Zusatz

zu

W. J. G. Karstens

Abhandlung

von den

Projectionen

der

Kugel.

Die Projectionen der Kugel
als
Kegelschnitte betrachtet.

1. §.

Alle Projectionen der Kugel sind Kegelschnitte, selbst die orthographischen Projectionen, wenn der Cylinder als ein Kegel betrachtet wird, dessen Axe unendlich groß ist; nur diejenigen Fälle sind hievon ausgenommen, wenn das Auge in der Ebene desjenigen Kreises der Kugel steht, dessen Projection auf der Tafel gesucht wird. Man stellet sich von allen Puncten im Umfang eines solchen Kreises der Kugel gerade Linien bis ins Auge gezogen vor, welches dabey als ein Punct betrachtet wird. Diese Linien liegen demnach in der Oberfläche eines Kegels, dessen Spitze das Auge, und dessen Grundfläche der Kreis auf der Oberfläche der Kugel ist; es wäre dann, daß die Ebene dieses Kreises durchs Ange gienge. Die Oberfläche dieses Kegels wird von der Tafel geschnitten, und die Durchschnittlinie mit der Tafel ist die Projection des Kreises. Die alten Geometer haben daher die Kugel-Projectionen allemal als Kegelschnitte betrachtet, und es gehört zur Vollständigkeit der Abhandlung von den Projectionen der Kugel, welche ich im vorigen Jahr der Akademie überreicht habe, daß ich noch zeige, wie eine Theorie mit der andern zusammen hänge, und wie eben die Regeln für die Verzeichnung der Projectionen auch aus der Theorie von den Kegelschnitten folgen. Ich werde in solcher Absicht zuforderst die allgemeinen analytischen Formuln entwickeln, woraus alle Sätze, die Apollonius im ersten Buch von der Gestalt der Kegelschnitte nach der verschiedenen Lage der schneidenden Ebene beweiset, kurz und leicht können hergeleitet werden.

2. §.

Die neuern Schriftsteller, welche die Theorie von den Kegelschnitten analytisch abhaudeln, zeigen gewöhnlich nur beyläufig, wie diese Linien aus dem geraden Kegel geschnitten werden können, um den Namen zu rechtfertigen, und zu beweisen, daß Linien der zweyten Ordnung und Kegelschnitte einerley Linien sind. Allein allgemeinere Betrachtungen darüber, wie diese Linien nicht allein aus dem geraden, sondern auch aus dem schiefen Kegel geschnitten werden können, haben in vielen Fällen der Ausübung ihren Nutzen, und die obangeführte Theorie von den Projectionen der Kugel ist hievon ein Beyspiel. Die neuere Analysis, und besonders der Gebrauch der allgemeinen trigonometrischen Formuln, erleichtert so, wie viele andere Theorien der Alten, auch diese Betrachtung ungemein, und man ist im Stande, vermittels einer einzigen allgemeinen Aufgabe, alles zu übersehen.

3. §.

Hr. Euler betrachtet in der Introd. in Anal. Inf. T. II. Append. Cap. III. zwar die Schnitte des schiefen Kegels: allein der Begrif vom schiefen Kegel, welchen er bey seiner Analysi zum Grunde setzt, ist gänzlich von dem Begrif unterschieden, welchen man sonst mit dem Apollonius gewöhnlich annimmt. Herr Euler nennt nämlich einen schiefen Kegel denjenigen, dessen Grundfläche eine Ellipse, und dessen Axe auf der Ebene dieser Ellipse in ihrem Mittelpunkt senkrecht ist, und dessen Oberfläche übrigens die Eigenschaft hat, daß jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt eine Ellipse giebt, die gleichfalls ihren Mittelpunkt in der Axe des Kegels hat. Dieser Begrif läßt sich auf den apollonischen schiefen Kegel gar nicht anwenden: es giebt in demselben gar keine Schnitte, die Ellipsen werden, und ihren Mittelpunkt in der Axe des Kegels haben. Der vom Hr. Euler so genannte schiefe Kegel gehört schon in die Klasse einer andern Art geometrischer Körper, die wegen der Aehnlichkeit mit dem Euclidäischen und Apollonischen Kegel ebenfalls den Namen eines Kegels führen können: aber alsdann erweitert man schon diesen Begrif auf solche Körper, deren Oberfläche mit der eigentlichen Kegelfläche nur diese Aehnlichkeit hat, daß alle gerade Linien, die ganz in diese Oberfläche fallen, sich in einerley Punkt, der die Spitze heißt, schneiden, übrigens aber durch den Umfang einer ebenen Figur gehen, die eine willkührliche Gestalt haben kann, da es beym eigentlichen Kegel ein Kreis seyn muß. Diese kegelartigen Körper kann man füglich wieder nach der verschiedenen Gestalt ihrer Grundfläche in Klassen eintheilen, und ihnen davon die Nämen beylegen. So könnte z. E. der vom Hrn. Euler so genannte schiefe Kegel ein elliptischer Kegel heissen, und dieß würde denn ein gerader oder schiefer elliptischer Kegel seyn, nachdem seine Axe auf der Grundfläche gerade oder schief stünde. Eben so theilt Apollonius die gewöhnlich so genannten Kegel in gerade und schiefe, nachdem ihre Axen die Grundfläche entweder senkrecht oder schief schneiden: und diesen Redegebrauch werde ich auch hier beybehalten. Uebrigens wird sich die folgende Untersuchung auf einige allgemeine Sätze gründen, die ich wegen der Vollständigkeit der Ausführung hersetze, da man sie sonst auch beym Hrn. **Euler** am a. O. Append. Cap. II. §. 26. sq. antrift. Es wird dieß zugleich zur nähern Erläuterung des Eulerischen Vortrags dienen.

4. §.

Es ist die Lage einer Ebene FH (1. fig.) gegen eine andre KL gegeben, welche letztere eine bekannte Lage hat: man soll eine Gleichung für die Ebene FH zwischen dreyen rechtwinklichten Coordinaten suchen, wovon zwey in der Ebene KL liegen, die dritte aber auf ihr senkrecht ist: die Abscissen sollen auf der geraden Linie AB in der Ebene KL genommen werden, deren Lage gegen die Durchschnittslinie FG beyder Ebenen gleichfalls bekannt ist.

Aufl. Von einem unbestimmten Punkt M der Ebene FH sey MQ auf KL senkrecht, und QP auf AB ebenfalls senkrecht gesetzt; so sind $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$ drey senkrechte Coordinaten für die Ebene FH. Man setze, daß AB verlängert mit der Durchschnittslinie beyder Ebenen in F zusammen stosse, so ist $AF = b$, nebst dem Winkel $AFE = \psi$ gegeben. Ubrigens sey MS auf EF senkrecht, und man ziehe QS, so ist $QSM = \phi$, der Neigungswinkel beyder Ebenen, gleichfalls gegeben. Man lege nun durch MQ und F eine Ebene FQM, so ergiebet sich an F ein körperliches Dreyeck, dessen Seiten QFM, SFQ, und SFM sind. In demselben ist der Winkel an $FQ = 90°$, und der Winkel an

FS

$FS = \phi$. Setzt man nun $PFQ = \omega$, so wird die Seite $SFQ = \psi + \omega$, und man erhält $tang\ QFM = sin\,(\psi + \omega)\,tang\,\phi$, also $z = FQ\ sin\,(\psi + \omega)\,tang\,\phi$. Ferner wird $sin\,\omega = \frac{Y}{FQ}$, $cos\,\omega = \frac{b + x}{FQ}$. Weil nun $sin\,(\psi + \omega) = sin\,\psi\,cos\,\omega + cos\,\psi\,sin\,\omega$, so drücke man $sin\,\omega$ und $cos\,\omega$ durch y und x aus, und man erhält die gesuchte Gleichung $z = b\,sin\,\psi\,tang\,\phi + x\,sin\,\psi\,tang\,\phi + y\,cos\,\psi\,tang\,\phi$.

Wenn die Linie AB mit FE zusammen fällt, so wird $\psi = 0$, also $sin\,\psi = 0$, $cos\,\psi = 1$, und man erhält $z = y\,tang\,\phi$, so daß nun z von x gar nicht abhängt, wie den Eigenschaften einer Ebene, die in den Anfangsgründen bewiesen werden, gemäß ist.

5. §.

