\ „ \end{array} & \begin{array}{l} „ \\ „ \end{array} & \begin{array}{l} b_r \pm \\ b_{r+1} \pm \end{array} & \begin{array}{l} „ \quad „ \\ „ \quad „ \end{array} \\
 & v_r - v_{r+1} = \pm \tau_{r+1} & „ & „ & b_{r+2} \pm & „ \quad „ \\
 & v_{r+1} - v_{r+2} = \pm \tau_{r+2} & „ & „ & b_{r+3} \pm & „ \quad „
\end{array}$$

es werden dann $v_0, v_1, v_2 \ldots$ Näherungsbrüche eines Kettenbruches der geforderten Classe, welcher nicht bloss divergirt, sondern zuletzt fortwährend (und wenn man will über alle Grenzen) wachsende Unterschiede der v gibt. Nur in dem Einen Fall kann ein solcher Bruch nicht gebildet werden, wenn in der Reihe der Grössen $b_1, b_2, b_3 \ldots$ nirgends zwei auf einander folgende von gleichem Vorzeichen sich befinden, d. h. wenn ein Bruch verlangt wäre, bei welchem, wenn er in die reducirte Gestalt gebracht ist, die Zeichen der Theilnenner beständig alterniren. Es ist dabei wesentlich einerlei, ob der erste von ihnen (b_1) positiv oder negativ sein soll, denn nach Gl. 9) kann der eine Fall auf den andern zurückgeführt werden, indem man alle $A = -1$ setzt und die Gleichung mit -1 multiplicirt. Auch sieht man, dass die Brüche dieser ausgezeichneten Classe (nöthigenfalls nachdem sie mit -1 multiplicirt worden sind) dieselben sind, welche sich, wenn man die reducirte Form verlässt, mit lauter positiven Partial-Zählern und Nennern schreiben lassen, denn macht man in 9) die A abwechselnd $= -1$ und $= +1$, so werden, wenn zuvor alle a negativ waren und die b alternirende Zeichen hatten, jetzt alle Zeichen positiv werden. Die bekannte Eigenschaft dieser am häufigsten betrachteten Classe von Kettenbrüchen, wornach zwar auch in ihr Divergenz möglich ist, aber doch die stärkste Art derselben, nämlich zuletzt beständiges Wachsen der Unterschiede der Näherungsbrüche nicht vorkommen kann, — bildet demnach eine Auszeichnung, welche dieser Classe allein vor allen übrigen zukommt.

Nach dieser begünstigten Categorie, für welche die Untersuchung der Convergenz oder Divergenz allgemein auf diejenige von Reihen zurückgeführt ist, haben den nächsten Anspruch auf unsere Betrachtung die Kettenbrüche, welche in ihrer reducirten Gestalt entweder nur positive oder nur negative Theilnenner haben. Ich werde annehmen, sie seien positiv: der entgegengesetzte Fall kann auf diesen zurückgeführt werden nach Gl. 9), indem man alle $A = -1$ setzt und den ganzen Bruch mit -1 multiplicirt. Nach dem Gesetze, welches bei Brüchen von reducirter Form für die Zeichen der b gilt, ist es leicht anzugeben, welchen Gang die Näherungsbrüche eines solchen Kettenbruches möglicher Weise haben können (s. Gl. 14): die Norm bildet ein regelmässiges Sinken, dasselbe kann aber an beliebigen Stellen durch ein Steigen unterbrochen sein, mit der Beschränkung, dass nie zwei steigende Intervalle auf einander folgen dürfen ($v_{n-1} - v_n$ und $v_n - v_{n+1}$ nicht gleichzeitig negativ), und dass, wo ein solches vorkommt, dasselbe grösser sein muss, als jedes der beiden sinkenden, zwischen welchen es sich befindet*). Reihen mit nur negativen Gliedern sind also

*) Die Worte „sinkend“ und „steigend“ wären mit einander zu vertauschen.

Kettenbrüchen dieser Classe äquivalent; Reihen mit ausschliesslich positiven Gliedern eben solchen mit — 1 multiplicirt; aber Brüche der nämlichen Art können auch ganz verschiedene Reihen repräsentiren, z. B. solche, deren Glieder abwechselnd negativ und positiv sind, und wo jedes positive grösser ist, als die beiden negativen, zwischen welchen es steht, so dass sie, um es so auszudrücken, einen terrassenartigen Gang zeigen. So kann es auch vorkommen, dass die v zuletzt sich *verschiedenen* Grenzen nähern, (oder auch wohl denselben völlig gleich werden) je nachdem ihre Indices, durch irgend eine bestimmte ganze Zahl p dividirt, verschiedene Reste lassen (welches ein besonderer Fall einer Art von periodischer Divergenz sein würde) u. s. w. Bei einem so weiten Felde der Möglichkeiten wird es passend sein, sich nach weiteren Hilfsmitteln umzusehen, welche wenigstens in gewissen Hauptfällen etwas nähere Anhaltspunkte für die Beurtheilung des Fortgangs des Bruches bieten.

4.

Ist ein Kettenbruch in reducirter Form vorgelegt

$$v = b_0 - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cdots}}$$

welcher gleichgeltend ist mit der Reihe

$$v_0 - (v_0 - v_1) - (v_1 - v_2) - \ldots$$

$$= b_0 - \frac{1}{N_0 N_1} - \frac{1}{N_1 N_2} - \frac{1}{N_2 N_3} - \ldots$$

15) $$= b_0 + g_1 + g_2 + g_3 + \ldots$$

---

wenn $a_1 = + 1$ und nur die folgenden $a = - 1$ wären. oder. was dasselbe ist, wenn man sich den ganzen Bruch mit — 1 multiplicirt denkt.

so kann man zwar, der Weitläufigkeit der erforderlichen Operationen wegen, das allgemeine Glied g_m dieser Reihe nicht explicite, durch die b ausgedrückt, herstellen, doch lässt sich eine gewisse Combination von drei auf einander folgenden Gliedern leicht auf die gegebenen Grössen zurückführen, und gibt dadurch eine Grundlage für gewisse Schlüsse. Im gegenwärtigen Falle, wo die $a = -1$ sind, hat man nämlich

$$N_{n+1} + N_{n-1} = b_{n+1} N_n$$

ebenso

$$N_n + N_{n-2} = b_n N_{n-1}$$

also

$$b_n b_{n+1} = \left(1 + \frac{N_{n-2}}{N_n}\right) \left(1 + \frac{N_{n+1}}{N_{n-1}}\right),$$

oder auch, weil $\frac{1}{N_{n-1} N_n} = - g_n$ ist, etc.

$$16) \qquad b_n b_{n+1} = \left(1 + \frac{g_n}{g_{n-1}}\right) \left(1 + \frac{g_n}{g_{n+1}}\right)$$

welche Gleichung nur eine Ausnahme erleidet für $n = 0$ oder $n = 1$ in welchen Fällen an ihre Stelle die folgenden treten*):

$$16\,a) \quad \left\{ \begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{g_1} \\ b_1 b_2 &= 1 + \frac{g_1}{g_2} \end{aligned} \right.$$

---

*) Bei einem Kettenbruche, dessen Theilzähler a in irgend einer Weise fixirt sind (z. B. $= -1$ gemacht) sind die Werthe der Producte auf einander folgender b (von der Form $b_n b_{n+1}$) von wesentlicherer Bedeutung als die einzelnen b. Denn man kann nach Gl. 9) mit einem beliebigen Factor gleichzeitig alle b von geradem Index multipliciren und die von ungeradem Index dividiren (oder umgekehrt), wodurch man nur allen Näherungsbrüchen denselben Factor beifügt. Bei dieser Transformation, welche die

Setzt man für den Augenblick die Verhältnisse auf einander folgender Glieder der Reihe

$$\frac{g_n}{g_{n-1}} = \eta_n \qquad ; \frac{g_{n+1}}{g_n} = \eta_{n+1}$$

so steht die Gleichung 16) auch so:

$$b_n\, b_{n+1} = 1 + \eta_n + \frac{1}{\eta_{n+1}} + \frac{\eta_n}{\eta_{n+1}}$$

woraus sich unter Anderm folgendes ergibt:

α) Soll die dem Kettenbruche äquivalente Reihe von irgend einer Stelle an keinen Zeichenwechsel haben, so müssen von hier an alle Producte auf einander folgender b sicherlich grösser sein als 1.

