BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 161

KACsche Potentialtheorie für Resolventen, Markoffsche Prozesse und harmonische Räume

von

RAINER WITTMANN

Vorgelegt von Herrn Professor Heinz Bauer
in der Sitzung vom 12. Juni 1981

MÜNCHEN 1982

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

ISSN 0005–6995

(Abhandlungen – Bayerische Akademie der Wissenschaften.
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse)

ISBN 37696 2551 X

© Bayerische Akademie der Wissenschaften München, 1982
Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 4

Einleitung 5

Teil I – Resolventen

§ 1 Grundlagen aus der Theorie der Resolventen 8
§ 2 Elementare Eigenschaften der starken Gefegten 15
§ 3 S-Dünnheit 26
§ 4 An Resolventen assoziierte Topologien 37
§ 5 Der Approximationssatz 64

Teil II – Markoffsche Prozesse

§ 1 Doobsche Markoff-Prozesse 76
§ 2 Wesentliche Eintrittszeiten und starke Balayage 85
§ 3 Verzweigungspunkte Markoffscher Prozesse 96
§ 4 Anwendung auf Dynkinsche Markoff-Prozesse 109

Teil III – Harmonische Räume

§ 1 Resolventen auf harmonischen Räumen 117
§ 2 Starke Balayage auf harmonischen Räumen 121
§ 3 Beziehung zwischen starker Balayage und anderen Balayage-Operationen . 126

Anhang 1: Eine Charakterisierung von Axiom (inf) 150

Anhang 2: Erste Eintrittszeit und wesentliche Eintrittszeit 154

Anhang 3: Stark reguläre Mengen 156

Literaturverzeichnis 159

Bezeichnungen 162

Index 163

Nachtrag 164

Vorwort

Die Potentialtheorie ist eine ziemlich alte mathematische Disziplin. Ihre Geburtsstunde schlug, als P. S. Laplace entdeckte, daß das zu einem elektrischen Feld gehörige Potential außerhalb des Trägers der Ladung harmonisch ist. Physikalische Ideen prägten dann auch die Anfangsphase, in der Gauß wohl die wichtigsten Beiträge lieferte. Aber schon Riemann stieß auf große Schwierigkeiten, als er diese physikalischen Methoden zu einem mathematischen Prinzip erhob. Auf einer mathematisch gesicherten Grundlage wurde dann die klassische Epoche der Potentialtheorie etwa bis zum Jahre 1930 abgeschlossen. Die letzten Arbeiten aus dieser Zeit, ich denke hier vor allem an die Theorie der superharmonischen Funktionen von F. Riesz und an die Perronsche Lösung des Dirichletschen Problems, leiten dann zur modernen Epoche der Potentialtheorie über.

Charakteristisch für die neueren Entwicklungen ist das Verschwinden der Differentialrechnung aus der Potentialtheorie. Ausgehend von der axiomatischen Behandlung des Dirichletschen Problems entwickelten M. Brelot und H. Bauer die Theorie der harmonischen Räume, die sehr allgemeine elliptische und parabolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung umfaßt. J. L. Doob und vor allem G. A. Hunt schufen die Potentialtheorie Markoffscher Prozesse und gaben für zahlreiche potentialtheoretische Phänomene eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation. A. Beurling und J. Deny abstrahierten die klassische Theorie der Energie von O. Frostmann und H. Cartan und gelangten zu den Dirichletschen Räumen. Über diese Entwicklungen geben die unten aufgeführten Übersichtsartikel genauer Auskunft.

Im Zeichen der „modernen" Potentialtheorie steht auch die hier vorgelegte Arbeit.

Literaturverzeichnis

Bauer, H., Harmonische Räume. In: Jahrbuch Überblicke der Mathematik 1981. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich (1981).

Bliedtner, J., Axiomatic foundation of potential theory. North Holland Math. Studies 38, 57–68. North Holland, Amsterdam (1980).

Brelot, M., Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel. L'Enseignement mathématique, 58, 1–36 (1972).

Brelot, M., La théorie moderne du potentiel. Ann. Inst. Fourier 4, 113–133 (1954).

Einleitung

Sei X eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, die eine Green-Funktion besitzt (siehe **He.**, S. 99). $\mathbf{H}^*_{X,+}$ sei der konvexe Kegel aller positiven, hyperharmonischen Funktionen auf X (siehe **He**, S. 174). In der klassischen Potentialtheorie spielt die Gefegte $\hat{R}_f^A$ einer positiven, hyperharmonischen Funktion f über einer Menge $A \subset X$ eine zentrale Rolle. Die folgende Aussage ist als Brelotscher Konvergenzsatz bekannt:

$\hat{R}_f^A = \inf \{ g \in \mathbf{H}^*_{X,+} : I_A \cdot f \leqslant g$ bis auf eine polare Menge$\}$. Ersetzt man in obiger Gleichung die polaren Mengen durch die Nullmengen des Lebesgueschen Maßes λ^n, so gilt im allgemeinen keine Gleichheit mehr. Man gelangt zu einem neuen Objekt:

$\hat{S}_f^A := \inf \{ g \in \mathbf{H}^*_{X,+} : I_A \cdot f \leqslant g$ bis auf eine λ^n-Nullmenge$\}$. Da $\hat{S}_f^A \leqslant \hat{R}_f^A$ ist, nennt man $\hat{S}_f^A$ die starke Gefegte von f über A. Ausgehend von diesem Begriff entwickelten M. Kac, Z. Ciesielski, D. W. Stroock und andere eine zur klassischen Potentialtheorie analoge, aber mit dieser keineswegs identische Theorie, die man als semiklassische oder Kacsche Potentialtheorie bezeichnet. In **Cie** wird diese Theorie ziemlich detailliert dargestellt. In der Kacschen Potentialtheorie kann man das Dirichlet-Problem behandeln, man hat einen Dünnheits-Begriff und es besteht eine enge Beziehung zur Brownschen Bewegung.

Die weitere Entwicklung wird von zwei Bemerkungen ausgelöst:

(1) Die positiven, hyperharmonischen Funktionen auf X sind genau die bezüglich der Brownschen Bewegung auf X exzessiven Funktionen.

(2) Die λ^n-Nullmengen sind genau die Mengen vom Potential o der Brownschen Bewegung.

Begriffe wie „exzessiv" und „vom Potential o" sind aber bereits für jede beliebige submarkoffsche Resolvente $(V_p)_{p>0}$ auf einem beliebigen Meßraum $(E, \mathfrak{E})$ definiert. Wir können deshalb verallgemeinern:

$$\hat{S}_f^A := \inf \{ g \in \tilde{\mathfrak{E}}^0 : I_A \cdot f \leqslant g \quad \text{bis auf eine Menge vom Potential o} \}$$

(hierbei sei $\tilde{\mathfrak{E}}_0$ der konvexe Kegel aller bezüglich $(V_p)_{p>0}$ exzessiven Funktionen).

Die Operation $\hat{S}_f^A$ wurde bereits von mehreren Autoren untersucht. Ich möchte besonders die Arbeit **Wa** von T. Watanabe erwähnen. In all diesen Arbeiten fehlt jedoch die Beziehung zur semiklassischen Potentialtheorie, die für meine Arbeit richtungsweisend ist. In der Tat zeigt es sich, daß eine ganze Reihe von Resultaten aus der semiklassischen Potentialtheorie sich in natürlicher Weise auf die obige, ziemlich allgemeine Situation verallgemeinern lassen. Ich möchte hier nur das in diesem Zusammenhang wichtigste Resultat, den Approximationssatz, ansprechen:

$$\hat{S}_f^A = \sup \{ Vg : g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E}),\ Vg \leqslant f,\ \{ g > o \} \subset A \}$$

(der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ sei hierbei eigentlich).

In Teil I beschäftigen wir uns also mit der Kacschen Potentialtheorie für beliebige submarkoffsche Resolventen auf beliebigen Meßräumen. In Teil II sollen dann die meisten Begriffe aus Teil I wahrscheinlichkeitstheoretisch interpretiert werden.

Um das Hauptresultat zu skizzieren, muß ich etwas weiter ausholen. Sei $(V_p)_{p>0}$ die Resolvente eines Hunt-Prozesses $(X_t)_{t\geq 0}$ mit einem LKAB E als Zustandsraum. Für alle Borelschen Mengen A des Zustandsraumes und alle exzessiven Funktionen f bewies G. A. Hunt die folgende grundlegende, als Balayage-Theorem bekannte Aussage:

$$R_f^A := \inf \{ g \in \tilde{\mathfrak{E}}_0 : I_A \cdot f \leqslant g \} \text{ ist supermedian,}$$

$$\widehat{(R_f^A)}(x) = E^x\left(I_{\{T_A<\xi\}} \cdot f \circ X_{T_A}\right) \text{ für alle } x \in E$$

(hierbei sei ξ die „Lebenszeit" und T_A die erste Eintrittszeit in die Menge A des Prozesses $(X_t)_{t\geq 0}$).

Für die starke Gefegte lautet die analoge Aussage:

$$\hat{S}_f^A(x) = E^x\left(I_{\{W_A<\xi\}} \cdot f \circ X_{W_A}\right) \text{ für alle } x \in E$$

(hierbei sei W_A die wesentliche Eintrittszahl des Prozesses $(X_t)_{t\geq 0}$ in die Menge A).

Für Standard-Prozesse wurde dieses Balayage-Theorem in der oben bereits erwähnten Arbeit von Watanabe bewiesen. In Teil II wird hierfür ein völlig anderer Beweis gegeben, der für sehr allgemeine Markoff-Prozesse gültig ist. Da die Begriffe aus der Theorie der Markoff-Prozesse sich im ständigen Umbruch befinden, habe ich mich für eine eigene Definition eines Markoff-Prozesses entschieden, die auf das Balayage-Theorem besonders gut zugeschnitten ist. Vorkenntnisse über Markoff-Prozesse sind nicht nötig, Standardwissen über Wahrscheinlichkeitstheorie, wie es in **Ba** vermittelt wird, reicht für das Verständnis von Teil II völlig aus.

Teil III spielt sich im Rahmen der Theorie der harmonischen Räume ab. Man betrachtet Resolventen, deren exzessive Funktionen genau die positiven, hyperharmonischen Funktionen sind. Leider kann die starke Gefegte je nach Wahl der zu Grunde liegenden Resolventen stark schwanken. Die starke Gefegte ist also für einen harmonischen Raum *nicht* eindeutig definiert. Wie in der Mathematik üblich, versucht man, wenn ein Objekt nicht eindeutig bestimmt ist, alle Möglichkeiten zu klassifizieren. Dieser Problembeschaffungstrieb der Mathematiker ist jedoch nicht der einzige Anlaß für Teil III. Besonders die Charakterisierung der „größten" starken Balayage-Operation über einer Menge A (siehe Satz III, 3.13) gestattet es, eine Reihe von Resultaten aus der Theorie der harmonischen Räume zu beweisen, die nichts mit starker Balayage zu tun haben. Ähnliche Resultate wurden gleichzeitig von W. Hansen in **Ha** erzielt. Teil III ist unabhängig von Teil II. Ich möchte nun über den Begriff des Verzweigungspunktes sprechen, der fast pausenlos in Teil I und II auftaucht. A priori hat dieser nichts mit Kacscher Potentialtheorie zu tun. Grob gesprochen tauchen Verzweigungspunkte immer dann auf, wenn ein als richtig eingeschätztes Ergebnis sich für manche „pathologische" Resolventen als falsch erweist. Wie geben eine kurze Kostprobe.

In I, § 3 wird der Begriff der S-Dünnheit eingeführt. Analog zur „üblichen" Dünnheit wäre zu erwarten, daß die Vereinigung zweier in einem Punkt S-dünnen Mengen ebenfalls S-dünn in diesem Punkt ist. Dies ist im allgemeinen falsch.

Entscheidend für die Einführung des Begriffes „Verzweigungspunkt" ist aber nicht das Auftreten von „Pathologien", sondern daß all diese „Pathologien" zueinander äquivalent sind. „Verzweigungspunkt" ist also ein Name für eine Äquivalenzklasse von „Pathologien".

Resolventen, die keine Verzweigungspunkte besitzen, werden sinnvollerweise als normal bezeichnet.

Für Ray-Prozesse kennt man bereits einen Begriff „Verzweigungspunkt", der in fast allen Fällen mit dem in dieser Arbeit entwickelten übereinstimmt.

Grundlegend für eine andere Reihe von Anwendungen ist das folgende in I, § 4 bewiesene Resultat.

Sei $(V_p)_{p>0}$ eine normale, submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die gröbste Topologie, bezüglich der jede für ein $a \geqslant 0$ a-exzessive Funktion stetig ist, wird als feine Topologie bezeichnet. Für alle fein-offenen Mengen U und alle exzessiven Funktionen f gilt dann: $\hat{S}_f^U = R_f^U$.

Dieser Zusammenhang zwischen der starken Gefegten und der „üblichen" Reduzierten erlaubt es, zahlreiche Aussagen über letztere zu machen, wenn U fein-offen ist. Bislang war nicht einmal bekannt, ob R_f^U für alle fein-offenen Mengen überhaupt meßbar ist. Kombiniert man obiges Resultat mit verschiedenen Versionen des Approximationssatzes, so erhält man Verallgemeinerungen und Verschärfungen einiger Resultate von Hunt.

Am Ende der einzelnen Paragraphen steht meistens eine Schlußbemerkung, die einerseits die wesentlichen Ergebnisse herausheben und andererseits auf bereits bekannte Resultate hinweisen soll. Einige ergänzende Fragen werden in verschiedenen Anhängen behandelt.

Frau Dr. U. Schirmeier schulde ich Dank für zahlreiche Hinweise.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Heinz Bauer, möchte ich an dieser Stelle zum einen für die dieser Arbeit entgegengebrachte Aufmerksamkeit und zum anderen für das mir vermittelte Wissen danken.

I, § 1 Grundlagen aus der Theorie der Resolventen

1: Für einen Meßraum $(E, \mathfrak{E})$ führen wir folgende Bezeichnungen ein:
$\mathfrak{E}_u$: = σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von $(E, \mathfrak{E})$.
Jeder eigentliche Kern K auf $(E, \mathfrak{E})$ besitzt dann eine eindeutige Fortsetzung K^u auf den Meßraum $(E, \mathfrak{E}_u)$.
$B(E, \mathfrak{E})$: = Menge aller numerischen, meßbaren Funktionen auf $(E, \mathfrak{E})$.
$B_+(E, \mathfrak{E}) := \{ f \in B(E, \mathfrak{E}) : f \geqslant 0 \}$.
$B_b(E, \mathfrak{E}) := \{ f \in B(E, \mathfrak{E}) : f \text{ ist beschränkt} \}$.
$B_{b,+}(E, \mathfrak{E}) := (B_b(E, \mathfrak{E}) \cap B_+(E, \mathfrak{E}))$.
Auf dem Vektorraum $B_b(E, \mathfrak{E})$ führen wir die Supremum-Norm ein:

$$\| \ \|_\infty : B_b(E, \mathfrak{E}) \longrightarrow \mathbf{R}_+$$
$$f \longrightarrow \sup \{ |f(x)| : x \in E \}.$$

2: Eine Familie $(V_p)_{p>0}$ von Kernen auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$ heißt eine *Resolvente* auf $(E, \mathfrak{E})$, falls für alle $p > q > 0$ gilt:

$$V_q = V_p + (p - q) \cdot V_p V_q, \quad V_p V_q = V_q V_p.$$

Die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ heißt *submarkoffsch*, falls für alle $p > 0$ der Kern pV_p submarkoffsch ist. Mit anderen Worten:

$$pV_p 1 \leqslant 1 \quad \text{für alle } p > 0.$$

Ist $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$, so ist auch $(V_p^u)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E}_u)$.
Bis auf weiteres sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

3: Nach **Me**, IX, T 46 (a) gilt für alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ und alle $x \in E$:
Die Funktion $p \longrightarrow V_p f(x)$
ist antiton und rechtsseitig stetig auf $]0, \infty[$.
Folglich wird durch $V(x, A) := \sup_p V_p(x, A) \quad (x \in E, A \in \mathfrak{E})$
ein Kern auf $(E, \mathfrak{E})$ definiert. Wir nennen den Kern V, den wir manchmal auch mit V_0 bezeichnen, den *Potentialkern* von $(V_p)_{p>0}$.

4: Für alle $a \geqslant 0$ ist $(V_{a+p})_{p>0}$ erneut eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$ mit V_a als Potentialkern.

5: Für alle $A \in \mathfrak{E}$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(i) $V_p I_A = 0$ für *alle* $p \geqslant 0$.
(ii) $V_p I_A = 0$ für *ein* $p \geqslant 0$.

$A \subset E$ heißt eine *Menge vom Potential* o (bezüglich $(V_p)_{p>0}$), falls eine Menge $A' \in \mathfrak{E}$, $A' \subset A$ existiert, die die Eigenschaft (i) (oder (ii)) erfüllt.
Man sagt eine „Eigenschaft" gilt $(V_p)_{p>0}$-f. ü., falls diese „Eigenschaft" außerhalb einer Menge vom Potential o gültig ist.

6: Eine Funktion $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ heißt *supermedian* (bezüglich $(V_p)_{p>0}$), falls für alle $p > o$ $pV_p f \leqslant f$ gilt.
Da die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ submarkoffsch ist, ist die Funktion 1 supermedian.
Eine supermediane Funktion f heißt *exzessiv* (bezüglich $(V_p)_{p>0}$), falls $\lim\limits_{p \to \infty} pV_p f(x) = f(x)$ für alle $x \in E$ ist.
Sei $a \geqslant o$. Eine Funktion $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ heißt *a-supermedian* (bezüglich $(V_p)_{p>0}$), falls f bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$ supermedian ist.
Eine Funktion $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ heißt *a-exzessiv* (bezüglich $(V_p)_{p>0}$), falls f bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$ exzessiv ist.
Offensichtlich sind die o-supermedianen Funktionen gerade die supermedianen Funktionen. Ebenso sind die o-exzessiven Funktionen gerade die exzessiven Funktionen.

Supermediane und exzessive Funktionen besitzen die folgenden elementaren Eigenschaften:

7: (a) Für alle supermedianen Funktionen f, g und alle $a, b \in \mathbf{R}_+$ ist $\inf(f, g)$ und $(a \cdot f + b \cdot g)$ ebenfalls supermedian.

(b) Für alle exzessiven Funktionen f, g und alle $a, b \in \mathbf{R}_+$ ist $(a \cdot f + b \cdot g)$ ebenfalls exzessiv.
Das Infimum zweier exzessiver Funktionen ist aber i. a. *nicht* exzessiv. Wir werden dieses Problem eingehend in § 3 und § 4 untersuchen.

(c) Für alle Folgen $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von supermedianen Funktionen ist die Funktion $\liminf\limits_{n \to \infty} f_n$ ebenfalls supermedian.

(d) Für alle aufsteigenden Folgen $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von exzessiven Funktionen ist die Funktion $\sup\limits_n f_n$ ebenfalls exzessiv.

8: (a) Ist eine Funktion a-supermedian für ein $a \geqslant o$, so ist sie auch b-supermedian für alle $b \geqslant a$.

(b) Ist eine Funktion a-exzessiv für ein $a \geqslant o$, so ist sie auch b-exzessiv für alle $b \geqslant a$.

(c) Eine Funktion ist genau dann a-exzessiv für ein $a \geqslant o$, wenn sie für alle $b > a$ b-exzessiv ist.

(d) Eine Funktion ist genau dann a-supermedian für ein $a \geqslant o$, wenn sie für alle $b > a$ b-supermedian ist.

(e) Eine für ein $a \geqslant o$ a-supermediane Funktion ist bereits dann a-exzessiv, wenn sie für ein $b \geqslant o$ b-exzessiv ist.

Exzessive Funktionen besitzen die folgende Riesz-Zerlegungs-Eigenschaft:

9: Für alle exzessiven Funktionen f, g_1, g_2 mit $f \leqslant g_1 + g_2$ existieren zwei exzessive Funktionen f_1, f_2 mit $f_1 + f_2 = f$, $f_1 \leqslant g_1$, $f_2 \leqslant g_2$.
(Bew.: siehe CL, Korollar zu 3.1.7. Man beachte jedoch, daß unsere Definition der exzessiven Funktionen nicht mit der von CL übereinstimmt.)

10: Nach CL, 3.1.5 (a) ist für alle $f \in B(E, \mathfrak{E})$ die Funktion
$Sf := \inf \{ g \text{ supermedian}: g \geqslant f \}$ supermedian.

11: (a) Für alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ (oder $f \in B_b(E, \mathfrak{E})$) und alle $x \in E$ gilt:

Existiert $\lim\limits_{p \to \infty} pV_{a+p}f(x)$ für *ein* $a \geqslant 0$, so existiert
$\lim\limits_{p \to \infty} pV_{a+b}f(x)$ für *alle* $a \geqslant 0$, und für alle $a, b \geqslant 0$ gilt:
$\lim\limits_{p \to \infty} pV_{a+p}f(x) = \lim\limits_{p \to \infty} pV_{b+p}f(x)$.

Sei $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ oder $f \in B_b(E, \mathfrak{E})$.
Existiert für alle $x \in E$ $\lim\limits_{p \to \infty} pV_p f(x)$, so können wir definieren:

$$\hat{f}: E \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$$
$$x \longrightarrow \lim_{p \to \infty} pV_p f(x).$$

Sei f nun a-supermedian für ein $a \geqslant 0$.
Nach Me, IX, T 46 (b) ist dann die Funktion $p \longrightarrow pV_{a+p}f(x)$ für alle $x \in E$ isoton auf $]0, \infty[$. Also gilt in diesem Fall:

(b) $\hat{f} = \sup\limits_{p>0} pV_{a+p}f$.

Nach Me, IX, T 60 ist $\hat{f}$ a-exzessiv, und es gilt:

(c) $\hat{f} = \sup \{ g \text{ } a\text{-exzessiv}: g \leqslant f \}$.

(d) Die Menge $\{ \hat{f} \neq f \}$ ist vom Potential 0.

Wegen (c) nennt man $\hat{f}$ auch die *untere Regularisierte* der a-supermedianen Funktion f (bezüglich $(V_p)_{p>0}$).
Wegen (a) stimmt die Definition von $\hat{f}$ bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$ für alle $a \geqslant 0$ überein.

12: (a) Für alle $a \geqslant 0$ und alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ ist die Funktion $V_a f$ a-exzessiv.

(b) Für alle $p > 0$ und alle für ein $a \geqslant 0$ a-supermedianen Funktionen f ist die Funktion $V_p f$ a-exzessiv, und es gilt:
$V_p f = V_p \hat{f}$.

13: Der Potentialkern $V = V_0$ von $(V_p)_{p>0}$ sei eigentlich.
(Für die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ und alle $a > 0$ ist obige Voraussetzung immer erfüllt.)
Dann existiert für jede exzessive Funktion f eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ mit den Eigenschaften:

(i) Vg_n ist für alle $n \in \mathbf{N}$ beschränkt.

(ii) $Vg_n \uparrow f$.

(Bew.: **Me**, IX, T 64 (b))

Wie wir in § 3 sehen werden, sind die folgenden beiden Eigenschaften nicht für jede submarkoffsche Resolvente erfüllt:

14: (**sup**) Das Supremum einer aufsteigend filtrierten Menge von exzessiven Funktionen ist exzessiv.

(**inf**) Für jede absteigend filtrierende Menge $\mathfrak{F}$ von supermedianen Funktionen existiert eine exzessive Funktion f mit:

(i) $f \leqslant \inf \mathfrak{F}$,

(ii) Die Menge $\{ f < \inf \mathfrak{F} \}$ ist vom Potential o.

15: Ein σ-endliches Maß μ auf $(E, \mathfrak{E})$ heißt ein *Referenzmaß* für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$, falls die μ-Nullmengen genau die Mengen vom Potential o sind.
Besitzt die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ein Referenzmaß, so besitzt sie offenbar auch ein beschränktes Referenzmaß.
Jedes Referenzmaß für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ist auch ein Referenzmaß für die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$, wobei $a \geqslant o$ ist.

16: Besitzt die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ein Referenzmaß, so erfüllt die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ die Eigenschaften (**sup**) und (**inf**).
(Bew.: Für Resolventen von Standard-Prozessen wird (**sup**) in **BG**, V, 1.5. bewiesen, (**inf**) folgt aus **BG**, V, 1.6. Die Beweise hierfür lassen sich ohne Schwierigkeiten auf beliebige Resolventen verallgemeinern.)

17: Sei $\mathfrak{T}$ eine Topologie auf E mit den Eigenschaften:

(i) Jede exzessive Funktion ist n.u.h. bezüglich $\mathfrak{T}$,

(ii) $(E, \mathfrak{T})$ ist ein separabler topologischer Raum.

Ist der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ eigentlich, so besitzt die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ein Referenzmaß.
(Bew.: Sei $\{ x_n : n \in \mathbf{N} \}$ dicht in E bezüglich $\mathfrak{T}$.
$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot V(x_n, \ )$ ist dann das gewünschte Referenzmaß.)

18: Sei K ein Kern auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Eine Funktion $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ heißt *K-dominant*, falls für alle $g, h \in B_+(E, \mathfrak{E})$ gilt: $Kg \leqslant Kh + f$ auf $\{ g > o \} \Rightarrow Kg \leqslant Kh + f$ auf *ganz* E.
Man sagt, der Kern K erfüllt das *vollständige Maximumprinzip*, falls die Funktion 1 K-dominant ist.

19: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
$V = V_0$ sei der Potentialkern von $(V_p)_{p>0}$. Dann gilt:

(a) Jede supermediane Funktion ist V-dominant.
Insbesondere erfüllt der Kern V das vollständige Maximumprinzip.

Ist V zusätzlich eigentlich, so gilt auch die Umkehrung:

(b) Jede V-dominante Funktion ist supermedian.

(Bew.: (a) **Me**, IX, T 68 (d) oder **CL**, 4.1.5,
(b): **Me**, IX, T 70 oder **CL**, 4.1.6.)

20: Sei $(E, \mathfrak{E})$ ein Meßraum. $\mathbf{C}$ sei ein bezüglich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossener Untervektorraum von $B_b(E, \mathfrak{E})$ mit $1 \in \mathbf{C}$.
U sei ein Kern auf $(E, \mathfrak{E})$ mit den Eigenschaften:

(i) U erfüllt das vollständige Maximumprinzip,

(ii) $Ug \in \mathbf{C}$ für alle $g \in \mathbf{C}$ (insbesondere ist der Kern U beschränkt).

Dann existiert eine submarkoffsche Resolvente $(V_p)_{p>0}$ auf $(E, \mathfrak{E})$
mit den Eigenschaften:

(iii) U ist der Potentialkern von $(V_p)_{p>0}$,

(iv) $V_p g \in \mathbf{C}$ für alle $g \in \mathbf{C}$ und alle $p > 0$.

(Bew.: Für $\mathbf{C} = B_b(E, \mathfrak{E})$ wurde obiges Ergebnis in **Me**, X, T 10 bewiesen. Dieser Beweis läßt sich ohne Schwierigkeiten auf die obige, allgemeine Situation übertragen.)

21: Sei $(E, \mathfrak{E})$ ein Meßraum.
Eine Familie $(P_t)_{t \geq 0}$ von Kernen auf $(E, \mathfrak{E})$ heißt eine *Halbgruppe* auf $(E, \mathfrak{E})$, wenn für alle $s, t \geqslant 0$ gilt: $P_{s+t} = P_s P_t$.
Die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ heißt *submarkoffsch*, falls für alle $t \geqslant 0$ der Kern P_t submarkoffsch ist.
Die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ heißt *meßbar*, falls für alle $A \in \mathfrak{E}$ die Abbildung
$(t, x) \longrightarrow P_t(x, A)$ $(\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{E})$-$\mathfrak{R}_+$-meßbar ist.

22: Nach **Me**, IX, 39 wird für jede meßbare Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$ durch

$$V_p(x, A) := \int_0^\infty e^{-p \cdot t} \cdot P_t(x, A)\, dt \quad (p > 0,\ x \in E,\ A \in \mathfrak{E})$$

eine Resolvente definiert.
$(V_p)_{p>0}$ wird die zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente genannt.
Ist $(P_t)_{t \geq 0}$ submarkoffsch, so ist auch $(V_p)_{p>0}$ submarkoffsch.
Bis auf weiteres sei $(P_t)_{t \geq 0}$ eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
$(V_p)_{p>0}$ sei die zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörige submarkoffsche Resolvente.

23: Für alle $a \geqslant 0$ ist $(e^{-a \cdot t} \cdot P_t)_{t \geq 0}$ erneut eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe auf $(E, \mathfrak{E})$, und $(V_{a+p})_{p>0}$ ist die zu $(e^{-a \cdot t} \cdot P_t)_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente.