Es ist M (1. fig.) ein Punkt in der Oberfläche eines Körpers, wovon KL eine Durchschnittsfigur vorstellt. Auf diese ist MQ senkrecht, so wie QP auf die grade Linie AB, die in der Ebene KL eine bekannte Lage hat, senkrecht gezogen ist, und man hat für des Körpers Oberfläche eine Gleichung zwischen den Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, $QM = z$. Statt der Axe AB aber soll man eine andre FG für die Absciſſenlinie annehmen, welche in der Ebene KL liegt, und die vorige unter dem Winkel $BFG = \psi$ schneidet. **Die Frage ist: wie die Gleichung zwischen x, y, und z verändert werden müsse, wann übrigens die Coordinaten senkrecht bleiben.**

Aufl. Man setze auf AB durch A eine senkrechte Linie, welche FG in E schneidet, und nehme E für den neuen Anfangspunkt der Absciſſen. Ueberdem sey QS, welche AB in D schneidet,

det, auf FG senkrecht. Ist nun AF $= b$, so hat man PD $= y\,tang\,\psi$, DQ $= \frac{y}{cos\,\psi}$, DS $= (b + x - PD)\,sin\,\psi = (b + x)\,sin\,\psi - y\,tang\,\psi\,sin\,\psi$, FS $= (b + x - PD)\,cos\,\psi = (b + x)\,cos\,\psi - y\,sin\,\psi$, EF $= \frac{b}{cos\,\psi}$, SQ $=$ DS $+$ DQ, ES $=$ FS $-$ EF. Wenn man nun ES $= t$, SQ $= v$ setzt, so erhält

man $v = (b + x)\,sin\,\psi - y\,tang\,\psi\,sin\,\psi + \frac{y}{cos\,\psi}$

und $t = (b + x)\,cos\,\psi - y\,sin\,\psi - \frac{b}{cos\,\psi}$.

die erste Gleichung multiplicire man mit $cos\,\psi$, die zweyte mit $sin\,\psi$ und subtrahire sodann die letzte von der ersten, so erhält man $v\,cos\,\psi - t\,sin\,\psi = y + v\,tang\,\psi$, also 1) $y = v\,cos\,\psi - t\,sin\,\psi - v\,tang\,\psi$. Dieß setze man statt y in die zweyte Gleichung, so wird $b + x = \frac{t}{cos\,\psi}\,y\,tang\,\psi + \frac{b}{cos\,\psi^2}$, $= \frac{t}{cos\,\psi} + v\,cos\,\psi\,tang\,\psi = t\,sin\,\psi\,tang\,\psi - b\,tang\,\psi^2 + \frac{b}{cos\,\psi^2}$, folglich $x = t \left[\frac{1 - sin\,\psi^2}{cos\,\psi}\right] + v\,sin\,\psi$, oder 2) $x = t\,cos\,\psi + v\,sin\,\psi$. Wenn diese beyden Werthe statt x und y in die für die Oberfläche des Körpers gegebene Gleichung gesetzt werden, so erhält man die gesuchte Gleichung zwischen t, v, und z.

Wenn man AE $= f$ setzt, so ist $f = b\,tang\,\psi$, und man hat $y = v\,cos\,\psi - t\,sin\,\psi - f$.

6. §.

Es bleibe M (1. fig.) ein Punkt auf der Oberfläche eines Körpers, wovon KL eine Durchschnittsfigur ist: dieser Körper werde von einer andern Ebene FH geschnitten, und es sey FG ihre Durchschnittslinie mit der vorigen Ebene KL. Die Gleichung für die Oberfläche des Körpers ist zwischen AP $=x$, PQ $=y$, QM $=z$ gegeben, und die Lage der Ebene FH gegen BC ist gleichfalls bekannt. Man soll eine Gleichung für die Durchschnittslinie *MN* mit der Oberfläche des Körpers für rechtwinklichte Coordinaten suchen.

Aufl. Wenn zwo Oberflächen einander schneiden, und man sucht für jede dieser Oberflächen eine Gleichung zwischen dreyen rechtwinklichten Coordinaten, für einerley Abscissenlinie und Anfangspunkt der Abscissen, so daß auch die Coordinaten x und y für beyde Oberflächen in einerley Ebene liegen; so hat man zwo Gleichungen zwischen dreyen Coordinaten, welche für die Durchschnittslinie beyder Oberflächen gehören. Sind nämlich $x=$ AP, $y=$ PQ, $z=$ QM diese drey Coordinaten, so ist z in beyden Gleichungen einerley, wenn M ein Punkt ist, der in beyden Oberflächen zugleich liegt. Ist also die eine Oberfläche FH *eine Ebene*, die KL unter dem Winkel ϕ schneidet, ist ferner AF $=b$, AFE $=\psi$; so drückt die Gleichung $z = b\, sin\, \psi\, tg\, \phi + x\, sin\, \psi\, tg\, \phi + y\, cos\, \psi\, tg\, \phi$ mit der Gleichung für die andere Oberfläche zusammen genommen die Natur der Durchschnittslinie MN aus. Allein weil in diesem Fall MN eine Linie von einfacher Krümmung ist, so ist es vortheilhafter, eine Gleichung zwischen zwoen Coordinaten zu suchen, die in der Ebene der Linie MN selbst liegen. In solcher Absicht ziehe man QS auf die Durchschnittslinie FG beyder Ebenen FH und KL senkrecht, und wenn auch AE auf AB senkrecht ist, setze man FS $=t$, SM $=v$ AE $=f$. Ferner suche man nach dem 5 §. für die Oberfläche des Körpers eine Gleichung zwischen t, v und z. Dieß geschieht, indem man $x = t$

$\cos\psi + v \sin\psi$, und $y = v \cos\psi - t \sin\psi - f$ nimmt, und diese Werthe in der Gleichung zwischen x y und z statt x und y setzt. Nun hat man überdem für die Ebene FH die Gleichung $z = v \tang\phi$, folglich zwo Gleichungen zwischen den dreyen Coordinaten t, v, z, für die Linie MN. Setzt man aber AM $= u$, so ist $v = u \cos\phi$. Dieß in die Gleichung zwischen t, v und z gesetzt giebt eine andre zwischen t, u und z. Ueberdem aber wird $z = u \cos\phi \tang\phi = u \sin\phi$, und wenn man dieß statt z setzt, so hat man eine Gleichung zwischen t und u. In solcher Absicht kann also gleich anfangs in den Werthen von x und y, $u \cos\phi$ statt v gesetzt werden, so hat man

$$x = u \cos\phi \sin\psi + t \cos\psi$$
$$y = u \cos\phi \cos\psi - t \sin\psi - f,$$

da dann diese beyden Werthe statt x und y, imgleichen $u \sin\phi$ statt z gesetzt, unmittelbar die gesuchte Gleichung zwischen t und u geben.

7. §.

Die Länge der Axe *AC* (2. Fig.) des schiefen Kegels *BCD*, nebst dem Halbmesser *AB* seiner Grundfläche, und dem Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche $= \alpha$ sind gegeben: man soll eine Gleichung zwischen dreyen rechtwinklichten Coordinaten für den Kegel suchen, so daß zwey derselben in der Ebene der Grundfläche liegen, und die dritte auf ihr senkrecht steht.

Aufl. Man lege durch die Axe des Kegels eine Ebene auf die Grundfläche senkrecht, so ist die Durchschnittsfigur BCD ein Dreyeck, und in dieser Ebene liegt der Neigungswinkel BAC $= \alpha$ der Axe gegen die Grundfläche, auf den Durchmesser BD der Grundfläche, worinn sie von der Ebene CBD geschnitten wird,

setzte

setzte man einen andern $\beta\delta$ senkrecht, so wird derselbe auch auf der Ebene BCD senkrecht seyn. Ferner sey AL auf der Grundfläche senkrecht, so liegt AL in der Ebene BCD, und man kann nun $A\beta$, AD, AL, für die drey Axen des Körpers annehmen, womit die drey Coordinaten parallel sind. Demnach sey von einem Punkt M der Kegelfläche MQ auf die Grundfläche senkrecht gezogen, und QP auf $A\beta$ senkrecht. Man setze $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$. Durch M lege man die Ebene bMd mit der Grundfläche parallel, welche die Axe des Kegels in H, die Ebene BCD in bd, Al aber in L schneide, so liegt L in bd. Man ziehe die gerade Linie CM, welche in der Oberfläche des Kegels liegt, und mit dem Umfang der Grundfläche in N zusammen stößt. Die Ebene ACN schneide bMd in HM, die Grundfläche in AN, und es sey $AB = AN = r$, $AC = b$, so ist $BAC = AHL = \alpha$, $AL = MQ = z$, folglich $HL = z \cot \alpha$, $AH = z \operatorname{cosec} \alpha$. Ferner ist $CA : GH = AN : HM$, und $CH = CA - AH$, also $HM = \frac{r(b - y \operatorname{cosec} \alpha)}{b}$. Man ziehe LM, AQ, und setze MR auf bd senkrecht, so ist $LM = AQ = \surd(xx + yy)$. Weil ferner der Winkel $MLR = QAD$, so ist $MR = AP = x$, $LR = PR = y$, und überdem $MR^2 = HM^2 - (HL + LR)^2$. Dieß giebt die Gleichung $xx = \frac{rr(b - z \operatorname{cosec} \alpha)^2}{bb} - (z \cot a + y)^2$, oder $xx + yy = \frac{rr(b - z \operatorname{cosec} \alpha)^2}{bb} - zz \cot \alpha^2 - zyz \cot \alpha$ für den schiefen Kegel, und diese Gleichung verwandelt sich in folgende $bb(xx + yy) = rr(b - z^2$, wenn $\alpha = 90°$, also der Kegel ein gerader Kegel ist.

8. §.

Die Gleichung für den Schnitt des schiefen Kegels bey jeder gegebenen Lage der Ebene des Schnitts gegen die Axe und Grundfläche des Kegels zu finden.