β) Sollen gleichzeitig die Glieder der Reihe zuletzt immer abnehmen, so müssen die $b_n\, b_{n+1}$ grösser sein als 2 (weil $\frac{1}{\eta_{n+1}}$ hier ein unechter Bruch ist).

γ) Dasselbe muss der Fall sein, wenn die Glieder der Reihe zuletzt immer zunehmen sollen ($\eta_n > 1$).

δ) Sollen die Glieder der Reihe (keinen Zeichenwechsel haben und) zuletzt immer rascher abnehmen, so müssen die $b_n\, b_{n+1}$ grösser sein als 3. ($\frac{1}{\eta_{n+1}}$ und $\frac{\eta_n}{\eta_{n+1}}$ sind hier unechte Brüche).

ε) Dasselbe muss der Fall sein, wenn die Glieder der Reihe zuletzt immer langsamer zunehmen sollen (η_n und $\frac{\eta_n}{\eta_{n+1}}$ unechte Brüche).

ζ) Sind die $b_n\, b_{n+1}$ alle kleiner als $+1$, so können in der Reihe nirgends mehr als zwei aufeinander folgende Glieder gleiches Zeichen haben.

Verhältnisse der v zu einander nicht alterirt, ändern sich alle einzelnen b, während die Producte von je zwei consecutiven ihre Werthe behalten.

Diesen Schlüssen lassen sich einige ähnliche anreihen, welche sich auf anderm Wege ergeben. Setzt man nämlich bei einem Bruche, der bereits in reducirter Form gedacht wird,

17) $$b_{n+1} = 2 + \varepsilon_{n+1} \qquad (\text{für } n > 0)$$

so nimmt die zweite der Gleichungen 3) die Form an

$$N_{n+1} - N_n = (N_n - N_{n-1}) + \varepsilon_{n+1} N_n$$

aus welcher sich sofort auch ergibt

$$N_{n+1} - N_n = N_1 - N_0 + \varepsilon_2 N_1 + \varepsilon_3 N_2 + \varepsilon_4 N_3 + \ldots + \varepsilon_{n+1} N_n$$

oder auch, wenn ε_1 (abweichend von den übrigen ε) durch die Gleichung definirt wird:

17 a) $$b_1 = 1 + \varepsilon_1$$

so hat man

18) $$N_{n+1} - N_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 N_1 + \varepsilon_3 N_2 + \ldots + \varepsilon_{n+1} N_n$$

Hieraus ist sofort klar, dass, wenn in einem vorgelegten Kettenbruche kein negatives ε vorkommt, derselbe auch nur auf positive, und immer zunehmende, N führen kann, d. h. dass in diesem Falle der beständig und immer langsamer sinkende Gang der Näherungsbrüche niemals eine Unterbrechung erleiden wird. Ein solcher Bruch wird zugleich, wenn nicht alle seine $\varepsilon = 0$ sind, convergiren, weil für ihn (zufolge Gl. 18) die Grössen N in der Reihe 8) wenigstens eben so schnell als die Glieder einer arithmetischen Reihe zunehmen.

Ein entgegengesetztes Verhalten ergibt sich, wenn man annimmt, dass von irgend einer Stelle an in dem Bruche keine positiven ε mehr vorkommen, während negative ε, die dabei ihrem absoluten Werthe nach grösser seien als eine (beliebig kleine) Grösse λ immer aufs Neue auftreten sollen, soweit man auch fortgehen mag. In diesem Falle beweist man leicht, dass die Reihe der Grössen N unendlich oft Zeichenwechsel haben muss. Denn wollte man im Gegentheil annehmen, N_p und alle späteren N hätten einerlei Vorzeichen, so würde man, für ein $n > p$, die Gleichung 18) so schreiben können:

$$N_{n+1} - N_n = P + \varepsilon_{p+1} N_p + \varepsilon_{p+2} N_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{n+1} N_n$$

wo P das Aggregat einer Anzahl der ersten Glieder rechts in 18) vorstellt, die beliebig wechselnde Vorzeichen haben könnten, während die Glieder $\varepsilon_{p+1} N_p + \ldots$ der Annahme nach alle einerlei Vorzeichen haben würden. Um die Ausdrücke zu fixiren sei etwa vorausgesetzt, dass N_p und alle spätern N positiv sein mögen. Alsdann wird die Reihe $\varepsilon_{p+1} N_p + \varepsilon_{p+2} N_{p+1} + \ldots$ nur negative Glieder enthalten. Ist nun dabei P positiv, so kann Anfangs diese Grösse die Summe der negativen Glieder, die darauf folgen, überwiegen. So lange dies der Fall ist, werden der Gleichung zufolge die positiven N im Wachsen begriffen sein ($N_{n+1} > N_n$): in Folge dessen müssen, wenn man n immer grösser nimmt, am Ende der Reihe rechts immer aufs Neue Glieder hinzukommen, welche negativ und (abgesehn vom Zeichen) $> \lambda N_p$ sind*). Diese werden bald den positiven Werth von P erschöpft haben, man wird also dahin gekommen sein, dass einmal $N_{n+1} - N_n$ negativ wird. Von diesem Augenblicke an müssen nun (weil $N_{n+2} - N_{n+1}$ noch stärker negativ wird als $N_{n+1} - N_n$) die N immer rascher abnehmen, bis sie durch Null gegangen sind, also, der Annahme zuwider, ein neuer Zeichenwechsel Statt gefunden hat. Dasselbe würde noch schneller eintreten, wenn schon P nicht einerlei Zeichen mit N_p, N_{p+1} etc. hat. Die Abnahme der Zahlenwerthe der N, welche, Einmal aufgetreten, immer rapider werden muss, ist alsdann schon von Anfang an vorhanden.

Das Verhältniss bleibt ganz dasselbe, wenn man die Grössen N_p, N_{p+1}, ... welche hier positiv genannt worden sind, negativ voraus-

*) Wäre N_p zufällig $= 0$, so würde man statt seiner N_{p+1} nehmen, welches nicht gleichzeitig auch 0 sein kann, weil sonst nach Gl. 3) auch schon N_{p-1} und dann auch $N_{p-2}, N_{p-3} \ldots N_0 = 0$ sein müssten.

setzen will; es sind alsdann in dem Beweise nur die Worte „positiv“ und „negativ“ mit einander zu vertauschen. Es ergibt sich also, dass in dem Falle, von welchem die Sprache ist, wirklich unendlich oft ein Zeichenwechsel der Grössen N stattfinden muss. So oft dies der Fall ist, erhält die dem Kettenbruche äquivalente Reihe 8) ein positives Glied oder das Intervall $v_n \ldots v_{n+1}$ ist steigend; weil aber dabei die b als positiv vorausgesetzt werden $(0 < -\varepsilon < 2)$ also nie zwei steigende Intervalle auf einander folgen können (s. §. 3 zu Ende), so wird bei einem Kettenbruch der besprochenen Art der im Allgemeinen sinkende Gang der Näherungsbrüche an unendlich vielen Stellen durch isolirte steigende Intervalle unterbrochen sein.