24: Eine Funktion $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ heißt *supermedian* (bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$), falls für alle $t \geqslant 0$ $P_t f \leq f$ gilt.
Eine bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$ supermediane Funktion f heißt *exzessiv* (bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$), falls $\lim_{t \to 0} P_t f(x) = f(x)$ für alle $x \in E$ ist.
Sei $a \geqslant 0$. Eine Funktion $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ heißt *a-supermedian* (bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$), falls f supermedian bezüglich $(e^{-a \cdot t} \cdot P_t)_{t \geq 0}$ ist.
Eine Funktion $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ heißt *a-exzessiv* (bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$), falls f bezüglich $(e^{-a \cdot t} \cdot P_t)_{t \geq 0}$ exzessiv ist.
Wiederum stimmen die o-supermedianen bzw. o-exzessiven Funktionen mit den supermedianen bzw. exzessiven Funktionen überein.

25: Sei $a \geqslant 0$.

(a) Jede bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$ a-supermediane Funktion ist a-supermedian bezüglich $(V_p)_{p>0}$.
Die Umkehrung gilt i. a. nicht (man nehme z. B. die Wärmeleitungs-Halbgruppe).

(b) Eine Funktion ist genau dann a-exzessiv bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$, wenn sie a-exzessiv bezüglich $(V_p)_{p>0}$ ist.

(Bew.: **Me**, IX, T 65)

26: Sei $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ (oder $f \in B_b(E, \mathfrak{E})$) und $x \in E$. Dann gilt:

(a) Existiert $\lim_{0<t\to 0} e^{-a \cdot t} \cdot P_t f(x)$ für *ein* $a \geqslant 0$, so existiert $\lim_{0<t\to 0} e^{-a \cdot t} \cdot P_t f(x)$ für *alle* $a \geqslant 0$, und für alle $a, b \geqslant 0$ gilt:

$$\lim_{0<t\to 0} e^{-a \cdot t} \cdot P_t f(x) = \lim_{0<t\to 0} e^{-b \cdot t} \cdot P_t f(x).$$

(b) Existiert $\lim_{0<t\to 0} P_t f(x)$, so existiert auch $\lim_{p\to\infty} pV_p f(x)$, und es gilt:

$$\lim_{0<t\to 0} P_t f(x) = \lim_{p\to\infty} pV_p f(x).$$

Die Funktion f sei jetzt für ein $a \geqslant 0$ a-supermedian bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$. Dann ist die Funktion $t \longrightarrow e^{-a \cdot t} \cdot P_t(x)$ antiton auf $\mathbf{R}_+$. Zusammen mit (a) und (b) folgt hieraus:

(c) $\hat{f}(x) = \sup_{t>0} e^{-a \cdot t} \cdot P_t f(x) = \lim_{0<t\to 0} P_t f(x).$

Zum Schluß wollen wir noch ein wichtiges Beispiel für Resolventen und Halbgruppen erörtern (siehe **Me**, S. 200, 201):

27: Sei K ein submarkoffscher Kern auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Durch

$$e^{-t(I-K)} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (-t)^n (I-K)^n = e^{-t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (t \cdot K)^n \quad (t \geqslant 0)$$

wird eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe auf $(E, \mathfrak{E})$ definiert.
Für die zu $(e^{-t(I-K)})_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente $(V_p)_{t \geq 0}$ gilt:

(a) $V_p = \frac{1}{p+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p+1} \cdot K^n\right)$ für alle $p > 0$.

Für den Potentialkern $V = V_0$ von $(V_p)_{p>0}$ folgt hieraus:

(b) $V = \sum_{n=0}^{\infty} K^n$.

Aus (a) oder (b) folgt:

(c) Die leere Menge ist die einzige Menge vom Potential 0.
Besitzt der Meßraum $(E, \mathfrak{E})$ eine überabzählbare Familie von disjunkten, nichtleeren, meßbaren Teilmengen von E, so folgt aus (c), daß die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ kein Referenzmaß besitzt.

(d) Ist $\| Kl \|_\infty < 1$, so ist der Potentialkern V beschränkt.
Über exzessive und supermediane Funktionen können wir folgende Aussage machen:

(e) Für alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) f ist exzessiv bezüglich $(V_p)_{p>0}$.

(ii) f ist supermedian bezüglich $(V_p)_{p>0}$.

(iii) f ist exzessiv bezüglich $(e^{-t \cdot (I-K)})_{t \geq 0}$.

(iv) f ist supermedian bezüglich $(e^{-t \cdot (I-K)})_{t \geq 0}$.

(v) $Kf \leqslant f$.

(Bew.: (i) nach (iii) folgt aus 25 (b). (iii) nach (iv) ist trivial. (iv) nach (ii) folgt aus 25 (a). (ii) nach (i) folgt aus (c). Die Äquivalenz von (i) und (v) wurde in **Me**, S. 201 bewiesen.)

I, § 2 Elementare Eigenschaften der starken Gefegten

1: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Für eine Menge $A \subset E$ und eine exzessive Funktion f können wir dann die *Reduzierte* von f über A definieren:

$$R_f^A := \inf \{ g \text{ exzessiv: } I_A \cdot f \leqslant g \}.$$

Es ist i. a. nicht bekannt, ob R_f^A supermedian ist.
Ist jedoch $(V_p)_{p>0}$ die Resolvente eines Standard-Prozesses auf einem lokalkompakten Raum mit abzählbarer Basis, so weiß man, falls A eine beinahe Borelsche Menge ist, daß R_f^A supermedian ist, und daß sich R_f^A von seiner unteren Regularisierten nur auf einer semipolaren Menge unterscheidet.

Definition 2: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Für alle Mengen $A \subset E$ und alle exzessiven Funktionen f definieren wir:

$$S_f^A := \inf \{ g \text{ supermedian: } I_A \cdot f \leqslant g \},$$

$$\hat{S}_f^A := \inf \{ g \text{ exzessiv: } I_A \cdot f \leqslant g \ (V_p)_{p>0}\text{- f. ü.} \}.$$

S_f^A wird die *starke Reduzierte* von f über A genannt.
$\hat{S}_f^A$ wird die *starke Gefegte* oder *starke Balayage* von f über A genannt.

Die folgenden Eigenschaften sind trivial:

Lemma 3: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Für alle exzessiven Funktionen f und alle $A, B \subset E$ gilt:

(a) $(A - B)$ ist vom Potential $0 \Rightarrow \hat{S}_f^A \leqslant \hat{S}_f^B$.

(b) A ist vom Potential $0 \Rightarrow \hat{S}_f^A = 0$.

Bevor wir in der allgemeinen Theorie weiter fortfahren, betrachten wir zwei Beispiele:

4: Sei K ein submarkoffscher Kern auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
$(V_p)_{p>0}$ sei die zu $(e^{-t(I-K)})_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente.
Wegen 1.27 (c), (e) gilt für alle $A \subset E$ und alle exzessiven Funktionen f:
$\hat{S}_f^A = S_f^A = R_f^A$.

5: Sei $(V_p)_{p>0}$ die Resolvente der Brownschen Bewegung auf dem R^n.
Dann ist das n-dimensionale Lebesguesche Maß λ^n ein Referenzmaß für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$.
Die exzessiven Funktionen sind genau die positiven, hyperharmonischen Funktionen im Sinne der klassischen Potentialtheorie.
Aus beiden Tatsachen folgt für alle $A \subset E$ und alle positiven, hyperharmonischen Funktionen f:

$$\hat{S}_f^A = \inf \{ g \text{ positiv, hyperharmonisch: } I_A \cdot f \leqslant g \quad \lambda^n - \text{f. ü.} \}.$$

Auf der rechten Seite steht jetzt ein Ausdruck, mit dessen Hilfe man in der Kacschen Potentialtheorie die starke Gefegte definiert. Unsere Definition ist also eine natürliche Verallgemeinerung der für die Resolvente der Brownschen Bewegung längst bekannten Definition der starken Gefegten.

Lemma 6: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $A \subset E$ und alle exzessiven Funktionen f gilt:

(a) $S_f^A = \inf \{ S_f^B : B \in \mathfrak{E}, B \supset A \}$,
(b) $\hat{S}_f^A = \inf \{ \hat{S}_f^B : B \in \mathfrak{E}, B \supset A \}$.

Beweis: (a): Sei g eine supermediane Funktion mit $I_A \cdot f \leqslant g$.
Sei $B := \{ f \leqslant g \}$. Dann gilt: $B \in \mathfrak{E}$, $B \supset A$ und $I_B \cdot f \leqslant g$.
Aus letzterem folgt: $S_f^B \leqslant g$. Damit ist (a) bewiesen.
Sei g eine exzessive Funktion mit $I_A \cdot f \leqslant g$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü.
Sei $B' := \{ f \leqslant g \}$. Nach Voraussetzung ist die Menge $(B' - A)$ vom Potential o. Deshalb existiert eine Menge $N \in \mathfrak{E}$, $N \supset (B' - A)$, die ebenfalls vom Potential o ist. Sei $B := (B' \cup N)$.
Dann gilt: $B \in \mathfrak{E}$, $B \supset A$ und $I_B \cdot f \leqslant g$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü.
Aus letzterem folgt: $\hat{S}_f^B \leqslant g$. Damit ist auch (b) bewiesen.

Lemma 7: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Dann gilt für alle $A \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f:

$$S_f^A = \sup (I_A \cdot f, \hat{S}_f^A)$$

Beweis: Sei g eine supermediane Funktion mit $I_A \cdot f \leqslant g$.
Nach 1.11 (d) gilt dann: $I_A \cdot f \leqslant \hat{g}$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü.
Da die Funktion $\hat{g}$ exzessiv ist, folgt: $\hat{S}_f^A \leqslant \hat{g} \leqslant g$.
Daraus folgt wiederum: $\sup (I_A \cdot f, \hat{S}_f^A) \leqslant g$.
Hieraus folgt schließlich: $\sup (I_A \cdot f, \hat{S}_f^A) \leqslant S_f^A$.
Wir wollen nun die umgekehrte Ungleichung beweisen.
Sei hierzu g eine exzessive Funktion mit $I_A \cdot f \leqslant g$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü.
Sei $g' := \sup (I_A \cdot f, g)$. Nach Voraussetzung gilt:

$$g = g' \ (V_p)_{p>0} - \text{f. ü. und } g \leqslant g'.$$

Daraus folgt: $pV_p g' = pV_p g \leqslant g \leqslant g'$ für alle $p > o$.
Also ist g' eine supermediane Funktion.
Nach Def. von g' gilt: $I_A \cdot f \leqslant g'$.
Beides ergibt zusammen: $S_f^A \leqslant g' = \sup (I_A \cdot f, g)$.
Hieraus folgt schließlich: $S_f^A \leqslant \sup (I_A \cdot f, \hat{S}_f^A)$.

Mit Hilfe von Lemma 6 und Lemma 7 erhalten wir unmittelbar:

Satz 8: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Dann gilt für alle $A \subset E$ und alle exzessiven Funktionen f:

$$\hat{S}_f^A \leqslant S_f^A \leqslant R_f^A.$$

Bislang wissen wir noch nicht, ob $\hat{S}_f^A$ eine exzessive Funktion ist.
Eine erste Antwort auf diese Frage wollen wir jetzt geben:

Satz 9: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Für alle $A \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f gilt:

(a) S_f^A ist supermedian.

(b) $\hat{S}_f^A$ ist die untere Regularisierte von S_f^A. Also: $\hat{S}_f^A = \widehat{(S_f^A)}$.
Insbesondere ist die Funktion $\hat{S}_f^A$ exzessiv.

(c) $I_A \cdot f \leqslant \hat{S}_f^A$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü.

Beweis: (a): Nach 1.10 ist $S_f^A = S(I_A \cdot f)$ supermedian.

(b) Aus $I_A \cdot f \leqslant S_f^A$ folgt nach 1.11 (d): $I_A \cdot f \leqslant \widehat{(S_f^A)}$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü. .

Aus der Def. von $\hat{S}_f^A$ folgt dann: $\hat{S}_f^A \leqslant \widehat{(S_f^A)}$.
Wir wollen jetzt die umgekehrte Ungleichung beweisen.
Sei hierzu g eine exzessive Funktion mit $I_A \cdot f \leqslant g$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü. .
Sei $g' := \sup(I_A \cdot f, g)$. Nach Voraussetzung gilt:

$$g = g' \ (V_p)_{p>0} \text{ — f. ü. und } g \leqslant g'.$$

Daraus folgt: $pV_p g' = pV_p g \leqslant g \leqslant g'$ für alle $p > 0$.
Hieraus folgt wiederum: g' ist supermedian, und $\hat{g'} = g$.
Da $I_A \cdot f \leqslant g'$ ist, folgt: $S_f^A \leqslant g'$.
Jetzt können wir schließen: $\widehat{(S_f^A)} \leqslant \hat{g'} = g$.
Also folgt: $\widehat{(S_f^A)} \leqslant \hat{S}_f^A$.

(c) folgt unmittelbar aus (b) und 1.11 (d).

10: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Mit $\mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$ bezeichnen wir die Menge aller $A \subset E$ mit der Eigenschaft:
Für jede exzessive Funktion f ist $\hat{S}_f^A$ exzessiv,
und es gilt: $I_A \cdot f \leqslant \hat{S}_f^A$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü. .
Weiter definieren wir: $\mathfrak{S}((V_p)_{p>0}) := \bigcap_{a \geq 0} \mathfrak{S}_0((V_{a+p})_{p>0})$.
Aus 9 (b), (c) folgt: $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$.
Weiter kann man zeigen, daß $\mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$ und $\mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$ stabil sind bezüglich der Bildung abzählbarer Vereinigungen.

Satz 11: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die Eigenschaft (**inf**) sei erfüllt (siehe 1.14). Dann ist jede Teilmenge von E in $\mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$ enthalten.
Beweis: Sei $A \subset E$. Sei f eine exzessive Funktion.
Nach 9 (a) ist $\mathfrak{F} := \{ S_f^B : B \in \mathfrak{E}, B \supset A \}$ eine absteigend filtrierende Menge von supermedianen Funktionen.
Wegen (**inf**) existiert folglich eine exzessive Funktion g mit

(1) $g \leqslant \inf \mathfrak{F}$,

(2) $\{ g < \inf \mathfrak{F} \}$ ist vom Potential 0.

Aus (1) folgt: $g \leqslant S_f^B$ für alle $B \in \mathfrak{E}$, $B \supset A$.

Daraus folgt: $g \leqslant \widehat{(S_f^B)} = \hat{S}_f^B$ (nach 9(b)) für alle $B \in \mathfrak{E}$, $B \supset A$.

Wir erhalten: $g \leqslant \inf \{ \hat{S}_f^B : B \in \mathfrak{E}, B \subset A \} = \hat{S}_f^A$ (nach Lemma 6).

Wir wollen jetzt die umgekehrte Ungleichung beweisen.

Aus (2) folgt: $g \geqslant \inf \mathfrak{F} \geqslant I_A \cdot f$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü..

Nach Def. von $\hat{S}_f^A$ folgt jetzt: $\hat{S}_f^A \leqslant g$. Wir haben damit bewiesen:

$g = \hat{S}_f^A$.

Insbesondere ist $\hat{S}_f^A$ exzessiv. Wegen (2) gilt außerdem:

$\hat{S}_f^A = g \geqslant \inf \mathfrak{F} \geqslant I_A \cdot f$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü..

Da f eine beliebige exzessive Funktion sein darf, folgt:

$A \in \mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$.

Korollar 12: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum (E, $\mathfrak{E}$). Dann gilt:

Besitzt die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ein Referenzmaß, so ist jede Teilmenge von E in $\mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$ enthalten.

Beweis: Jedes Referenzmaß für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ist für alle $a \geqslant 0$ auch ein Referenzmaß für die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$. Nach 1.16 besitzt die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ für alle $a \geqslant 0$ die Eigenschaft (**inf**). Jetzt folgt die Behauptung aus Satz 11.

Im Gegensatz zur „üblichen" Gefegten ist starke Balayage eine idempotente Operation:

Satz 13: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum (E, $\mathfrak{E}$). Dann gilt für alle $A \in \mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$ und alle exzessiven Funktionen f:

$\hat{S}^A_{(\hat{S}_f^A)} = \hat{S}_f^A$.

Beweis: Da $\hat{S}_f^A \leqslant f$ ist, folgt sofort: $\hat{S}^A_{(\hat{S}_f^A)} \leqslant \hat{S}_f^A$.

Da $A \in \mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$ ist, gilt: $\hat{S}^A_{(\hat{S}_f^A)} \geqslant I_A \cdot \hat{S}_f^A \geqslant I_A \cdot f$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü..

Nach Def. von $\hat{S}_f^A$ folgt dann: $\hat{S}_f^A \leqslant \hat{S}^A_{(\hat{S}_f^A)}$.

Lemma 14: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum (E, $\mathfrak{E}$). Der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ sei eigentlich. $\tilde{\mathfrak{E}}_0$ sei der konvexe Kegel aller exzessiven Funktionen.

$T_1, T_2: \tilde{\mathfrak{E}}_0 \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ seien zwei Abbildungen mit den Eigenschaften:

(a) $T_1(f+g) \leqslant T_1 f + T_1 g$, $T_2(f+g) = T_2 f + T_2 g$ für alle $f, g \in \tilde{\mathfrak{E}}_0$.

(b) $T_1(n \cdot f) = n \cdot T_1 f$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}_0$.

(c) Für alle $f, g \in \tilde{\mathfrak{E}}_0$ gilt:
$f \leqslant g \Longrightarrow T_1 f \leqslant T_1 g$, $T_2 f \leqslant T_2 g$.

(d) Für jede aufsteigende Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von Funktionen aus $\tilde{\mathfrak{E}}_0$ gilt:
$T_2(\sup_n f_n) = \sup_n T_2 f_n$.

(e) Für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}_0$ gilt: $T_1 f \leqslant T_2 f$.

(f) Es existiert eine strikt positive, meßbare Funktion h auf E mit
$T_1(Vh) = T_2(Vh) < \infty$.

Dann folgt: $T_1 f = T_2 f$ für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}_0$.

Beweis: Wir zeigen zunächst:

(1) Für alle $g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ mit $g \leqslant n \cdot h$ gilt: $T_1(Vg) = T_2(Vg)$.
Wir schließen: $T_1(V(n \cdot h)) = T_1(Vg + V(n \cdot h - g)) \leqslant$
$T_1(Vg) + T_1(V(n \cdot h - g))$ (nach (a)) $\leqslant T_1(Vg) + T_2(V(n \cdot h - g))$
$\leqslant T_2(Vg) + T_2(V(n \cdot h - g))$ (nach (e)) $= T_2(Vg + V(n \cdot h - g))$
$= T_2(V(n \cdot h)) = T_1(V(n \cdot h))$ (nach (f), (b)).
Daraus folgt: $T_1(Vg) + T_2(V(n \cdot h - g)) = T_2(Vg) + T_2(V(n \cdot h - g))$.
Da $T_2(V(n \cdot h - g)) \leqslant n \cdot T_2(Vh) < \infty$ ist, folgt schließlich:
$T_1(Vg) = T_2(Vg)$. Damit ist (1) bewiesen.

Als nächstes zeigen wir:

(2) Für alle $g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ gilt: $T_1(Vg) = T_2(Vg)$.
Hierzu definieren wir für alle $n \in \mathbf{N}$: $g_n := \inf(g, n \cdot h)$.
Da h strikt positiv ist, gilt: $g_n \uparrow g$.
Jetzt können wir schließen: $T_2(Vg) = \sup_n T_2(Vg_n)$ (nach (d))
$= \sup_n T_1(Vg_n)$ (nach (1)) $\leqslant T_1(Vg)$ (nach (c)) $\leqslant T_2(Vg)$ (nach (e)).
Daraus folgt (2).
Sei f jetzt eine beliebige exzessive Funktion.
Da der Potentialkern V eigentlich ist, existiert nach 1.13 eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ mit $Vg_n \uparrow f$.
Wir beenden den Beweis von Lemma 14 mit den folgenden Schlüssen:
$T_2 f = \sup_n T_2(Vg_n)$ (nach (d)) $= \sup_n T_1(Vg_n)$ (nach (2))
$\leqslant T_1 f$ (nach (c)) $\leqslant T_2 f$ (nach (e)).

15: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $A \subset E$, alle $a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f bezeichnen wir die starke Gefegte (bzw. starke Reduzierte) von f über A bezüglich der Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ mit ${}^a\hat{S}_f^A$ (bzw. ${}^aS_f^A$).

Da die folgenden drei Sätze von ihren Beweisen her untereinander verbunden sind, beweisen wir diese gemeinsam.

Satz 16: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Dann existiert für alle $A \subset E$ und alle $x \in E$ eine Menge A' mit:

(i) $A' \in \mathfrak{E}$, $A' \supset A$,

(ii) ${}^a\hat{S}_f^A(x) = {}^a\hat{S}_f^{A'}(x)$, ${}^aS_f^A(x) = {}^aS_f^{A'}(x)$
für alle $a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f.

Satz 17: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Sei $A \subset E$.

(a) Für alle $b \geqslant a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f gilt:
${}^b\hat{S}_f^A \leqslant {}^a\hat{S}_f^A$, ${}^bS_f^A \leqslant {}^aS_f^A$.

(b) Für alle $a \geqslant o$ und alle a-exzessiven Funktionen f gilt:
$${}^a\hat{S}_f^A = \sup_{b>a} {}^b\hat{S}_f^A, \quad {}^aS_f^A = \sup_{b>a} {}^bS_f^A.$$

(c) Für alle $a \geqslant o$ und alle $g \in B_+(E, \mathfrak{E})$ gilt:
$${}^a\hat{S}_{V_a g}^A = \sup_{b>a} {}^b\hat{S}_{V_b g}^A, \quad {}^aS_{V_a g}^A = \sup_{b>a} {}^bS_{V_b g}^A.$$

Satz 18: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Sei $A \subset E$.

(a) Für alle exzessiven Funktionen f, g gilt:
$$\hat{S}_{(f+g)}^A = \hat{S}_f^A + \hat{S}_g^A, \quad S_{(f+g)}^A = S_f^A + S_g^A.$$

(b) Für alle $a \geqslant o$ und alle exzessiven Funktionen f gilt:
$$\hat{S}_{(a \cdot f)}^A = a \cdot \hat{S}_f^A, \quad S_{(a \cdot f)}^A = a \cdot S_f^A.$$

(c) Für jede gegen eine Funktion f aufsteigende Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von exzessiven Funktionen gilt:
$$\hat{S}_f^A = \sup_n \hat{S}_{f_n}^A, \quad S_f^A = \sup_n S_{f_n}^A.$$

Beweis von Satz 16, 17 und 18: 17(a) und 18(b) sind trivial. Wir werden Satz 17 und 18 zunächst nur für alle $A \in \mathfrak{E}$ beweisen. Mit Hilfe dieser Zwischenergebnisse beweisen wir dann Satz 16. Mit Hilfe von Satz 16 können wir schließlich Satz 17 und 18 auf beliebige $A \subset E$ verallgemeinern.

1. Abschnitt: Beweis von Satz 17 für alle $A \in \mathfrak{E}$.
Wir beweisen (b) und (c) gemeinsam: Sei $a \geqslant o$.
f sei eine a-exzessive Funktion. Sei $g \in B_+(E, \mathfrak{E})$.
Da $V_b g \leqslant V_a g$ für alle $b \geqslant a$ ist, sind $b \longrightarrow {}^b\hat{S}_f^A$ und $b \longrightarrow {}^b\hat{S}_{V_b g}^A$ antiton auf $[a, \infty[$. Daraus folgt:

(1) $$\sup_{b>a} {}^b\hat{S}_f^A \leqslant {}^a\hat{S}_f^A, \quad \sup_{b>a} {}^b\hat{S}_{V_b g}^A \leqslant {}^a\hat{S}_{V_a g}^A.$$

Nach 1.8(b) sind die Funktionen ${}^b\hat{S}_f^A$, ${}^b\hat{S}_{V_b g}^A$ für alle $c \geqslant b > a$ c-exzessiv.
Nach 1.7(d) sind dann auch die Funktionen $\sup_{a>b} {}^bS_f^A = \sup_{\substack{c \geqslant b > a \\ b \in \mathbf{Q}}} {}^b\hat{S}_f^A$
und $\sup_{b>a} {}^b\hat{S}_{V_b g}^A = \sup_{\substack{c \geqslant b > a \\ b \in \mathbf{Q}}} {}^b\hat{S}_{V_b g}^A$ c-exzessiv für alle $c > a$.
Zusammen mit 1.8(c) folgt:

(2) $\sup_{b>a} {}^b\hat{S}_f^A$, $\sup_{b>a} {}^b\hat{S}_{V_b g}^A$ sind a-exzessiv.

Aus 9(c) folgt: $\sup_{b>a} {}^b\hat{S}_f^A = \sup_{\substack{b>a \\ b \in \mathbf{Q}}} {}^b\hat{S}_f^A \geqslant I_A \cdot f \quad (V_p)_{p>0}$ — f. ü..
und $\sup_{b>a} {}^b\hat{S}_{V_b g}^A = \sup_{\substack{b>a \\ b \in \mathbf{Q}}} {}^b\hat{S}_{V_b g}^A \geqslant I_A \cdot (\sup_{\substack{b>a \\ b \in \mathbf{Q}}} V_b g) = I_A \cdot V_a g \quad (V_p)_{p>0}$ — f. ü.

Daraus folgt zusammen mit (2):
$${}^a\hat{S}_f^A \leqslant \sup_{b>a} {}^b\hat{S}_f^A, \quad {}^a\hat{S}_{V_a g}^A \leqslant \sup_{b>a} {}^b\hat{S}_{V_b g}^A.$$

Zusammen mit (1) erhalten wir:

(3) $\quad {}^a\hat{S}^A_f = \sup_{b>a} {}^b\hat{S}^A_f,\ {}^a\hat{S}^A_{V_{ag}} = \sup_{b>a} {}^a\hat{S}^A_{V_{bg}}.$

Mit Hilfe von Lemma 7 folgt auch der Rest von Satz 17:

${}^aS^A_f = \sup (I_A \cdot f, {}^a\hat{S}^A_f) = \sup (I_A \cdot f, \sup_{b>a} {}^b\hat{S}^A_f) = \sup_{b>a} \sup (I_A \cdot f, {}^b\hat{S}^A_f)$

$= \sup_{b>a} {}^bS^A_f,$

${}^aS^A_{V_{ag}} = \sup (I_A \cdot V_a g, {}^a\hat{S}^A_{V_{ag}}) = \sup_{b>a} (\sup I_A \cdot V_b g, \sup_{b>a} {}^b\hat{S}^A_{V_{bg}})$

$= \sup_{b>a} \sup (I_A \cdot V_b g, {}^b\hat{S}^A_{V_{bg}}) = \sup_{b>a} {}^bS^A_{V_{bg}}.$

2. Abschnitt: Beweis von Satz 18 für alle $A \in \mathfrak{E}$.

(a): f, g seien exzessive Funktionen. Offensichtlich gilt:

(4) $\quad \hat{S}^A_{(f+g)} \leqslant \hat{S}^A_f + \hat{S}^A_g.$

Wir definieren: $h := \hat{S}^A_{(f+g)}$, $B := \{ h = (f+g) \}$.

Wegen (4) existieren nach 1.9 zwei exzessive Funktionen h_1, h_2 mit $h_1 \leqslant f$, $h_2 \leqslant g$, $h_1 + h_2 = h$.

Für alle $x \in B$ folgern wir:

$h_1(x) = h(x) - h_2(x) = (f+g)(x) - h_2(x) \geqslant (f+g)(x) - g(x) = f(x)$.

Analog erhält man für alle $x \in B$: $h_2(x) \geqslant g(x)$.

Da die Menge (A–B) nach 9(c) vom Potential o ist, folgt daraus:

$\hat{S}^A_f \leqslant h_1$, $\hat{S}^A_g \leqslant h_2$.

Schließlich folgt: $\hat{S}^A_f + \hat{S}^A_g \leqslant h_1 + h_2 = h = \hat{S}^A_{(f+g)}$.

Mit Hilfe von Lemma 7 können wir jetzt schließen:

$S^A_{(f+g)} = \sup (I_A \cdot (f+g), \hat{S}^A_{(f+g)}) = \sup (I_A \cdot f, \hat{S}^A_f) + \sup (I_A \cdot g, \hat{S}^A_g)$

$= S^A_f + S^A_g.$

(c): Sei $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine gegen f aufsteigende Folge von exzessiven Funktionen.

Trivialerweise gilt: $\sup_n \hat{S}^A_{f_n} \leqslant \hat{S}^A_f$.