Aufl. Es sey fgh (3. Fig.) die Ebene des Schnitts und fh ihr Durchschnitt mit der Grundfläche. Man lege durch die Axe AC eine Ebene BCD auf die Grundfläche senkrecht, welche die Grundfläche in BD, und fh in E schneidet. Auf BD sey AP als die Axe der Abscissen x senkrecht, und sie schneide fh in F. Es sey der Winkel AFE $= \psi$, der Ebene fgh Neigungswinkel gegen die Grundfläche des Kegels $= \phi$, und AE $= f$. Wenn nun M ein Punkt im Kegelschnitt ist, so sey MS auf fh senkrecht, und ES $= t$, SM $= u$. Nimmt man ferner die Coordinaten y und z des Kegels mit AD und Al parallel, wie in 7. §. so hat man die Gleichung $xx + yy = \frac{rr}{bb}(b - z\,cosec\,\alpha)^2 - zz\,cot\,\alpha^2 - xyz\,cot\,\alpha$. Nach dem bf setze man $x = t\,cos\,\psi + u\,cos\,\phi\,sin\,\psi$ und $y = u\,cos\,\phi\,cos\,\psi - t\,sin\,\psi - f$, $z = u\,sin\,\phi$. Wenn man diese Werthe in die Gleichung des Kegels statt x und y, und z, und der Kürze wegen $\frac{r}{b} = m$ setzt, so erhält man für den Kegelschnitt die Gleichung $tt - z\,sin\,\psi\,sin\,\phi\,cot\,\alpha.\,tu + cos\,\phi^2.\,uu - zf\,cos\,\phi\,cos\,\psi.\,u$

$$\begin{array}{ll} + sin\,\phi^2\,cot\,\alpha^2 & + zm^2\,b\,cosec\,\alpha\,sin\,\phi \\ + z\,cos\,\phi\,cos\,\psi\,sin\,\phi\,cot\,\alpha & - zf\,sin\,\phi\,cot\,\alpha \\ - m^2\,cosec\,\alpha^2\,sin\,\phi^2 & \end{array}$$

$+ zf\,sin\,\psi.\,t + ff - m^2 b^2 = 0$. Diese Linie gehört zur zweyten Ordnung, und wenn man die Coefficienten von uu, tu, und tt mit P, Q, R, bezeichnet, so weis man aus andern Gründen, daß

daß der Schnitt eine Ellipse Parabel oder Hyperbel sey, nachdem $4PR - QQ$ positiv, oder $= 0$, oder negativ ist. Es wird aber $4P.R - QQ = 4(\cos\phi + \sin\phi\cos\psi\cot\alpha)^2 - 4m^2\operatorname{cosec}\alpha^2\sin\phi^2$; Daher wird der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel seyn, nachdem

$bb(\cos\phi = \sin\phi\cos\psi\cot\alpha)^2 >=$ oder $< rr\operatorname{cosec}\alpha^2\sin\phi^2$ oder $b\cos\phi >=$ oder $< r\operatorname{cosec}\alpha\sin\phi - b\sin\phi\cos\psi\cot\alpha$ oder $\frac{b}{r\operatorname{cosec}\alpha - b\cos\psi\cot\alpha} >=$ oder $< \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$, oder auch $\frac{b\sin\alpha}{r - b\cos\psi\cos\alpha}$. $>=$ oder $< \tang\phi$

Wenn nun die Abscissenlinie ES den Umfang der Grundfläche in f und h trift, so halbire man fh bey e, und ziehe durch A und e den Durchmesser bd der Grundfläche, welcher auf fh senkrecht ist; so wird die Ebene bld durch bd und die Axe Al gelegt die Ebene des Schnitts fgh in der geraden Linie eg schneiden. Ueberdem schneidet die senkrechte Ebene BCD durch die Axe die Ebene des Schnitts in ES, beyde Durchschnittslinien schneiden die Axe, und folglich einander selbst in dem Punkt K, worinn die Ebene des Schnitts und die Axe des Kegels einander schneiden. Nun hat man an A ein körperliches Dreyeck, dessen Seitenflächen EAe, EAK, und eAK sind, dessen Seiten und Winkel sich bekannter massen wie die Seiten und Winkel sphärischer Dreyecke berechnen lassen. Weil die Ebene AEK auf der Grundfläche senkrecht ist, so ist dieß Dreyeck an AE rechtwinklicht, und eAK die Hypothenuse. Da nun EAe = AFE $= \psi$, EAK $= \alpha$, so ist $\cos e$AK $= \cos\alpha\cos\psi$, und wenn ε der Winkel an Ae ist, unter welchem Cbd die Grundfläche schneidet, so ist $\cot\varepsilon = \sin\psi\cot\alpha$. Ueberdem ist auch e die Spitze eines körperlichen Dreyecks, dessen Seiten AeE $= 90°$ ist, der Winkel an eA $= \varepsilon$, und an eE $= \phi$. Also wird $\tang$ EeK $= \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon\sin\phi} = \frac{\tang\varepsilon}{\sin\phi} = \frac{1}{\sin\psi\sin\phi\cot\alpha}$,

 und

und $tang\ AeK = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi\ \sin\varepsilon} = \frac{tang\,\Phi}{\sin\varepsilon}$. Da nun $cosec\,\varepsilon = \surd(1 + cot\,\varepsilon^2)$

$= \surd(1 + \sin\psi^2\ cot\,\alpha^2)$ so ist $\sin\varepsilon = \frac{1}{cosec\,\varepsilon} = \frac{1}{\surd(1 + \sin\psi^2\ cot\,\alpha^2)}$,

also $tang\,AeK = tang\,\Phi\surd(1 + \sin\psi^2\,cot\,\alpha^2) = \frac{tang\,\Phi\surd(1 - \cos\alpha^2\cos\psi^2)}{\sin\alpha}$.

Aber im Dreyeck ABC ist $tang\ AbC = \frac{b\ \sin\ CAb}{b\ \cos\ CAb}$, und es war $\cos AK = \cos CAb = \cos\alpha\ \cos\psi$, also hie $CAb = \surd(1 - \cos\alpha^2\cos\psi^2)$, folglich wird $tang\ AbC = \frac{b\surd(1 - \cos\alpha^2\ \cos\psi^2)}{r - b\cos\alpha\cos\psi}$.

Nachdem nun $tang\ Abl >=$ oder $< tang\ AlK$, nachdem ist $\frac{b\sin\alpha}{r - b\cos\alpha\cos\psi} >=$ oder $< tang\,\Phi$, folglich wird der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, nachdem $AbC >=$ oder $< AeK$ ist.

9. §.

Die Durchschnittlinie ge (3. Fig.) der Ebene des Schnitts fgh mit der Ebene brd, welche durch die Axe AC so gelegt ist, daß sie fh halbirt, ist ein Durchmesser des Kegelschnitts, und die mit fh parallelen Coordinaten sind ihm zugeordnet.

Beweis. Der Coefficient von uu in der allgemeinen Gleichung des vor. §. läßt sich so ausdrücken
$\cos\Phi^2 + 2\cos\Phi\cos\psi\sin\Phi\ cot\,\alpha + \sin\Phi^2\ cot\,\alpha^2\ (\sin\psi^2\ \cos\psi^2)$
$- m^2\ \sin\Phi^2\ cosec\,\alpha^2 = (\cos\Phi + \sin\Phi\cos\psi\ cot\,\alpha)^2 + \sin\Phi^2\ \sin\psi^2$
$cot\,\alpha^2 - m^2\ \sin\Phi^2\ cosec\,\alpha^2$. Man setze $\cos\Phi + \sin\Phi\cos\psi\ cot\,\alpha$
$= K$, $\cos\Phi\ \cos\psi + \sin\Phi\ cot\,\alpha = g$, $m\sin\Phi\ cosec\,\alpha = h$, $mb = r$.

Nun

Nun war im vor. §. $\tang EeK = \frac{1}{\sin\phi \sin\psi \cot\alpha}$; wenn man also den Winkel $EeK = \eta$ setzt, so wird $\sin\phi \sin\psi \cot\alpha = \cot\eta$. Diese Werthe setze man in die allgemeine Gleichung für den Kegelschnitt, so erhält man

$$tt = 2\cot\eta,\ tu + (\cot\eta^2 + kk - hh).\ uu + 2(rh - fg)u + 2f\sin.\ t + ff - rr = 0.$$

Nun ist $Ee = f\sin\psi$; wenn man also $eS = T$ setzt, so wird $T = f\sin\psi + t$, und $t = T - f\sin\phi$. Dieß statt t gesetzt giebt die Gleichung $(T - \cot\eta.\ u)^2 + (kk - hh)\ uu + 2\ (f\cot\eta \sin\psi + (7h - fg)\ u + f^2 \cos\psi^2 - rr = 0$. Man ziehe MS (3. und 4. Fig.) mit eK parallel, so ist der Winkel $MsS = EeK = \eta$, und dieser Winkel ist wenigstens so lange spitz, als α nicht über 90° groß ist, ϕ und ψ aber kleiner als 180° sind, weil $\cot\eta = \sin\phi \sin\psi \cot\alpha$. Da nun in der Gleichung $\alpha < 90°$ angenommen ist; so ist auch η spitz, und s fällt zwischen e und S, so daß $es = eS - Ss$ wird. Setzt man nun $es = X$, $Ms = V$, so wird $u = V\sin\eta$, und $sS = u\cot\eta = V\cos\eta$, folglich $X = T - u\cot\eta$. Diese Werthe in die vorige Gleichung gesetzt geben $X^2 + (kk - hh)\sin\eta^2.\ V^2 + 2\ (f\cos\eta \sin\psi + (rh - fg)\sin\eta\ V + f^2\cos\psi^2 - rr = 0$. In dieser Gleichung kann man die Coordinaten X und V verwechseln. Wenn nämlich Mp mit fh parallel ist, so wird $ep = V$, und $pM = X$; dann aber gehören zu jeder Absciße ep zwo gleiche und entgegen gesetzte Coordinaten. Daraus folgt, daß ge ein Durchmesser sey, und daß die mit fh parallelen Coordinaten ihm zugeordnet seyn.