Man sieht, dass der Werth $b = 2$ eine Art von Scheide abgibt unter den Kettenbrüchen, welche in reducirter Form positive Nenner b haben. Sind von gewisser Stelle an alle $b \geq 2$, so gehört der Bruch zur regulären Classe von solchen, deren Näherungsbrüche immer in Einem Sinne fortgehn; kommen im Gegentheil von irgend einer Stelle an keine $b > 2$ vor, dagegen aber unendlich viele, die *um etwas Endliches* unterhalb 2 liegen, so finden im Fortschritt des Bruches unendlich viele Schwankungen Statt. Der Fall, wo die Partialnenner vermischt bald grösser und bald kleiner als 2 sind, bleibt dabei unberührt, sofern er nicht etwa in einzelnen Beispielen durch alternirendes Multipliciren und Dividiren der Theilnenner mit Ein und derselben Grösse auf einen der beiden bezeichneten zurückgeführt werden kann (Vergl. die Anmerkung zu S. 22). Ein näheres Interesse als dieser ganz unbestimmte Fall nimmt aber die Frage in Anspruch, wie sich solche Brüche verhalten mögen, deren b sich zuletzt von unten her der 2 als Grenze nähern.

5.

Weil die so eben bezeichneten Brüche den Uebergang zwischen den vorher betrachteten Fällen bilden, so wird man im Voraus erwarten, es von der grösseren oder geringeren Geschwindigkeit, mit welcher hier die b der Zahl 2 sich nähern, abhängig zu finden, ob der Bruch ein Verhalten zeigt, welches demjenigen der Brüche mit positivem ε analog ist, oder ein ähnliches wie diejenigen, deren ε negativ sind, ohne sich der Null zu nähern.[1] Diese Vermuthung bestätigt sich, indem es leicht ist, über das Gesetz, nach welchem die b sich der 2 nähern, Annahmen aufzustellen, welche nach Willkühr auf Einen oder den andern der bezeichneten Fälle führen. Betrachtet man z. B. den Bruch, in welchem (wenigstens für alle m, die grösser sind als ein bestimmter Werth μ) die Gleichung Statt finde

$$b_m = 2 - \frac{1}{m} \text{ oder } \varepsilon_m = -\frac{1}{m}$$

so wird leicht bewiesen, dass die Nenner N seiner Näherungsbrüche unendlich oft ihr Zeichen ändern. Denn wenn man annehmen wollte, dass an irgend einer Stelle, z. B. bei dem Uebergange von N_{p-1} auf N_p *zum letztenmal* Zeichenwechsel Statt fände, so würde man, durch Betrachtungen, welche eine beinahe wörtliche Wiederholung des schon im vorigen §. über den ähnlichen Fall Gesagten enthalten würden, sich gezwungen sehen, einen neuen Zeichenwechsel zuzugestehen und so fort. Der gleiche Fall *tritt immer ein,* wenn die b sich der 2 von unten her so langsam nähern, dass die Reihe

$$\varepsilon_m + \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} + \ldots \text{ in inf.}$$

(deren Glieder sämmtlich als negativ und < 2 vorausgesetzt werden) eine divergirende ist: in allen solchen Fällen wird der Gang der Näherungsbrüche des Kettenbruchs, anstatt in Einem Sinne fortzuschreiten, an unendlich vielen Stellen Schwankungen erleiden. Umgekehrt lassen sich aber auch Brüche angeben, deren (negative) ε so rasch abnehmen, dass die Näherungsbrüche ein analoges Verhalten zeigen, wie bei positiven ε. Man nehme etwa an, es sei für alle m, welche einen bestimmten Werth μ überschreiten,

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m^\alpha}$$

und man betrachte (was zufolge des §. 3 erlaubt ist) statt des vollständigen mit b_0 beginnenden Bruches einen solchen, welcher mit einem spätern Index, etwa mit $k-1 > \mu$, anfängt, also den Bruch

$$y_{k-1,\infty} = 2 - \cfrac{\frac{1}{(k-1)^\alpha}}{2 - \cfrac{\frac{1}{k^\alpha}}{2 - \cfrac{\frac{1}{(k+1)^\alpha}}{2 - \cdots}}}$$

Man wird hier haben, wenn $m > k$ ist:

$$\begin{aligned} N_{k-1,m+1} - N_{k-1,m} &= N_{k-1,k} - N_{k-1,k-1} \\ \text{19)} \quad &- \left(\frac{N_{k-1,k}}{(k+1)^\alpha} + \frac{N_{k-1,k+1}}{(k+2)^\alpha} + \ldots + \frac{N_{k-1,m}}{(m+1)^\alpha} \right) \end{aligned}$$

Dabei ist es aus dem Bildungsgesetze des Bruches klar, dass bei positivem α eine Anzahl seiner ersten N jedenfalls positiv ist. *So lange dies bei den rechts in den Klammern stehenden N der Fall ist,* wird der Unterschied $N_{k-1,m+1} - N_{k-1,m}$ für wachsende m entweder negativ werden, oder doch immer kleinere positive Werthe annehmen, demnach werden in der Reihe

$$N_{k-1,k-1}\,,\ N_{k-1,k}\,,\ N_{k-1,k+1}\,,\ N_{k-1,k+2}\,,\ \ldots$$

das dritte Glied und die späteren kleiner sein, als die entsprechenden Glieder der arithmetischen Reihe

$N_{k-1,k-1}\,, N_{k-1,k-1} + \Delta\,,\ N_{k-1,k-1} + 2\,\Delta\,,\ N_{k-1,k-1} + 3\,\Delta$, etc.

wo zur momentanen Abkürzung die positive Grösse $N_{k-1,k} - N_{k-1,k-1}$

$= \Delta$ gesetzt worden ist. Man wird demnach (das Zeichen $>$ algebraisch verstanden) haben:

$$N_{k-1,m+1} - N_{k-1,m} > \Delta - N_{k-1,k-1}\left(\frac{1}{(k+1)^\alpha} + \frac{1}{(k+2)^\alpha} + \frac{1}{(k+3)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(m+1)^\alpha}\right)$$
$$- \Delta \left(\frac{1}{(k+1)^\alpha} + \frac{2}{(k+2)^\alpha} + \frac{3}{(k+3)^\alpha} + \ldots + \frac{m-k+1}{(m+1)^\alpha}\right)$$

oder auch, weil $N_{k-1,k-1} = 1$ ist:

$$N_{k-1,m+1} - N_{k-1,m} > \Delta - \frac{1}{(k+1)^\alpha} - \frac{1}{(k+2)^\alpha} - \ldots - \frac{1}{(m+1)^\alpha}$$
$$- \Delta \left(\frac{k+1-k}{(k+1)^\alpha} + \frac{k+2-k}{(k+2)^\alpha} + \frac{k+3-k}{(k+3)^\alpha} + \ldots + \frac{m+1-k}{(m+1)^\alpha}\right)$$

d. i.