Andererseits gilt:

$\sup_n \hat{S}^A_{f_n}$ ist exzessiv nach 9(b) und 1.7(d),

$\sup_n \hat{S}^A_{f_n} \geqslant \sup_n I_A \cdot f_n = I_A \cdot f \quad (V_p)_{p>0}$ — f. ü. nach 9(c).

Daraus folgt: $\hat{S}^A_f \leqslant \sup_n \hat{S}^A_{f_n}$.

Mit Hilfe von Lemma 7 können wir schließen:

$S^A_f = \sup (I_A \cdot f, \hat{S}^A_f) = \sup (\sup_n I_A \cdot f_n, \sup_n \hat{S}^A_{f_n}) = \sup_n \sup (I_A \cdot f_n, \hat{S}^A_{f_n})$

$= \sup_n S^A_{f_n}.$

3. Abschnitt: In diesem Abschnitt sei der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ eigentlich.

Sei $A \subset E$ und $x \in E$ beliebig.

h sei eine strikt positive, meßbare Funktion mit $Vh(x) < \infty$.

Nach Lemma 6 existiert für alle $n \in \mathbf{N}$ eine Menge $B_n \in \mathfrak{E}$, $B_n \supset A$ mit:

$$\hat{S}^{B_n}_{Vh}(x) \leqslant \hat{S}^A_{Vh}(x) + \frac{1}{n}, \quad S^{B_n}_{Vh}(x) \leqslant S^{A_n}_{Vh}(x) + \frac{1}{n}.$$

Sei $B := \bigcap_{n \in \mathbf{N}} B_n$ Trivialerweise gilt: $B \in \mathfrak{E}$, $B \supset A$.

Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $\hat{S}^A_{Vh}(x) \leqslant \hat{S}^B_{Vh}(x) \leqslant \hat{S}^{B_n}_{Vh}(x) \leqslant \hat{S}^A_{Vh}(x) + \frac{1}{n}$.
Daraus folgt: $\hat{S}^A_{Vh}(x) = S^B_{Vh}(x)$. Analog folgt: $S^A_{Vh}(x) = S^B_{Vh}(x)$.

Durch $T_1 f := \hat{S}^A_f(x)$, $T'_1 f := S^A_f(x)$, $T_2 f := \hat{S}^B_f(x)$, $T'_2 f := S^B_f(x)$ werden vier Abbildungen auf dem konvexen Kegel aller exzessiven Funktionen definiert. Wir haben vorhin bewiesen:

$$T_1(Vh) = T_2(Vh),\ T'_1(Vh) = T'_2(Vh).$$

Offensichtlich erfüllt T_1 (bzw. T'_1) die Voraussetzungen von Lemma 14. Wegen der im 2. Abschnitt bewiesenen Ergebnisse erfüllt auch T_2 (bzw. T'_2) die Voraussetzungen von Lemma 14.

Aus Lemma 14 folgt dann: $T_1 f = T_2 f$ und $T'_1 f = T'_2 f$ für alle exzessiven Funktionen f. Also gilt:

$$\hat{S}^A_f(x) = \hat{S}^B_f(x),\ S^A_f(x) = S^B_f(x) \text{ für alle exzessiven Funktionen f.}$$

4. Abschnitt: Beweis von Satz 16.

Sei $A \subset E$ und $x \in E$ beliebig.

Für alle $b > 0$ ist der Potentialkern (von $V_{b+p})_{p>0}$ eigentlich.

Wie wir im 3. Abschnitt bewiesen haben, existiert dann für alle $b > 0$ eine Menge $A_b \in \mathfrak{E}$, $A_b \supset A$ mit:

$${}^b\hat{S}^A_f(x) = {}^b\hat{S}^{A_b}_f(x),\ {}^bS^A_f(x) = {}^bS^{A_b}_f(x)$$

für alle b-exzessiven Funktionen f.

Sei $A' := \bigcap_{\substack{b \in \mathbf{Q} \\ b>0}} A_b$.

Dann gilt: $A' \in \mathfrak{E}$, $A' \supset A$ und

$$(5) \qquad {}^b\hat{S}^A_f(x) = {}^b\hat{S}^{A'}_f(x),\ {}^bS^A_f(x) = {}^bS^{A'}_f(x)$$

für alle $b \in \mathbf{Q}$, $b > 0$ und alle b-exzessiven Funktionen f.

Für alle $a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f schließen wir:

$${}^a\hat{S}^A_f(x) \leqslant {}^a\hat{S}^{A'}_f(x) = \sup_{\substack{b>a \\ b\in\mathbf{Q}}} {}^b\hat{S}^{A'}_f(x) \quad \text{(nach 17 (a), (b))}$$

$$= \sup_{\substack{b>a \\ b\in\mathbf{Q}}} {}^b\hat{S}^A_f(x) \ \text{(nach (5))} \leqslant {}^a\hat{S}^A_f(x).$$

Analog zeigt man: ${}^aS^A_f(x) = {}^aS^{A'}_f(x)$.

5. Abschnitt: Satz 17 (bzw. Satz 18) folgt jetzt unmittelbar aus den Ergebnissen des 1. Abschnittes (bzw. des 2. Abschnittes), wenn wir Satz 16 heranziehen.

19: In Anbetracht von Satz 18 erscheint es möglich, daß für alle $A \subset E$ und alle $x \in E$ ein Maß $\mu_{A,x}$ existiert derart, daß für alle exzessiven Funktionen f gilt:

$$\hat{S}^A_f(x) = \int f \, d\mu_{A,x}.$$

Diese Vermutung ist im allgemeinen falsch, selbst dann, wenn $A \in \mathfrak{E}$ ist. Ist jedoch $(V_p)_{p>0}$ die Resolvente eines starken Markoff-Prozesses, so ist obige Vermutung richtig (siehe II, 4.13).

Satz 20: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Sei f eine exzessive Funktion.

(a) Für alle $A, B \subset E$ gilt:

$$\hat{S}_f^{(A\cap B)} + \hat{S}_f^{(A\cup B)} \leqslant \hat{S}_f^A + \hat{S}_f^B,\ S_f^{(A\cap B)} + S_f^{(A\cup B)} \leqslant S_f^A + S_f^A.$$

(b) Für jede gegen eine Menge A aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ von Teilmengen von E gilt:

$$\hat{S}_f^A = \sup_n \hat{S}_f^{A_n},\ S_f^A = \sup S_f^{A_n}.$$

Beweis: (a): Sei zunächst $A, B \in \mathfrak{E}$. Wir definieren:

$$A' := \{\hat{S}_f^A = f\},\ B' := \{\hat{S}_f^B = f\},\ h_1 := \hat{S}_f^{(A\cap B)},\ h_2 := \hat{S}_f^{(A\cup B)}.$$

Wegen 9(b) sind die Funktionen h_1 und h_2 exzessiv. Wegen 9(c) gilt:

(1) Die Mengen (A–A'), (B–B') und $((A\cup B)-(A'\cup B'))$ sind vom Potential o. Offenbar gilt:

(2) $h_1(x) + h_2(x) \leqslant f(x) + f(x) = \hat{S}_f^A(x) + \hat{S}_f^B(x)$ für alle $x \in (A' \cap B')$,

(3) $h_1(x) + h_2(x) \leqslant h_1(x) + f(x) \leqslant \hat{S}_f^B(x) + \hat{S}_f^A(x)$ für alle $x \in (A' - B')$,

(4) $h_1(x) + h_2(x) \leqslant h_1(x) + f(x) \leqslant \hat{S}_f^A(x) + \hat{S}_f^B(x)$ für alle $x \in (B' - A')$.

Aus (2), (3) und (4) folgt:

$$h_1(x) + h_2(x) \leqslant \hat{S}_f^A(x) + \hat{S}_f^B(x) \text{ für alle } x \in (A' \cup B').$$

Zusammen mit (1) folgt: $I_{(A\cup B)} \cdot (h_1 + h_2) \leqslant \hat{S}_f^A + \hat{S}_f^B\ (V_p)_{p>0}$ — f. ü..
Nach Def. von $\hat{S}_{(h_1+h_2)}^{(A\cup B)}$ folgt:

(5) $\hat{S}_{(h_1+h_2)}^{(A\cup B)} \leqslant \hat{S}_f^A + \hat{S}_f^B.$

Jetzt können wir schließen:

$$\hat{S}_f^{(A\cap B)} + \hat{S}_f^{(A\cup B)} = h_1 + h_2 = \hat{S}_{h_1}^{(A\cap B)} + \hat{S}_{h_2}^{(A\cup B)} \text{ (nach Satz 13)}$$
$$\leqslant \hat{S}_{h_1}^{(A\cup B)} + \hat{S}_{h_2}^{(A\cup B)} = \hat{S}_{(h_1+h_2)}^{(A\cup B)} \text{ (nach 18 (a))}$$
$$\leqslant \hat{S}_f^A + \hat{S}_f^B \text{ (nach (5))}.$$

Mit Hilfe von Lemma 7 schließen wir: $S_f^{(A\cap B)} + S_f^{(A\cup B)} =$

$$= \sup(I_{(A\cap B)} \cdot f, \hat{S}_f^{(A\cap B)}) + \sup(I_{(A\cup B)} \cdot f, \hat{S}_f^{(A\cup B)})$$
$$\leqslant \sup(I_A \cdot f, \hat{S}_f^A) + \sup(I_B \cdot f, \hat{S}_f^B) = S_f^A + S_f^B.$$

Sei jetzt $A, B \subset E$ beliebig. Sei $x \in E$.
Nach Satz 16 existieren zwei Mengen $A' \in \mathfrak{E}$, $A' \supset A$, $B' \in \mathfrak{E}$, $B' \supset B$ mit:

(6) $\hat{S}_f^{A'}(x) = \hat{S}_f^A(x),\ S_f^{A'}(x) = S_f^A(x),$
$\hat{S}_f^{B'}(x) = \hat{S}_f^B(x),\ S_f^{B'}(x) = S_f^B(x).$

Wie wir eben bewiesen haben, gilt:

(7) $\hat{S}_f^{(A'\cap B')} + \hat{S}_f^{(A'\cup B')} \leqslant \hat{S}_f^{A'} + \hat{S}_f^{B'},$
$S_f^{(A'\cap B')} + S_f^{(A'\cup B')} \leqslant S_f^{A'} + S_f^{B'}.$

Wir schließen:

$$\hat{S}_f^{(A\cap B)}(x) + \hat{S}_f^{(A\cup B)}(x) \leqslant \hat{S}_f^{(A'\cap B')}(x) + \hat{S}_f^{(A'\cup B')}(x) \leqslant \hat{S}_f^{A'}(x) + \hat{S}_f^{B'}(x)$$
$$\text{(nach (7))} = \hat{S}_f^A(x) + \hat{S}_f^B(x) \text{ (nach (6))}.$$

Analog zeigt man: $S_f^{(A \cap B)}(x) + S_f^{(A \cup B)}(x) \leqslant S_f^A(x) + S_f^B(x)$.

(b): Sei zunächst $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{E}$.

Nach 9(b) ist $(\hat{S}_f^{A_n})_{n \in \mathbf{N}}$ eine aufsteigende Folge von exzessiven Funktionen. Nach 1.7(d) ist $\sup_n \hat{S}_f^{A_n}$ dann exzessiv.

Nach 9(c) gilt:

$$I_A \cdot f = \sup_n I_{A_n} \cdot f \leqslant \sup_n \hat{S}_f^{A_n} \quad (V_p)_{p>0} \text{— f. ü. .}$$

Daraus folgt: $\hat{S}_f^A \leqslant \sup_n \hat{S}_f^{A_n}$.

Mit Hilfe von Lemma 7 folgt: $S_f^A \leqslant \sup_n S_f^{A_n}$.

Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine beliebige Folge von Teilmengen von E. Sei $x \in E$.

Nach Satz 16 existiert für alle $n \in \mathbf{N}$ eine Menge $A_n' \in \mathfrak{E}$, $A_n' \supset A_n$ mit:

$$(8) \qquad \hat{S}_f^{A_n'}(x) = \hat{S}_f^{A_n}(x), \quad S_f^{A_n'}(x) = S_f^{A_n}(x).$$

Für alle $n \in \mathbf{N}$ sei $A_n'' := \bigcap_{m \geq n} A_m'$. Sei $A'' := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n''$.

Wie wir oben bewiesen haben, gilt:

$$(9) \qquad \hat{S}_f^{A''} \leqslant \sup_n \hat{S}_f^{A_n''}, \quad S_f^{A''} \leqslant \sup_n S_f^{A_n''}.$$

Jetzt können wir schließen:

$$\hat{S}_f^A(x) \leqslant S_f^{A''}(x) \leqslant \sup_n S_f^{A_n''}(x) \text{ (nach (9))} \leqslant \sup_n \hat{S}_f^{A_n'}(x) = \sup_n \hat{S}_f^{A_n}(x) \text{ (nach (8))}.$$

Analog zeigt man: $S_f^A(x) \leqslant \sup_n S_f^{A_n}(x)$.

Die umgekehrten Ungleichungen sind trivial.

21: Aus Satz 20 folgt, daß $A \longrightarrow \hat{S}_f^A(x)$, $A \longrightarrow S_f^A(x)$ für alle exzessiven Funktionen f und alle $x \in E$ stark subadditive Praekapazitäten sind. Beide Mengenfunktionen sind aber selbst, wenn $(V_p)_{p>0}$ die Resolvente der Brownschen Bewegung ist, *keine* Choquetschen Kapazitäten. Die Mengenfunktion $A \longrightarrow R_f^A(x)$ ist bekanntlich für alle stetigen, exzessiven Funktionen f und alle $x \in \mathbf{R}^n$ eine Choquetsche Kapazität, wenn $(V_p)_{p>0}$ die Resolvente der Brownschen Bewegung auf dem $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 3$) ist. Aus dem Kapazitabilitätssatz folgt dann: $R_f^A(x) = \sup \{ R_f^K(x) : K \subset A \text{ kompakt} \}$ für alle Borelschen Mengen A.

Interessanterweise ist das letzte Resultat trotz der obigen negativen Bemerkung auch für die starke Reduzierte und die starke Gefegte richtig. Wir werden nämlich in Korollar 5.11 zeigen:

$$S_f^A(x) = \sup \{ S_f^K(x) : K \subset A \text{ kompakt} \},$$
$$\hat{S}_f^A(x) = \sup \{ \hat{S}_f^K(x) : K \subset A \text{ kompakt} \},$$

wobei $(V_p)_{p>0}$ eine beliebige Resolvente auf einem polnischen Raum ist, wobei A eine universell-meßbare Menge ist und wobei f eine beliebige exzessive Funktion ist.

Schlußbemerkung: Die starke Gefegte und die starke Reduzierte sind bereits in **Wa** und **Me** (4) studiert worden. Ziel von § 2 war es, deren Ergebnisse zu verfeinern und

zu verallgemeinern. Für die weitere Entwicklung ist die unter 5 gemachte Bemerkung entscheidend. Viele Resultate aus der Kacschen Potentialtheorie werden sich nämlich später in unserer allgemeinen Theorie wiederfinden. Genau dieser Gesichtspunkt unterscheidet unsere Arbeit von den bislang über „starke Balayage" erschienenen Arbeiten. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß der Name „starke Balayage" – er stammt aus der Kacschen Potentialtheorie – in diesen Arbeiten nicht auftaucht.

I, § 3 S-Dünnheit

Der von M. Berlot eingeführte Begriff der Dünnheit hat sich in der Potentialtheorie als sehr nützlich erwiesen. Leider benützen die bisherigen Definitionen der Dünnheit topologische Begriffe. Wir können aber nur solche Begriffe in unsere Theorie übertragen, die rein durch Balayage-Operationen definierbar sind. Aus diesem Grund wollen wir zunächst für $\mathfrak{P}$-harmonische Räume den Begriff der Dünnheit durch eine Bedingung charakterisieren, die von topologischen Begriffen keinen Gebrauch macht:

Satz 1: Sei $(X, \mathbf{H}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum.

Für alle $A \subset X$ und alle $x \in X$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) A ist dünn in x.

(ii) Es existiert eine positive, hyperharmonische Funktion f auf X mit der Eigenschaft: $\hat{R}_f^A(x) < f(x)$.

Beweis: (i) nach (ii) folgt sofort aus **CC**, Prop. 6.3.2.

(ii) nach (i): Existiert eine positive, hyperharmonische Funktion f mit $\hat{R}_f^A(x) < f(x)$, so existiert wegen **CC**, Korollar 2.3.1 sogar ein stetiges Potential p mit $\hat{R}_p^A(x) < p(x)$. Die Bedingung (i) folgt jetzt aus **CC**, Prop. 6.3.2.

Jetzt ist die folgende Definition gerechtfertigt:

Definition 2: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

Eine Menge $A \subset E$ heißt *S_0-dünn* in einem Punkt $x \in E$ (bezüglich $(V_p)_{p>0}$) falls eine exzessive Funktion f mit $\hat{S}_f^A(x) < f(x)$ existiert. Eine Menge $A \subset E$ heißt *S-dünn* in einem Punkt $x \in E$ (bezüglich $(V_p)_{p>0}$), falls die Menge A für ein $a \geqslant o$ S_0-dünn im Punkt x bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$ ist. Für eine Menge $A \subset E$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte, in denen A nicht S-dünn ist, mit A^s.

Aus Lemma 2.6 (b) folgt sofort:

Lemma 3: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

Ist eine Menge $A \subset E$ S-dünn (bzw. S_0-dünn) in einem Punkt $x \in E$, so existiert eine Menge $A' \in \mathfrak{E}$, $A' \supset A$, die ebenfalls im Punkt x S-dünn (bzw. S_0-dünn) ist.

Satz 4: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ sei eigentlich. h sei eine strikt positive, meßbare Funktion auf E derart, daß $Vh(x)$ für alle $x \in E$ endlich ist (wegen der Eigentlichkeit des Kernes V existiert immer eine solche Funktion h).

Für alle $A \subset E$ und alle $x \in E$ sind dann folgende Bedingungen äquivalent:

(i) A ist S_0-dünn im Punkt x.

(ii) $\hat{S}_{Vh}^A(x) < Vh(x)$.

Beweis: (ii) nach (i) ist trivial.

(i) nach (ii): Auf dem konvexen Kegel aller exzessiven Funktionen werden durch $T_1 f := \hat{S}_f^A(x)$, $T_2 f := f(x)$ zwei Abbildungen definiert. Wegen Satz 18 erfüllen T_1 und T_2 die Bedingungen 2.14 (a), (b), (c), (d) und (e). Gilt nun $\hat{S}_{Vh}^A(x) = Vh(x)$, so ist auch die Bedingung 2.14 (f) erfüllt. Aus Lemma 2.14 folgt dann: $T_1 = T_2$.

Dies besagt nichts anderes als:

$$\hat{S}_f^A(x) = f(x) \text{ für alle exzessiven Funktionen f.}$$

Also ist die Menge A nicht S_0-dünn im Punkt x.

Lemma 5: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Ist eine Menge $A \subset E$ in einem Punkt x S_0-dünn bezüglich $(V_p)_{p>0}$, so ist A für alle $a \geqslant 0$ auch bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$ S_0-dünn im Punkt x.

Beweis: Sei A S_0-dünn im Punkt x bezüglich $(V_p)_{p>0}$.
Dann existiert eine exzessive Funktion f mit $\hat{S}_f^A(x) < f(x)$.
Nach 1.8(b) ist f für alle $a \geqslant 0$ a-exzessiv, und nach 2.17(a)
gilt $\quad {}^a\hat{S}_f^A(x) \leqslant \hat{S}_f^A(x) < f(x)$ für alle $a \geqslant 0$.
Also ist A für alle $a \geqslant 0$ S_0-dünn im Punkt x bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$.

Ist der Potentialkern eigentlich, so gilt auch die Umkehrung des letzten Lemmas. Zum Beweis benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 6: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Für alle $a \geqslant 0$ gilt:

(a) Ist f eine a-supermediane Funktion, so ist die Funktion $(f + a \cdot Vf)$ supermedian.

(b) Ist f eine a-exzessive Funktion, so ist die Funktion $(f + a \cdot Vf)$ exzessiv.

Beweis: (a): Wir müssen für alle $p > 0$ zeigen:

$$pV_p(f + a \cdot Vf) \leqslant (f + a \cdot Vf).$$

1. Fall: $a \geqslant p > 0$. Es gilt: $pV_p(f + a \cdot Vf) = pV_pf + p \cdot a \cdot V_pVf$
$\leqslant a \cdot V_pf + a \cdot p \cdot V_pVf$ (da $a \geqslant p$) $= a \cdot (V_pf + pV_pVf) = a \cdot Vf$
(Resolventengleichung!) $\leqslant f + a \cdot Vf$.

2. Fall: $p \geqslant a$. Es gilt: $pV_p(f + a \cdot Vf) = pV_pf + p \cdot a \cdot V_pVf$
$= (p - a) \cdot V_pf + a \cdot (V_pf + pV_pVf) = (p - a) \cdot V_pf + a \cdot Vf$
(Resolventengleichung!) $\leqslant f + a \cdot Vf$ (da f a-supermedian ist).

(b): Ist f a-exzessiv, so können wir schließen:

$$\lim_{p\to\infty} pV_p(f + a \cdot Vf) = \lim_{p\to\infty} ((p - a) \cdot V_pf + a \cdot Vf) \text{ (siehe 2. Fall)}$$
$$\lim_{p\to\infty} (p - a) \cdot V_pf + a \cdot Vf = f + a \cdot Vf.$$

Satz 7: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ sei eigentlich. Für alle $a \geqslant o$, alle $A \subset E$ und alle $x \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist S_0-dünn im Punkt x bezüglich $(V_p)_{p>0}$.

(ii) A ist S_0-dünn im Punkt x bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$.

Beweis: (i) nach (ii) wurde bereits in Lemma 5 bewiesen.

(ii) nach (i): Wegen Lemma 3 dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß $A \in \mathfrak{E}$ ist.

Sei h eine strikt positive, meßbare Funktion derart, daß $Vh(y)$ für alle $y \in E$ endlich ist. Dann ist auch $V_a h(y)$ für alle $y \in E$ endlich. Nach Satz 4 folgt aus Bedingung (ii):

(1) $${}^a\hat{S}^A_{V_a h}(x) < V_a h(x).$$

Da $A \in \mathfrak{E}$ ist, ist die Funktion $g := {}^a\hat{S}^A_{V_a h}$ a-exzessiv.
Nach Lemma 6(b) ist die Funktion $(g + a \cdot Vg)$ exzessiv.

Folglich ist auch die Funktion

$$f := g + aVV_a h = (g + a \cdot Vg) + V(a \cdot (V_a h - g))$$

als Summe zweier exzessiver Funktionen ebenfalls exzessiv.

Für alle $x \in B := \{ g \geqslant V_a h \} = \{ {}^a\hat{S}^A_{V_a h} \geqslant V_a h \}$ gilt:

$$f(x) = g(x) + aVV_a h(x) \geqslant V_a h(x) + aVV_a h(x) = Vh(x)$$
(Resolventengleichung!).

Da die Menge (A–B) vom Potential o ist (siehe 2.8(c)), folgt:

(2) $$I_A \cdot Vh \leqslant f \quad (V_p)_{p>0} - \text{f. ü.}.$$

Jetzt können wir schließen: $\hat{S}^A_{Vh}(x) \leqslant f(x)$ (nach (2))

$$= g(x) + aVV_a h(x) = {}^a\hat{S}^A_{V_a h}(x) + aVV_a h(x) < V_a h(x) + aVV_a h(x)$$
(wegen (1) und wegen $a \cdot VV_a h(x) \leqslant Vh(x) < \infty$)
$$= Vh(x) \quad \text{(Resolventengleichung!)}.$$

Also ist A S_0-dünn im Punkt x bezüglich $(V_p)_{p>0}$.

Korollar 8: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $A \subset E$ und alle $x \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Für *alle* $a \geqslant o$ ist A S-dünn im Punkt x bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$.

(ii) Für *ein* $a \geqslant o$ ist A S-dünn im Punkt x bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$.

(iii) Für *alle* $a > o$ ist A S_0-dünn im Punkt x bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$.

(iv) Für *ein* $a \geqslant o$ ist A S_0-dünn im Punkt x bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$.

Ist der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ eigentlich, so gilt auch Äquivalenz mit der folgenden Aussage:

(v) A ist S_0-dünn im Punkt x bezüglich $(V_p)_{p>0}$.

Beweis: In Satz 7 wurde bereits die Äquivalenz von (iv) und (v) bewiesen. (iii) nach (iv) nach (ii) ist trivial.

(ii) nach (iii): Wegen (ii) existiert ein $b \geqslant o$ derart, daß A S-dünn im Punkt x bezüglich $(V_{b+p})_{p>0}$ ist. Also existiert $c \geqslant o$ mit:

(1) A ist S_0-dünn im Punkt x bezüglich $(V_{c+b+p})_{p>0}$.

Sei $a > o$ beliebig. 1. Fall: $a \geqslant c + b$.
Dann ist A nach Lemma 5 auch bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$ S_0-dünn im Punkt x.

2. Fall: $a \leqslant c + b$. Sei $d := c + b - a$.

Wegen (1) ist A im Punkt x S_0-dünn bezüglich $(V_{d+a+p})_{p>0}$.
Da der Potentialkern der Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ eigentlich ist, folgt hieraus nach Satz 7:

A ist S_0-dünn im Punkt x bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$.

(iii) nach (i) nach (ii) ist wiederum trivial.

Korollar 9: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Sei $a \geqslant o$. h sei eine strikt positive, meßbare Funktion auf E derart, daß $V_a h(x)$ für alle $x \in E$ endlich ist.
Dann gilt für alle $A \subset E$: $A^s = \{ {}^a\hat{S}^A_{V_a h} = V_a h \} = \{ {}^a\hat{S}^A_{V_a h} \geqslant V_a h \}$.

Beweis: Im Fall $a = o$ ist der Potentialkern $V = V_0 = V_a$ eigentlich. Die Behauptung folgt sofort aus Satz 4 und Korollar 8.

Lemma 10: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

(a) Für alle $A \subset E$ und alle exzessiven Funktionen f gilt:
$\hat{S}^A_f \geqslant R^{A^s}_f \geqslant S^{A^s}_f \geqslant \hat{S}^{A^s}_f$.

(b) Für alle $A \subset E$ gilt: $(A^s)^s \subset A^s$.

Beweis: Nach 2.8 gilt: $R^{A^s}_f \geqslant S^{A^s}_f \geqslant \hat{S}^{A^s}_f$.
Sei g eine exzessive Funktion mit $I_A \cdot f \leqslant g$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü..
Dann gilt für alle $x \in A^s$: $f(x) = \hat{S}^A_f(x) \leqslant g(x)$.
Wir haben damit für alle exzessiven Funktionen g gezeigt:

$$I_A \cdot f \leqslant g \ (V_p)_{p>0} \text{ — f. ü.} \Longrightarrow I_{A^s} \cdot f \leqslant g.$$

Daraus folgt schließlich: $\hat{S}^A_f \geqslant R^{A^s}_f$.
Mit Hilfe von (a) und Korollar 9 folgt (b):

$$(A^s)^s = \{ {}^a\hat{S}^{A^s}_{V_a 1} \geqslant V_a 1 \} \subset \{ {}^a\hat{S}^A_{V_a 1} \geqslant V_a 1 \} = A^s$$

(hierbei sei $a > o$ beliebig).

Wir sind jetzt in der Lage die Elemente von $\mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$ zu charakterisieren:

Theorem 11: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $A \subset E$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $A \in \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$.

(ii) $A \in \mathfrak{S}_0((V_{a+p})_{p>0})$ für *alle* $a \geqslant o$.

(iii) $A \in \mathfrak{S}_0((V_{a+p})_{p>0})$ für *ein* $a > 0$.

(iv) $A^s \in \mathfrak{E}$, $(A-A^s)$ ist vom Potential 0.

(v) $A^s \in \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$, $(A-A^s)$ ist vom Potential 0.

Ist der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ eigentlich, so gilt auch Äquivalenz mit den folgenden Aussagen:

(vi) $A \in \mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$.

(vii) Es existiert eine Menge $A' \in \mathfrak{E}$, $A' \supset A$ derart, daß für alle exzessiven Funktionen f gilt: $\hat{S}_f^{A'} = \hat{S}_f^A$.

Beweis: (i) und (ii) sind per definitionem äquivalent.

Wir nehmen zunächst an, daß der Potentialkern V eigentlich ist.

(vi) nach (iv): Sei h eine strikt positive, meßbare Funktion derart, daß $Vh(x)$ für alle $x \in E$ endlich ist. Aus $A \in \mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$ folgt:

(1) $\hat{S}_{Vh}^A$ ist exzessiv (insbesondere also meßbar),

(2) $I_A \cdot Vh \leqslant \hat{S}_{Vh}^A$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü..