10. §.

Die Größe der beyden halben Durchschnittsmesser zu finden, wovon der eine in *ge* fällt, und der andre mit *fh* parallel ist.

Aufl.

Aufl. Man setze der Kürze wegen A, 2B, C, statt der dreyen Coefficienten in der letzten Gleichung zwischen X und V, so hat man $X^2 + A.V^2 + 2B.V + C = o$. Nun suche man die Werthe von V, wenn $X = d$ ist, so findet man aus der Gleichung $V + \frac{2B}{A}. V = -\frac{C}{A}$ folgende Wurzeln $V = \frac{B}{A} + \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{A}$. Hieraus ergiebt sich, daß der Mittelpunkt des Kegelschnitts um den Abstand $-\frac{B}{A}$ von e entfernt sey, und unterhalb e liege, wenn $\frac{B}{A}$ positiv ist. Ziehet man nun durch den Mittelpunkt eine neue Abscissenlinie mn mit fh parallel, so wächst (4. Fig.) die Ordinate $Ms = V$ um das Stück $ec = \frac{B}{A}$. Setzt man also die neue Ordinate $ey = Y$, so wird $V = Y - \frac{B}{A}$, und dieser Werth in die obige Gleichung für den Kegelschnitt gesetzt giebt folgende: $Y^2 = \frac{B^2 - AC}{A^2} - \frac{1}{A} X^2$. Daher ist die Hälfte des mit fh parallelen Durchmessers $em = \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{\sqrt{A}}$

$$= \frac{\sqrt{(f\,\sin\psi\,\cos\eta + (rh - fg)\,\sin\eta)^2 - (kk - hh)(ff\cos\psi^2 - rr)}}{\sqrt{(kk - hh)}},$$

und die Hälfte des zugehörigen Durchmessers $eg = \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{A} =$

$$\frac{\sqrt{(Cf\sin\psi\,\cos\eta + (rh - fg)\,\sin\eta)^2 - (kk - hh)\,(ff\cos\psi^2 - rr)}}{kk - hh}.$$

11. §.

Die Gestalt des Kegelschnitts zu finden, wenn die Ebene des Schnitts auf der Axe des Kegels senkrecht ist.

Aufl.

Aufl. Wenn EF (3. Fig.) mit AF parallel, also $\psi = 0$ ist, so fällt e in E, und EF ist auf BD folglich auf die Ebene BCD senkrecht, so daß nun $AEK = \phi$ wird, und $\eta = EeK = fEK = 90°$. Wenn demnach überdem der Winkel AKE (2. Fig.) = 90° ist, so ist die Ebene Fsf auf der Axe des Kegels senkrecht. Man setze also (2. Fig.) $\psi = 0$, und $AKE = 90°$, so wird $\phi = 90° - \alpha$. Diese Voraussetzungen geben $k = g = \cos\psi + \sin\phi \cot\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$, und $h = m \cos\alpha \operatorname{cosec}\alpha = m \cot\alpha$. Folglich wird $A = gg - hh = \operatorname{cosec}\alpha^2 - m^2 \cot\alpha^2$, $B = rh - fg = mr\cot\alpha - f\operatorname{cosec}\alpha$, $C = ff - rr$. Man setze diese Worte in die Gleichung $x^2 + A.V^2 + rB.V + C = 0$, so ergiebt sich die Gleichung

$$X^2 + (\operatorname{cosec}\alpha^2 - m^2 \cot\alpha^2)\,V^2 + 2\,(mr\cot\alpha - f\operatorname{cosec}\alpha)\,V + ff - rr = 0. \text{ oder } V^2 + \frac{2\,(mr\cot\alpha - f\operatorname{cosec}\alpha)\,V}{\operatorname{cosec}\alpha^2 - m^2\cot\alpha^2} = \frac{rr - ff - X^2}{\operatorname{cosec}\alpha^2 - m^2\cot\alpha^2}.$$

Nun ist in der 2. Fig. GE eine Hauptaxe des Schnitts, und wenn c der Mittelpunkt des Schnitts ist, so wird $Ec = -\frac{B}{A} = \frac{f\operatorname{cosec}\alpha - mr\cot\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha^2 - m^2\cot\alpha^2} = \frac{f\sin\alpha - mr\sin\alpha\cos\alpha}{1 - m^2\cos\alpha^2}$. Nachdem also dieser Ausdruck positiv oder negativ ist, fällt c oberhalb oder unterhalb Ff. Nimmt man die Absciſſen auf dem mit Ff parallelen Durchmesser, so erhält man $Y^2 = \frac{B^2 - AC}{A^2} - \frac{1\,X^2}{A}$ (10. §.), und im gegenwärtigen Fall wird $B^2 - AC = (rh\,fg)^2 - (gg - hh)(ff - rr) = (rg - fh)^2 = (r\operatorname{cosec}\alpha - m f\cot\alpha)^2 X^2$

also $Y^2 = \frac{(r \operatorname{cosec} \alpha - mf \cot \alpha)^2}{(\operatorname{cosec} \alpha^2 - m^2 \cot \alpha^2)^2} - \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha^2 - m^2 \cot \alpha^2} X^2$, oder $Y^2 = \frac{(r \sin \alpha^2 - mf \cos \alpha \sin \alpha)^2}{(1 - m^2 \cos \alpha^2)^2} - \frac{\sin \alpha^2}{1 - m^2 \cos \alpha^2} X^2$. Demnach ist die halbe Zwergaxe $= \frac{r \sin \alpha - mf \cos \alpha \sin \alpha}{1 - m^2 \cos \alpha^2}$ $= \frac{r b \sin \alpha (b - f \cos \alpha)}{bb - rr \cos \alpha^2}$, und die halbe conjungirte Axe, $= \frac{r - mf \cos \alpha}{\sqrt{(1 - m^2 \cos \alpha^2}} = \frac{r (b f \cos \alpha)}{\sqrt{(bb - rr \cos \alpha^2}}$. Nachdem also die Gestalt des Kegels so oder anders beschaffen ist; kann der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel seyn. Es werden nemlich diese drey Fälle statt haben, nachdem $b >=$ oder $< r \cos \alpha$ ist. Man hat aber $\tan ACB = \frac{r \sin \alpha}{b - r \cos \alpha}$. Nachdem also ACB ein spitzer, ein rechter, oder ein stumpfer Winkel ist, nachdem ist der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Folglich ist der Schnitt nicht allemal eine Ellipse, und auch in dem Fall, wenn ACB spitz ist, fällt der Mittelpunkt der Ellipse nie in die Axe des Kegels.

Soll nämlich das letztere erfolgen, so muß $Ec = EK$ seyn. Da nun $EK = f \sin \alpha$ ist, so müßte $\frac{f \sin \alpha - mr \sin \alpha \cos \alpha}{1 - m^2 \cos \alpha^2} = f \sin \alpha$ seyn. Hieraus folgt $f \sin \alpha - mr \sin \alpha \cos \alpha = f \sin \alpha - m^2 f \sin \alpha \cos \alpha^2$, oder $r \sin \alpha \cos \alpha = m f \sin \alpha \cos \alpha^2$, folglich $r = mf \cos \alpha$, oder $b = f \cos \alpha$, und $f = b \sec \alpha$. In diesem Fall also müßte der Schnitt durch die Spitze des Kegels gehen. Es ist nämlich $AK = f \cos \alpha$; also wäre in diesem Fall $AK = AC$. Daher kann der Mittelpunkt der Ellipse gar nicht in die Axe fallen, wie denn

denn auch in eben diesem Falle beyde Hauptaxen $= o$ werden, so daß die Ellipse in einem Punkte zusammen geht. Hindurch wird also dasjenige bestätiget, was im 3. §. behauptet worden.

12. §.