$$N_{k-1,m+1} - N_{k-1,m} > \Delta \left(1 - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+2)^{\alpha-1}} - \ldots - \frac{1}{(m+1)^{\alpha-1}}\right)$$
$$+ (k\Delta - 1)\left(\frac{1}{(k+1)^\alpha} + \frac{1}{(k+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(m+1)^\alpha}\right)$$

Nun ist es bekannt, dass die Reihe

$$\frac{1}{1^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{3^{\alpha-1}} + \ldots \text{ in inf.}$$

convergirt, sobald $\alpha - 1 > 1$ ist; in diesem Fall ist es also möglich, k so gross zu nehmen, dass der Ausdruck

$$1 - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+2)^{\alpha-1}} - \ldots - \frac{1}{(m+1)^{\alpha-1}}$$

beständig positiv bleibt; die Grössen $\Delta = N_{k-1,k} - 1 = 1 - \frac{1}{k^\alpha}$ und $k\Delta - 1 = k - 1 - \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ sind gleichzeitig auch positiv; es ergibt sich also, dass die linke Seite in Gl. 19) nothwendig positiv bleiben muss, wenn die Voraussetzung erfüllt ist, dass die rechts vorkommenden N sämmtlich positiv sind, oder: wenn die Grössen $N_{k-1,k-1}$, $N_{k-1,k}$, $N_{k-1,k+1}$ . . . $N_{k-1,m}$ sämmtlich positiv waren, so wird auch die nächstfolgende $N_{k-1,m+1}$ positiv und dabei grösser als $N_{k-1,m}$. Da nun eine Anzahl der ersten dieser Grössen wirklich gewiss positiv sind, so müssen also auch alle folgenden es sein: es werden also (für $\alpha > 2$) die Näherungsbrüche des hier betrachteten Bruches $v_{k-1,\infty}$ ohne Schwanken immer in Einem Sinne fortgehen. Dasselbe wird, zufolge der in Gl. 13) ausgesprochenen Beziehung zwischen dem Gange irgend eines Kettenbruchs und dem seiner Ergänzung, zuletzt auch der Fall sein bei jedem andern, der dasselbe Ende hat, also z. B. bei dem Bruche:

$$\cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1^{\alpha}} - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2^{\alpha}} - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3^{\alpha}} - \cdots}}}$$

Wenn, wie in dem Beispiele, von irgend einem Bruche, dessen b sich der Zahl 2 von unten her nähern, bewiesen ist, dass er nur positive N hat, so wird dasselbe bei jedem andern der Fall sein müssen, dessen b sich rascher als die des ersten dem asymptotischen Werthe 2 nähern. Denn man beweist leicht, dass seine N sämmtlich grösser ausfallen als die des ersten *). Auch kann man behaupten, dass der 2te

---

*) Drei aufeinanderfolgende Näherungsnenner des ersten Bruches seien N_{m-1}, N_m, N_{m+1}. Durch irgend eine Veränderung, die man an dem Bruche anbringt (etwa Vergrösserung eines b) sollen übergehen N_{m-1} in $N'_{m-1} = N_{m-1}(1+\alpha)$, N_m in $N'_m = N_m(1+\beta)$ wo $0 \leqq \alpha < \beta$ sei. So wird gleichzeitig übergehen N_{m+1} in $N'_{m+1} = N_{m+1}(1+\gamma)$ wo $\gamma > \beta$ ist. Denn es ist $N'_{m+1} = b_{m+1} N'_m - N'_{m-1} = (1+\beta) b_{m+1} N_m - (1+\alpha) N_{m-1} = (1+\beta)(b_{m+1} N_m - N_{m-1}) + (\beta - \alpha) N_{m-1} = (1+\beta) N_{m+1} +$ eine positive Grösse. — Denkt man sich also in einem vorgelegten Bruche, der nur positive N hat, zuerst etwa b_m vergrössert um Δb_m, so wird dadurch direct N_m vergrössert um $\Delta b_m N_{m-1}$, d. h. man erhält ein positives β, während $\alpha = 0$ ist. Sofort wird also auch N_{m+1} vergrössert, und zwar

Bruch convergiren muss, selbst wenn derjenige, mit welchem er verglichen wird, sich in dem Falle der Divergenz gegen Unendlich befinden sollte. Denn der Bruch $v_{0,\infty} = b_0 - \frac{1}{v_{1,\infty}}$ kann nur dadurch gegen ∞ divergiren, dass $v_{1,\infty}$ gegen Null convergirt. Nun ist aber $v_{1,\infty}$ für den zweiten der beiden verglichenen Brüche grösser (d. i. *mehr positiv*) als für den ersten, denn der zweite dieser Brüche hat der Voraussetzung nach die grössern b, und nach der (schon S. 9 angeführten) Differentialgleichung

$$\frac{dv_{m,p}}{db_n} = (-1)^{n-m} a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_n \left(\frac{N_{n,p}}{N_{m,p}}\right)^2$$

kann, wenn alle $a = -1$ sind, ein positives Increment von b nur dann ein negatives an v erzeugen, wenn bei dem Uebergange vom ursprünglichen Werthe von b zum geänderten der Nenner $N_{m,p}$ durch Null geht, welcher Fall hier nicht vorhanden ist, weil die N der Voraussetzung nach schon positiv waren, und daher bei der Vergrösserung der b auch positiv bleiben. Es ist also in der That $v_{1,\infty}$ grösser für denjenigen Bruch, der die grösseren b hat, als für denjenigen, von welchem ausgegangen wurde; für diesen letzteren ist es aber nicht negativ, sondern Null oder positiv, weil sonst $v_{0,\infty} = b_0 - \frac{1}{v_{1,\infty}}$ grösser gewesen wäre, als $v_{0,0} = b_0$, während doch die Näherungsbrüche von $v_{0,\infty}$ den gemachten Voraussetzungen nach fortwährend sinkend gehn. Also muss für den Bruch, dessen b sich der 2 von unten her rascher nähern als die des ursprünglich betrachteten, $v_{1,\infty}$ positiv und von Null verschieden sein, und folglich wird für ihn $v_{0,\infty} = b_0 - \frac{1}{v_{1,\infty}}$ nicht gegen Unendlich divergiren können, sondern muss convergiren.

---

in stärkerem Verhältniss als N_m (weil $\gamma > \beta$), daher N_{m+2} in wieder stärkerem u. s. w. — Aehnliches findet Statt, wenn man hierauf b_{m+1} vergrössert u. s. f.

6.