Nach Korollar 9 gilt:

(3) $A^s = \{ \hat{S}_{Vh}^A \geqslant Vh \}$.

Aus (1) und (3) folgt: $A^s \in \mathfrak{E}$. Aus (2) und (3) folgt:

$(A—A^s)$ ist vom Potential 0.

(iv) nach (vii): Da $(A—A^s)$ vom Potential 0 ist, existiert eine Menge $B \in \mathfrak{E}$, $B \supset (A—A^s)$ die ebenfalls vom Potential 0 ist.

Sei $A' := (A^s \cup B)$. Dann gilt: $A' \in \mathfrak{E}$, $A' \supset A$.

Sei f eine beliebige exzessive Funktion. Da $(A'—A^s)$ vom Potential 0 ist, gilt nach 2.3 (a) und Lemma 10:

$$\hat{S}_f^{A'} \leqslant \hat{S}_f^{A^s} \leqslant \hat{S}_f^A.$$

Die umgekehrte Ungleichung ist trivial. Also gilt (vii).

(vii) nach (vi) folgt unmittelbar aus 2.9 (b), (c).

Von nun an braucht der Potentialkern V nicht mehr eigentlich zu sein.

(ii) nach (iii) ist trivial.

(iii) nach (iv): Sei $A \in \mathfrak{S}_0((V_{a+p})_{p>0})$ für ein $a > 0$.

Da der Potentialkern der Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ eigentlich ist, können wir (vi) $\Rightarrow$ (iv) auf die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ anwenden, und wir erhalten auf diese Weise die Bedingung (iv).

(iv) nach (ii): Wenden wir (iv) $\Rightarrow$ (vi) für alle $a > 0$ auf die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ an, so erhalten wir:

(4) $A \in \mathfrak{S}_0((V_{a+p})_{p>0})$ für alle $a > 0$.

Wir sind fertig, wenn wir auch zeigen können:

(5) $A \in \mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$.

Sei f eine beliebige exzessive Funktion. Aus (4) folgt:

(6) ${}^a\hat{S}_f^A$ ist a-exzessiv für alle $a > 0$,

(7) $I^A \cdot f \leqslant {}^a\hat{S}_f^A\ (V_p)_{p>0}$ — f. ü. für alle $a > 0$.

Nach 2.17 (a), (b) gilt:

(8) ${}^{a_n}\hat{S}_f^A \uparrow \hat{S}_f^A$, wobei $a_n \downarrow 0$ und $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Aus (6), (8) und 1.8 (c) folgt: $\hat{S}_f^A$ ist exzessiv.
Aus (7) und (8) folgt: $I_A \cdot f \leqslant \hat{S}_f^A\ (V_p)_{p>0}$ — f. ü..
Damit ist (5) gezeigt.

(iv) nach (v) ist trivial.

(v) nach (iv): Wenden wir (i) $\Rightarrow$ (iv) auf die Menge $A^s \in \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$ an, so erhalten wir:

(9) $(A^s)^s \in \mathfrak{E}$.

Da $(A - A^s)$ vom Potential 0 ist, folgt nach 2.3 (a) und Lemma 10:

$$\hat{S}_f^A \leqslant \hat{S}_f^{A^s} \leqslant \hat{S}_f^A.$$

Daraus folgt sofort: $(A^s)^s = A^s$.
Zusammen mit (9) folgt (iv).

12: Sei K ein submarkoffscher Kern auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

$(V_p)_{p>0}$ sei die zu $(e^{-t(I-K)})_{t\geq 0}$ gehörige Resolvente (siehe 1.27). Da die leere Menge nach 1.27 (c) die einzige Menge vom Potential 0 ist, folgt sofort:

(a) $A \subset A^s$ für alle $A \subset E$.

Wir machen nun die folgende Zusammensetzung:

$$\{x\} \in \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad K(y, \{x\}) = 0 \quad \text{für alle } x, y \in E,\ x \neq y.$$

Nach 1.27 (e) ist dann die Funktion $I_{\{x\}}$ für alle $x \in E$ exzessiv.
Für alle $A \subset E$ und alle $x \in (E - A)$ gilt: $\hat{S}^A_{(I_{\{x\}})} = 0$.
Daraus folgt für alle $A \subset E$: A ist S_0-dünn in allen Punkten $x \in (E - A)$.
Zusammen mit (a) erhalten wir:

(b) $A = A^s$ für alle $A \subset E$.

Nach Theorem 11 folgt aus (b):

(c) $\mathfrak{S}((V_p)_{p>0}) = \mathfrak{S}_0((V_{a+p})_{p>0}) = \mathfrak{E}$ für alle $a > 0$.

Zusammen mit 2.11 folgt daraus:

(d) Die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ erfüllt für alle $a > 0$ *nicht* die Eigenschaft (**inf**) (siehe 1.14).

Da unter unseren Voraussetzungen jede a-supermediane Funktion bereits a-exzessiv ist, verletzt die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ für alle $a > 0$ sogar die folgende, für beliebige Resolventen schwächere Bedingung:

(**inf'**) Für jede absteigend filtrierende Menge $\mathfrak{F}$ von exzessiven Funktionen existiert eine exzessive Funktion f mit:

(i) $f \leqslant \inf \mathfrak{F}$,

(ii) die Menge $\{ f < \inf \mathfrak{F} \}$ ist vom Potential o.

Theorem 13: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $A \in \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$ und alle exzessiven Funktionen f gilt:

$$\hat{S}_f^A = \hat{S}_f^{A^s} = S_f^{A^s} = R_f^{A^s} = \hat{S}_f^{(A \cap A^s)} = R_f^{(A \cap A^s)}.$$

Beweis: Wegen 2.8 und Lemma 10 genügt es zu zeigen:

$$\hat{S}_f^A \leqslant S_f^{(A \cap A^s)}.$$

Nach Theorem 11 (i) $\Longrightarrow$ (iv) ist die Menge $(A - A^s)$ vom Potential o.
Dann ist auch die Menge $(A - (A \cap A^s))$ vom Potential o.
Nach 2.3 (a) folgt daraus: $\hat{S}_f^A \leqslant \hat{S}_f^{(A \cap A^s)}$.

Aus Theorem 13 folgt sofort:

Korollar 14: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Dann gilt für alle $A \in \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$: $A^s = (A^s)^s = (A \cap A^s)^s$.

In Analogie zur „üblichen" Balayage-Theorie könnte man eine Menge $A \in \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$ total S-dünn nennen, wenn $A^s = \emptyset$ ist. Unter einer S-semipolaren Menge würde man dann eine abzählbare Vereinigung von total S-dünnen Mengen verstehen. Wie das nächste Korollar aber zeigt, stimmen diese Mengen mit den Mengen vom Potential o überein. Aus diesem Grund führen wir die Begriffe total S-dünn und S-semipolar nicht ein.

Korollar 15: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$ derart, daß mindestens eine strikt positive, exzessive Funktion existiert.
Für alle $A \in \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) A ist vom Potential o.

(ii) $A^s = \emptyset$.

(iii) $(A \cap A^s)^s = \emptyset$.

(iv) $(A \cap A^s)^s$ ist vom Potential o.

(v) A^s ist vom Potential o.

(vi) $(A \cap A^s)$ ist vom Potential o.

Beweis: (i) nach (ii): Die Menge A ist in allen $x \in E$ S_0-dünn, denn nach 2.3 (b) gilt $\hat{S}_f^A(x) = o < f(x)$ für alle $x \in E$ (f sei dabei eine strikt positive exzessive Funktion). Daraus folgt: $A^s = \emptyset$.

(ii) nach (iii) nach (iv) ist trivial.

(iv) nach (v) folgt aus Korollar 14. (v) nach (vi) ist trivial.

(vi) nach (i): Nach Theorem 11 (i) $\Rightarrow$ (iv) ist die Menge $(A - A^s)$ vom Potential o. Nach (vi) ist die Menge $(A \cap A^s)$ vom Potential o. Also ist auch $A = (A - A^s) \cup (A \cup A^s)$ vom Potential o.

In Korollar 15 kann man auf die Existenz einer strikt positiven, exzessiven Funktion nicht verzichten. Dies zeigt das folgende Beispiel: Auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$ wird durch $V_p(x, A) := 0$ $(p > 0, x \in E, A \in \mathfrak{E})$ trivialerweise eine Resolvente definiert. Die Funktion 0 ist die einzige exzessive Funktion. Folglich ist die leere Menge in keinem Punkt $x \in E$ S-dünn. Also gilt: $\emptyset^s = E$.

16: Wie wir in Theorem 11 gesehen haben, ist für alle $A \in \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$ die Menge $(A—A^s)$ vom Potential 0. Im Gegensatz dazu ist die Menge $(A^s—A)$ im allgemeinen *nicht* vom Potential 0, auch dann nicht, wenn $A \in \mathfrak{E}$ ist. Wir können hierfür allerdings erst in III, 3.54 ein Beispiel angeben.

Lemma 17: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Dann existiert für jede exzessive Funktion f eine gegen f aufsteigende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von beschränkten exzessiven Funktionen.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n := \widehat{\inf}(f, n)$. Dann gilt:

$$f' := \sup_n f_n = \sup_n \inf(f, n) = f \quad (V_p)_{p>0} — \text{f. ü.}$$

Daraus folgt: $pV_p f' = pV_p f$ für alle $p > 0$.

Da die Funktionen f und f' exzessiv sind, folgt schließlich:

$$f = \sup_{p>0} pV_p f = \sup_{p>0} pV_p f' = f' = \sup_n f_n.$$

Das folgende Theorem deckt die Beziehung zwischen dem Begriff der S-Dünnheit und der inf-Stabilität exzessiver Funktionen auf:

Theorem 18: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $x \in E$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\inf(f(x), g(x)) = \widehat{\inf}(f, g)(x)$ für alle exzessiven Funktionen f, g.

(ii) Für alle $A, B \subset E$ gilt:
A und B sind S_0-dünn im Punkt $x \Rightarrow$
$(A \cup B)$ ist S_0-dünn im Punkt x.

(iii) Für alle $A \in \mathfrak{E}$ ist A oder $(E—A)$ im Punkt x nicht S_0-dünn.

Beweis: (i) nach (ii): Wegen Lemma 3 dürfen wir annehmen, daß $A, B \in \mathfrak{E}$ ist. Sind die Mengen A, B im Punkt x S_0-dünn, so existieren zwei exzessive Funktionen f_1, f_2 mit:

$$\hat{S}^A_{f_1}(x) < f_1(x), \quad \hat{S}^B_{f_2}(x) < f_2(x).$$

Wegen Lemma 17 dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß f_1 und f_2 beschränkt sind. Nach 2.18(a) folgt für die exzessive Funktion $f := f_1 + f_2$:

(1) $\quad \hat{S}^A_f(x) < f(x), \quad \hat{S}^A_f(x) < f(x).$

Wir definieren: $h := \widehat{\inf}(\hat{S}^A_f, \hat{S}^B_f)$, $g := f + h$.
Es gilt: $I_A \cdot f \leqslant \hat{S}^A_f$ $(V_p)_{p>0}$ — f. ü., $I_A \cdot h \leqslant \hat{S}^B_f$.

Daraus folgt:

(2) $\quad I_A \cdot g = I_A \cdot (f + h) \leqslant \hat{S}_f^A + \hat{S}_f^B \ (V_p)_{p>p}$ — f. ü.

Analog erhält man:

(3) $\quad I_B \cdot g \leqslant \hat{S}_f^A + \hat{S}_f^B \ (V_p)_{\cdot p>0}$ — f. ü.

Aus (2) und (3) folgt:

(4) $\quad \hat{S}_g^{(A \cup B)} \leqslant \hat{S}_f^A + \hat{S}_f^B.$

Wir schließen jetzt: $\hat{S}_g^{(A \cup B)}(x) \leqslant \hat{S}_f^A(x) + \hat{S}_f^B(x)$ (nach (4))
$= \sup\left(\hat{S}_f^A(x), \hat{S}_f^B(x)\right) + \inf\left(\hat{S}_f^A(x), \hat{S}_f^B(x)\right) < f(x) + \inf\left(\hat{S}_f^A(x), \hat{S}_f^B(x)\right)$

(nach (1)) $= f(x) + \widehat{\inf\left(\hat{S}_f^A, \hat{S}_f^B\right)}(x)$ (nach (i)) $= f(x) + h(x) = g(x)$.
Also ist $(A \cup B)$ S_0-dünn im Punkt x.

(ii) nach (iii): Sei $A \in \mathfrak{E}$. Wäre A und (E—A) im Punkt x S_0-dünn, so wäre nach (ii) auch die Menge $E = (A \cup (E—A))$ im Punkt x S_0-dünn.
Dies ist aber unmöglich.

(iii) nach (i): Seien f, g zwei beliebige exzessive Funktionen.
Sei o. B. d. A. $f(x) \leqslant g(x)$.

1. Fall: $f(x) < g(x)$.
Sei $A := \{ f < g \}$. Dann gilt: $I_{(E-A)} \cdot g \leqslant f$.
Daraus folgt: $\hat{S}_g^{(E-A)}(x) \leqslant f(x) < g(x)$.
Also ist (E—A) S_0-dünn im Punkt x.

Nach (iii) ist dann die Menge A nicht S_0-dünn im Punkt x.
Insbesondere gilt:

(5) $\quad \hat{S}_f^A(x) = f(x)$.
Trivialerweise gilt: $I_A \cdot f \leqslant \inf(f, g)$.

Mit Hilfe von 1.11(d) folgt: $I_A \cdot f \leqslant \widehat{\inf(f, g)} \ (V_p)_{p>0}$ — f. ü.
Aus (5) und (6) folgt schließlich:

$$\inf(f(x), g(x)) = f(x) = \hat{S}_f^A(x) \leqslant \widehat{\inf(f, g)}(x) \leqslant \inf(f(x), g(x)).$$

2. Fall: $0 < f(x) = g(x) < \infty$.
Für alle $0 \leqslant a \leqslant 1$ erfüllen dann die exzessiven Funktionen $(a \cdot f)$, g die Voraussetzung des 1. Falles. Wir können schließen:

$$\inf(f(x), g(x)) = \sup_{0 \leq a < 1} \inf(a \cdot f(x), g(x)) = \sup_{0 \leq a < 1} \widehat{\inf(a \cdot f, g)}(x)$$

(1. Fall!) $\leqslant \widehat{\inf(f, g)}(x) \leqslant \inf(f(x), g(x))$.

3. Fall: $f(x) = g(x) = 0$. Der Beweis ist trivial.

4. Fall: $f(x) = g(x) = \infty$.
Nach Lemma 17 existiert eine gegen f aufsteigende Folge $(f_n)_{n \in N}$ von beschränkten, exzessiven Funktionen. Für alle $n \in N$ erfüllen dann die Funktionen f_n, g die Voraussetzung des 1. Falles. Wir schließen:

$$\inf(f(x), g(x)) = \sup_n \inf(f_n(x), g(x)) = \sup_n \widehat{\inf(f_n, g)}\,(x)$$

(1. Fall!) $\leqslant \widehat{\inf(f, g)}\,(x) \leqslant \inf(f(x), g(x))$.

Definition 19:

(a) Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Ein Punkt $x \in E$ heißt ein *Verzweigungspunkt* (bezüglich $(V_p)_{p>0}$), wenn zwei Mengen $A, B \subset E$ existieren, die beide im Punkt x S-dünn sind, deren Vereinigung $(A \cup B)$ aber nicht S-dünn im Punkt x ist.

(b) Eine Resolvente $(V_p)_{p>0}$ heißt *normal*, wenn kein Verzweigungspunkt bezüglich $(V_p)_{p>0}$ existiert.

(c) Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Ein Punkt $x \in E$ heißt ein *Verzweigungspunkt* (bezüglich $(P_t)_{t\geq 0}$), wenn x ein Verzweigungspunkt bezüglich der zu $(P_t)_{t\geq 0}$ gehörigen Resolvente ist.

(d) Eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ heißt *normal*, wenn kein Verzweigungspunkt bezüglich $(P_t)_{t\geq 0}$ existiert.
Offensichtlich ist eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe genau dann normal, wenn die dazu gehörige Resolvente normal ist.

Aus Theorem 18 und Korollar 8 können wir folgern:

Korollar 20: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $x \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Für *alle* $a \geqslant 0$ ist x kein Verzweigungspunkt bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$.

(ii) Für *ein* $a \geqslant 0$ ist x kein Verzweigungspunkt bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$.

(iii) $\inf(f(x), g(x)) = \widehat{\inf(f, g)}\,(x)$ für *alle* $a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f, g.

(iv) $\inf(f(x), g(x)) = \widehat{\inf(f, g)}\,(x)$ für *ein* $a > 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f, g.

(v) Für alle $A, B \subset E$ gilt:
A und B sind S-dünn im Punkt x $\Rightarrow$
$(A \cup B)$ ist S-dünn im Punkt x.

Ist der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ eigentlich, so gilt auch Äquivalenz mit den folgenden Aussagen:

(vi) $\inf(f(x), g(x)) = \widehat{\inf(f, g)}\,(x)$ für alle exzessiven Funktionen f, g.

(vii) Für alle $A, B \subset E$ gilt:
A und B sind S_0-dünn im Punkt x $\Rightarrow$
$(A \cup B)$ ist S_0-dünn im Punkt x.

Aus dem letzten Korollar folgt sofort:

Korollar 21: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Für *alle* $a \geqslant 0$ ist die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ normal.

(ii) Für *ein* $a \geqslant 0$ ist die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ normal.

(iii) Für *alle* $a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f, g ist die Funktion inf(f, g) erneut a-exzessiv.

(iv) Für *ein* $a > 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f, g ist die Funktion inf(f, g) erneut a-exzessiv.

(v) Für alle $A, B \subset E$ gilt: $(A \cup B)^s = (A^s \cup B^s)$.

Ist der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ eigentlich, so gilt auch Äquivalenz mit der folgenden Aussage:

(vi) Für alle exzessiven Funktionen f, g ist inf(f, g) exzessiv.

Schlußbemerkung: Der Begriff der S-Dünnheit geht auf Z. Ciesielski zurück. Seine Definition (siehe **Cie**, § 8.2), die speziell auf die Brownsche Bewegung zugeschnitten ist, benutzt allerdings topologische Begriffe. Nach **Cie**, Lemma 8.3 sind in diesem Fall beide Definitionen äquivalent. In III, 2.11 werden wir diese Äquivalenz in einem allgemeineren Rahmen beweisen. Für die Resolvente der Brownschen Bewegung bewies Ciesielski bereits Theorem 11 (i) $\Rightarrow$ (iv) und Theorem 13.

Als Anwendung von Theorem 11 konnten wir in 12 eine große Klasse von Resolventen angeben, die nicht Axiom (**inf**) oder (**inf'**) erfüllen. Unseres Wissens fehlte hierfür bislang ein Beispiel.

Die Frage, ob die Vereinigung zweier in einem Punkt S-dünnen Mengen ebenfalls in diesem Punkt S-dünn ist, führte uns in kanonischer Weise zum Begriff des Verzweigungspunktes. Korollar 20 lieferte uns dann eine erste, sehr wichtige Charakterisierung der Verzweigungspunkte. Der Zusammenhang zwischen Verzweigungspunkten in unserem Sinne und Verzweigungspunkten im Sinne der Theorie der Ray-Prozesse wird in 4.43 und 4.53 geklärt. Die erste ähnlich allgemeine Definition eines Verzweigungspunktes wurde von H. J. Engelbert in **En**(3), Definition 1 gemacht. In Korollar 4.17 werden wir zeigen, daß seine Definition zu unserer äquivalent ist. Für Resolventen von Markoff-Prozessen folgt dies auch aus **En**(3), Theorem 3 und Korollar 20.

I, § 4 An Resolventen assoziierte Topologien

Definition 1: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

(a) Eine Teilmenge U von E heißt $\mathfrak{R}$-*offen* (bezüglich $(V_p)_{p>0}$), wenn für alle $x \in U$ eine Menge $U' \in \mathfrak{E}$, $U' \subset U$ existiert mit:

$$\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E—U') = 0.$$

(b) Offenbar bilden die $\mathfrak{R}$-offenen Mengen eine Topologie auf E. Wir nennen diese Topologie die $\mathfrak{R}$-*Topologie* (bezüglich $(V_p)_{p>0}$). Unter einer $\mathfrak{R}$-*Umgebung* eines Punktes aus E verstehen wir eine Umgebung dieses Punktes bezüglich der $\mathfrak{R}$-Topologie. Eine bezüglich der $\mathfrak{R}$-Topologie in einem Punkt $x \in E$ n.u.h. (bzw. stetige) Funktion auf E nennen wir $\mathfrak{R}$-*n.u.h.* (bzw. $\mathfrak{R}$-*stetig*) im Punkt x.

(c) Eine Topologie $\mathfrak{T}$ auf E heißt *assoziiert* an die Resolvente $(V_p)_{p>0}$, wenn jede offene Menge $U \in \mathfrak{T}$ $\mathfrak{R}$-offen bezüglich $(V_p)_{p>0}$ ist. Offenbar ist die $\mathfrak{R}$-Topologie die feinste an $(V_p)_{p>0}$ assoziierte Topologie.

Lemma 2: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

(a) Für alle $\mathfrak{R}$-offenen Mengen U und alle Mengen N vom Potential o ist auch die Menge (U—N) $\mathfrak{R}$-offen.

(b) Für alle $a, b \geqslant o$ stimmt die $\mathfrak{R}$-Topologie bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$ mit der $\mathfrak{R}$-Topologie bezüglich $(V_{b+p})_{p>0}$ überein.

(c) Für alle $a, b \geqslant o$ und jede Topologie $\mathfrak{T}$ auf E gilt:
$\mathfrak{T}$ ist genau dann an $(V_{a+p})_{p>0}$ assoziiert, wenn $\mathfrak{T}$ an $(V_{b+p})_{p>0}$ assoziiert ist.

Beweis: (a) ist trivial. (b) folgt aus 1.11(a). (c) folgt aus (b).

3: Sei K ein submarkoffscher Kern auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Sei $(V_p)_{p>0}$ die zu $(e^{-t \cdot (I-K)})_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente (siehe 1.27).
Außerdem sei $\{x\} \in \mathfrak{E}$ für alle $x \in E$.
Aus 1.27(a) folgt unmittelbar:

Die $\mathfrak{R}$-Topologie bezüglich $(V_p)_{p>0}$ stimmt mit der diskreten Topologie auf E überein.

Daraus folgt:

Jede Topologie auf E ist an $(V_p)_{p>0}$ assoziiert.

4: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Sei $\Psi: \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ eine Funktion mit der folgenden Eigenschaft:

(a) Es existiert ein $p_0 \in \mathbf{R}_+$ derart, daß für alle $p \geqslant p_0$ gilt:
$\Psi(p) \geqslant p$.

Eine Menge $U \subset E$ heißt Ψ-*offen*, falls für alle $x \in U$ eine Menge $U' \in \mathfrak{E}$, $U' \subset U$ existiert mit: $\limsup_{p \longrightarrow \infty} \Psi(p) \cdot V_p(x, E - U') = 0$.

Offenbar bilden die Ψ-offenen Mengen eine Topologie auf E. Wir nennen diese Topologie die Ψ-*Topologie*.

Wegen (a) ist jede Ψ-offene Menge $\mathfrak{R}$-offen. Also folgt:

(b) Die Ψ-Topologie ist an $(V_p)_{p>0}$ assoziiert.

Ist $\Psi(p) = p$ für alle $p \in \mathbf{R}_+$, so ist die Ψ-Topologie offenbar genau die $\mathfrak{R}$-Topologie.

Seien $\Psi_1, \Psi_2 \colon \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ zwei Funktionen mit der Eigenschaft (a).

Gilt die Beziehung $\limsup_{p \longrightarrow \infty} \frac{\Psi_1(p)}{\Psi_2(p)} < +\infty$, so ist die Ψ_1-Topologie feiner als die Ψ_2-Topologie. Für die Ψ-Topologie ist also nur das asymptotische Verhalten der Funktion Ψ relevant.

Der folgende bekannte Begriff (siehe **Dy**, S. 53) ist analog zum Begriff der Assoziiertheit einer Topologie an eine Resolvente:

Definition 5: Eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$ heißt *stochastisch stetig* bezüglich einer Topologie $\mathfrak{T}$ auf E, wenn für jede offene Menge $U \in \mathfrak{T}$ und jeden Punkt $x \in U$ eine Menge $U' \in \mathfrak{E}$, $U' \subset U$ existiert mit

$$\limsup_{0 < t \longrightarrow 0} P_t(x, E - U') = 0.$$

Aus 1.26 (b) folgt:

Satz 6: Sei $(P_t)_{t>0}$ eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. $(V)_{p>0}$ sei die zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente.

Dann gilt für jede Topologie $\mathfrak{T}$ auf E:

Ist $(P_t)_{t \geq 0}$ stochastisch stetig bezüglich $\mathfrak{T}$, so ist $\mathfrak{T}$ an $(V_p)_{p>0}$ assoziiert.

7: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ (im Sinne von II, 4.1).

Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ die Halbgruppe von $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E_+}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}_+})$. Für alle $x \in E$ gelte: $P^x(\{X_0 = x\}) = 1$.

$\mathfrak{T}$ sei eine Topologie auf E mit der Eigenschaft:

Für alle $x \in E$ sind die Pfade $t \longrightarrow X_t(w)$ P^x—f.s. rechtsseitig stetig auf $[0, \infty[$.

Nach **Dy**(2), Lemma 6.2 ist die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ dann stochastisch stetig bezüglich $\mathfrak{T}$. Zusammen mit Satz 6 folgt:

Die Topologie $\mathfrak{T}$ ist an die zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente assoziiert.

Obiger Prozeß muß *nicht* die starke Markoff-Eigenschaft erfüllen. Obiges Beispiel zeigt, daß die Assoziiertheit einer Topologie an eine Resolvente eine natürliche und damit häufig erfüllte Eigenschaft ist.

Lemma 8: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. $\mathfrak{T}$ sei eine an $(V_p)_{p>0}$ assoziierte Topologie auf E. Sei $x \in E$ mit der Eigenschaft:

$$\lim_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1.$$

Dann gilt für jede bezüglich $\mathfrak{T}$ im Punkt x n.u.h., supermediane Funktion f: $\hat{f}(x) = f(x)$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Die Menge $\{ f > f(x) - \varepsilon \}$ ist dann eine $\mathfrak{R}$-Umgebung des Punktes x, denn f ist n.u.h. im Punkt x bezüglich $\mathfrak{T}$. Daraus folgt:

$$(1) \qquad \limsup_{p \to \infty} pV_p(x, \{ f \leqslant f(x) - \varepsilon \}) = 0.$$

Jetzt können wir schließen:

$$\hat{f}(x) = \lim_{p \to \infty} pV_p f(x) \geqslant \liminf_{p \to \infty} \int_{\{f > f(x) - \varepsilon\}} f(y) \cdot pV_p(x, dy) \geqslant$$

$$\liminf_{p \to \infty} (f(x) - \varepsilon) \cdot pV_p(x, \{ f > f(x) - \varepsilon \}) \geqslant$$

$$\liminf_{p \to \infty} (f(x) - \varepsilon) \cdot pV_p(x, E) - \limsup_{p \to \infty} (f(x) - \varepsilon) \cdot pV_p(x, \{ f \leqslant f(x) - \varepsilon \})$$

$$= \liminf_{p \to \infty} (f(x) - \varepsilon) \cdot pV_p 1(x) - 0 \quad (\text{nach } (1)) = (f(x) - \varepsilon).$$

Korollar 9: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die Funktion 1 sei exzessiv.

$\mathfrak{T}$ sei eine an $(V_p)_{p>0}$ assoziierte Topologie auf E. Dann ist jede bezüglich $\mathfrak{T}$ n.u.h., supermediane Funktion exzessiv.

Beweis: Da die Funktion 1 exzessiv ist, gilt $\lim_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1$ für alle $x \in E$. Jetzt folgt die Behauptung sofort aus Lemma 8.

In Anbetracht der letzten beiden Ergebnisse liegt die Frage nahe, ob nicht umgekehrt jede exzessive Funktion n.u.h. bezüglich der feinsten an $(V_p)_{p>0}$ assoziierten Topologie – der $\mathfrak{R}$-Topologie – ist. Im allgemeinen ist die Antwort negativ. Dort, wo diese Antwort negativ ist, tauchen die bereits aus § 3 bekannten Verzweigungspunkte wieder auf. Grundlegend für diesen Fragenkomplex sind die folgenden beiden Lemmas:

Lemma 10: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Für alle supermedianen Funktionen f und alle $a \geqslant 0$ existiert eine Menge U mit den Eigenschaften:

(i) $U \in \mathfrak{E}$, U ist $\mathfrak{R}$-offen,

(ii) $U \subset \{ f > a \}$,

(iii) die Menge $(\{ f > a \} - U)$ ist vom Potential 0.