Wenn in der allgemeinen Gleichung für den Kegelschnitt (8. §.) $b = \infty$, also $\frac{r}{b} = m = o$ gesetz wird, so hat man die allgemeine Gleichung für den Schnitt eines schiefen Cylinders, dessen Axe gegen die Grundfläche unter dem Winkel $= \alpha$ geneigt ist. Die Gleichung selbst wird folgende.

$$\begin{array}{lllll} tt - 2 \sin\phi \sin\psi \cot\alpha\, tu & + \cos\phi^2\, uu & - 2f \cos\phi \cos\psi\, u & + 2f \sin\psi\, t & + ff = o. \\ & + 2\cos\phi \cos\psi \sin\phi \cot\alpha & - 2f \sin\phi \cot\alpha & & - rr \\ & + \sin\phi^2 \cot\alpha^2 & & & \end{array}$$

Der Schnitt ist allemal eine Ellipse, weil $(\cos\phi + \sin\phi \cos\psi \cot\alpha)^2$ allemal positiv ist. In dem Fall, wenn dieser Ausdruck $= o$ wäre, hätte man $\cot\phi = - \cos\psi \cot\alpha$. Aber

$$\tan g\, AeK = \frac{\tan g\,\phi \surd(1 - \cos\alpha^2 \cos\psi^2)}{\sin\alpha} = - \frac{\surd(1 - \cos\alpha^2 \cos\psi^2)}{\cos\psi \cos\alpha},$$

und $\tan g\, Abc = \frac{\surd(1 - \cos\alpha^2 \cos\psi^2)}{\cos\psi \cos\alpha}$, folglich $AeK = AbC$. Dies ist der Fall, da im Kegel der Schnitt eine Parabel seyn würde, woraus hier ein System zwoer grader und paralleler Linien wird, wie den Eigenschaften des Cylinders gemäß ist, und die Gleichung am kürzesten ergiebt, wenn man wie im 9. §. den Anfangspunkt der Absciſſen in e, und die Ordinaten mit gd parallel nimmt.

Es verwandelt sich nämlich die letzte Gleichung des 9. §. in folgende

$X^2 + kk\,\sin\eta^2 V^2 + 2f(\cos\eta\,\sin\psi - g\,\sin\eta)\,V + f^2\cos\psi^2 - rr = o,$

weil $k = o$ wird. Ueberdem ist $k = \cos\phi + \sin\phi\,\cos\psi\,\cot\alpha = o$, also auch $\cos\phi\,\cos\psi + \sin\phi\,\cot\alpha - \sin\phi\,\cot\alpha\,\sin\psi^2 = o$. Weil nun $\sin\phi\,\sin\psi\,\cot\alpha = \cot\eta$, so wird, $g - \cot\eta\,\sin\psi = o$, oder $\cos\eta\,\sin\psi - g\,\sin\eta = o$. Daher erhält man die Gleichung $X^2 + f^2\cos\psi^2 - rr = o$, und V wird nicht durch X bestimmt. Aber es wird $X = \pm\sqrt{rr - f^2\cos\psi^2}) = \pm\,ef$.

13. §.

Wenn die Ebene des Schnitts auf der Axe des Cylinders senkrecht ist, so wird die Gleichung so verändert $V^2 - 2f.\sin\alpha.\,V = (rr - ff - X^2)\sin\alpha^2$. Ueberdem wird GE eine Hauptaxe des Schnitts, und wenn c der Mittelpunkt des Schnitts ist, so wird $Ec = f\sin\alpha = EK$, so daß der Mittelpunkt in die Axe des Cylinders fällt. Setzt man also $Y = V - f\sin\alpha$, so erhält man die Gleichung $Y^2 = rr\,\sin\alpha^2 - X^2\sin\alpha^2$, und es wird die Hälfte der mit Ff parallelen Axe $= r$, die Hälfte der conjugirten Axe $= r\sin\alpha$. Der schiefe Cylinder hat also die Eigenschaft, daß alle durch seine Axe senkrecht geführten Schnitte Ellipsen werden, deren Mittelpunkte in des Cylinders Axe fallen. Man könnte daher diese Eigenschaft mit H. Euler Introd. in Anal. inf. Append. Cap. III. §. 52. für die Erklärung des schiefen Cylinders annehmen, wenn es nicht aus andern Gründen besser wäre, die gewöhnliche beyzubehalten, dessen zu geschweigen, daß bey dieser letzten Erklärung die Betrachtung des schiefen Cylinders aus den Anfangsgründen ganz wegbleiben müßte.

Uebri-

Uebrigens erhält man aus dem 10. §. $B = f(\cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)$, $A = (\cos\phi + \sin\phi \cos\psi \cot\alpha)^2 = kk$, $C = f^2 \cos\psi^2 - rr$. Rechnet man also die Abscissen vom Mittelpunkt, so wird die allgemeine Gleichung diese:

$$Y^2 = \frac{f^2(\cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)^2 - kk(f^2 \cos\psi^2 - rr)}{K^4} - \frac{1}{K^2} X^2$$

Die Hälfte des mit fh parallelen Durchmessers ist

$$= \frac{\sqrt{(f^2 \cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)^2 - kk(f^2 \cos\psi^2 - rr)}}{K},$$ und man hat die Hälfte des zugehörigen Durchmessers, wenn man jenen Ausdruck mit $\frac{1}{K}$ multiplicirt, da denn η der Conjugationswinkel ist, und $\cot\eta = \sin\phi \sin\psi \cot\alpha$.

14. §.

Wenn die Gestalt des Kegels gegeben ist, also r, b, und α, bekannt sind, zu finden, wie groß die Winkel ϕ und ψ genommen werden müssen, damit der Kegelschnitt ein Kreis werde.

Aufl. Die Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts mit derjenigen Ebene durch die Axe, welche die Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts und der Grundfläche halbirt, ist allemal ein Durchmesser des Kegelschnitts, und die ihm zugehörigen Ordinaten sind mit der Grundfläche parallel. So lange nun der Conjugationswinkel ein schiefer Winkel ist, kann der Schnitt kein Kreis seyn, weil der Kreis keine solche zusammengehörige Durchmesser hat, die sich unter einem schiefen Winkel schneiden. Damit also der Kegelschnitt ein Kreis werde, wird allemal erfordert, daß der Conjugationswinkel EeK $= \eta = 90°$ sey. Also muß $\cot\eta = \sin\phi$

$\sin\psi \cot\alpha = o$ seyn. Weil nun nicht $\cot\alpha = o$ seyn kann, wenn der Kegel ein schiefer Kegel ist, so ist entweder $\sin\phi = o$ oder $\sin\psi = o$. Im ersten Fall ist der Schnitt mit der Grundfläche parallel, und es ist aus den Anfangsgründen bekannt, daß alsdann der Schnitt ein Kreis sey. Wenn nun ϕ nicht $= o$ ist, so muß $\psi = o$, folglich fh auf BD senkrecht, und die Ebene des Schnitts auf der Neigungsebene BCD der Axe des Kegels gegen die Grundfläche senkrecht seyn. Damit nun in diesem Fall der Schnitt ein Kreis werde, wird überdem erfordert, daß die beyden Durchmesser, woran der eine mit fh parallel, der andre auf fh senkrecht ist, gleich groß seyn, wobey übrigens vorausgesetzt wird, daß AEK < ABC sey, damit der Schnitt in die Klasse der Ellipsen gehöre. In dem Fall nämlich, wenn (2. Fig.) AEK > ABC ist, würde die Voraussetzung, daß die Axen gleich seyn sollen, eine gleichseitige Hyperbel geben. Gehört aber der Schnitt in die Klasse der Ellipsen, so werden ihre Axen gleich, und der Schnitt wird ein Kreis, wenn in der Gleichung $Y^2 = \frac{B^2 - AC}{A^2} - \frac{1}{A}X^2$ (10. §.) $A = 1$ ist. Es war aber $A = kk - hh$, und wenn man aus dem 9 §. die dasigen Werthe statt k und h wieder herstellt, aber $\sin\psi = o$, und $\cos\psi = 1$ setzt, so erhält man $k = g = \cos\phi + \sin\phi \cot\alpha$, $h = m \sin\phi \operatorname{cosec}\alpha$, und man findet ϕ aus der Gleichung $\cos\phi^2 + 2\cos\phi \sin\phi \cot\alpha + \sin\phi^2 \cot\alpha^2 - m^2 \sin\phi^2 \operatorname{cosec}\alpha^2 = 1$. Dividirt man nämlich mit $\cos\phi^2$, so wird $(\cot\alpha^2 - m^2 \operatorname{cosec}\alpha^2) \tan\phi^2 + 2\cot\alpha \tan\phi = \tan\phi^2$, und von dieser Gleichung ist die eine Wurzel $\tan\phi = o$ für den Fall, wenn die Ebene des Schnitts mit der Grundfläche parallel ist. Die andere Wurzel giebt sich aus der Gleichung $2\cot\alpha = (1 - \cot\alpha^2 + m^2 \operatorname{cosec}\alpha^2) \times \tan\phi$, oder wenn man mit $\sin\alpha^2$ multiplicirt $2\cos\alpha \sin\alpha = (\sin\alpha^2 - \cos\alpha^2 + m^2 \tan\phi$, folglich $\tan\phi$

$$= \frac{2\sin\alpha \cos\alpha}{m^2 - (\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2)} = \frac{\sin 2\alpha}{m^2 - \cos 2\alpha}.$$

Wenn

Wenn man in dem Ausdruck $tang\,\phi = \frac{2 \sin\alpha \cos\alpha}{m^2 - \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2}$ Zehler und Nenner durch $m^2 - \cos\alpha^2$ dividirt, so erhält man $tang\,\phi = \frac{2 \sin\alpha \cos\alpha}{m^2 - \cos\alpha^2} : (1 + (\frac{\sin\alpha^2}{m^2 - \cos\alpha^2}) =$