Bei der grossen Mannichfaltigkeit einzelner Fälle, welche in dem allgemeinen begriffen sind, in welchem zuletzt der Gang der Näherungsbrüche beständig zwischen Wachsen und Abnehmen schwanken muss, möchte es sehr schwer sein, allgemeine Regeln aufzustellen, nach welchen beurtheilt werden könnte, unter welchen Umständen ein solcher Gang zuletzt zur Convergenz und wann er zur Divergenz führt. Indessen tragen die meisten derjenigen Kettenbrüche, welche bisher eine analytische Wichtigkeit erlangt haben, und deren Discussion daher für jetzt ein näheres Interresse hat, einen gemeinsamen Charakter, welcher der Untersuchung sehr zu Statten kommen muss; denkt man sie sich nämlich in die reducirte Form gebracht, indem man alle ihre Partialzähler auf -1 bringt, so werden die Partialnenner sich gewöhnlich zuletzt einer bestimmten Grenze, oder auch alternirend zwei verschiedenen Grenzen immer mehr nähern, woferne sie nicht am Ende fortwährend und über jedes Maass hinaus wachsen. In diesem letztern Falle, und ebenso, wenn eine oder mehrere Grenzen der b, sämmtlich grösser als 2, existiren, ist die Beurtheilung des Kettenbruches nach dem, was im §. 5. hierüber gesagt worden ist, leicht. Ebenso klar ist es, dass, wenn von gewisser Stelle an alle b Einem Werthe < 2 strenge gleich wären, der Bruch bei schwankendem Gange seiner Näherungsbrüche divergiren müsste, und zwar schon desshalb, weil man für einen solchen Bruch, seine Convergenz einen Augenblick angenommen, einen imaginären Werth finden würde, welchen er natürlich nicht darstellen kann. Auch ist es leicht, mit Hilfe der recurrirenden Gleichung, aus welcher die N sich ergeben, den allgemeinen Werth von N_m für diesen Fall anzugeben, in welchem man setzen kann

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 2 \cos \eta \qquad . \qquad \left(0 < \eta < \frac{\pi}{2}\right)$$

man findet nämlich hier

$$N_m = \frac{\sin (m+1)\eta}{\sin \eta}$$

Das Verhalten der dem Kettenbruche äquivalenten Reihe (8), oder auch des Bruches selbst, ist daher hier so weit von der Convergenz entfernt, dass nicht einmal einzelne Glieder der ersteren zuletzt unendlich abnehmen, vielmehr werden (wenn schon von Anfang an alle $b = 2 \cos \eta$ sind) so weit man auch fortgegangen sein mag, noch Unterschiede aufeinanderfolgender späterer Näherungsbrüche vorkommen, welche grösser sind als eine beliebig grosse Grösse. Man könnte hierdurch auf die Vermuthung geleitet werden, dass auch schon die Aehnlichkeit, welche mit einem Bruche der eben bezeichneten Art ein solcher hat, dessen b sich zuletzt einer Grenze < 2 nähern, genügend sei, um eine Convergenz des letztern ebenfalls unmöglich zu machen. Von dieser Ansicht ausgehend habe ich mich längere Zeit und auf verschiedenen Wegen bemüht, einen allgemeinen Beweis für die Divergenz der letzteren Classe von Brüchen zu führen, bin aber dabei immer auf irgend einen Umstand gestossen, durch welchen die Allgemeinheit der Schlussfolgerung abgeschnitten wurde. Nachdem ich in Folge dessen an der Existenz eines solchen Satzes zu zweifeln angefangen hatte, bin ich endlich dahin gekommen, mich zu überzeugen, dass sich wirklich Brüche aufstellen lassen, welche convergiren, obschon ihre b sich einer Grenze < 2 nähern, wie ich an einem Beispiele zeigen werde.

Da der Uebergang von der Reihe zum Kettenbruch leichter ist als der umgekehrte, so geht man am bequemsten von der Reihe 15) aus:

$$b_0 + g_1 + g_2 + g_3 + \cdots$$

und sucht ihre Glieder so zu bestimmen, dass nicht nur sie selbst (und also auch der ihr gleichgeltende Kettenbruch) convergirt, sondern auch der Werth von b sich zuletzt einer bestimmten Grenze nähert, die (positiv und) < 2 sein soll. Es ist leicht, den Ausdruck der b durch die Glieder g der Reihe herzustellen; denn man hat z. B.

$$b_{2n+2} = \frac{b_1 b_2 \, . \, b_3 b_4 \, . \, b_5 b_6 \, . \, . \, . \, b_{2n+1} b_{2n+2}}{b_1 \, . \, b_2 b_3 \, . \, b_4 b_5 \, . \, b_6 b_7 \, . \, . \, . \, b_{2n} b_{2n+1}}$$

wo die Werthe der einzelnen zur Rechten stehenden Produkte je zweier Factoren durch die Gleichungen 16) und 16a) gegeben sind. Setzt man dieselben wirklich in die Gleichung, und behandelt das continuirliche Produkt auf die gewöhnliche Weise (indem man auf seinen Logarithmus übergeht), so ergibt sich, dass b_{2n+2} sich mit wachsenden n einer endlichen und von Null verschiednen Grösse nähern wird, wenn die Reihe, deren allgemeines Glied ist

$$\text{a)} \qquad \frac{g_{2n+1} + g_{2n+2}}{g_{2n-1} + g_{2n}} \; \frac{g_{2n-1} \; g_{2n+1}}{g_{2n} \; g_{2n+2}} - 1$$

convergirt. Für b_{2n+1} wird Aehnliches Statt finden, wenn neben der eben aufgestellten Bedingung auch die 2te erfüllt ist, dass (zufolge Gl. 16.)

$$\text{b)} \qquad \frac{(g_{2n} + g_{2n+1})\,(g_{2n+1} + g_{2n+2})}{g_{2n} \quad g_{2n+1}} = b_{2n+1}\, b_{2n+2}$$

sich zuletzt einem endlichen und von Null verschiedenen Werthe nähert. Sollte es sich dabei ereignen, dass der Grenzwerth eines b mit ungeradem Index verschieden von demjenigen eines b mit geradem Index ausfiele, so wird man beide einander gleich machen können, indem man mit der Quadratwurzel aus dem Verhältniss beider Grenzen alle b alternirend multiplicirt und dividirt, wodurch man (zufolge Gl. 9) nur allen Näherungsbrüchen einen gleichen Factor hinzufügt.

Es sind also die Grössen g so zu wählen, dass die beiden Forderungen in a) und b) erfüllt sind, und dass zugleich gemäss der in §. 3. aufgestellten Regel über die Zeichen sich positive b ergeben. Gibt man dabei nicht allen g gleiche Vorzeichen, so wird man auch sicher sein, dass der Grenzwerth der b, wie es verlangt ist, < 2 wird. Man genügt den verschiedenen Bedingungen unter Andern leicht auf folgendem Wege. Es sei gesetzt:

$$g_{2r} = (-1)^r \lambda_{2r}$$
$$g_{2r+1} = -\lambda_{2r+1}$$

wo alle λ positive Grössen vorstellen sollen; dabei müssen diejenigen λ, deren Index durch 4 theilbar ist, grösser sein, als die beiden mit ungeradem Index versehenen, zwischen welchen sie liegen (damit nach der Zeichenregel in §. 3. positive b erhalten werden). Setzt man allgemein

$$\lambda_{2r} = \lambda_{2r-1}\, x_r$$

so wird man der Convergenz der Reihe

$$\Sigma\, g$$

und also auch der Convergenz des Kettenbruches sicher sein, sobald

$$\Sigma\, \lambda_{2r-1}$$

eine convergirende Reihe ist, und zugleich die Werthe aller x kleiner sind, als eine gegebene Grösse. Nimmt man etwa an, dass die Glieder der Reihe $\Sigma\, \lambda_{2r-1}$ ununterbrochen abnehmen, so braucht man nur diejenigen x, welche einen geraden Index tragen, grösser als 1 zu nehmen, um gewiss auf keine andern als positive b zu kommen.