Beweis: Sei $g := \hat{1}$ die untere Regularisierte der supermedianen Funktion 1. Wir definieren:

$$N := \{ g < 1 \} \in \mathfrak{E}.$$

Wegen 1.11(d) ist die Menge N vom Potential o.

Für alle $t \geqslant o$ sei $A_t := \{ f > t \}$.

Für die Menge $U := \bigcup_{t>a} (A_t)^s - N$ wollen wir jetzt die Bedingungen (i)–(iii) nachweisen.

Sei $x \in U$. Dann existiert ein $t > a$ mit $x \in (A_t)^s$. Insbesondere gilt:

(1) $\quad \hat{S}_g^{A_t}(x) = g(x) = 1$ (da $x \notin N$).

Da aber andererseits $I_{A_t} \cdot g \leqslant I_{A_t} \leqslant \frac{f}{t}$ ist, folgt:

(2) $\quad \hat{S}_g^{A_t} = \hat{S}_g^{A_t} \leqslant \frac{f}{t}$.

Fassen wir (1) und (2) zusammen, so erhalten wir:

$$1 = \hat{S}_g^{A_t}(x) \leqslant \frac{f(x)}{t}.$$

Also gilt: $f(x) \geqslant t > a$. Damit ist (ii) bewiesen.

Offenbar gilt: $\{ f > a \} = \bigcup_{\substack{q>a \\ q \in Q}} A_q$, $U = \bigcup_{\substack{q>a \\ q \in Q}} (A_q)^s - N$.

Daraus folgt, daß $(\{ f > a \} - U)$ vom Potential o ist, denn nach Theorem 3.11 (i) $\Rightarrow$ (iv) ist die Menge $(A_q - (A_q)^s)$ für alle $q \geqslant o$ vom Potential o. Damit ist (iii) bewiesen.

Nach 3.11 (i) $\Rightarrow$ (iv) ist $(A_q)^s \in \mathfrak{E}$ für alle $q \geqslant o$. Daraus folgt:

$$U = \bigcup_{\substack{q>a \\ q \in Q}} (A_q)^s - N \in \mathfrak{E}.$$

Wir müssen noch zeigen, daß U $\mathfrak{R}$-offen ist.

Sei $x \in U$. Dann existieren zwei reelle Zahlen u, t mit:

(3) $\quad a < u < t,\ x \in (A_t)^s$.

Wie in (2) können wir zeigen: $\hat{S}_g^{A_t} \leqslant \frac{f}{t}$.

Für alle $z \in (E - A_u)$ gilt dann: $\hat{S}_g^{A_t}(z) \leqslant \frac{f(z)}{t} \leqslant \frac{u}{t}$.

Wir haben gezeigt:

(4) $\quad I_{(E-A_u)} \cdot \hat{S}_g^{A_t} \leqslant I_{(E-A_u)} \cdot \frac{u}{t}$.

Aus $x \in (A_t)^s$ folgt:

(5) $\quad \hat{S}_g^{A_t}(x) = g(x)$.

Jetzt können wir schließen:

$$\limsup_{p \to \infty} pV_p(x, E - A_u) + \liminf_{p \to \infty} pV_p(x, A_u) = \lim_{p \to \infty} pV_p 1(x)$$

$$= g(x) = \hat{S}_g^{A_t}(x) \text{ (nach (5))} = \lim_{p \to \infty} pV_p(\hat{S}_g^{A_t})(x)$$

$$= \limsup_{p \to \infty} pV_p(I_{(E-A_u)} \cdot \hat{S}_g^{A_t})(x) + \liminf_{p \to \infty} pV_p(I_{A_u} \cdot \hat{S}_g^{A_t})(x)$$

$$\leqslant \limsup_{p \to \infty} pV_p\left(I_{(E-A_u)} \cdot \frac{u}{t}\right)(x) + \liminf_{p \to \infty} pV_p(I_{A_u})(x)$$

(wegen (4) und $I_{A_u} \cdot \hat{S}_g^{A_t} \leqslant I_{A_u}$)

$$= \frac{u}{t} \cdot \limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E-A_u) + \liminf_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, A_u).$$

Wir haben gezeigt:

$$\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E-A_u) + \liminf_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, A_u)$$

$$\leqslant \frac{u}{t} \cdot \limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E-A_u) + \liminf_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, A_u).$$

Hieraus folgt:

$$\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E-A_u) \leqslant \frac{u}{t} \cdot \limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E-A_u).$$

Da $\frac{u}{t} < 1$ ist, folgt: $\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E-A_u) = 0$.

Da $(A_u - (A_u)^s)$ vom Potential 0 ist, folgt daraus:

$$\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E-(A_u)^s) = 0.$$

Da $((A_u)^s - U) \subset N$ vom Potential 0 ist, folgt schließlich:

$$\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E-U) = 0.$$

Da $x \in U$ beliebig wählbar ist, folgt: U ist $\mathfrak{R}$-offen.

Lemma 11: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum. $(E, \mathfrak{E})$. Für alle supermedianen Funktionen f und alle $a > 0$ existiert eine Menge U mit den Eigenschaften:

(i) $U \in \mathfrak{E}$, U ist $\mathfrak{R}$-offen,

(ii) $U \subset \{ f < a \}$,

(iii) die Menge $(\{ f < a \} - U)$ ist vom Potential 0.

Beweis: Nach 1.11(d) ist die Menge $N := \{ \hat{f} < f \} \in \mathfrak{E}$ vom Potential 0. Für alle $t > 0$ sei $A_t := \{ f < t \}$.

Wir behaupten nun, daß die Menge $U := \bigcup_{t<a} (A_t)^s - N$ die Eigenschaften (i)–(iii) erfüllt.

Sei $x \in U$. Dann existiert ein $t < a$ mit $x \in (A_t)^s$. Insbesondere gilt:

(1) $\hat{S}_{\hat{f}}^{A_t}(x) = \hat{f}(x) = f(x)$ (da $x \notin N$).

Da aber andererseits $I_{A_t} \cdot \hat{f} \leqslant t$ ist, folgt:

(2) $\hat{S}_{\hat{f}}^{A_t} \leqslant \hat{S}_{\hat{f}}^{A_t} \leqslant t$.

Fassen wir (1) und (2) zusammen, so erhalten wir:

$f(x) \leqslant t < a$. Damit ist (ii) bewiesen.

Offenbar gilt: $\{ f < a \} = \bigcup_{\substack{q < a \\ q \in Q}} A_q$, $U = \bigcup_{\substack{q < a \\ q \in Q}} (A_q)^s - N$

Nach 3.11 (i) $\Rightarrow$ (iv) ist $A_q \in \mathfrak{E}$ und $(A_q - (A_q)^s)$ vom Potential o für alle $q > o$. Aus obiger Darstellung folgt dann:

$U \in \mathfrak{E}$, $(\{ f < a \} - U)$ ist vom Potential o.

Insbesondere ist damit (iii) bewiesen.

Wir müssen also nur noch zeigen, daß U $\mathfrak{R}$-offen ist. Sei $x \in U$. Dann existieren zwei reelle Zahlen u, t mit:

(3) $\quad t < u < a,\ x \in (A_t)^s.$

Wie in (2) können wir zeigen: $\hat{S}_{\hat{f}}^{A_t} \leqslant t$.

Für alle $z \in (E - A_u)$ gilt dann: $\hat{S}_{\hat{f}}^{A_t}(z) \leqslant t < u \leqslant f(z)$. Wir haben damit gezeigt:

(4) $\quad f - \hat{S}_{\hat{f}}^{A_t} \geqslant I_{(E - A_u)} \cdot (u - t).$

Aus $x \in (A_t)^s$ folgt:

(5) $\quad \hat{S}_{\hat{f}}^{A_t}(x) = \hat{f}(x).$

Jetzt können wir schließen:

$$\limsup_{p \to \infty} (u - t) \cdot pV_p(x, E - A_u) \leqslant \limsup_{p \to \infty} pV_p(f - \hat{S}_{\hat{f}}^{A_t})(x) \quad \text{(nach (4))}$$

$$= \lim_{p \to \infty} pV_p f(x) - \lim_{p \to \infty} pV_p(\hat{S}_{\hat{f}}^{A_t})(x) = \hat{f}(x) - \hat{S}_{\hat{f}}^{A_t}(x)$$

$$= \hat{f}(x) - \hat{f}(x) \ \text{(nach (5))} = o.$$

Da $(u - t) > o$ ist, folgt hieraus: $\limsup_{p \to \infty} pV_p(x, E - A_u) = o.$

Da $(A_u - (A_u)^s)$ vom Potential o ist, folgt:

$$\limsup_{p \to \infty} pV_p(x, E - (A_u)^s) = o.$$

Da $((A_u)^s - U) \subset N$ vom Potential o ist, folgt schließlich:

$$\limsup_{p \to \infty} pV_p(x, E - U) = o.$$

Da $x \in U$ beliebig wählbar ist, erhalten wir: U ist $\mathfrak{R}$-offen.

Satz 12: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Dann existiert für alle supermedianen Funktionen f eine Menge N vom Potential o derart, daß f in allen Punkten $x \in (E - N)$ $\mathfrak{R}$-stetig ist.

Beweis: Nach Lemma 10 existiert für alle $a \geqslant o$ eine Menge U_a mit:

(1) $\quad U_a \in \mathfrak{E}$, U_a ist $\mathfrak{R}$-offen,

(2) $\quad U_a \subset \{ f > a \}$,

(3) $\quad$ die Menge $(\{ f > a \} - U_a)$ ist vom Potential o.

Wegen (3) ist die Menge $N_1 := \bigcup_{\substack{q \geq 0 \\ q \in Q}} (\{ f > q \} - U_q)$ vom Potential o.

Sei $x \in (E - N_1)$ und $a \geqslant o$ mit $f(x) > a$.

Dann existiert $q \in Q$ mit $f(x) > q > a$.

Da $x \notin N_1$ ist, gilt: $x \in (\{ f > q \} - N_1) \subset U_q \subset \{ f > a \}$.

Weil U_q $\mathfrak{R}$-offen ist, folgt daraus: $\{ f > a \}$ ist eine $\mathfrak{R}$-Umgebung von x. Wir haben damit gezeigt: f ist in allen $x \in (E - N_1)$ $\mathfrak{R}$ — n.u.h. Analog findet man eine Menge N_2 vom Potential o derart, daß f in allen $x \in (E - N_2)$ $\mathfrak{R}$—n.o.h. ist, man muß nur statt Lemma 10 das Lemma 11 verwenden. f ist dann in allen $x \in E$, $x \notin N := N_1 \cup N_2$ $\mathfrak{R}$-stetig.

Lemma 13: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Sei $x \in E$.

M sei eine Menge vom Potential o.

$f \in B(E, \mathfrak{E})$ sei eine in allen $y \in (E - M)$ $\mathfrak{R}$-stetige Funktion mit $|f(x)| < \infty$.

Gilt dann $\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(|f - f(x)|)(x) = o$, so ist f auch im Punkt x $\mathfrak{R}$-stetig.

Beweis: Sei o.B.d.A. $M \in \mathfrak{E}$. Sei $\varepsilon > o$.

Wir definieren: $U' := \{ |f - f(x)| < \varepsilon \} - M$, $U := (U' \cup \{ x \})$.

Wir wollen zeigen, daß U $\mathfrak{R}$-offen ist.

Für alle $y \in U'$ ist $\{ |f - f(x)| < \varepsilon \}$ eine $\mathfrak{R}$-Umgebung von y, denn f ist in allen $y \in U'$ $\mathfrak{R}$-stetig. Nach Lemma 2(a) ist dann auch die Menge $U' = (\{ |f - f(x)| < \varepsilon \} - M)$ für alle $y \in U'$ eine $\mathfrak{R}$-Umgebung von y. Also ist U' $\mathfrak{R}$-offen. Für alle $y \in U'$ gilt deshalb:

$$\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(y, E - U) \leqslant \limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(y, E - U') = o.$$

Wir sind demnach fertig, wenn wir auch folgendes zeigen können:

$$\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E - U) = o.$$

Dies sieht man folgendermaßen ein:

$$\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E - U) \leqslant \limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, \{ |f - f(x)| \geqslant \varepsilon \})$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \cdot \limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(|f - f(x)|)(x) = o.$$

Theorem 14: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Sei $x \in E$ mit $\lim_{p \longrightarrow \infty} pV_p 1(x) = 1$.

Für alle $a \geqslant o$ und alle a-supermedianen Funktionen f sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

(ii) f ist $\mathfrak{R}$-n.u.h. im Punkt x.

(iii) $\widehat{\inf(f, t)}(x) = \inf(f(x), t)$ für alle $t \geqslant o$.

(iv) $\widehat{\inf(f, q)}(x) = \inf(f(x), q)$ für alle $q \in Q$, $q \geqslant o$.

Ist $f(x) < \infty$, so gilt auch Äquivalenz mit:

(v) $\widehat{\inf(f, f(x))}\,(x) = f(x)$.

(vi) $\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(|f - f(x)|)\,(x) = 0$.

Beweis: Es genügt die Behauptung für $a = 0$ zu beweisen, andernfalls gehe man zur Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ über und verwende 1.11(a).

(i) nach (ii) ist trivial.

(ii) nach (iii): Für alle $t \geqslant 0$ ist die Funktion $\inf(f, t)$ supermedian und $\mathfrak{R}$-n.u.h. im Punkt x. Aus Lemma 8 folgt dann:

$$\widehat{\inf(f, t)}\,(x) = \inf(f, t)\,(x) = \inf(f(x), t) \text{ für alle } t \geqslant 0.$$

(iii) nach (iv) ist trivial.

Wir beweisen den Rest der Behauptung zunächst nur unter der Zusatzbedingung: $f(x) < \infty$.

(iv) nach (v): Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $q \in \mathbf{Q}$, $q \geqslant 0$ mit $(f(x) - \varepsilon) \leqslant q \leqslant f(x)$.

Wir können jetzt schließen:

$$\widehat{\inf(f, f(x))}\,(x) = \lim_{p \longrightarrow \infty} pV_p(\inf(f, f(x)))\,(x) \geqslant \lim_{p \longrightarrow \infty} pV_p(\inf(f, q))\,(x)$$

$$= \widehat{\inf(f, q)}\,(x) = \inf(f(x), q) \text{ (nach (iv))} \geqslant (f(x) - \varepsilon).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig wählbar ist, folgt (v).

(v) nach (vi): Sei $g := \inf(f, f(x))$. Wir schließen:

$$\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(|f - f(x)|)\,(x) = \limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(f + f(x) - 2g)\,(x)$$

$$= \lim_{p \longrightarrow \infty} pV_p f(x) + \lim_{p \longrightarrow \infty} pV_p(f(x) \cdot 1)\,(x) - 2 \cdot \lim_{p \longrightarrow \infty} pV_p g(x)$$

$$\leqslant f(x) + f(x) \cdot \lim_{p \longrightarrow \infty} pV_p 1(x) - 2 \cdot \lim_{p \longrightarrow \infty} pV_p g(x)$$

$$= 2 \cdot f(x) - 2 \cdot \hat{g}(x) = 2 \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) \text{ (nach (v))} = 0.$$

(vi) nach (i): (i) folgt mit Hilfe von Lemma 13 und Satz 12 unmittelbar aus (vi).

Im Fall $f(x) = \infty$ müssen wir noch zeigen:

(iv) nach (i): Für alle $n \in \mathbf{N}$ definieren wir $f_n := \inf(f, n)$.

Für alle $q \in \mathbf{Q}$, $q \geqslant 0$ gilt: $\widehat{\inf(f_n, q)}\,(x) = \widehat{\inf(f, \inf(n, q))}\,(x)$
$= \inf(f(x), \inf(n, q))$ (nach (iv)) $= \inf(f_n(x), q)$.
Also erfüllt die Funktion f_n für alle $n \in \mathbf{N}$ die Eigenschaft (iv).
Da $f_n(x) < \infty$ ist, folgt, wie vorhin bewiesen wurde:
f_n ist für alle $n \in \mathbf{N}$ $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.
Folglich ist die Funktion $f = \sup_n f_n$ $\mathfrak{R}$-n.u.h. im Punkt x.
Da $f(x) = \infty$ ist, ist f dann sogar $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

Korollar 15: Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

$(V_p)_{p>0}$ sei die zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente.
Sei $x \in E$ mit $\lim_{p \to 0} P_t 1(x) = 1$.

Dann sind für alle $a \geqslant 0$ und alle bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$ a-supermedianen Funktionen mit $|f(x)| < \infty$ folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

(ii) $\lim_{p \to 0} P_t(|f - f(x)|)(x) = 0$.

Beweis: Aus $\lim_{p \to 0} P_t 1(x) = 1$ folgt nach 1.26(b):

$$\lim_{p \to \infty} pV_p 1(x) = \lim_{t \to 0} P_t 1(x) = 1.$$

Sei f eine bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$ a-supermediane Funktion mit $f(x) < \infty$. Dann sind die Funktionen $(f(x) \cdot 1)$, $\inf(f, f(x))$ ebenfalls a-supermedian bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$. Nach 1.26(c) existiert also:

$$\lim_{p \to \infty} P_t(|f - f(x)|)(x) = \lim_{p \to \infty} P_t(f + f(x) - 2 \cdot \inf(f, f(x)))(x).$$

Mit Hilfe von 1.26(b) folgt hieraus:

$$\lim_{p \to \infty} pV_p(|f - f(x)|)(x) = \lim_{p \to 0} P_t(|f - f(x)|)(x)$$

Die Behauptung des Korollars folgt jetzt sofort aus Theorem 14 (i) $\Longleftrightarrow$ (vi).

Korollar 16: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Sei $x \in E$ mit $\lim_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Jede exzessive Funktion ist $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

(ii) $\widehat{\inf(f, g)}(x) = \inf(f(x), g(x))$ für alle exzessiven Funktionen f, g.

Beweis: (i) nach (ii): Sind f und g zwei exzessive Funktionen, so ist $\inf(f, g)$ supermedian und nach (i) auch $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x. Nach Lemma 8 gilt dann:

$$\widehat{\inf(f, g)}(x) = \inf(f, g)(x) = \inf(f(x), g(x))$$

(ii) nach (i): Sei f eine exzessive Funktion und $t \geqslant 0$ beliebig. Sei g die untere Regularisierte der supermedianen Funktion $(t \cdot 1)$. Nach Voraussetzung gilt: $g(x) = t$.

Wir schließen: $\inf(f(x), t) = \inf(f(x), g(x)) = \widehat{\inf(f, g)}(x)$ (nach (ii)) $\leqslant \widehat{\inf(f, t)}(x) \leqslant \inf(f(x), t)$.

Wir haben gezeigt: $\widehat{\inf(f, t)}(x) = \inf(f(x), t)$ für alle $t \geqslant 0$. Nach Theorem 14 (iii) $\Rightarrow$ (i) ist f dann $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

Korollar 17: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Sei $x \in E$ mit $\lim\limits_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) x ist kein Verzweigungspunkt.

(ii) Für *alle* $a \geqslant 0$ ist jede a-exzessive Funktion $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

(iii) Für *ein* $a > 0$ ist jede a-exzessive Funktion $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

Ist der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ eigentlich, so gilt auch Äquivalenz mit:

(iv) Jede exzessive Funktion ist $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

Beweis: Die Äquivalenz von (i) und (iv) folgt aus Korollar 16 und Korollar 3.20(i) $\Leftrightarrow$ (vi).

(i) nach (ii) folgt aus Korollar 16 und Korollar 3.20(ii) $\Rightarrow$ (iii).

(ii) nach (iii) ist trivial.

(iii) nach (i) folgt aus Korollar 16 und Korollar 3.20(iv) $\Rightarrow$ (i).

Definition 18: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die gröbste Topologie derart, daß alle für ein beliebiges $a \geqslant 0$ a-exzessiven Funktionen stetig sind, nennen wir die *feine Topologie* der Resolvente $(V_p)_{p>0}$.

Korollar 19: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Sei $x \in E$ mit $\lim\limits_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) x ist kein Verzweigungspunkt.

(ii) Jede feine Umgebung von x ist eine $\mathfrak{R}$-Umgebung von x.

(iii) Jede feine Umgebung von x ist nicht vom Potential 0.

Beweis: (i) nach (ii): Sei U eine feine Umgebung von x. Dann existieren $s_1, \ldots, s_n$, $t_1, \ldots, t_n$ aus $\overline{\mathbb{R}}_+$ und für ein $a \geqslant 0$ a-exzessive Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ mit:

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \{s_i < f_i < t_i\} \subset U.$$

Nach Korollar 17(i) $\Longrightarrow$ (ii) ist $\{s_i < f_i < t_i\}$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$ eine $\mathfrak{R}$-Umgebung von x. Also ist auch U eine $\mathfrak{R}$-Umgebung von x.

(ii) nach (iii) ist trivial.

(iii) nach (i): Sei $a \geqslant 0$, und seien f, g zwei a-exzessive Funktionen. Dann ist die Menge $\{\widehat{\inf(f, g)} < \inf(f, g)\}$ fein-offen und nach 1.11(d) vom Potential 0.

Aus (iii) folgt dann: $x \notin \{\widehat{\inf(f, g)} < \inf(f, g)\}$.

Aus Korollar 17 und 19 folgt sofort:

Korollar 20: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die Funktion 1 sei exzessiv.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ist normal.

(ii) Die feine Topologie ist an die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ assoziiert.

(iii) Jede fein-offene Menge ist nicht vom Potential 0.

(iv) Für *alle* $a \geqslant 0$ ist jede a-exzessive Funktion $\mathfrak{R}$-stetig.

(v) Für *ein* $a > 0$ ist jede a-exzessive Funktion $\mathfrak{R}$-stetig.

Ist der Potentialkern V eigentlich, so gilt auch Äquivalenz mit:

(vi) Jede exzessive Funktion ist $\mathfrak{R}$-stetig.

Durch die Korollare 16, 17 und 20 wird die im Anschluß an Korollar 9 gestellte Frage vollständig beantwortet.

Korollar 21: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Sei $x \in E$ mit $\lim\limits_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1$. x sei kein Verzweigungspunkt. Sei $A \in \mathfrak{E}$.

Gilt nun $\limsup\limits_{p \to \infty} pV_p(x, A) > 0$, so folgt $x \in A^s$.

Beweis: Nach Theorem 3.11(i) $\Longrightarrow$ (iv) gilt:

$A^s \in \mathfrak{E}$, $(A - A^s)$ ist vom Potential 0.

Annahme: $x \notin A^s$. Dann existiert ein $a \geqslant 0$ und eine a-exzessive Funktion f mit ${}^a\hat{S}_f^A(x) < f(x)$.

Nach Korollar 17(i) $\Rightarrow$ (iii) ist $U := \{ {}^a\hat{S}_f^A < f \}$ dann eine $\mathfrak{R}$-Umgebung von x. Insbesondere gilt: $\limsup\limits_{p \to \infty} pV_p(x, E - U) = 0$.

Wir schließen:

$$\limsup_{p \to \infty} pV_p(x, A) \leqslant \limsup_{p \to \infty} pV_p(x, A^s) \text{ (da } (A - A^s) \text{ vom Potential 0 ist)}$$

$$\leqslant \limsup_{p \to \infty} pV_p(x, E - U) \text{ (da } A^s \subset (E - U)) = 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch. Also ist obige Annahme falsch.

Korollar 22: Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

Sei $(V_p)_{p>0}$ die zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente.

Sei $x \in E$ mit $\lim\limits_{t \to 0} P_t 1(x) = 1$. x sei kein Verzweigungspunkt. Sei $A \in \mathfrak{E}$.

Gilt nun $\liminf\limits_{t \to 0} P_t(x, A) > 0$, so folgt $x \in A^s$.

Beweis: Aus $\lim_{t \to 0} P_t 1(x) = 1$ folgt nach 1.26(b):

$$\lim_{p \to \infty} pV_p 1(x) = \lim_{t \to 0} P_t 1(x) = 1.$$

Mit Hilfe einfacher Überlegungen folgt aus $\liminf_{t \to 0} P_t(x, A) =: c > 0$

$$\liminf_{p \to \infty} pV_p(x, A) = \liminf_{p \to \infty} p \cdot \int_0^\infty e^{-pt} \cdot P_t(x, A)\, dt \geqslant c > 0$$

Die Behauptung folgt jetzt unmittelbar aus Korollar 21.

23: (a) Es seien die Voraussetzungen von Korollar 21 erfüllt. Dann folgt aus $x \in A^s$ i.a. *nicht* $\limsup_{p \to \infty} pV_p(x, A) > 0$.

(b) Es seien die Voraussetzungen von Korollar 22 erfüllt. Dann folgt aus $\limsup_{p \to \infty} P_t(x, A) > 0$ i.a. *nicht* $x \in A^s$.

Gilt jedoch $P_t(y, N) = 0$ für alle $y \in E$ und alle Mengen $N \in \mathfrak{E}$ vom Potential 0, so ist die obige Verschärfung von Korollar 22 richtig. Korollar 15 ist das entscheidende Hilfsmittel beim Beweis dieser Aussage.

Die negativen Aussagen in 23 können wir durch das folgende Beispiel belegen:

24: Sei $\mathfrak{R}$ σ-Algebra der Borelschen Mengen von $\mathbf{R}$. Auf dem Meßraum $(\mathbf{R}, \mathfrak{R})$ betrachten wir die Halbgruppe der gleichmäßigen Bewegung nach rechts:

$$P_t(x, A) := I_A(x + t) \quad (t \geqslant 0,\ x \in \mathbf{R},\ A \in \mathfrak{R}).$$

Für die zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente $(V_p)_{t > 0}$ gilt:

(a) $$V_p(x, A) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot P_t(x, A)\, dt = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot I_A(x + t)\, dt$$

$$= \int_x^\infty e^{-p(t-x)} \cdot I_A(t)\, dt = \int_{A \cap [x, \infty[} e^{-p(t-x)} dt \quad (p > 0,\ x \in \mathbf{R},\ A \in \mathfrak{R}).$$

Für den Potentialkern V von $(V_p)_{p > 0}$ folgt daraus:

(b) $$V(x, A) = \sup_{p > 0} V_p(x, A) = \lambda(A \cap [x, \infty[) \quad (x \in \mathbf{R},\ A \in \mathfrak{R}).$$

Mit Hilfe von 1.25(b) können wir folgendes über die exzessiven Funktionen aussagen:

(c) Eine positive Funktion auf $\mathbf{R}$ ist genau dann exzessiv, wenn sie antiton und rechtsseitig stetig ist.

Zusammen mit Korollar 3.21(vi) $\Rightarrow$ (i) folgt daraus:

(d) Die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ ist normal.

Die Menge $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$ ist nach (b) vom Potential 0.

Nach 3.15 gilt dann: $A^s = \varnothing$.

Andererseits gilt: $\limsup_{t \longrightarrow 0} P_t(o, A) = 1$.

Also ist die Menge A ein Beispiel für 23(b).

Für alle $x, y \in \mathbf{R}$ mit $x < y$ gilt: $\liminf_{t \longrightarrow 0} P_t(x,]x, y[) = 1$.

Zusammen mit Korollar 22 folgt:

(e) $\quad x \in (]x, y[)^s$ für alle $x, y \in \mathbf{R}$ mit $x < y$.

Wir geben uns jetzt zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $\mathbf{R}$ vor, die beide gegen o absteigen und die folgende Eigenschaft besitzen:

$$y_{n+1} < x_n < y_n \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}.$$

Sei $B := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} [x_n, y_n[$. Nach (e) gilt:

(f) $\quad x_n \in (]x_n, y_n[)^s \subset B^s$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Für jede exzessive Funktion f können wir schließen:

$$\hat{S}_f^B(o) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \hat{S}_f^B(x_n) \text{ (nach (c) ist } \hat{S}_f^B \text{ rechtsseitig stetig)} = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n)$$

(nach (f)) $= f(o)$ (nach (c) ist f rechtsseitig stetig). Daraus folgt:

(g) $\quad o \in B^s$.