$(\frac{\sin\alpha}{m - \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{m + \cos\alpha}) : (+ \frac{\sin\alpha}{m - \cos\alpha} \times \frac{\sin\alpha}{m + \cos\alpha})$. Es ist aber $tang\,\mathrm{ABC} = \frac{b \sin\alpha}{r - b\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{m - \cos\alpha}$, und $tang\,\mathrm{ADC} = \frac{b \sin\alpha}{r + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{m + \cos\alpha}$. Folglich wird $tang\,\phi = \frac{tang\,\mathrm{ABC} - tang\,\mathrm{ADC}}{1 - tang\,\mathrm{ABC}\; tang\,\mathrm{ADC}}$, oder $tang\,\phi = tang\,(\mathrm{ABC} - \mathrm{ADC})$, also $\phi = \mathrm{ABC} - \mathrm{ADC}$, und $\mathrm{ABC} = \phi + \mathrm{ADC} = \mathrm{CGE}$. Dies ist also die sectio coni subcontraria der Alten (Apollon. Con. Lib. I. Prop. V.) und es erhellet zugleich aus der bisherigen Analysi, daß kein andrer Schnitt, als die sectio subcontraria einen Kreis geben könne, dafern nicht die Ebene des Schnitts mit der Grundfläche des Kegels parallel ist (Apoll. Con. Lib. I. Prop. IX.)

15. §.

Man setze nun in den Formuln des 10. §. $\psi = 0$, also $\sin\psi = 0$, $\cos\psi = 1$, $\cot\eta = 0$, $\cos\eta = 0$, $\sin\eta = 1$, so wird $\mathrm{A} = gg - hh$, $\mathrm{B} = rh - fg$, $\mathrm{C} = ff - rr$, folglich $\frac{\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}}{\mathrm{A}^2} = \frac{(rg - fh)^2}{(gg - hh)^2}$, und man erhält für den auf der Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche senkrechten Schnitt diese allgemeine Gleichung $\mathrm{Y}^2 = \frac{(rg - fh)^2}{(gg - hh)^2} - \frac{1}{gg - hh}\mathrm{X}^2$, die Absciss-

sen

sen vom Mittelpunkt auf der mit Ff parallelen Axe gerechnet; und wenn c der Mittelpunkt ist, so hat man $Ec = -\frac{B}{A} = \frac{fg - rh}{gg - hh}$.

Setzt man aus dem 9. §. statt g und h ihre dortigen Werthe, so wird $\frac{(rg - fh)^2}{(gg - hh)^2} = \frac{(r(\cos\Phi + \sin\Phi \cot\alpha) - fm \sin\Phi \operatorname{cosec}\alpha)^2}{(l \cos\Phi + \sin\Phi \cot\alpha)^2 - m^2 \sin\Phi^2 \operatorname{cosec}\alpha^2)^2}$ $= \frac{(r \sin(\alpha + \Phi) - fm \sin\Phi)^2 \sin\alpha^2}{(\sin(\alpha + \Phi)^2 - m^2 \sin\Phi^2)^2}$, und $\frac{1}{gg - hh} = \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha + \Phi)^2 - m^2 \sin\Phi^2}$. Folglich erhält man die Gleichung $Y^2 = \frac{(r \sin(\alpha + \Phi) - fm \sin\Phi)^2 \sin\alpha^2}{(\sin(\alpha + \Phi)^2 - m^2 \sin\Phi^2)^2} - \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha + \Phi)^2 - m^2 \sin\Phi^2} X^2$.

Ueberdem wird $Ec = \frac{f(\cos\Phi + \sin\Phi \cot\alpha) - rm \sin\Phi \operatorname{cosec}\alpha}{(\cos\Phi + \sin\Phi \cot\alpha)^2 - m^2 \sin\Phi^2 \operatorname{cosec}\alpha^2} = \frac{f \sin\alpha \sin(\alpha + \Phi) - rm \sin\Phi \sin\alpha}{\sin(\alpha + \Phi)^2 - m^2 \sin\Phi^2}$.

Wenn nun $gg - hh = 1$, also der Schnitt ein Kreis ist, so wird $Y^2 = \frac{(r \sin(\alpha + \Phi) - fm \sin\Phi)^2}{\sin\alpha^2} - X^2$, weil $\sin(\alpha + \Phi)^2 - m^2 \sin\Phi^2 = \sin\alpha^2$ wird, also ist der Halbmesser des Kreises $= \frac{r \sin(\alpha + \Phi) - fm \sin\Phi}{\sin\alpha}$ und $Ec = \frac{f \sin(\alpha + \Phi) - rm \sin\Phi}{\sin\alpha}$, da denn $\Phi = ABC - ADC$ seyn muß.

16. §.

Wenn die Axe des Kegels $b = \infty$, also aus dem Kegel ein Cylinder wird, so ist $m = 0$, und man hat für den auf die Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche senkrechten

Schnitt

Schnitt die Gleichung $Y^2 = rr - \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha+\phi)^2} X^2$, und $Ec = \frac{f\sin\alpha}{\sin(\alpha+\phi)}$. Damit der Schnitt ein Kreis werde, muß $tang\,\phi = -tang\,2\alpha$, also $\phi = 180° - 2\alpha$ seyn. Folglich wird $EKA = 180° - \phi - \alpha = \alpha$, und $EK = EA = f$. Nun wird ferner $\alpha + \phi = 180° - \alpha$, also $\sin(\alpha+\phi) = \sin\alpha$, und dies giebt $Ec = f$. Demnach fällt der Mittelpunkt des Kreises in die Axe des Cylinders, und sein Halbmesser ist dem Halbmesser der Grundfläche gleich. Es wird nämlich die Gleichung so verändert $Y^2 = rr - X^2$.

17. §.

Dafern die Axe des Kegels dem Halbmesser seiner Grundfläche gleich, also $r = b$ und $m = 1$ ist; so liegen die drey Punkte B, C, D. im Umfang eines Halbkreises, über BD, folglich ist $BCD = 90°$, und $ADC = 90° - ABC$. Wird nun $\phi = ABC - ADC$ genommen, so ist $\phi = ABC - 90°$, $AKE = 180° - (\alpha+\phi)$, und $\alpha = 180° - 2ABC$, folglich $AKE = 90°$, und der Schnitt ist auf des Kegels Axe senkrecht. Wenn demnach $r = b$ ist, so giebt jeder auf die Axe senkrechte Schnitt einen Kreis. Da nun in eben diesem Fall $\alpha + \phi = 90°$ ist, so wird $\sin\phi = \cos\alpha$, und $\cos\phi = \sin\alpha$. Demnach fällt der Mittelpunkt in c, wenn $Ec = \frac{f - r\cos\alpha}{\sin\alpha}$ genommen wird, und der Halbmesser des Kreises wird $= \frac{r - f\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Fällt überdem in eben diesem Fall der Mittelpunkt der Grundfläche in die Ebene des Schnitts, so gehet Ff durch A, und es ist $AE = f = 0$, also $Ec = -r\cot\alpha$, und der Halbmesser des Kreises $= \frac{r}{\sin\alpha} = r\,cosec\,\alpha$.

18. §.

Dieß ist der Fall der stereographischen Projection der Meridiane der Kugel, wenn die Tafel selbst ein Meridian ist, wofür man gewöhnlich den ersten Meridian annimmt, und das Auge im Pol dieses Meridians stehet. (Man vergleiche nun hiemit die Abhandlung von den Projectionen der Kugel, worauf ich in der Folge allemal der Kürze wegen unter dem Namen der **vorigen Abhandlung** verweisen werde.) Wenn der Meridian PLQ (6. Figur der **vorigen Abhandlung**) die Tafel GPHQ unter dem Winkel GTF = CTl schneidet, so ist dieser Winkel = 90° — OTl, und OTl ist der Neigungswinkel der Axe des optischen Kegels gegen seine Grundfläche, der in der bisherigen Ausführung = α gesetzt ist. In der **vorigen Abhandlung** war GTF = γ, also ist hier $cot\,\alpha = tang\,\gamma$, und $cosec\,\alpha = sec\,\gamma$. Dies giebt den Halbmesser der Projection = $r\,sec\,\gamma$, und seinem Abstand von PQ, oder TC = $-r\,tang\,\gamma$, wie im 16. §. **voriger Abhandlung.**

19. §.