Bedient man sich noch der Abkürzung, zu setzen

$$\lambda_{2r+1} = \lambda_{2r-1}\, y_r$$

(wo $y < 1$), so stellen sich zwei aufeinanderfolgende Glieder (welche beiden ihrer verschiedenen Bildung wegen von einander getrennt betrachtet werden müssen) der in a) bezeichneten Reihe so dar:

$$\text{a}')\quad \left\{\frac{x_{2p+1}+1}{x_{2p}-1}\,\frac{y_{2p}}{x_{2p}\,x_{2p+1}} - 1\right\} + \left\{\frac{x_{2p+2}-1}{x_{2p+1}+1}\,\frac{y_{2p+1}}{x_{2p+1}\,x_{2p+2}} - 1\right\}$$

und man hat jetzt, neben der Bedingung, dass diese Reihe convergirt, auch noch die beiden aus b) hervorgehenden zu erfüllen, dass die Grössen

$$\text{b}')\quad \begin{cases} \left(1+\dfrac{1}{x_{2p+1}}\right)\left(1-\dfrac{y_{2p}}{x_{2p}}\right) \text{ und} \\ \left(1-\dfrac{1}{x_{2p+2}}\right)\left(1+\dfrac{y_{2p+1}}{x_{2p+1}}\right) \end{cases}$$

sich Ein und derselben endlichen und von Null verschiedenen Grenze nähern*). Aus der Vergleichung der Ausdrücke in a′) und b′) erkennt man bald, dass allen gestellten Forderungen gleichzeitig sehr einfach genügt werden kann, wenn man sämmtliche y der 1, die x mit ungeradem Index der Grösse $\sqrt{2}-1$ und die mit geradem der Grösse $\sqrt{2}+1$ als Grenzen sich in angemessener Weise nähern lässt. Nimmt man z. B. an, es sei allgemein $y_r = \left(\frac{r-1}{r}\right)^\alpha$ und setzt dabei voraus, dass α positiv und grösser als 1 sei, so ist die Reihe

$$\Sigma\, \lambda_{2r-1} = \lambda_1 \left(\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots\right)$$

bekanntlich convergirend. Um der Reihe a′) die gleiche Eigenschaft zu geben, kann man etwa setzen:

$$x_{2p} = \sqrt{2} + 1 - \frac{\alpha}{4p\sqrt{2}}$$

$$x_{2p+1} = \sqrt{2} - 1 - \frac{\alpha}{(4p+2)\sqrt{2}}$$

Es ist durch diese Annahmen allen gestellten Anforderungen Genüge geleistet. Denn durch die Grössen y_r, x_{2p} und x_{2p+1} sind alle g so bestimmt, dass die Reihe Σg, oder der Kettenbruch, convergirt, zugleich werden die Grössen b_{2n+2} sich zuletzt einer bestimmten Grenze nähern (weil die Reihe a′) convergirt) und eine ähnliche Grenze wird für die Grössen b_{4n+1} existiren, weil die beiden in b′) aufgestellten Producte je zweier aufeinander folgender b sich zuletzt *derselben* Grenze 2 nähern. Endlich kann man noch die beiden möglicherweise von einander verschiedenen Grenzen der b mit geradem und mit ungeradem In-

*) Man erhält diese zwei Bedingungen statt Einer, weil nach dem angenommenen Bildungsgesetze der g die beiden Fälle $n = 2p$ und $n = 2p+1$ unterschieden werden müssen.

der einander und der Grösse $\sqrt{2}$ dadurch gleich machen, dass man mit der Quadratwurzel aus dem Verhältnisse beider Grenzen alle b alternirend multiplicirt oder dividirt, was zufolge Gl. 9) erlaubt ist.

Hierdurch ist also die Existenz eines convergirenden Kettenbruches erwiesen, dessen b sich zuletzt sämmtlich der Grenze $\sqrt{2}$ nähern; und durch ähnliche Betrachtungen wird man auch andere Brüche aufstellen können, welche convergiren müssen, obgleich ihre b (in der reducirten Form) zuletzt einen Grenzwerth < 2 annehmen. Hätte man auf irgend eine Weise einen *solchen* Bruch von dieser Eigenschaft gewonnen, für welchen die Grenze von b nicht dem doppelten Cosinus eines zu π in rationalem Verhältnisse stehenden Bogens gleich wäre, so würde man in einem sehr allgemeinen Falle aus diesem andere Brüche herleiten können, von welchen jeder ebenso wie der erste convergiren müsste, während für ihn die Grenze der b einen andern als den ursprünglich gegebenen Werth hätte, der dabei wieder < 2 wäre, und zugleich so nahe als man es nur immer verlangen möchte, dem Doppelten eines vorgeschriebenen echten Bruches gleich wäre. Das Mittel dazu bietet die Contraction des vorgelegten Bruches, für welche die allgemeine Formel zu Ende von §. 1. aufgestellt ist. Nimmt man nämlich an, es sei dort $p = 2m+1$, $q = 3m+2$, $r = 4m+3$ etc., und der gegebene Bruch sei ein solcher, dessen a sämmtlich $= -1$ wären, und dessen b sich der Grenze $2 \cos \eta$ zuletzt ohne Ende nähern, so ist es zunächst klar, dass in dem zusammengezogenen die Partialzähler und Nenner sich auch wieder bestimmten Grenzen nähern werden, welche man leicht angeben kann, weil in einem Bruche, dessen b alle genau $= 2 \cos \eta$ wären, die allgemeinen Werthe der N und ebenso der Z, also auch der v, sich ohne Schwierigkeit herstellen lassen. Dabei wird aber der zusammengezogene Bruch, so wie man ihn aus den Ausdrücken 11) erhält, nicht unmittelbar in reducirter Gestalt erscheinen, indem seine Partialzähler, anstatt alle $= -1$ zu sein, die Werthe haben:

$$-\frac{1}{N^2_{o,m}}\ ;\ -\frac{1}{N^2_{m+1,\,2m+1}}\ ;\ -\frac{1}{N^2_{2m+2,\,2m+2}}\ ;\ \text{etc.}$$

Um sie auf -1 zu bringen, wird man (wie in Gl. 9) Factoren A an den Zählern und Nennern anbringen, deren Ausdrücke sich aus 10) ergeben, indem man daselbst für a_1, a_2, a_3 ... der Reihe nach die so eben angesetzten Werthe $-\frac{1}{N^2_{o,m}}$ etc. nimmt. Wenn man dies thut, so wird es sich häufig ereignen, dass die Ausdrücke von A_{2r-1} und A_{2r}, welche als continuirliche Producte gegeben sind, mit wachsendem r gegen endliche und von Null verschiedene Werthe L, L′ convergiren*). Unter Anderm wird dies, wie leicht zu beweisen ist, dann allemal geschehen, wenn das Gesetz, nach welchem die b des ursprünglich vorgelegten Bruches sich dem Grenzwerthe $2\cos\eta$ nähern, einfach genug ist, um zu bewirken, dass die an die Stelle der Grössen a n den Gleichungen 10) tretenden Werthe $-\frac{1}{N^2_{o,m}}$, $-\frac{1}{N^2_{m+1,\,2m+1}}$ etc. (welche alle gleich viele Grössen b umfassen, und welche sich desshalb alle zuletzt dem Grenzwerthe $-\left(\frac{\sin\eta}{\sin(m+1)\eta}\right)^2$ nähern) von einer gewissen Stelle an beständig wachsen oder auch beständig abnehmen. So oft ein solcher Fall vorhanden ist, werden in dem zusammengezogenen Bruche, nachdem er in reducirte Form gebracht ist, die einzelnen Partialnenner mit Factoren behaftet sein, welche in alternirendem Gange sich theils der Grenze L, theils der Grenze L′ nähern. Da es aber erlaubt ist, alle Partialnenner irgend eines Kettenbruches mit Einem und