Wir stellen jetzt eine Zusatzbedingung an die Folgen (x_n), (y_n):

(h) $\quad (y_n - x_n) \leqslant \frac{1}{n} \cdot (x_n - y_{n+1})$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Da die Funktion $t \longrightarrow p \cdot e^{-pt}$ antiton ist, folgt:

$$\int_{x_n}^{y_n} p \cdot e^{-pt} dt \leqslant (y_n - x_n) \cdot p \cdot e^{-p x_n} \leqslant \frac{1}{n} \cdot (x_n - y_{n+1}) \cdot p \cdot e^{-p x_n}$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \int_{y_{n+1}}^{x_n} p \cdot e^{-pt} \, dt. \text{ Hieraus können wir schließen:}$$

$$\int_{B \cap [0, y_k]} p \cdot e^{-pt} \, dt = \sum_{n=k}^{\infty} \int_{x_n}^{y_n} \ldots\ldots \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \int_{y_{n+1}}^{x_n} \ldots\ldots \leqslant$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \int_{y_{n+1}}^{x_n} \ldots\ldots = \frac{1}{k} \cdot \int_{[0, y_k] - B} p \cdot e^{-pt} \, dt \leqslant \frac{1}{k}.$$

Wir haben damit bewiesen:

(j) $\quad \int_{B \cap [0, y_k]} p \cdot e^{-pt} \, dt \leqslant \frac{1}{k}$ für alle $p > o$ und alle $k \in \mathbf{N}$.

Das folgende Ergebnis ist trivial:

(k) $\quad \limsup_{p \longrightarrow \infty} \int_y^{\infty} p \cdot e^{-pt} \, dt = o$ für alle $y > o$.

Jetzt können wir für alle $k \in \mathbf{N}$ schließen:

$$\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(o, B) = \limsup_{p \longrightarrow \infty} \int_{B \cap [0, \infty[} p \cdot e^{-pt}\, dt \quad \text{(nach (a))}$$

$$\leqslant \limsup_{p \longrightarrow \infty} \int_{B \cap [0, y_k]} p \cdot e^{-pt}\, dt + \limsup_{p \longrightarrow \infty} \int_{y_k}^{\infty} p \cdot e^{-pt}\, dt$$

$\leqslant \frac{1}{k} + o$ (nach (j) und (k)). Wir haben gezeigt:

(m) $$\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_,(o, B) = o.$$

Wegen (g) und (m) ist die Menge B ein Beispiel für 23(a).

Abschließend möchten wir noch bemerken, daß man mit ähnlichen Überlegungen ein Beispiel zu 23(a) finden kann, welches die Resolvente der Brownschen Bewegung im $\mathbf{R}^n$ benützt.

In Korollar 21 kann man unter gewissen Umständen darauf verzichten, daß x kein Verzweigungspunkt ist:

Satz 25: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
Sei $x \in E$ und $A \in \mathfrak{E}$.
Gilt nun $\limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E - A) = o$, so folgt $x \in A^s$.

Beweis: Sei $a > o$. Sei f eine beschränkte, a-exzessive Funktion. Wir schließen:

$$f(x) - {}^a\hat{S}_f^A(x) = \lim_{p \longrightarrow \infty} pV_p(f - {}^a\hat{S}_f^A)(x) \leqslant \limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p\left(I_{A^s} \cdot (f - {}^a\hat{S}_f^A)\right)(x)$$

$$+ \limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p\left(I_{(E - A^s)} \cdot (f - {}^a\hat{S}_f^A)\right)(x) \leqslant o + \|f\|_\infty \cdot \limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E - A^s)$$

$$\leqslant \|f\|_\infty \cdot \limsup_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, E - A) \text{ (denn } (A - A^s) \text{ ist nach 3.11(i)} \Rightarrow \text{(iv) vom}$$

Potential o) $= o$. Wir haben damit gezeigt: ${}^a\hat{S}_f^A(x) = f(x)$ für alle beschränkten, a-exzessiven Funktionen f. Schließlich folgt: $x \in A^s$.

Aus Satz 25, Satz 2.8 und Lemma 3.10 folgt sofort:

Korollar 26: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Dann gilt für alle $\mathfrak{R}$-offenen Mengen U:

(a) $U \subset U^s = (U^s)^s$.

(b) $R_f^U = S_f^U = \hat{S}_f^U$ für alle exzessiven Funktionen f.

(c) Ist zusätzlich $U \in \mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$, so ist R_f^U für alle exzessiven Funktionen f exzessiv.

Unter den zusätzlichen Voraussetzungen, daß die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ normal ist, und daß die Funktion 1 exzessiv ist, kann man im Beweis von Korollar 26 statt 25 auch Korollar 21 verwenden.

Wir kehren zu Korollar 17 zurück. Es ist in vielen Situationen nicht einfach, die Bedingungen 17 (iii) bzw. 17 (iv) nachzuweisen. Im Gegensatz dazu gelingt es häufig leicht zu zeigen, daß genügend viele exzessive Funktionen $\mathfrak{R}$-stetig in einem vorgegebenen Punkt sind. Unser nächstes Ziel ist es, diesen Sachverhalt zu präzisieren, und zu zeigen, daß dann dieser Punkt kein Verzweigungspunkt ist. Zunächst führen wir einige Bezeichnungen ein:

27: Sei $\mathfrak{F}$ eine Menge von Funktionen auf einer Menge E.

Mit $\sigma(\mathfrak{F})$ bezeichnen wir die von $\mathfrak{F}$ auf E erzeugte σ-Algebra.

Mit $\sigma_u(\mathfrak{F})$ bezeichnen wir die σ-Algebra aller universell-meßbaren Mengen von $(E, \sigma(\mathfrak{F}))$.

Eine σ-Algebra $\mathfrak{F}$ auf E heißt *abzählbar erzeugt*, wenn eine abzählbare Menge $\tilde{\mathfrak{F}}$ von Funktionen auf E mit $\mathfrak{F} = \sigma(\tilde{\mathfrak{F}})$ existiert. Eine σ-Algebra $\mathfrak{F}$ auf E heißt *u-abzählbar erzeugt*, wenn eine abzählbare Menge $\tilde{\mathfrak{F}}$ von Funktionen auf E mit $\mathfrak{F} = \sigma_u(\tilde{\mathfrak{F}})$ existiert.

Definition 28: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Eine Menge $\mathfrak{F} \subset B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ heißt ein *Riesz-Erzeuger* für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $f \in B(E, \sigma_u(\mathfrak{F}))$ für alle $a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f,

(ii) $1 \in \mathfrak{F}$,

(iii) $\inf(f, g) \in \mathfrak{F}$, $(f + g) \in \mathfrak{F}$ für alle $f, g \in \mathfrak{F}$.

Gilt statt (iii) die folgende Bedingung:

(iii') $(f \cdot g) \in \mathfrak{F}$ für alle $f, g \in \mathfrak{F}$,

so heißt $\mathfrak{F}$ ein *multiplikativer Erzeuger* für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$.

$\mathfrak{F}$ heißt ein *Erzeuger* für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$, falls $\mathfrak{F}$ ein Riesz-Erzeuger oder ein multiplikativer Erzeuger für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ist.

Die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ heißt *separabel*, falls ein abzählbarer Erzeuger für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ existiert.

Die Nützlichkeit der Erzeuger für Resolventen beruht unter anderem auf dem „monotone class theorem". Wir wollen hierfür eine Version, die auf Riesz-Erzeuger, und eine, die auf multiplikative Erzeuger zugeschnitten ist, angeben:

Satz 29: Sei **H** ein Vektorraum von beschränkten Funktionen auf einer Menge E.

(i) Für jede gegen eine beschränkte Funktion f aufsteigende Folge $(f_n)_{n \in N}$ von Funktionen aus **H** sei die Funktion f ebenfalls in **H** enthalten.

Weiter existiere eine Menge $\mathfrak{F} \subset \mathbf{H}$ mit folgenden Eigenschaften:

(ii) $1 \in \mathfrak{F}$,

(iii) $\inf(f, g) \in \mathfrak{F}$, $(f + g) \in \mathfrak{F}$ für alle $f, g \in \mathfrak{F}$.

Dann gilt: $B_b(E, \sigma(\mathfrak{F})) \subset \mathbf{H}$.

Beweis: Sei V der von $\mathfrak{F}$ erzeugte Vektorraum. Elementare Überlegungen zeigen, daß V ebenfalls die Bedingungen 29 (ii), (iii) erfüllt. Die Behauptung folgt nun aus der Me, I, T 20 nachfolgenden Bemerkung.

Die folgende Version des „monotone class theorem" wird in Me, I, T 20 bewiesen:

Satz 30: Sei **H** ein Vektorraum von beschränkten Funktionen auf einer Menge E.

(i) Für jede gegen eine beschränkte Funktion f aufsteigende Folge $(f_n)_{n\in N}$ von Funktionen aus **H** sei die Funktion f ebenfalls in **H** enthalten,

(ii) **H** ist abgeschlossen bezüglich gleichmäßiger Konvergenz,

(iii) $1 \in \mathbf{H}$.

Weiter existiere eine Menge $\mathfrak{F} \subset \mathbf{H}$ mit folgender Eigenschaft:

(iv) $(f \cdot g) \in \mathfrak{F}$ für alle $f, g \in \mathfrak{F}$.

Dann gilt: $B_b(E, \sigma(\mathfrak{F})) \subset \mathbf{H}$.

Lemma 31: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

Sei $x \in E$ mit $\lim\limits_{p\to\infty} pV_p 1(x) = 1$.

Sei $g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ derart, daß $Vg(y)$ für alle $y \in E$ endlich ist.

Sei $\mathbf{H} := \{ f \in B_b(E, \mathfrak{E})$: $V(f \cdot g)$ ist $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt $x \}$.

Dann gilt:

(a) **H** ist ein Vektorraum.

(b) Für jede gegen eine beschränkte Funktion f aufsteigende Folge $(f_n)_{n\in N}$ von Funktionen aus **H** ist die Funktion f ebenfalls in **H** enthalten.

Ist die Funktion Vg sogar beschränkt, so gilt zusätzlich:

(c) **H** ist abgeschlossen bezüglich gleichmäßiger Konvergenz.

Beweis: (a) ist trivial.

(b): Sei $(f_n)_{n\in N}$ eine gegen eine beschränkte Funktion f aufsteigende Folge von Funktionen aus **H**.

Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß $f_n \geqslant 0$ für alle $n \in N$ ist, andernfalls betrachte man die Folge $(f_n - f_1)_{n\in N}$.

$(V(f_n \cdot g))_{n\in N}$ ist also eine gegen $V(f \cdot g)$ aufsteigende Folge von exzessiven Funktionen, die im Punkt x $\mathfrak{R}$-stetig sind.

Folglich ist die exzessive Funktion $V(f \cdot g)$ $\mathfrak{R}$-n.u.h. im Punkt x.

Nach Theorem 14(ii) $\Rightarrow$ (i) ist $V(f \cdot g)$ sogar $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

Also gilt: $f \in \mathbf{H}$.

(c): Die Funktion Vg sei von nun an beschränkt.

Dann wird durch $f \longrightarrow V(f \cdot g)$ ein beschränkter Operator auf dem Banachraum $(B_b(E, \mathfrak{E}), \| \|_\infty)$ definiert. Ist also $(f_n)_{n \in N}$ eine gegen f gleichmäßig konvergierende Folge aus **H**, so konvergiert die Folge $(V(f_n \cdot g))_{n \in N}$ gleichmäßig gegen die Funktion $V(f \cdot g)$. Da die Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz erhalten bleibt, folgt aus der $\mathfrak{R}$-Stetigkeit im Punkt x der Funktionen $V(f_n \cdot g)$ die $\mathfrak{R}$-Stetigkeit im Punkt x der Funktion $V(f \cdot g)$. Also ist $f \in \mathbf{H}$. Damit ist auch (c) bewiesen.

Lemma 32: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ sei eigentlich.

Sei $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{E}$ eine σ-Algebra auf E derart, daß für alle $a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen g gilt: $g \in B(E, \mathfrak{E}')$.

Dann existiert für alle exzessiven Funktionen f eine Folge $(h_n)_{n \in N}$ aus $B_b(E, \mathfrak{E}')$ mit $Vh_n \uparrow f$.

Beweis: Für alle $h \in B_+(E, \mathfrak{E}')$ und alle $p > 0$ ist $V_p h$ p-exzessiv.

Nach Voraussetzung folgt: $V_p h \in B(E, \mathfrak{E}')$ für alle $h \in B_+(E, \mathfrak{E}')$.

Folglich wird für alle $p > 0$ durch $U_p(x, A) := V_p(x, A)$ $(x \in E, A \in \mathfrak{E}')$ ein Kern auf dem Meßraum $(E, \mathfrak{E}')$ definiert.

Offenbar ist $(U_p)_{p>0}$ eine Resolvente auf dem Meßraum $(E, \mathfrak{E}')$.

Da jede bezüglich $(V_p)_{p>0}$ exzessive Funktion in $B(E, \mathfrak{E}')$ enthalten ist, folgt:

(1) Die exzessiven Funktionen bezüglich $(V_p)_{p>0}$ stimmen mit den exzessiven Funktionen bezüglich $(U_p)_{p>0}$ überein.

Sei U der Potentialkern von $(U_p)_{p>0}$. Offensichtlich gilt:

(2) $Uh = Vh$ für alle $h \in B_+(E, \mathfrak{E}')$.

Insbesondere ist der Potentialkern U eigentlich.

Sei nun f eine bezüglich $(V_p)_{p>0}$ exzessive Funktion.

Wegen (1) und 1.13 existiert eine Folge $(h_h)_{n \in N}$ aus $B_{b,+}(E, \mathfrak{E}')$ mit $Uh_n \uparrow f$. Mit Hilfe von (2) folgt schließlich: $Vh_n \uparrow f$.

Theorem 33: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die Funktion $V1$ sei endlich.

Sei $x \in E$ mit $\lim_{p \to \infty} pV_p1(x) = 1$.

$\mathfrak{F}$ sei ein Riesz-Erzeuger für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) x ist kein Verzweigungspunkt.

(ii) Für alle $f \in \mathfrak{F}$ ist die Funktion Vf $\mathfrak{R}$-n.u.h. im Punkt x.

Beweis: (i) nach (ii) folgt aus Korollar 17 (i) $\Rightarrow$ (iv).

(ii) nach (i): Wir betrachten

$\mathbf{H} := \{h \in B_b(E, \mathfrak{E})$: Vh ist $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x$\}$.

Aus (ii) und Theorem 14(ii) $\Rightarrow$ (i) folgt: $\mathfrak{F} \subset \mathbf{H}$.

Wegen Lemma 34 ist $\mathbf{H}$ ein Vektorraum und erfüllt Bedingung 29(i).

Wegen 28(ii), (iii) sind auch die Bedingungen 29(ii), (iii) erfüllt.

Aus Satz 29 folgt dann: $B_b(E, \sigma(\mathfrak{F})) \subset \mathbf{H}$. Also gilt:

(1) Für alle $h \in B_{b,+}(E, \sigma(\mathfrak{F}))$ ist Vh $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

Sei nun $h \in B_{b,+}(E, \sigma_u(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{E})$.

Dann existiert $h' \in B_{b,+}(E, \sigma(\mathfrak{F}))$ mit $h' \leqslant h$ und $Vh(x) = Vh'(x)$.

Sei $Vh(x) > a$ für ein $a \geqslant 0$. Dann ist auch $Vh'(x) > a$.

Wegen $h' \in B_{b,+}(E, \sigma(\mathfrak{F}))$ und (1) folgt: $\{ Vh' > a \}$ ist eine $\mathfrak{R}$-Umgebung von x. Erst recht ist dann $\{ Vh > a \} \supset \{ Vh' > a \}$ eine $\mathfrak{R}$-Umgebung von x. Wir haben damit gezeigt:

(2) Für alle $h \in B_{b,+}(E, \sigma_u(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{E})$ ist Vh $\mathfrak{R}$-n.u.h. im Punkt x.

Sei $\mathfrak{E}' := (\sigma_u(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{E})$.

Nach 28(i) gilt für alle $a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen g:

$g \in B(E, \mathfrak{E}')$. Wir können deshalb Lemma 32 anwenden:

(3) Für alle exzessiven Funktionen f existiert eine Folge

$(h_n)_{n \in N}$ aus $B_{b,+}(E, \mathfrak{E}')$ mit $Vh_n \uparrow f$.

(2) und (3) ergeben zusammen:

Jede exzessive Funktion ist $\mathfrak{R}$-n.u.h. im Punkt x.

Zusammen mit Theorem 14(ii) $\Rightarrow$ (i) folgt schließlich:

Jede exzessive Funktion ist $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

Aus Korollar 17(iv) $\Rightarrow$ (i) folgt nun die Behauptung.

Theorem 34: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

Sei $x \in E$ mit $\lim\limits_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1$.

$\mathfrak{F}$ sei ein multiplikativer Erzeuger für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$.

g sei eine strikt positive Funktion aus $\mathfrak{F}$ derart, daß die Funktion Vg beschränkt ist.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) x ist kein Verzweigungspunkt.

(ii) Für alle $f \in \mathfrak{F}$ ist die Funktion Vf $\mathfrak{R}$-n.u.h. im Punkt x.

Beweis: (i) nach (ii) folgt aus Korollar 17(i) $\Rightarrow$ (iv).

(ii nach (i): Wir betrachten

$$\mathbf{H} := \{ h \in B_b(E, \mathfrak{E}) : V(h \cdot g) \text{ ist } \mathfrak{R}\text{-stetig im Punkt x} \}.$$

Aus (ii), Theorem 14(ii) $\Rightarrow$ (i) und 28(iii') folgt: $\mathfrak{F} \subset \mathbf{H}$.
Wegen Lemma 34 ist $\mathbf{H}$ ein Vektorraum und erfüllt 30(i), (ii), (iii).
Wegen 28(iii') ist auch die Bedingung 30(iv) erfüllt.

Aus Satz 30 folgt dann: $B_b(E, \sigma(\mathfrak{F})) \subset \mathbf{H}$. Also gilt:

Für alle $h \in B_{b,+}(E, \sigma(\mathfrak{F}))$ ist die Funktion $V(h \cdot g)$ $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

Daraus folgt wiederum:

Für alle $h \in B_+(E, \sigma(\mathfrak{F}))$ ist die Funktion $V(h \cdot g)$ $\mathfrak{R}$-n.u.h. im Punkt x.

Da die Funktion g strikt positiv ist, folgt:

Für alle $h \in B_+(E, \sigma(\mathfrak{F}))$ ist die Funktion $Vh = V\left(\left(\frac{h}{g}\right) \cdot g\right)$ $\mathfrak{R}$-n.u.h. im Punkt x.

Nun verläuft der Beweis von Theorem 34 genauso weiter wie der von Theorem 33.

Aus Theorem 33 und Theorem 34 folgt sofort:

Korollar 35: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

Sei $x \in E$ mit $\lim\limits_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1$.

$\mathfrak{F}$ sei ein Erzeuger für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) x ist kein Verzweigungspunkt.

(ii) Für ein $a > 0$ und für alle $f \in \mathfrak{F}$ ist die Funktion $V_a f$ $\mathfrak{R}$-n.u.h. im Punkt x.

Korollar 36: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Ist die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ separabel, so ist die Menge E_b aller Verzweigungspunkte vom Potential 0.

Beweis: Sei $E' := \{ x \in E: \lim\limits_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1 \}$.

Nach 1.11(d) ist die Menge $(E - E')$ vom Potential 0.
Sei $\mathfrak{F} := \{ f_n: n \in \mathbf{N} \}$ ein abzählbarer Erzeuger für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$. Sei $a > 0$.

Nach Korollar 35 gilt:

$$(E_b \cap E') = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{ x \in E': V_a f_n \text{ ist nicht } \mathfrak{R}\text{-n.u.h. im Punkt } x \}.$$

Nach Satz 12 ist dann die Menge $(E_b \cap E')$ vom Potential 0.

Also ist auch $E_b \subset ((E_b \cap E') \cup (E - E'))$ vom Potential 0.

Eine Resolvente $(V_p)_{p>0}$ auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$ ist schon dann separabel, wenn eine abzählbare Menge $\mathfrak{F}$ existiert, die lediglich Bedingung 28(i) erfüllt. Sei hierzu $\mathfrak{F}'$ die Menge aller endlichen Produkte von Funktionen aus $\mathfrak{F}$. Dann ist $(\mathfrak{F}' \cup \{1\})$ ein abzähl-

barer, multiplikativer Erzeuger für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$. Zusammen mit Korollar 36 folgt jetzt sofort:

Korollar 37: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die σ-Algebra $\mathfrak{E}$ sei abzählbar oder u-abzählbar erzeugt. Dann ist die Menge E_b aller Verzweigungspunkte vom Potential o.

Obige Voraussetzungen sind z. B. dann erfüllt, wenn E ein Lusinscher Raum oder ein Polnischer Raum oder ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis ist, und wenn $\mathfrak{E}$ die σ-Algebra der Borelschen oder der universell-meßbaren Mengen von E ist.

38: Für den Rest des Paragraphen sei $(E, \mathfrak{T})$ ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis.

$\mathfrak{E}$ sei die σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von $(E, \mathfrak{T})$.

$$\mathbf{C}(E) := \{ f: E \longrightarrow R: f \text{ ist stetig} \},$$
$$\mathbf{C}_b(E) := \{ f \in \mathbf{C}(E): f \text{ ist beschränkt} \},$$
$$\mathbf{C}_{b,+}(E) := \{ f \in \mathbf{C}_b(E): f \geqslant o \},$$
$$\mathbf{C}_k(E) := \{ f \in \mathbf{C}(E): \overline{\{ f \neq o \}} \text{ ist kompakt} \},$$
$$\mathbf{C}_{k,+}(E) := \{ f \in \mathbf{C}_k(E): f \geqslant o \}.$$

Konvergiert eine Familie $(m_p)_{p>0}$ von Radon-Maßen auf $(E, \mathfrak{E})$ für p gegen ∞ vag gegen ein Radon-Maß m, so schreiben wir hierfür: $\underset{p \longrightarrow \infty}{\text{vag-lim}}\, m_p = m$.

Lemma 39: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$.

(a) Für alle $x \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\underset{p \longrightarrow \infty}{\text{vag-lim}}\, pV_p(x, \,) = \varepsilon_x$.

(ii) $\underset{p \longrightarrow \infty}{\text{liminf}}\, pV_p f(x) \geqslant f(x)$ für alle positiven, n.u.h. Funktionen f.

(iii) Für alle $U \in \mathfrak{T}$ mit $x \in U$ gilt: $\lim\limits_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, U) = 1$.

(iv) Für alle $U \in \mathfrak{T}$ mit $x \in U$ gilt: $\underset{p \longrightarrow \infty}{\text{limsup}}\, pV_p(x, E - U) = o$

und $\lim\limits_{p \longrightarrow \infty} pV_p 1(x) = 1$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\underset{p \longrightarrow \infty}{\text{vag-lim}}\, pV_p(x, \,) = \varepsilon_x$ für alle $x \in E$.

(ii) Die Topologie $\mathfrak{T}$ ist an die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ assoziiert, und die Funktion 1 ist exzessiv.

Beweis: (a):

(i) nach (ii): Sei f n.u.h. und positiv.

Dann existiert eine gegen f aufsteigende Folge $(g_n)_{n\in N}$ aus $C_{k,+}(E)$. Wir schließen:

$$\liminf_{p\longrightarrow\infty} pV_p f(x) \geqslant \sup_n \liminf_{p\longrightarrow\infty} pV_p g_n(x) = \sup_n g_n(x) \text{ (nach (i))} = f(x).$$

(ii) nach (iii): Man wende (ii) auf die n.u.h. Funktion I_U an. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) ist trivial.

(iv) nach (i): Sei $f \in C_{k,+}(E)$. Sei $\varepsilon > 0$.

Dann existiert eine offene Menge $U \in \mathfrak{T}$ mit $x \in U$ derart, daß für alle $y \in U$ gilt:

$$(f(x) - \varepsilon) \leqslant f(y) \leqslant (f(x) + \varepsilon). \text{ Also gilt:}$$

$$(1) \qquad (f(x) - \varepsilon) \cdot I_U \leqslant f \leqslant (f(x) + \varepsilon) \cdot I_U + \|f\|_\infty \cdot I_{(E-U)}.$$

Wir schließen jetzt:

$$(f(x) - \varepsilon) = \lim_{p\longrightarrow\infty} pV_p((f(x) - \varepsilon) \cdot I_U)(x) \quad \text{(nach (iii))}$$

$$\leqslant \liminf_{p\longrightarrow\infty} pV_p f(x) \text{ (nach (1))} \leqslant \limsup_{p\longrightarrow\infty} pV_p f(x)$$

$$\leqslant \limsup_{p\longrightarrow\infty} pV_p((f(x) + \varepsilon) \cdot I_U)(x) + \|f\|_\infty \cdot \limsup_{p\longrightarrow\infty} pV_p(x, E - U) \text{ (nach (1))}$$

$$= (f(x) + \varepsilon) + 0 \text{ (nach (iii) und (iv))}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig wählbar ist, folgt (i).

(b) folgt unmittelbar aus (a).

Satz 40: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $h \in C_{k,+}(E)$ sei die Funktion Vh beschränkt und n.u.h. bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}$.

Ist dann x ein Punkt aus E mit $\operatorname{vag-lim}_{p\longrightarrow\infty} pV_p(x, \ ) = \varepsilon_x$, so ist x kein Verzweigungspunkt.

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt:

(1) Für alle $h \in C_{b,+}(E)$ ist Vh n.u.h. bezüglich $\mathfrak{T}$,

(2) es existiert eine strikt positive Funktion $g \in C_b(E)$ derart, daß die Funktion Vg beschränkt ist.

Sei $h \in C_{b,+}(E)$. Nach (1) ist die Funktion inf(Vh, t) für alle $t \geqslant 0$ n.u.h. Aus Lemma 39(i) $\Rightarrow$ (ii) folgt dann:

$$\liminf_{p\longrightarrow\infty} pV_p(\inf(Vh, t))(x) \geqslant \inf(Vh, t)(x).$$

Daraus folgt: $\widehat{\inf(Vh, t)}(x) = \lim_{p\longrightarrow\infty} pV_p(\inf(Vh, t))(x) \geqslant \inf(Vh(x), t) \geqslant \widehat{\inf(Vh, t)}(x)$.

Hieraus folgt mit Hilfe von Theorem 14(iii) $\Rightarrow$ (i): Vh ist $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x. Wir haben damit gezeigt:

(5) Für alle $h \in C_{b,+}(E)$ ist Vh $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x.

Wegen (2) und (3) sind die Voraussetzungen von Theorem für den multiplikativen Erzeuger $C_{b,+}(E)$ erfüllt. Aus Theorem 34 folgt schließlich: x ist kein Verzweigungspunkt.

Korollar 41: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$. Für ein $a > o$ und alle $f \in C_{k,+}(E)$ sei $V_a f$ n.u.h. bezüglich $\mathfrak{T}$.

Ist dann x ein Punkt aus E mit $\underset{p \longrightarrow \infty}{\text{vag-lim}}\ pV_p(x, \ ) = \varepsilon_x$, so ist x kein Verzweigungspunkt.

Beweis: Man wende Satz 40 auf die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ an.

Das nächste Korollar folgt sofort aus Korollar 41. Für Fellersche Halbgruppen folgt daraus zusammen mit Korollar 3.21 (i) $\Rightarrow$ (iii), daß deren exzessive Funktionen inf-stabil sind. Für dieses Resultat fehlte bislang ein rein analytischer Beweis.

Korollar 42: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$. Für ein $a > o$ und alle $f \in C_{k,+}(E)$ sei $V_a f$ n.u.h. bezüglich $\mathfrak{T}$. Für alle $x \in E$ gelte:

$$\underset{p \longrightarrow \infty}{\text{vag-lim}}\ pV_p(x, \ ) = \varepsilon_x.$$

Mit anderen Worten: Die Topologie $\mathfrak{T}$ sei an $(V_p)_{p>0}$ assoziiert. Dann ist die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ normal.

Wir erörtern nun eine andere Definition für Verzweigungspunkte:

43: Sei E kompakt. $(V_p)_{p>0}$ sei eine Ray-Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$ (siehe **Me**, X, D 18 oder **Ge**, 3.1). Ein Punkt x aus E heißt ein Verzweigungspunkt im Sinne der Theorie der Ray-Prozesse (siehe **Me**, X, T 21), wenn folgendes nicht gilt: $\underset{p \longrightarrow \infty}{\text{vag-lim}}\ pV_p(x, \ ) = \varepsilon_x$. Aus Korollar 41 folgt dann: Jeder Verzweigungspunkt in unserem Sinne ist ein Verzweigungspunkt im Sinne der Theorie der Ray-Prozesse. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

In **Ta** (3) werden die Begriffe Ray-Resolvente und Ray-Prozeß in zweierlei Weise auf lokalkompakte Räume mit abzählbarer Basis verallgemeinert. An der Definition der Verzweigungspunkte ändert sich nichts. Korollar 41 und Satz 40 liefern in beiden Fällen: Jeder Verzweigungspunkt in unserem Sinne ist ein Verzweigungspunkt im Sinne von **Ta** (3), 2.1. Man könnte nun für beliebige Resolventen auf einem lokalkompakten Raum die folgende Definition machen: Ein Punkt $x \in E$ heißt Verzweigungspunkt, falls nicht gilt: $\underset{p \longrightarrow \infty}{\text{vag-lim}}\ pV_p(x, \ ) = \varepsilon_x$. Die Beispiele 45 und 46 werden jedoch zeigen, daß diese Definition in zweierlei Weise unvernünftig wäre. Wir benötigen dabei den folgenden Satz:

Satz 44: Sei $(G, \cdot\,)$ eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis. $\mathfrak{G}$ sei die σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von G. $(V_p)_{p>0}$ sei eine bezüglich Linkstranslationen invariante, submarkoffsche Resolvente. Das soll heißen:

$$V_p(z \cdot x, z \cdot A) = V_p(x, A) \quad (p > o, z \in G, A \in \mathfrak{G}).$$

Dann ist die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ normal.