Die stereographische Horizontal-Projection der Meridiane (21. §. der **vorigen Abhandlung**) gehört ebenfalls hieher, wenn die Tafel der Horizont des Punkts (5. Fig.) Z ist, und das Auge im Nadir stehet. Man lege durch OT als die Axe des Kegels eine Ebene Obd auf den Meridian $bpdq$ als des Kegels Grundfläche senkrecht, und die Durchschnittslinie mit dem Meridian sey bd; so ist OTb der Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche, welcher bisher = α gesetzt ist, und sein Maas ist der Bogen Ob eines grösten Kreises der Kugel. Wenn nun, wie im 21. §. der **vorigen Abhandlung**, die Breite des Orts Z = λ und der Stundenwinkel LpZ = ϕ gesetzt wird, so ist im sphärischen Dreyeck Obq die Seite O$b = \alpha$, Oq = 90° — λ und der Winkel

Oqb

$Oqb = LpZ = \Phi$. Bey b aber ist ein rechter Winkel, folglich wird $\sin\alpha = \cos\lambda \sin\Phi$, und $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1.}{\cos\lambda \sin\Phi} = \sec\lambda \operatorname{cosec}\Phi$. Dieß giebt den Halbmesser der Projection $r \operatorname{cosec}\alpha = r \sec\Phi \operatorname{cosec}\lambda$, wie im 21. §. voriger Abhandlung.

20. §.

Um auch die Lage des Mittelpunkts C der Projection auf der Tafel zu finden schließe man so. Die Ebene Obd schneide die Tafel in TG, so ist G ein Scheitel des Kegelschnitts, wenn G in Od liegt. Ueberdem sey Nn die Durchschnittslinie der Tafel und der Grundfläche des Kegels, so ist TG auf Nn senkrecht, und der Mittelpunkt C liegt in GT. Um ihn zu finden, muß man TC $= - r \cot\alpha$ nehmen (17. §.). Es war aber $\operatorname{cosec}\alpha = \sec\lambda \operatorname{cosec}\Phi$, also wird $\cot\alpha = \surd(\sec\lambda^2 \operatorname{cosec}\Phi^2 - 1)$, und TC $= -r\surd(\sec\lambda^2 \operatorname{cosec}\Phi^2 - 1)$. Weil nun $\sec\lambda^2 \operatorname{cosec}\Phi^2 - 1 = \operatorname{cosec}\Phi^2 + \operatorname{tang}\lambda^2 \operatorname{cosec}\Phi^2 - 1 = \frac{1 + \operatorname{tang}\lambda^2 - \sin\Phi^2}{\sin\Phi^2} = \frac{\operatorname{tang}\lambda^2 + \cos\Phi^2}{\sin\Phi^2}$

$$= \frac{\operatorname{tang}\lambda^2 (\sin\Phi^2 + \cos\Phi^2) + \cos\Phi^2}{\sin\Phi^2} = \frac{\operatorname{tang}\lambda^2 \sin\Phi^2 + \sec\lambda^2 \cos\Phi^2}{\sin\Phi^2}$$

$= \frac{\operatorname{tang}\lambda^2 \operatorname{tang}\Phi^2 + \sec\lambda^2}{\operatorname{tang}\Phi^2}$; so wird TC $= -r \surd\frac{(\operatorname{tang}\lambda^2 \operatorname{tang}\Phi^2 + \sec\lambda^2}{\operatorname{tang}\Phi^2}$. Ferner ist das sphärische Dreyeck BpN bey B rechtwinklicht, und die Seite B$p = \lambda$, der Winkel BpN $= \Phi$, folglich tang BN $= \sin\lambda \operatorname{tang}\Phi = \cot$ BTG $= \cot$ DTC.

Das giebt $\sin$ DTC $= \frac{1.}{\surd(1 + \sin\lambda^2 \operatorname{tang}\Phi^2)} =$

$$\surd\frac{1 : \cos\lambda^2}{1 : \cos\lambda^2 + \operatorname{tang}\lambda^2 \operatorname{tang}\Phi^2} = \frac{\sec\lambda}{\surd(\sec\lambda^2 + \operatorname{tang}\lambda^2 \operatorname{tang}\Phi^2},$$

und $\cos DTC = \frac{\sin\lambda \tan\phi}{\sqrt{(1+\sin\lambda^2 \tan\phi^2)}} =$ $\frac{\tan\lambda \tan\phi}{\sqrt{(\sec\lambda^2 + \tan\lambda^2 \tan\phi^2)}}$. Man setze nun CD auf BT senkrecht, so ist $DC = TC \sin DTC = -\frac{r \sec\lambda}{\tan\phi}$, und $DT = TC \cos DTC = -r \tan\lambda$, beyde wie im 21. §. voriger Abhandlung.

21. §.

Wenn die Ebene des Kegelschnitts nicht allein auf der Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche senkrecht ist, so hat man $\psi = 0$, und $\phi = 90°$. Damit aber der Kegelschnitt ein Kreis werde, muß $\tan\phi = \frac{\sin 2\alpha}{m^2 - \cos 2\alpha}$ seyn, oder $\cot\phi = \frac{m^2 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$. Demnach wird bey gegenwärtiger Voraussetzung $\frac{m^2 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 0$, und $m^2 = \cos 2\alpha$, oder $\frac{rr}{bb} = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$, folglich $rr + bb \sin\alpha^2 = bb \cos\alpha^2$. Ueberdem giebt diese Voraussetzung $\sin(\alpha + \phi) = \cos\alpha$, also den Halbmesser der Projection $= \frac{r \cos\alpha - fm}{\sin\alpha}$, und $Ec = \frac{f \cos\alpha - rm}{\sin\alpha}$. Geht überdem der Schnitt durch den Mittelpunkt der Grundfläche, so ist $f = 0$, also der Halbmesser des Schnitts $= \frac{r \cos\alpha}{\sin\alpha} = r \cot\alpha$, und $Ec = -\frac{rm}{\sin\alpha} = -\frac{rr}{b \sin\alpha}$.

22. §.

22. §.

Dieser letzte Fall findet seine Anwendung bey der stereographischen Projection der Parallelkreise des Aequators auf einem Meridian als der Tafel, wenn das Auge im Pol dieses Meridians stehet. Es sey in der 9. Fig. zur vorigen Abhandlung wo DLd einen Parallelkreis vorstellt, dieses Parallelkreises Halbmesser $= r$, der Kugel Halbmesser $= \rho$. Wenn nun e sein Mittelpunkt ist, und man ziehet Oe als die Axe des optischen Kegels, so ist der Neigungswinkel dieser Axe gegen die Grundfläche $= e\mathrm{OT} = \alpha$, und $\mathrm{O}e = b$. Ferner ist $\mathrm{T}e = b \sin\alpha$, $\mathrm{OT} = \rho = b \cos\alpha$, und $\rho\rho = \mathrm{T}e^2 + rr$, also $bb \cos\alpha^2 = bb \sin\alpha^2 + rr$, wie erfordert wird, damit die Projection ein Kreis werde. Ueberdem geht die Tafel durch den Mittelpunkt des Parallelkreises, also wird der Halbmesser der Projection $= r \cot\alpha = \frac{r\mathrm{OT}}{\mathrm{T}e}$. Wenn nun die Breite des Parallelkreises $= \psi$ ist, so wird $\mathrm{T}e = \rho \sin\psi$, und $r = \rho \cos\psi$, also $\frac{r}{\mathrm{T}e} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \cot\psi$, folglich ist der Halbmesser der Projection $= \rho \cot\psi$. Weiter wird $\mathrm{E}c = -\frac{rr}{b \sin\alpha} = \frac{\rho\rho \cos\psi^2}{\rho \sin\psi} = -\rho \cos\psi \cot\psi$. Da nun $\mathrm{T}e = \rho \sin\psi$, so wird $\mathrm{T}c = \rho(\sin\psi + \cos\psi \cot\psi) = \rho \times \frac{\sin\psi^2 + \cos\psi^2}{\sin\psi} = \rho \operatorname{cosec}\psi$, welches mit dem 19. §. der vorigen Abhandlung übereinstimmet.

23. §.

Bey der stereographischen Horizontal-Projectionen der Parallelkreise des Aequators läßt sich die bisherige Theorie (6. Fig.) so anwenden. Man ziehe OM, OC, und ON, wenn MFNf der

Parallelkreis und C sein Mittelpunkt ist; so ist OC die Axe des optischen Kegels, und der Parallelkreis die Grundfläche. Die Ebene des Meridians OBZβ ist die Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche, und der Neigungswinkel selbst ist OCN $= \alpha$. Auf der Ebene dieses Neigungswinkels steht die Tafel BFβf senkrecht, und sie schneidet die Grundfläche des Kegels unter dem Winkel TEM $= \psi$. Weil nun TC auf MN senkrecht ist, und auch ETZ $= 90^\circ$, so ist CTZ $=$ TEC $= \psi$, und OTC $= 180^\circ - \psi$, so wie TCO $= 90^\circ - \alpha$, folglich TOC $= 180^\circ -$ OTC $-$ TCO $= \alpha + \psi - 90^\circ$. Man setze CO $= b$, und CM $= r$, so hat man $\sin$ OTC : $b =$ $\sin$ TCO : TO, also TO $= \frac{b \sin \text{TCO}}{\sin \text{OTC}} = \frac{b \cos \alpha}{\sin \psi} =$ TM. Ferner $\sin$ OTC : $b = \sin$ TOC : TC, also TC $= \frac{b \sin \text{TOC}}{\sin \text{OTC}} = \frac{b \cos(\alpha + \psi)}{\sin \psi}$.

Aber TM² $=$ TC² $+$ CM² also $\frac{bb \cos \alpha^2}{\sin \psi^2} = \frac{bb \cos(\alpha + \psi)^2}{\sin \psi^2} + rr$.