*) Wenn dies für Einen der beiden Ausdrücke A_{2r-1} und A_{2r} der Fall ist, muss es für den andern auch gelten, weil das Product von beiden, oder die Grösse $-\frac{1}{a_{2r}} = + N^2_{(2r-1)(m+1),(2r-1)(m+1)+m}$ sich zuletzt dem bestimmten Grenzwerth nähert $\left(\frac{\sin(m+1)\eta}{\sin\eta}\right)^2$.

demselben Factor abwechselnd zu multipliciren und zu dividiren (wodurch die Verhältnisse der auf einander folgenden Näherungsbrüche nicht geändert werden) so kann man für diesen Factor die Grösse $\sqrt{\frac{L}{L'}}$ nehmen; nachdem die Operation vollzogen ist, werden nun alle Theilnenner Factoren haben, welche sich derselben Grenze $\sqrt{LL'}$ nähern. Diese ist aber für den vorliegenden Fall nichts anderes als der Endwerth, welchen $N_{k,k+m}$ für stets wachsende k annimmt; multiplicirt man also mit demselben den Endwerth eines Theilnenners, wie er sich in 11) darstellt, und berücksichtigt man dabei, dass bei dem angenommenen Gange der b zuletzt (d. h. für sehr grosse k) wird $v_{k+m+1,k+2m+1} = v_{k,k+m}$, so wird das Product zuletzt $= - N_{k,k+m-1} + Z_{k,k+m}$ welches im Grenzwerth gleich ist $- \frac{\operatorname{Sin} m\eta}{\operatorname{Sin}\eta} + \frac{\operatorname{Sin}(m+2)\eta}{\operatorname{Sin}\eta}$ oder $= 2\cos(m+1)\eta$. Nachdem also die Zähler des zusammengezogenen Bruches auf -1 reducirt und seine Nenner in die einfachste Form gebracht sind, werden die letzteren zum Grenzwerth haben $2\cos(m+1)\eta$, während in dem ursprünglich vorgelegten Bruche $2\cos\eta$ dieselbe Rolle spielte. So oft als η in irrationalem Verhältnisse zu π steht, kann man die erste Grösse durch passende Annahme einer endlichen ganzen Zahl m, so nahe als es immer gefordert werden mag, einer beliebigen, zwischen 0 und 2 gegebenen Quantität gleich machen. Wäre also erst ein einziger Kettenbruch aufgestellt, dessen Convergenz nachgewiesen wäre, während seine Theilnenner (in der reducirten Form) sich zuletzt einer Grenze $2\cos\eta$ näherten, wo $\frac{\eta}{\pi}$ eine irrationale Zahl vorstellte, und hätte derselbe dabei die Eigenschaft, den zuvor mit L und L′ bezeichneten Grenzen continuirlicher Producte endliche und von Null verschiedene Werthe zu geben, so könnte man aus ihm durch Contraction andere ableiten, welche, ihrem Ursprunge nach, nothwendig ebenfalls convergiren müssten, während ihre b sich einer Grenze nähern würden, welche einer beliebig vorgeschriebenen

Grösse zwischen 0 und 2 gleich wäre bis auf einen Unterschied, der kleiner als eine beliebig kleine Grösse gemacht werden könnte. In wie kleine Unter-Intervalle man also auch das Intervall von 0 bis 2 theilen möchte, so müssten doch in jedem derselben Zahlen existiren, welche als Grenzwerthe der b zu convergirenden Brüchen gehören können. (Derjenige besondere Bruch, dessen Convergenz vorher bewiesen, kann übrigens nicht zum Ausgang für ein solches Verfahren dienen, weil für ihn $\sqrt{2}$ die Grenze von b ist, oder $\frac{\eta}{\pi}$ den rationalen Werth $\frac{1}{4}$ annimmt. Ueberhaupt kann ein Kettenbruch von der geforderten Art niemals einer Reihe äquivalent sein, in welcher der Zeichenwechsel der Glieder sich nach streng eingehaltenen Perioden wiederholt.)

Auf der andern Seite ist es klar, dass zu jedem Grenzwerthe $2\cos\eta$ der Partialnenner b auch divergirende Brüche gehören. Sobald die Annäherung der b an $2\cos\eta$ *hinlänglich rasch* vor sich geht, muss nämlich Divergenz eintreten, weil sie Statt findet, wenn die b von gewisser Stelle an genau $= 2\cos\eta$ sind. Durch die wesentliche Bedeutung, welche hiernach die Geschwindigkeit der Annäherung der b an eine feste Grenze für die Convergenz des Bruches erhält, wird eine Aehnlichkeit mit dem Verhalten derjenigen Kettenbrüche hergestellt, welche aus nur positiven Theilzählern und Nennern gebildet sind. Diese letzteren, in reducirte Form gebracht, haben abwechselnd positive und negative b: einer gemeinschaftlichen Grenze können sich also dieselben nur dann nähern, wenn diese Grenze 0 ist. Dieser Fall (der sich also zunächst an den eben besprochenen einer positiven Grenze ≤ 2 anschliesst) ist zugleich (nach dem im Eingange erwähnten früher erwiesenen Satze) der Einzige, wo ein Bruch solcher Art divergiren kann, und ob er dies wirklich thut oder convergirt, hängt von der Rapidität der Annäherung seiner b an die Null ab; ist dieselbe gross genug, um die

Summe der absoluten Zahlenwerthe der b convergirend zu machen, so macht sie zugleich den Bruch divergent, während derselbe im entgegengesetzten Falle convergirt. Die Frage, ob vielleicht für einen von Null verschiedenen Grenzwerth der b ein ähnlicher aber allgemeinerer Satz aufgestellt werden könnte, möchte aber auf sehr complicirte Untersuchungen führen *).

7.

In dem Vorausgehenden ist bereits mehrfach angedeutet, wie man im Allgemeinen einen Kettenbruch (reducirter Gestalt), dessen Theilnenner b zuletzt abwechselnd gegen zwei verschiedene (positive) Grenzen convergiren, in einen solchen umwandeln kann, in welchem eine einzige Grenze vorhanden ist. Dieser Fall kommt häufig vor, theils weil nicht selten unmittelbar zwei verschiedene Ausdrücke für die b mit geradem oder ungeradem Index gegeben sind, und theils weil die Factoren A, welche zur Zurückführung eines Bruches, der nicht in reducirter Gestalt vorliegt, auf diese Form dienen, in ähnlicher Weise aus zwei verschiedenen Gleichungen (10) erhalten werden. Das Verfahren, die einzelnen b alternirend mit der Quadratwurzel aus dem Verhältnisse ihrer beiden Grenzen zu multipliciren und zu dividiren, wird nur dann unstatthaft, wenn Eine dieser Grenzen 0 oder Unendlich ist. Man kann aber, wenn die Eine Null, die andere eine von Null verschiedene endliche Quantität ist, für diejenige Grösse, mit welcher die zuletzt ver-

*) Der oben bezeichnete Fall, wo die b sich dem Grenzwerthe 0 abwechselnd von der positiven und negativen Seite her nähern, trifft in der That *mitten* zwischen solche Fälle hinein, auf welche die Betrachtungen des gegenwärtigen §. passen, obgleich hier zunächst nur von positiven b gesprochen worden ist. Denn wenn eine *negative* Grenze der b existirt, ist dies wesentlich dasselbe, als ob sie den positiven gleich grossen Werth hätte, weil man mit — 1 abwechselnd alle b multipliciren und dividiren kann.