Beweis: Ist $(V_p)_{p>0}$ die Null-Resolvente (d.h.: $V_p = o$ für alle $p > o$), so ist die Behauptung trivial. Wir nehmen deshalb an, daß die Menge G nicht vom Potential o ist. Nach Korollar 37 existiert dann wenigstens ein Punkt x aus G, der kein Verzweigungspunkt ist. Wegen der Translationsinvarianz ist dann jeder Punkt aus G kein Verzweigungspunkt.

45: Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ die Brownsche Halbgruppe auf dem $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 1)$. w sei das normierte Haar-Maß auf dem m-dimensionalen Torus $\mathbf{T}^m$ $(m \geqslant 1)$ $G := (\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m)$ ist dann eine lokalkompakte, abelsche Gruppe. Die Elemente von G schreiben wir als Paare (x_1, x_2), wobei $x_1 \in \mathbf{R}^n$ und $x_2 \in \mathbf{T}^m$ ist.

$\mathfrak{G}$ sei die σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von G. Wir definieren:

$$Q_t((x_1, x_2), A) := \iint I_A(y_1, y_2)\, P_t(x_1, dy_1)\, w(dy_2) \quad (t \geqslant o,\ (x_1, x_2) \in G,\ A \in \mathfrak{G}).$$

Man beachte: $Q_t((x_1, x_2), A)$ hängt nicht von x_2 ab. Für alle $s, t \geqslant o$, alle $(x_1, x_2) \in G$ und alle $f \in B_+(G, \mathfrak{G})$ können wir schließen: $Q_s Q_t f(x_1, x_2)$

$$= \iint Q_t f(y_1, y_2)\, P_s(x_1, dy_1)\, w(dy_2) = \iiiint f(z_1, z_2)\, P_t(y_1, dz_1)\, w(dz_2)\, P_s(x_1, dy_1)$$
$$w(dy_2) = \iiiint f(z_1, z_2)\, P_t(y_1, dz_1)\, P_s(x_1, dy_1)\, w(dz_2)\, w(dy_2) \text{ (nach Fubini)}$$
$$\iint f(z_1, z_2)\, P_{s+t}(x_1, dz_1)\, w(dz_2) = Q_{s+t} f(x_1, x_2).$$

Wir haben gezeigt: $(Q_t)_{t \geq 0}$ ist eine Halbgruppe. Trivialerweise ist die Halbgruppe $(Q_t)_{t \geq 0}$ auch meßbar und submarkoffsch. Sei $(V_p)_{p>0}$ die zu $(Q_t)_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente. Man verifiziert leicht:

(1) $(V_p)_{p>0}$ ist invariant bezüglich Translationen,

(2) $V_p f \in C_b(E)$ für alle $p > o$ und alle $f \in C_b(E)$.

Aus (1) und Satz 44 folgt:

(3) Die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ist normal.

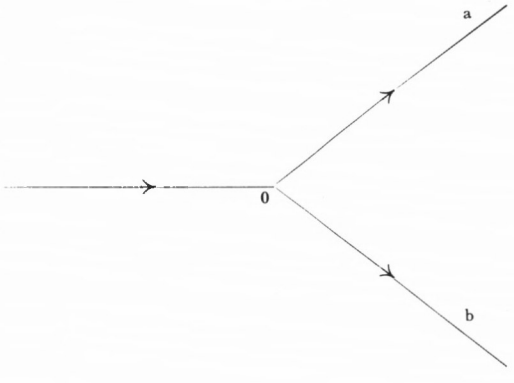
Da $Q_t((x_1, x_2), A)$ nicht von x_2 abhängt, folgt:

(4) $\operatorname{vag\text{-}lim}_{p \to \infty} pV_p((x_1, x_2), \ ) = \operatorname{vag\text{-}lim}_{p \to \infty} Q_t((x_1, x_2), \ ) = (\varepsilon_{x_1} \otimes w)$
für alle $(x_1, x_2) \in G$.

Also ist jeder Punkt x aus G ein Verzweigungspunkt im Sinne von 43.

Obiges Beispiel zeigt auch, daß die Umkehrung von Satz 40 und Korollar 41 i. a. falsch ist.

46: Wir betrachten die „verzweigte Bewegung nach rechts":



Es handelt sich hierbei um einen Markoff-Prozeß, den wir im folgenden nur auf anschauliche Weise beschreiben wollen. Dieser Prozeß bewegt sich, bis er den Punkt o erreicht hat, gleichmäßig nach rechts. Im Punkt o verzweigt sich dann der Prozeß mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ jeweils in den oberen Ast a und den unteren Ast b. In den beiden Ästen bewegt sich der Prozeß gleichmäßig in Richtung des jeweiligen Astes weiter. Offensichtlich ist die „verzweigte Bewegung

nach rechts" ein Markoff-Prozeß mit stetigen Pfaden. Der Zustandsraum trage dabei die übliche vom R^2 induzierte Topologie.

Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ die Halbgruppe dieses Markoff-Prozesses.

$(V_p)_{p>0}$ sei die zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente.

Nach 7 ist die Topologie des Zustandsraumes an $(V_p)_{p>0}$ assoziiert.

Also gilt für alle Punkte x des Zustandsraumes:

$$\operatorname*{vag\text{-}lim}_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x,) = \varepsilon_x.$$

Der Punkt o ist aber ein Verzweigungspunkt, denn die Äste a und b sind S-dünn im Punkt o, und die Vereinigung beider Äste ist nicht S-dünn im Punkt o.

Dieses Beispiel zeigt, daß auf die Feller-Eigenschaften in Satz 40 und Korollar 41 nicht verzichtet werden kann.

Dieses Beispiel zeigt ebenfalls, daß die in 43 vorgeschlagene Verallgemeinerung der Definition eines Verzweigungspunktes im Sinne der Theorie der Ray-Prozesse auf beliebige Resolventen im Widerspruch zur Anschauung stehen würde, denn im Punkt o verzweigt sich der obige Prozeß auf sehr anschauliche Weise.

Definition 47: $(V_p)_{p>0}$ sei eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$.

Man sagt, eine Funktion $f: E \longrightarrow \overline{R}_+$ *verschwindet am Rande* (bezüglich $(V_p)_{p>0}$), wenn für alle $x \in E$ und alle $\varepsilon > o$ eine supermediane Funktion s existiert mit:

$$\{ f > s \} \text{ ist relativkompakt, } s(x) < \varepsilon.$$

Eine exzessive Funktion, die am Rande verschwindet, heißt ein *Potential* (bezüglich $(V_p)_{p>0}$). Offenbar ist eine exzessive Funktion f genau dann ein Potential, wenn

$$\begin{aligned} o &= \inf \{ S_f^{E-K} : K \subset E \text{ kompakt} \} \\ &= \inf \{ \hat{S}_f^{E-K} : K \in E \text{ kompakt} \} \qquad \text{(nach 2.7)}. \end{aligned}$$

Die Potentiale bezüglich $(V_{a+p})_{p>0}$ werden *a-Potentiale* genannt.

Lemma 48: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$.

Gegeben sei weiter ein Punkt $x \in E$, der kein Verzweigungspunkt ist. Existiert dann für ein $a \geqslant o$ ein a-Potential q mit $q(x) > o$, so existiert für jedes $\varepsilon > o$ eine kompakte Menge $K \subset E$ und ein $p_0 > o$ mit $pV_p(x, E - K) \leqslant \varepsilon$ für alle $p \geqslant p_0$.

Beweis: Wir können o.B.d.A. $a = o$ annehmen. Sei g die untere Regularisierte der supermedianen Funktion 1. Dann gilt:

(1) $\quad V_p(|1 - g|) = o$ für alle $p \geqslant o$.

Indem wir q mit einer Konstanten multiplizieren, können wir $q(x) > g(x)$ erreichen. Sei $U := \{q > g\}$. Dann gilt: $S_q^{E-U}(x) \leqslant g(x) < q(x)$. Also ist die Menge (E—U) S-dünn in x. Da x kein Verzweigungspunkt ist, ist die Menge U nicht S-dünn in x. Insbesondere gilt:

(2) $\quad \hat{S}_g^U(x) = g(x)$.

Wegen $\hat{S}_g^U \leqslant q$ ist $h := \hat{S}_g^U$ ebenfalls ein Potential. Also existiert eine supermediane Funktion s mit

(3) $K := \overline{\{h > s\}}$ ist kompakt,

(4) $s(x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Aus (4) folgt:

(5) $pV_p(I_{E-K} \cdot h)(x) \leqslant pV_p s(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $p > 0$.

Wegen (2) existiert ein $p_0 > 0$ mit

(6) $pV_p(|g-h|)(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $p \geqslant p_0$.

Jetzt können wir für alle $p \geqslant p_0$ schließen:

$$pV_p(x, E-K) = pV_p(I_{E-K} \cdot g) \text{ (nach (1))} \leqslant pV_p(I_{E-K} \cdot h) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{(nach (6))} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ (nach (5))}.$$

K und p_0 leisten also das Gewünschte.

Satz 49: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $f \in C_{k,+}(E)$ sei Vf ein stetiges, beschränktes Potential. Die exzessiven Funktionen seien punktetrennend. Für alle $x \in E$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:

(i) x ist kein Verzweigungspunkt,
$\lim_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1$.

(ii) $\text{vag-lim}_{p \to \infty} pV_p(x, \,) = \varepsilon_x$.

Beweis: (ii) nach (i) ist ein Spezialfall von Satz 40.

(i) nach (ii): Wir wollen zunächst zeigen:

(1) Die stetigen, exzessiven Funktionen sind punktetrennend.

Wegen 1.13 ist die Menge $\{Vh: h \in B_+(E, \mathfrak{E})\}$ punktetrennend. Wegen $Vh = \inf\{Vg: g \geqslant 0 \text{ n.u.h.}\}$ $(h \in B_+(E, \mathfrak{E}))$ ist auch die Menge $\{Vg: g \geqslant 0 \text{ n.u.h.}\}$ punktetrennend. Wegen $Vg = \sup\{Vf: f \in C_{k,+}(E)\}$ $(g \geqslant 0 \text{ n.u.h.})$ ist schließlich auch die Menge $\{Vf: f \in C_{k,+}(E)\}$ punktetrennend. Da Vf für alle $f \in C_{k,+}(E)$ stetig, exzessiv ist, folgt (1).

Sei $\mathfrak{C} := \{f \text{ stetig, supermedian } \hat{f}(x) = f(x)\}$. Für alle $f, g \in \mathfrak{C}$ gilt $\inf(f, g)(x) \geqslant \widehat{\inf(f, g)}(x) \geqslant \widehat{\inf(\hat{f}, \hat{g})}(x) = \inf(\hat{f}, \hat{g})(x)$ (da x kein Verzweigungspunkt ist) $= \inf(f, g)(x)$. $\mathfrak{C}$ ist also inf-stabil. Nach Voraussetzung gilt $1 \in \mathfrak{C}$. Zusammen mit (1) folgt dann:

(2) Der Vektorraum $\mathfrak{H} := \mathfrak{C} - \mathfrak{C}$ ist punktetrennend, inf-stabil und enthält die Funktion 1.

Sei nun $f \in C_k(E)$ und $\varepsilon > 0$.

Wegen $\lim_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1$ existiert nach 1.13 ein $g \in C_{k,+}(E)$ mit $Vg(x) > 0$. Vg ist aber nach Voraussetzung ein Potential. Also existiert nach Lemma 48 eine kompakte Menge K und ein $P_0 > 0$ mit

(3) $\quad pV_p(x, E - K) \leqslant \varepsilon$ für alle $p \geqslant p_0$.

Sei o.B.d.A. $x \in K$.

Wegen (2) existiert eine Funktion $h \in \mathfrak{H}$ mit:

(4) $\quad \sup \{|h(y) - f(y)| : y \in K\} \leqslant \varepsilon, \|h\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Indem wir p_0 notfalls vergrößern, können wir erreichen:

(5) $\quad |h(x) - pV_p h(x)| \leqslant \varepsilon$ für alle $p \geqslant p_0$.

Nun können wir für alle $p \geqslant p_0$ schließen:

$|f(x) - pV_p f(x)| \leqslant |h(x) - pV_p h(x)| + |f(x) - h(x)| + pV_p(I_K \cdot |h - f|)(x)$ $+ pV_p(I_{E-K} \cdot |h - f|)(x) \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \cdot 2\|f\|_\infty$ (nach (3), (4) und (5)). Da wir $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen können, folgt $\lim_{p \to \infty} pV_p f(x) = f(x)$. Daraus folgt schließlich die Behauptung.

Lemma 50: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem beliebigen Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Menge ξ aller für ein $b \geqslant 0$ b-exzessiven Funktionen ist punktetrennend.

(ii) Für alle $a > 0$ ist die Menge ξ_a aller a-exzessiven Funktionen punktetrennend.

Beweis: (ii) nach (i) ist trivial, denn es gilt: $\xi = \bigcup_{a \geqslant 0} \xi_a$.

(i) nach (ii): Sei $a > 0$ und $x, y \in E$.

Wir müssen eine a-exzessive Funktion g mit $g(x) \neq g(y)$ finden. Nach (i) existiert ein $b \geqslant 0$ und eine b-exzessive Funktion f mit $f(x) \neq f(y)$. Wenn $b \leqslant a$ ist, sind wir fertig, denn dann ist die Funktion f auch a-exzessiv. Sei jetzt $a \leqslant b$. Indem wir Lemma 3.6(b) auf die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ anwenden, erhalten wir: $g := f + (b - a)$. $V_a f$ ist a-exzessiv. Ist $V_a f(x) \neq V_a f(y)$, so erfüllt bereits die a-exzessive Funktion $g' := V_a f$ die Bedingung $g'(x) \neq g'(y)$. Ist $V_a f(x) = V_a f(y)$, so folgt: $g(x) \neq g(y)$.

Korollar 51: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$. Für ein $a > 0$ und alle $f \in C_{k,+}(E)$ ist $V_a f$ ein stetiges a-Potential. Die Menge aller für ein $b \geqslant 0$ b-exzessiven Funktionen sei punktetrennend. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) x ist kein Verzweigungspunkt, $\lim_{p \to \infty} pV_p 1(x) = 1$.

(ii) $\operatorname{vag-lim}_{p \to \infty} pV_p(x, \,) = \varepsilon_x$.

Beweis: Nach Lemma 49(i) $\Rightarrow$ (ii) ist die Menge aller a-exzessiven Funktionen punktetrennend. Also sind die Voraussetzungen von Satz 49 für die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ erfüllt.

Die obige Äquivalenz folgt jetzt aus Satz 48.

Unmittelbar aus Korollar 51 folgt:

Korollar 52: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$. Für ein $a > 0$ und alle $f \in C_{k,+}(E)$ sei $V_a f$ ein stetiges a-Potential. Die Menge aller für ein $b \geqslant 0$ b-exzessiven Funktionen sei punktetrennend. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ist normal.

(ii) Die Topologie $\mathfrak{T}$ auf E ist an $(V_p)_{p>0}$ assoziiert.

53: Sei E kompakt. $(V_p)_{p>0}$ sei eine Ray-Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$.

Aus Korollar 51 folgt, daß jeder Verzweigungspunkt im Sinne der Theorie der Ray-Prozesse ein Verzweigungspunkt in unserem Sinne ist, wenn die Menge ξ aller für ein $b \geqslant 0$ b-exzessiven Funktionen punktetrennend ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn keine „degenerierten Verzweigungspunkte" (siehe **Ge**, 6.1) existieren. Wie in **Ge**, 10.9 gezeigt wird, besitzen Ray-Resolventen, die bei der „Kompaktifikation" von Rechts-Prozessen entstehen – nach unserer Meinung sind dies die wichtigsten –, keine degenerierten Verzweigungspunkte. In den wichtigsten Fällen stimmen also die Verzweigungspunkte in unserem Sinne mit den Verzweigungspunkten im Sinne der Theorie der Ray-Prozesse überein.

Schlußbemerkung: Die $\mathfrak{R}$-Topologie wurde in einer nur geringfügig spezielleren Situation bereits von Engelbert in **En**(1), Definition 18 eingeführt. Für Halbgruppen führte Engelbert eine analoge Topologie ein.

Korollar 20 wurde bereits in **Ta**(4), 1.4 und **En**(2), Theorem 9 bewiesen.

Die Ergebnisse 14, 17 und 33 wurden in einer etwas schwächeren Form für Resolventen von Markoff-Prozessen in **En**(3) bewiesen.

I, § 5 Der Approximationssatz

In diesem Paragraphen behandeln wir eine für die Kacsche Potentialtheorie charakteristische Aussage, den Approximationssatz. Wir beweisen diesen zuerst in seiner kompliziertesten und weitreichendsten Form. Die nachfolgenden Korollare verdeutlichen dann seinen Inhalt und zeigen einige Anwendungen auf. Zunächst jedoch ein einfaches Lemma:

Lemma 1: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $g \in B_+(E, \mathfrak{E})$ mit $\{g > 0\} \subset A$ gilt dann: $\hat{S}^A_{Vg} = Vg$.

Beweis: Sei $A' := \{g > 0\}$.
Nach 2.9(a) ist die Funktion $f := \hat{S}^{A'}_{Vg}$ supermedian.
Nach 1.19(a) ist f dann V-dominant.
Nach Def. von $S^{A'}_{Vg}$ gilt: $f \geqslant Vg$ auf $A' = \{g > 0\}$.
Da f V-dominant ist, folgt: $f \geqslant Vg$ auf *ganz* E.
Wir können jetzt schließen:

$$\hat{S}^A_{Vg} \geqslant \hat{S}^{A'}_{Vg} = \widehat{(S^{A'}_{Vg})} \text{ (nach 2.9(b))} = \hat{f} \geqslant \widehat{Vg} = Vg.$$

Theorem 2: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. C sei ein bezüglich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossener Untervektorraum von $B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ mit $1 \in C$.

Sei $(h_n)_{n\in N}$ eine Folge aus $B_+(E, \mathfrak{E})$ mit den Eigenschaften:

(V 1) $h_n \leqslant h_{n+1}$ für alle $n \in N$,

(V 2) $V(h_n \cdot g) \in C$ für alle $g \in C$ und alle $n \in N$.

Dann existiert eine Folge $(K_n)_{n\in N}$ von Kernen auf $(E, \mathfrak{E})$ mit:

(i) $K_n f \leqslant f$ für alle supermedianen Funktionen f und alle $n \in N$ (insbesondere sind die Kerne K_n submarkoffsch),

(ii) $K_n g \in C$ für alle $g \in C$ und alle $n \in N$,

(iii) $V\big(n \cdot h_n \cdot (g - K_n g)\big) = K_n g$ für alle $g \in B_b(E, \mathfrak{E})$ und alle $n \in N$,

(iv) $K_m f \leqslant K_n f$ für alle supermedianen Funktionen f und alle $m, n \in N$ mit $m \leqslant n$,

(v) $K_n f \uparrow \hat{S}^A_f$ für alle exzessiven Funktionen f, wobei $A := \bigcup_{n\in N} \{h_n > 0\}$ ist.

Beweis: Für alle $n \in N$ wird durch $V^n(x, B) := V(h_n \cdot I_B)$ $(x \in E, B \in \mathfrak{E})$ ein Kern auf $(E, \mathfrak{E})$ definiert. Wegen (V 2) gilt:

(1) $V^n g \in C$ für alle $g \in C$ und alle $n \in N$.

Sei f eine supermediane Funktion. Nach 1.19(a) ist f V-dominant. Offensichtlich ist f dann auch V^n-dominant. Wir haben gezeigt:

(2) Jede bezüglich $(V_n)_{p>0}$ supermediane Funktion ist für alle $n \in N$ V^n-dominant.

Insbesondere erfüllen die Kerne V^n das vollständige Maximumprinzip. Also erfüllt V^n für alle $n \in \mathbf{N}$ die Voraussetzungen von 1.20. Demnach existiert für alle $n \in \mathbf{N}$ eine submarkoffsche Resolvente $(V_p^n)_{p>0}$ mit den Eigenschaften:

(3) V^n ist der Potentialkern von $(V_p^n)_{p>0}$,

(4) $V_p^n g \in \mathbf{C}$ für alle $g \in \mathbf{C}$ und alle $p > 0$.

Nach 1.19(b) folgt aus (2) und (3):

(5) Jede bezüglich $(V_p)_{p>0}$ supermediane Funktion ist für alle $n \in \mathbf{N}$ auch supermedian bezüglich $(V_p^n)_{p>0}$.

Für alle $n \in \mathbf{N}$ wird durch $K_n(x, B) := nV_n^n I_B(x)$ $(x \in E, B \in \mathfrak{E})$ ein Kern auf $(E, \mathfrak{E})$ definiert. Wegen (5) erfüllen die Kerne K_n die Eigenschaft (i). Aus (4) folgt Eigenschaft (ii). Eigenschaft (iii) folgt aus der Resolventengleichung für $(V_p^n)_{p>0}$.

Wir wollen nun die Eigenschaft (iv) nachweisen. Sei hierzu f eine beschränkte supermediane Funktion und $m, n \in \mathbf{N}$ mit $m \leqslant n$. Wegen (V 1) existiert eine Funktion $k \in B_+(E, \mathfrak{E})$ mit:

(6) $h_m = k \cdot h_n$, $k \leqslant 1$.

Aus der Resolventengleichung folgt für alle $p > 0$:

$$V_p^n f = V^n(f - pV_p^n f),$$
$$V_p^m f = V^m(f - pV_p^m f) = V\big(h_n \cdot k \cdot (f - pV_p^m f)\big) = V^n\big(k \cdot (f - pV_p^m f)\big).$$

Subtraktion beider Gleichungen ergibt:

$$V_p^n f - V_p^m f = V^n(f - pV_p^n f) - V^n\big(k \cdot (f - pV_p^m f)\big).$$

Setzen wir $g := (1 - k) \cdot f - pV_p^n f + k \cdot pV_p^m f$, so folgt daraus:

(7) $V_p^n f - V_p^m f = V^n g$.

Nach (5) gilt: $(1 - k) \cdot pV_p^n f \leqslant (1 - k) \cdot f$. Hieraus folgt:

$$g \geqslant (1 - k) \cdot pV_p^n f - pV_p^n f + k \cdot pV_p^m f = k \cdot p \cdot (V_p^m f - V_p^n f).$$

Insbesondere gilt: $\{g < 0\} \subset \{(V_p^m f - V_p^n f) < 0\}$.

Zusammen mit (7) folgt daraus:

(8) $V^n g \geqslant 0$ auf $\{g < 0\}$.

Da der Kern V^n das vollständige Maximumprinzip erfüllt, folgt aus (8): $V^n g \geqslant 0$ auf *ganz* E.

Zusammen mit (7) folgt daraus: $V_p^m f \leqslant V_p^m f + V^n g = V_p^n f$.

Wir haben damit gezeigt:

$V_p^m f \leqslant V_p^n f$ für alle beschränkten, supermedianen Funktionen f.

Ist f eine beliebige supermediane Funktion, so folgt daraus:

$$V_p^m f = \sup_i V_p^m(\inf(f, i)) \leqslant \sup_i V_p^n(\inf(f, i)) = V_p^n f.$$

Wir haben bewiesen:

(9) $V_p^m f \leqslant V_p^n f$ für alle $p > 0$, alle supermedianen Funktionen f und alle $m, n \in \mathbf{N}$ mit $m \leqslant n$.

Wir können nun (iv) für alle supermedianen Funktionen f und alle $m, n \in \mathbf{N}$ mit $m \leqslant n$ beweisen: $K_m f = mV_m^m f \leqslant mV_m^n f$ (nach (9)) $\leqslant nV_n^n f$ (nach Me, IX, T 46(b)) $= K_n f$.

Es bleibt noch die Eigenschaft (v) zu zeigen. Sei hierzu f eine exzessive Funktion. Nach (iii) und (i) ist $K_n f$ für alle $n \in \mathbf{N}$ exzessiv. Aus (iv) folgt:

(10) Die Folge $(K_n f)_{n \in \mathbf{N}}$ steigt gegen eine exzessive Funktion $\tilde{f}$ auf.

Für alle $n \in \mathbf{N}$ definieren wir:

$$\tilde{f}_n := \sup_{p>0} pV_p^n f, \quad A_n := \{h_n > 0\}.$$

Aus 1.11(d) folgt:

(11) $\tilde{f}_n = f\,(V_p^n)_{p>0}$ — f.ü..

Für alle $m \in \mathbf{N}$ schließen wir:

$$\tilde{f}_m = \sup_{n \geq m} nV_n^m f \leqslant \sup_{n \geq m} nV_n^n f \text{ (nach (9))} = \sup_{n \geq m} K_n f = \tilde{f}.$$

Zusammen mit (11) folgt daraus für alle $n \in \mathbf{N}$: $f \leqslant \tilde{f}\,(V_p^n)_{p>0}$ — f.ü.. Also gilt:

$$0 = V^n I_{\{\tilde{f} < f\}} = V(h_n \cdot I_{\{\tilde{f} < f\}}).$$

Daraus folgt wiederum:

$$VI_{(A_n \cap \{\tilde{f} < f\})} = V(I_{A_n} \cdot I_{\{\tilde{f} < f\}}) \text{ für alle } n \in \mathbf{N}.$$

Da $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ ist, folgt schließlich: $VI_{(A \cap \{\tilde{f} < f\})} = 0$. Mit anderen Worten:

$$I_A \cdot f \leqslant \tilde{f}\,(V_p)_{p>0} \text{— f.ü..}$$

Da $\tilde{f}$ exzessiv ist, folgt:

(12) $\hat{S}_f^A \leqslant \tilde{f}$.

Da $\{h_n > 0\} \subset A$ ist, folgt mit Hilfe von Lemma 1 aus (iii):

(13) $\hat{S}_{K_n f}^A = K_n f$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Aus (i) folgt:

(14) $K_n f \leqslant f$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Jetzt können wir schließen:

$$\tilde{f} = \sup_n K_n f = \sup_n \hat{S}_{K_n f}^A \text{ (nach (13))} \leqslant \hat{S}_f^A \text{ (nach (14))}.$$

Zusammen mit (12) folgt daraus:

(15) $\hat{S}_f^A = \tilde{f}$.

Die Eigenschaft (v) folgt jetzt aus (10) und (15).

Korollar 3: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. $\mathbf{C}$ sei ein bezüglich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossener Untervektorraum von $B_b(E, \mathfrak{E})$ mit $1 \in \mathbf{C}$.

Sei $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge aus $B_+(E, \mathfrak{E})$ mit den Eigenschaften:

(V 1) $\quad h_n \leqslant h_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(V 2) $\quad V(h_n \cdot g) \in \mathbf{C}$ für alle $g \in \mathbf{C}$ und alle $n \in \mathbf{N}$.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge exzessiver Funktionen mit den Eigenschaften:

(V 3) $\quad f_n \leqslant f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(V 4) $\quad f_n \in \mathbf{C}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Sei $A := \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{h_n > 0\}$, $f := \sup_n f_n$.

Dann existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ von positiven Funktionen aus $\mathbf{C}$ mit: $V(h_n \cdot g_n) \uparrow \hat{S}_f^A$.

Beweis: Sei $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Kernen mit den in Theorem 2 angegebenen Eigenschaften.

Für alle $n \in \mathbf{N}$ definieren wir: $g_n := n \cdot (f_n - K_n f_n)$.

Wegen (V 4) und 2 (ii) gilt: $g_n \in \mathbf{C}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Nach 2 (iii) gilt:

(1) $\quad V(h_n \cdot g_n) = K_n f_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Für alle $m, n \in \mathbf{N}$ mit $m \leqslant n$ gilt:

$$V(h_m \cdot g_m) = K_m f_m \text{ (nach (1))} \leqslant K_n f_n \text{ (nach 2(iv))} \leqslant K_n f_n \text{ (nach (V 3))}$$
$$= V(h_n \cdot g_n). \text{ Die Folge } (V(h_n \cdot g_n))_{n\in\mathbf{N}} \text{ ist also aufsteigend.}$$

Wir können nun den Beweis abschließen:

$$\hat{S}_f^A = \sup_n K_n f \text{ (nach 2(v))} = \sup_n \sup_m K_n f_m = \sup_n K_n f_n = \sup_n V(h_n \cdot g_n)$$
(nach (1)).