Hieraus folgt $bb \cos \alpha^2 = bb (\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin \psi) + rr \sin \psi^2$, oder $bb \cos \alpha^2 = bb (\cos \alpha^2 \cos \psi^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \psi \cos \psi + \sin \alpha^2 \sin \psi^2) + rr \sin \psi^2$. Wenn man nun $1 - \sin \psi^2$ statt $\cos \psi^2$ schreibt, so erhält man ferner $2\, bb \sin \alpha \cos \alpha = rr + bb \sin \alpha^2 -$ $bb \cos \alpha^2$) $\times \tang \psi$, folglich $\tang \psi = \frac{bb \sin 2\alpha}{rr - bb \cos 2\alpha} =$

$\frac{\sin 2\alpha}{m^2 - \cos 2\alpha}$. Demnach ist vermöge des 14. §. der Schnitt ein Kreis.

24. §.

Der Halbmesser dieses Kreises ist vermöge des 15. §. $=$ $\frac{r \sin \alpha + \phi - f m \sin \phi}{\sin \alpha} = \frac{r (b \sin \alpha + \phi - f \sin \phi)}{b \sin \alpha}$, und wenn man

$f \sin$

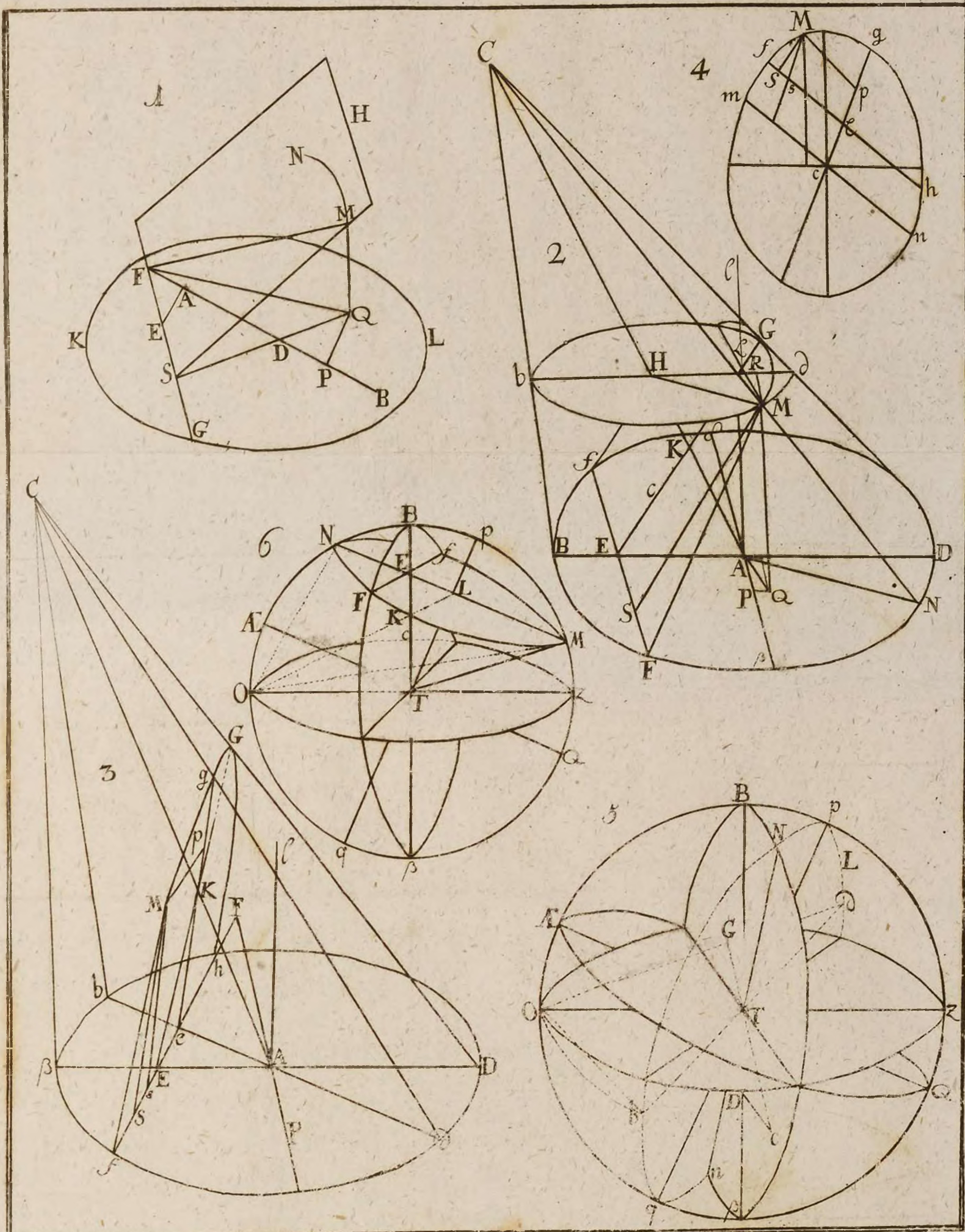
in der Linie ET den Abstand $Ec = \frac{f \sin \alpha + \phi - r m \sin \phi}{\sin \alpha}$ $= \frac{b f \sin(\alpha+\phi) - rr \sin \phi}{b \sin \alpha}$ nimmt, so ist c der Mittelpunkt der Projection. Es sey der Kugel Halbmesser $= \rho$, so ist $\rho = \frac{r}{\cos \psi}$. Ueberdem ist der Winkel $OKT = 180° - (\alpha+\phi)$, wenn nemlich K der Punkt ist, worinn OC von der Tafel geschnitten wird. Daher ist im Dreyeck OKT die Seite $OK = \frac{\rho}{\sin(\alpha+\phi)}$, im Dreyeck ECK aber die Seite $KC = \frac{f \sin \phi}{\sin(\alpha+\phi)}$, folglich $OK + KC = b = \frac{\rho + f \sin \phi}{\sin(\alpha+\phi)}$, und $f \sin \phi = b \sin(\alpha+\phi) - \rho$. Dies statt $f \sin \phi$ gesetzt giebt den Halbmesser der Projection $= \frac{\rho r}{b \sin \alpha}$. Nun war im 28. §. der vorigen Abhandlung die Breite des Orts $Z = \phi$, und des Parallelkreises Breite $= \psi$. Daher ist der Bogen $ON = \psi + \phi$, und $ZM = \psi - \lambda$. Im Dreyeck OCN aber ist die Seite $ON = 2 \rho \sin \frac{1}{2} (\psi + \lambda)$ der Winkel $ONM = \frac{1}{2}(180° - (\psi - \lambda)) = 90° - \frac{1}{2}(\psi - \lambda)$ und $OCN = \alpha$. Folglich hat man im Dreyeck OCN die Proportion $b : \cos \frac{1}{2} (\psi - \lambda) = 2 \phi \sin \frac{1}{2}(\psi + \lambda) : \sin \alpha$, und diese giebt $b \sin \alpha =$ $b \sin \alpha = 2 \rho \cos \frac{1}{2} (\psi + \lambda) = \rho (\sin \psi + \sin \lambda)$. Daher wird der Halbmesser der Projection $= \frac{\rho}{\sin \psi + \sin \lambda} = \frac{\rho \cos \psi}{\sin \psi + \sin \lambda}$.

Ferner ist $b f \sin(\alpha+\phi) = ff \sin \phi + f \rho$, also $Ec = \frac{(ff - rr) \sin \phi + f \rho}{b \sin \alpha}$. Man hat überdem $(CM + CE)(CM - CE) =$

(Tβ

$(T\beta + TE)\,(T\beta - TE)$, oder $rr - ff = \rho\rho - TE^2$. Dieß giebt $Ec = \frac{(TE^2 - \rho\rho)\sin\Phi + f\rho}{b \sin\alpha}$. Es ist aber $TE = \frac{\rho \sin\psi}{\sin\Phi}$, also $(TE^2 - \rho\rho)\sin\Phi = \frac{\rho^2 \sin\psi^2 - \rho^2 \sin\Phi^2}{\sin\Phi}$; ferner $\rho \sin\psi = CT = f \tan g\,\Phi$, folglich $f = \rho \sin\psi \cot\Phi$ und $Ec =$ $\frac{\rho^2 \sin\psi\,(\sin\psi + \cos\Phi)}{b \sin\alpha \sin\psi} - \frac{\Phi \sin \rho^2}{b \sin\Phi}$. Ist nun ÆQ die Durchschnittslinie des Aequators mit dem Meridian, so ist $QTZ + CTZ = 90^\circ = \lambda + \Phi$, also $\sin\Phi = \cos\lambda$, und $\cos\Phi = \sin\lambda$. Ueberdem war $b \sin\alpha = \rho(\sin\psi + \sin\lambda)$, also findet man $Ec =$ $\frac{\rho \sin\psi}{\sin\Phi} - \frac{\rho \cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda} = TE - \frac{\rho\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda}$, und daraus folgt $TE - Ec = Tc = \frac{\rho\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda}$, welches wiederum alles mit dem 28. §. der vorigen Abhandlung übereinstimmet.

W. J. G.


1
2
3
4
5
6