schwindenden b multiplicirt und die anderen dividirt werden, überhaupt eine sehr grosse Zahl nehmen, wodurch bewirkt wird, dass nun alle b sehr klein werden, so dass klar ist, dass ein solcher Bruch in seinem Fortgange unendlich oft Wechsel vom Steigen zum Fallen und umgekehrt zeigen muss; ebenso kann man, wenn eine Grenze endlich und von Null verschieden, die andere unendlich ist, mit einer sehr grossen Zahl die unendlich wachsenden b dividiren, die andern multipliciren, wodurch alle sehr gross, daher namentlich grösser als 2, gemacht werden; ein solcher Bruch wird daher immer in Einem Sinne fortgehen, und, von besondern Ausnahmsfällen abgesehen, convergiren. Wenn *alle* b zuletzt unendlich werden, obwohl vielleicht nach verschiedenen Gesetzen, so ist derselbe Fall vorhanden: es bleibt daher nur dann eine Schwierigkeit für die Beurtheilung des Fortschreitens der Näherungsbrüche, wenn etwa die b mit geradem Index sich zuletzt der Null nähern, und gleichzeitig die mit ungeradem über alle Grenzen wachsen, oder umgekehrt. Ereignet sich dieser nicht seltne Fall, (welcher unter Anderm bei dem von *Gauss* für die hypergeometrische Reihe gegebenen Bruche zum Vorschein kommt, wenn man denselben in die reducirte Form bringt), so kann man sich sehr häufig dadurch helfen, dass man den vorgelegten Bruch (nach den Ausdrücken 11.) in einen solchen contrahirt, welcher nur mehr die Näherungsbrüche von geradem Index, oder auch nur die von ungeradem, aus dem ersten enthält. Wenn alsdann der zusammengezogene Bruch schwankenden Gang hat, oder wenn man gar seine Divergenz beweisen kann, so ist kein Zweifel, dass der zuerst gegebene die eine oder die andere Eigenschaft mit ihm theilen muss. Dagegen scheint ein Fortschreiten in Einem Sinne des contrahirten Bruchs zunächst keinen Schluss auf ein gleiches Verhalten des vorgelegten selbst zu gestalten, weil dieser auch steigende Intervalle gehabt haben könnte, welche nur durch das dominirende Sinken der andern bei der Zusammenziehung je zweier verdeckt worden wären. Eine etwas genauere Betrachtung zeigt indess, dass Fälle dieser Art nur unter besondern Umständen eintreten können und leicht zu erkennen sind. Um die Vorstellung zu fixiren, möge etwa angenommen werden, dass die Näherungsbrüche V_0, V_1, V_2, .. des zusammengezogenen Bruches gleich seien den Näherungsbrüchen mit geradem Index des ursprünglichen; also

$$V_0 = v_0, \; V_1 = v_2, \; V_2 = v_4, \; .. \; V_r = v_{2r}, \; ..$$

Schreiten nun alle V in Einem Sinne etwa *sinkend* fort, so ist

$$V_r - V_{r+1} = (v_{2r} - v_{2r+1}) + (v_{2r+1} - v_{2r+2})$$

positiv, woraus hervorgeht, dass entweder die Differenzen $v_{2r} - v_{2r+1}$ und $v_{2r+1} - v_{2r+2}$ beide ebenfalls positiv sind, oder, wenn Eine negativ wäre, so müsste es die (absolut genommen) *kleinere* von beiden sein. Nun aber ist nach der allgemeinen Regel über die Zeichen (S. §. 3.) das Vorzeichen der kleineren unter den beiden Differenzen $v_{n-1} - v_n$ und $v_n - v_{n+1}$ massgebend für das Vorzeichen von b_{n+1}; weil also hier angenommen wird, dass alle b einerlei Zeichen (+) haben, so muss in *allen* Paaren von je zwei auf einander folgenden Differenzen $v_{2r} - v_{2r+1}$ und $v_{2r+1} - v_{2r+2}$ die (absolut genommen) kleinere dasselbe Zeichen haben, und zwar das nämliche, welches auch schon die kleinere der beiden Differenzen $v_0 - v_1$ und $v_1 - v_2$ hat. Findet man also bei der leicht anzustellenden Untersuchung, dass $v_0 - v_1$ und $v_1 - v_2$ beide dasselbe Zeichen haben, wie $V_0 - V_1$ oder wie alle $V_r - V_{r+1}$ so ergibt sich, dass schon der ursprünglich vorgelegte Bruch ebenso wie der zusammengezogene beständig sinkenden Gang hat. Zugleich folgt in diesem Falle aus der Convergenz des contrahirten offenbar auch die des zuerst gegebenen. Zeigt sich im Gegentheile, dass das kleinere der zwei Intervalle $v_0 - v_1$ und $v_1 - v_2$ entgegengesetztes Vorzeichen hat mit $V_0 - V_1$, so muss auch in jedem spätern Paare von Differenzen $v_{2r} - v_{2r+1}$ und $v_{2r+1} - v_{2r+2}$ Eine, und zwar die kleinere von beiden, entgegengesetztes Zeichen mit der andern und mit $V_r - V_{r+1}$ haben. Weil aber in dem vorgelegten Bruche, wenn er lauter positive b hat, nirgends zwei steigende, und ebenso, wenn er nur negative b hat, nirgends zwei sinkende Intervalle auf einander folgen können (§. 3.) so ist also in diesem Falle (wo $y_0 - y_1$ und $y_1 - y_2$ ungleiche Zeichen haben) aus dem stets in einerlei Sinne vor sich gehenden Fortschreiten des zusammengezogenen Bruches zu schliessen, dass in dem vorgelegten selbst steigende und sinkende Intervalle regelmässig wechseln, wobei diejenigen der Einen Art sämmtlich grösser sein müssen, als die der andern zwischen welchen sie liegen.

Wendet man diese Hilfsmittel der Beurtheilung etwa auf den vorhin erwähnten Gauss'schen Kettenbruch an:

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{a_2 x}{1 - \cfrac{a_3 x}{1 - \cfrac{a_4 x}{1 - \cdots}}}}$$

in welchem

$$a_{2r} = \frac{r\,(\gamma - \alpha + r - 1)}{(\gamma + 2r - 2)\,(\gamma + 2r - 1)}$$

$$a_{2r+1} = \frac{(\alpha + r)\,(\gamma + r - 1)}{(\gamma + 2r - 1)\,(\gamma + 2r)}$$

ist, so findet sich, dass für positive x, welche kleiner als Eins sind, seine Näherungsbrüche zuletzt immer in demselben Sinne fortschreiten, wobei (wenigstens von ganz speciellen Ausnahmsfällen abgesehen), der Bruch convergiren muss. Ist hingegen $x > 1$, so schwanken die Näherungsbrüche zuletzt beständig zwischen Wachsen und Abnehmen, wobei eine genauer eingehende Untersuchung erforderlich wäre, um zu unterscheiden, ob und wann hier noch Convergenz möglich ist. Für negative x, wo der Bruch zu denjenigen gehört, welche sich aus lauter positiven Stücken zusammensetzen, convergirt er immer.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1855

Band/Volume: 7

Autor(en)/Author(s): Seidel Philipp Ludwig Ritter von

Artikel/Article: Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetze eines Kettenbruches und der Art des Fortgangs seiner Näherungsbrüche. 559-602