Definition 4: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Eine Menge $A \in \mathfrak{E}$ heißt eigentlich, wenn der durch

$$V^A(x, B) := \sup_{p>0} V_p(x, A \cap B) \quad (x \in E, B \in \mathfrak{E})$$

definierte Kern V^A eigentlich ist.

Offenbar ist E genau dann eigentlich, wenn der Potentialkern V eigentlich ist. In diesem Fall ist jede Menge $A \in \mathfrak{E}$ eigentlich.

Korollar 5: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sei eine gegen eine Menge A aufsteigende Folge von eigentlichen Mengen aus $\mathfrak{E}$.

Für jede exzessive Funktion f existiert dann eine Folge $(g_n)_{n\in N}$ mit den Eigenschaften:

(i) $g_n \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ für alle $n \in N$,

(ii) $\{g_n > o\} \subset A_n$ für alle $n \in N$,

(iii) Vg_n ist für alle $n \in N$ beschränkt,

(iv) $Vg_n \uparrow \hat{S}_f^A$.

Beweis: Sei f eine exzessive Funktion.

Nach Lemma 3.17 existiert eine Folge $(f_n)_{n\in N}$ von exzessiven Funktionen mit den Eigenschaften:

(1) f_n ist für alle $n \in N$ beschränkt,

(2) $f_n \uparrow f$.

Man findet leicht eine Folge $(A_n')_{n\in N}$ von Mengen aus $\mathfrak{E}$ mit:

(3) $A_n' \subset A_n$ für alle $n \in N$,

(4) $VI_{A_n'}$ ist für alle $n \in N$ beschränkt,

(5) $A_n' \uparrow A$.

Sei $C := B_b(E, \mathfrak{E})$.
Für alle $n \in N$ sei $h_n := I_{A_n'}$.
Wegen (1), (2), (4) und (5) erfüllen die Folgen $(h_n)_{n\in N}$ und $(f_n)_{n\in N}$ die Voraussetzungen (V 1), (V 2), (V 3) und (V 4) von Korollar 3.

Nach Korollar 3 existiert dann eine Folge $(g_n')_{n\in N}$ mit:

(6) $g_n' \in C = B_b(E, \mathfrak{E})$ für alle $n \in N$,

(7) $g_n' \geqslant o$ für alle $n \in N$,

(8) $V(h_n \cdot g_n') \uparrow \hat{S}_f^A$.

Für alle $n \in N$ definieren wir: $g_n := h_n \cdot g_n'$. Aus (6) und (7) folgt Bedingung (i).

Für alle $n \in N$ gilt:

$$\{g_n > o\} = \{(h_n \cdot g_n') > o\} = \{(I_{A_n'} \cdot g_n') > o\} \subset A_n' \subset A_n \text{ (nach (3))}.$$

Damit ist (ii) bewiesen.

(iii) folgt aus (4) und (6). Bedingung (iv) folgt aus (8).

Korollar 6: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. $A \in \mathfrak{E}$ sei eine eigentliche Menge.

Für jede exzessive Funktion f existiert dann eine Folge $(g_n)_{n\in N}$ mit den Eigenschaften:

(i) $g_n \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ für alle $n \in N$,

(ii) $\{g_n > o\} \subset A$ für alle $n \in N$,

(iii) Vg_n ist für alle $n \in \mathbf{N}$ beschränkt,

(iv) $Vg_n \uparrow \hat{S}_f^A$.

Ist die Menge A zusätzlich $\mathfrak{R}$-offen, so gilt auch:

(v) $Vg_n \uparrow R_f^A$.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Korollar 5 und Korollar 4.26(b).

Korollar 7: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

(a) Für alle eigentlichen Mengen $A \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f gilt dann: $\hat{S}_f^A = \sup \{Vg : g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E}), Vg \leqslant f, \{g > o\} \subset A\}$.

(b) Für alle $\mathfrak{R}$-offenen, eigentlichen Mengen $U \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f gilt: $R_f^U = \sup \{Vg : g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E}), Vg \leqslant f, \{g > o\} \subset U\}$.

(c) Ist die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ normal, so gilt für alle fein-offenen, eigentlichen Mengen $U \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f:

$$R_f^U = \sup \{Vg : g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E}), Vg \leqslant f, \{g > o\} \subset U\}.$$

Beweis: (a): Aus Korollar 6 folgt: $\hat{S}_f^A \leqslant \sup \{. . . . . .\}$.

Aus Lemma 1 folgt: $\sup \{. . . . . .\} \leqslant \hat{S}_f^A$.

(b) folgt aus (a) und Korollar 4.26(b).

(c) folgt aus (b) und Korollar 4.20(i) $\Rightarrow$ (ii).

8: Sei $(V_p)_{p>0}$ die Resolvente eines Standard-Prozesses. Nach **BG**, II, 2.14 sind die a-exzessiven Funktionen für alle $a \geqslant o$ inf-stabil. Nach 3.21(iii) $\Rightarrow$ (i) ist die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ normal.

Aus diesem Grund ist das folgende Korollar eine Verallgemeinerung von **Hu**, 6.6 (siehe auch **Me**(4), I, T 2):

Korollar 9: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine normale, submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.

Für alle fein-offenen, eigentlichen Mengen $U \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ mit:

(i) $g_n \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(ii) $\{g_n > o\} \subset U$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(iii) Vg_n ist für alle $n \in \mathbf{N}$ beschränkt,

(iv) $Vg_n \uparrow R_f^U$.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus Korollar 6 und 4.20(i) $\Rightarrow$ (ii).

Korollar 10: Sei E ein polnischer Raum. $\mathfrak{E}$ sei die σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von E. $(V_p)_{p>0}$ sei eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$.

(a) Für alle eigentlichen Mengen $A \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f gilt dann:

$$\hat{S}_f^A = \sup \{Vg : g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E}), \overline{\{g > o\}} \text{ ist kompakt}, Vg \leqslant f, \overline{\{g > o\}} \subset A\}.$$

(b) Für alle $\mathfrak{R}$-offenen, eigentlichen Mengen $U \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f gilt:

$$R_f^U = \sup \{Vg : g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E}), \overline{\{g > o\}} \text{ ist kompakt}, Vg \leqslant f, \overline{\{g > o\}} \subset U\}.$$

(c) Ist die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ normal, so gilt für alle fein-offenen, eigentlichen Mengen $U \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f:

$$R_f^U = \sup \{Vg : g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E}), \overline{\{g > o\}} \text{ ist kompakt}, Vg \leqslant f, \overline{\{g > o\}} \subset U\}.$$

Beweis: (a): Sei $x \in E$ und $\varepsilon > o$. Sei o. B. d. A. $f(x) < \infty$.
Nach Korollar 7(a) existiert eine Funktion $g' \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ mit

$$Vg' \leqslant f, \{g' > o\} \subset A \text{ und } \hat{S}_f^A(x) < Vg'(x) + \varepsilon.$$

Wegen der Regularität von innen des Maßes $V^A(x, \ )$ existiert eine kompakte Menge

$$K \subset A \text{ mit } \hat{S}_f^A(x) < V(I_K \cdot g')(x) + \varepsilon.$$

Für die Funktion $g := I_K \cdot g'$ gilt dann:

$$Vg \leqslant f, \{g > o\} \subset K \subset A \text{ und } \hat{S}_f^A(x) \leqslant Vg(x) + \varepsilon.$$

Daraus folgt: $\hat{S}_f^A \leqslant \sup \{. . . . . .\}$.

Die umgekehrte Ungleichung folgt aus Korollar 7(a).

(b) folgt aus (a) und Korollar 4.26(b).

(c) folgt aus (b) und Korollar 4.20(i) $\Rightarrow$ (ii).

Im nächsten Korollar beweisen wir unter anderem die bereits in 2.21 vorweggenommene Kapazitabilitätsaussage über starke Balayage:

Korollar 11: Sei E ein polnischer Raum. $\mathfrak{E}$ sei die σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von E. $(V_p)_{p>0}$ sei eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$.

(a) Für alle $A \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f gilt dann:

$$\hat{S}_f^A = \sup \{\hat{S}_f^K : K \subset A \text{ kompakt}\}, \ S_f^A = \sup \{S_f^K : K \subset A \text{ kompakt}\}.$$

(b) Für alle $\mathfrak{R}$-offenen Mengen $U \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f gilt:

$$R_f^U = \sup \{R_f^K : K \subset U \text{ kompakt}\}.$$

(c) Ist die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ normal, so gilt für alle fein-offenen Mengen $U \in \mathfrak{E}$ und alle exzessiven Funktionen f: $R_f^U = \sup \{R_f^K : K \subset U \text{ kompakt}\}$.

Beweis: (a): Der Potentialkern V sei zunächst eigentlich.

Sei $g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ mit $Vg \leqslant f$, $K := \overline{\{g > o\}}$ kompakt, $K \subset A$.

Nach Lemma 1 gilt dann: $Vg \leqslant \hat{S}_f^K$. Daraus folgt:

$$\sup \{Vg: g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E}),\ Vg \leqslant f,\ \overline{\{g > o\}} \text{ kompakt},\ \overline{\{g > o\}} \subset A\}$$
$$\leqslant \sup \{\hat{S}_f^K: K \subset A \text{ kompakt}\}.$$

Zusammen mit Korollar 10(a) folgt daraus:

$$\hat{S}_f^A \leqslant \sup \{\hat{S}_f^K: K \subset A \text{ kompakt}\}.$$

Die umgekehrte Ungleichung ist trivial.
Sei nun der Potentialkern V beliebig.
Für alle $a > o$ ist dann der Potentialkern von $(V_{a+p})_{p>0}$ eigentlich. Wie wir oben bewiesen haben, gilt dann für alle $a > o$:

$${}^a\hat{S}_f^A = \sup \{{}^a\hat{S}_f^K: K \subset A \text{ kompakt}\}.$$

Mit Hilfe von 2.17(b) können wir den Beweis des 1. Teiles von (a) zu Ende führen:

$$\hat{S}_f^A = \sup_{a>0} {}^a\hat{S}_f^A = \sup_{a>0} \sup \{{}^a\hat{S}_f^K: K \subset A \text{ kompakt}\}$$
$$= \sup \{\sup_{a>0} {}^a\hat{S}_f^K: K \subset A \text{ kompakt}\} = \sup \{\hat{S}_f^K: K \subset A \text{ kompakt}\}.$$

Der zweite Teil von (a) folgt mit Hilfe von 2.7 aus dem 1. Teil.

(b): Aus (a) und Korollar 4.26(b) folgt:

$$R_f^U = \sup \{\hat{S}_f^K: K \subset U \text{ kompakt}\}.$$

Zusammen mit 2.8 folgt daraus: $R_f^U \leqslant \sup \{R_f^K: K \subset U \text{ kompakt}\}$. Die umgekehrte Ungleichung ist trivial.

(c) folgt aus (b) und Korollar 4.20(i) $\Rightarrow$ (ii).

Korollar 12: Sei E ein polnischer Raum. $\mathfrak{E}$ sei die σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von E. $(V_p)_{p>0}$ sei eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$. Dann gilt für alle $A \in \mathfrak{E}$: $A^s = (\bigcup \{K^s: K \subset A \text{ kompakt}\})^s$.

Beweis: Mit Hilfe von Korollar 3.14 folgt:

$$(\bigcup \{K^s: K \subset A \text{ kompakt}\})^s \subset A^s.$$

Sei $x \in A^s$ und $a > o$.
Nach Korollar 11(a) existiert eine Folge $(K_n)_{n \in N}$ von kompakten Teilmengen von A mit:

(1) $$\sup_n {}^a\hat{S}_{V_a 1}^{K_n}(x) = {}^a\hat{S}_{V_a 1}^{A}(x) = V_a 1(x) \text{ (da } x \in A^s).$$

Sei $B := \bigcup_{n \in N} K_n^s$. Trivialerweise gilt:

(2) $$B^s \subset (\bigcup \{K^s: K \subset A \text{ kompakt}\})^s.$$

Mit Hilfe von (1) folgt: ${}^a\hat{S}^B_{V_a 1}(x) \geqslant \sup_n {}^a\hat{S}^{K_n}_{V_a 1}(x) = V_a 1(x)$.

Hieraus folgt nach Satz 3.4: $x \in B^s$.
Zusammen mit (2) folgt schließlich: $x \in (\bigcup \{K^s : K \subset A \text{ kompakt}\})^s$.

Korollar 13: Sei E ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis. $\mathfrak{E}$ sei die σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von E. $(V_p)_{p>0}$ sei eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $x \in E$ gelte: $\text{vag-lim}_{p \longrightarrow \infty} pV_p(x, \ ) = \varepsilon_x$.

Für alle eigentlichen, offenen Mengen U und alle exzessiven Funktionen f existiert dann eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ mit:

(i) $g_n \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(ii) $\overline{\{g_n > o\}}$ ist für alle $n \in \mathbf{N}$ kompakt,

(iii) $\overline{\{g_n > o\}} \subset A$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(iv) Vg_n ist für alle $n \in \mathbf{N}$ beschränkt,

(v) $Vg_n \uparrow R^U_f$.

Beweis: Es existiert eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von kompakten Mengen mit: $K_n \uparrow U$.

Nach Korollar 5 existiert dann eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ mit:

(1) $g_n \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(2) $\overline{\{g_n > o\}} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(3) Vg_n ist für alle $n \in \mathbf{N}$ beschränkt,

(4) $Vg_n \uparrow \hat{S}^U_f$.

Nach 4.39(b), (i) $\Rightarrow$ (ii) ist U $\mathfrak{R}$-offen. Nach 4.26(b) gilt dann:

(5) $R^U_f = \hat{S}^U_f$.

Die Behauptung folgt nun sofort aus (1), (2), (3), (4) und (5).

Obiges Korollar wurde von Hunt für Resolventen von Hunt-Prozessen bewiesen. Die Resolvente von Beispiel 4.46 erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen von Korollar 13. Die zu Grunde liegende Resolvente braucht also nicht normal zu sein.

Unter Zusatzvoraussetzungen an die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ können wir Korollar 13 erheblich verbessern:

Korollar 14: Sei E ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis. $\mathfrak{E}$ sei die σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von E. $(V_p)_{p>0}$ sei eine submarkoffsche Resolvente auf $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $g \in C_{k,+}(E)$ sei $Vg \in C_b(E)$.

(a) Für alle offenen Mengen U und alle auf U stetigen, beschränkten, exzessiven Funktionen f existiert dann eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ mit den Eigenschaften:

(i) $g_n \in C_{k,+}(E)$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(ii) $\overline{\{g_n > o\}} \subset U$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(iii) $Vg_n \uparrow \hat{S}_f^U$.

(b) Für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ gelte zusätzlich:

$\underset{p \longrightarrow \infty}{\text{vag-lim}}\, pV_p(x, \ ) = \varepsilon_x$ für alle $x \in E$.

Dann existiert für alle offenen Mengen U und alle auf U stetigen, exzessiven Funktionen f eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ mit:

(i) $g_n \in C_{k,+}(E)$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(ii) $\overline{\{g_n > o\}} \subset U$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(iii) $Vg_n \uparrow R_f^U = \hat{S}_f^U$.

Beweis: (a): Sei $C: = \{g \in B_b(E, \mathfrak{E}): g_{|U} \text{ ist stetig}\}$.

Es existiert eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ mit:

(1) $h_n \in C_{k,+}(E)$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(2) $\overline{\{h_n > o\}} \subset U$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(3) $h_n \uparrow I_U$.

Dann gilt: $(g \cdot h_n) \in C_k(E)$ für alle $g \in \mathbf{C}$ und alle $n \in \mathbf{N}$.

Nach Voraussetzung folgt daraus:

(4) $V(h_n \cdot g) \in C_b(E) \subset \mathbf{C}$ für alle $g \in \mathbf{C}$ und alle $n \in \mathbf{N}$.

Nach Voraussetzung gilt:

(5) $f \in \mathbf{C}$.

Definiert man $f_n: = f$ für alle $n \in \mathbf{N}$, so erfüllen die Folgen $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ wegen (3), (4) und (5) die Voraussetzungen (V 1), (V 2), (V 3) und (V 4) von Korollar 3. Demnach existiert eine Folge $(g_n')_{n \in \mathbf{N}}$ mit:

(6) $g_n' \in \mathbf{C}$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(7) $g_n' \geqslant o$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(8) $V(h_n \cdot g_n') \uparrow \hat{S}_f^U$.

Für alle $n \in \mathbf{N}$ sei $g_n: = (h_n \cdot g_n')$.

Aus (6) und (7) folgt (i). Aus (2) folgt (ii). Aus (8) folgt (iii).

(b): Nach Satz 4.40 ist die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ normal.

Nach Korollar 3.21 (ii) $\Rightarrow$ (iii) gilt:

(9) $f_n: = \inf(f, n)$ ist für alle $n \in \mathbf{N}$ exzessiv.

Sei $\mathbf{C}$ und $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ wie in (a). Dann gilt:

(10) $f_n \in \mathbf{C}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Wegen (3), (4), (9) und (10) erfüllen die Folgen $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ die Voraussetzungen (V 1), (V 2), (V 3) und (V 4) von Korollar 3. Demnach existiert eine Folge $(g'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mit den Eigenschaften:

(11) $g'_n \in \mathbf{C}$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(12) $g'_n \geqslant o$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(13) $V(h_n \cdot g'_n) \uparrow \hat{S}_f^U$.

Nach Lemma 4.39(b), (i) $\Rightarrow$ (ii) ist U $\mathfrak{R}$-offen. Nach 4.26(b) gilt dann:

(14) $R_f^U = \hat{S}_f^U$.

Für alle $n \in \mathbf{N}$ sei $g_n := (h_n \cdot g'_n)$.

Wegen (11), (12), (2), (13) und (14) erfüllt die Folge $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ die in (b) gewünschten Bedingungen.

Korollar 15: Sei E ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis. $\mathfrak{E}$ sei die σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von E. Für alle $g \in \mathbf{C}_{k,+}(E)$ sei $Vg \in \mathbf{C}_b(E)$.

Für alle $x \in E$ gelte: $\underset{p\longrightarrow\infty}{\text{vag-lim}}\, pV_p(x, \ ) = \varepsilon_x$.

Sei f eine exzessive Funktion und K eine kompakte Menge mit:

(i) $R_f^W = f$ für alle offenen Mengen W mit $K \subset W$,

(ii) es existiert eine offene Menge U mit $K \subset U$, auf der die Funktion f stetig ist.

Dann ist f auf *ganz* E stetig.

Beweis: Nach Korollar 14(b) existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mit:

(1) $g_n \in \mathbf{C}_{k,+}(E)$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(2) $\overline{\{g_n > o\}} \subset U$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(3) $Vg_n \uparrow R_f^U$.

Aus (i) und (3) folgt:

(4) $Vg_n \uparrow f$.

Wegen (1) ist Vg_n für alle $n \in \mathbf{N}$ stetig. Mit Hilfe von (4), (ii) und dem Satz von Dini folgt daraus:

(5) Die Folge $(Vg_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert auf der kompakten Menge K gleichmäßig gegen f.

Sei $\varepsilon > o$ beliebig. Nach (4) existiert ein $n_0 \in \mathbf{N}$ mit:

(6) $Vg_{n_0} + \varepsilon > f$ auf K.

Da die Funktionen f und $(Vg_{n_0} + \varepsilon)$ auf U stetig sind, gilt:

(7) $W := \{x \in U : (Vg_{n_0} + \varepsilon)(x) > f(x)\}$ ist offen.

Aus (6) folgt:

(8) $K \subset W$.

Mit Hilfe von (7) und (i) folgt: $(Vg_{n_0} + \varepsilon) \geqslant R_f^W = f$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig wählbar ist, folgt:

Die Folge $(Vg_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert auf *ganz* E gleichmäßig gegen die Funktion f.

Da $Vg_n \in C_b(E)$ für alle $n \in \mathbf{N}$ ist, folgt schließlich: $f \in C_b(E)$.

Korollar 15 ähnelt dem aus der klassischen Potentialtheorie bekannten Satz von Evans und Vasilesco (siehe **He**, Satz 6.20). Er besagt, daß für die Resolvente der Brownschen Bewegung anstatt (ii) die folgende Bedingung ausreicht:

(ii′) $f_{|K}$ ist stetig.

Bereits für die Resolvente der Wärmeleitungsgleichung ist Korollar 15 nicht mehr richtig, wenn wir die Bedingung (ii) durch die Bedingung (ii′) ersetzen. Unter einer kleinen Zusatzvoraussetzung kann man Korollar 15 auch mit Hilfe von **Sto**, VI, Theorem 2.2 beweisen.

Schlußbemerkung: In der klassischen Kacschen Potentialtheorie beweist man Korollar 6 mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden (siehe **Cie**, Theorem 10.16). Wir gehen umgekehrt vor: Der Approximationssatz wird ein entscheidendes Hilfsmittel beim Beweis von II, 2.10, dem Hauptsatz von Teil II sein.

Der Approximationssatz spielt auch im Teil III eine bedeutende Rolle (siehe III, 2.14).

Für die „übliche" Balayagetheorie existiert keine zum Approximationssatz analoge Aussage.

Der Approximationssatz kann ohne Schwierigkeiten auf abstrakte Resolventen im Sinne von **CL** verallgemeinert werden.

Definition 1: Sei $(E, \mathfrak{E})$ ein Meßraum. $(P_t)_{t \geq 0}$ sei eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe auf $(E, \mathfrak{E})$. $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+} (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ heißt ein *(Doobscher) Markoff-Prozeß* mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $(M, \mathfrak{M}, P)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum,

(ii) $\mathfrak{M}_t$ ist für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ eine σ-Algebra,
$\mathfrak{M}_s \subset \mathfrak{M}_t \subset \mathfrak{M}$ für alle $s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ mit $s \leqslant t$,

(iii) X_t ist für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ eine $\mathfrak{M}_t$-$\mathfrak{E}$-meßbare Abbildung,

(iv) die Abbildung $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times M) \longrightarrow E$
$(t, w) \longrightarrow X_t(w)$
ist $(\overline{\mathfrak{R}}_+ \otimes \mathfrak{M})$-$\mathfrak{E}$-meßbar,

(v) (schwache Markoff-Eigenschaft)
$E(f \circ X_{s+t}/\mathfrak{M}_s) = (P_t f) \circ X_s$ P–f.s.
für alle $s \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $t \in \mathbb{R}_+$ und alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$.

Für alle Abbildungen $H: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definieren wir:

$$X_H: M \longrightarrow E$$
$$w \longrightarrow X_{H(w)}(w).$$

Ist H zusätzlich $\mathfrak{M}$-$\overline{\mathfrak{R}}_+$-meßbar, so ist X_H nach (iv) $\mathfrak{M}$-$\mathfrak{E}$-meßbar. Wäre X_∞ nicht vorhanden, so könnten wir X_H nur auf der Menge $\{H < \infty\}$ definieren. Aus diesem Grund haben wir in obiger Definition die Existenz von X_∞ und $\mathfrak{M}_\infty$ vorgeschrieben.

Sei μ_∞ die Verteilung von X_∞, d.h.:

$$\mu_\infty(A) = P(\{X_\infty \in A\}) \text{ für alle } A \in \mathfrak{E}.$$

Für alle $A \in \mathfrak{E}$ können wir schließen: $(\mu_\infty P_t)(A) = E\big((P_t I_A) \circ X_\infty\big)$

$= E\big(E(I_A \circ X_{\infty+t}/\mathfrak{M}_\infty)\big)$ (nach (v)) $= E(I_A \circ X_\infty) = \mu_\infty(A)$.

Also gilt: $\mu_\infty P_t = \mu_\infty$ für alle $t \geqslant 0$. Anders ausgedrückt:

μ_∞ ist ein bezüglich der Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ invariantes Maß.

In den meisten Fällen existiert ein $\triangle \in E$ mit: $\mu_\infty = \varepsilon_\triangle$.
Man bezeichnet den Punkt $\triangle$ dann als „Friedhof".

In diesem Fall gilt für die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$:

$$P_t(\triangle, \{\triangle\}) = (\varepsilon_\triangle P_t)(\{\triangle\}) = \varepsilon_\triangle(\{\triangle\}) = 1 \text{ für alle } t \geqslant 0.$$

Wir führen die folgenden σ-Algebren ein:

$$\mathfrak{M}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathfrak{M}_s \; (t \in \mathfrak{R}_+), \quad \mathfrak{M}_{\infty+} := \mathfrak{M}_\infty.$$

Zum Schluß möchten wir noch auf folgende Tatsache aufmerksam machen: Die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ ist i.a. *nicht* eindeutig bestimmt. Es kann also eine weitere, von $(P_t)_{t \geq 0}$ verschiedene Halbgruppe $(Q_t)_{t \geq 0}$ existieren derart, daß $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ auch ein Markoff-Prozeß mit Halbgruppe $(Q_t)_{t \geq 0}$ ist.

Definition 2: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$.

(a) Eine Abbildung $T: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt eine *Markoffzeit*, falls für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt: $\{T \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_t$.

Für eine Markoffzeit T definieren wir:

$$\mathfrak{M}_T := \{A \in \mathfrak{M} : (A \cap \{T \leqslant t\}) \in \mathfrak{M}_t \text{ für alle } t \in \overline{\mathbb{R}}_+\},$$
$$\mathfrak{M}_{T+} := \{A \in \mathfrak{M} : (A \cap \{T \leqslant t\}) \in \mathfrak{M}_{t+} \text{ für alle } t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}.$$

Offensichtlich sind $\mathfrak{M}_T$ und $\mathfrak{M}_{T+}$ σ-Algebren, und die Abbildung T ist $\mathfrak{M}_T$-$\mathfrak{E}$-meßbar. Trivialerweise gilt: $\mathfrak{M}_T \subset \mathfrak{M}_{T+}$.

(b) Eine Abbildung $T: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt eine *starke Markoffzeit*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) T ist eine Markoffzeit,

(ii) X_T ist $\mathfrak{M}_T$-$\mathfrak{E}$-meßbar,

(iii) $E(f \circ X_{T+t}/\mathfrak{M}_T) = (P_t f) \circ X_T$ P-f.s.
für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ und alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$.

Man verifiziert leicht die folgenden Aussagen:

3: Für alle Markoffzeiten S, T mit $S \leqslant T$ gilt: $\mathfrak{M}_S \subset \mathfrak{M}_T$, $\mathfrak{M}_{S+} \subset \mathfrak{M}_{T+}$.

4: Ist $T = t$ eine konstante Funktion auf M, so gilt:

(i) T ist eine starke Markoffzeit,

(ii) $\mathfrak{M}_T = \mathfrak{M}_t$, $\mathfrak{M}_{T+} = \mathfrak{M}_{t+}$.

5: Gilt $\mathfrak{M}_{t+} = \mathfrak{M}_t$ für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, so gilt auch:
$\mathfrak{M}_{T+} = \mathfrak{M}_T$ für alle Markoffzeiten T.

Lemma 6: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Für jede Markoffzeit T gilt dann:

(a) $\mathfrak{M}_{T+} = \{A \in \mathfrak{M}_\infty : (A \cap \{T < t\}) \in \mathfrak{M}_t \text{ für alle } t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$,

(b) $\mathfrak{M}_{T+} = \bigcap_{s>0} \mathfrak{M}_{T+s}$.

Beweis: (a): Sei $A \in \mathfrak{M}_{T+}$.

Für alle $s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $s < t$ gilt dann: $(A \cap \{T \leqslant s\}) \in \mathfrak{M}_{s+} \subset \mathfrak{M}_t$.

Hieraus folgt für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$: $(A \cap \{T < t\}) = \bigcup_{\substack{s > t \\ s \in Q}} (A \cap \{T \leqslant s\}) \in \mathfrak{M}_t$.

Sei nun umgekehrt $A \in \mathfrak{M}_\infty$ mit:

$$(A \cap \{T < t\}) \in \mathfrak{M}_t \text{ für alle } t \in \overline{\mathbf{R}}_+.$$

Für alle $t \in \mathbf{R}_+$ gilt dann:

$$(A \cap \{T \leqslant t\}) = \bigcap_{s > t} (A \cap \{T < s\}) \in \bigcap_{s > t} \mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_{t+}.$$

Für $t = \infty$ gilt: $(A \cap \{T \leqslant t\}) = A \in \mathfrak{M}_\infty = \mathfrak{M}_{t+}$.
Aus den letzten beiden Ergebnissen folgt: $A \in \mathfrak{M}_{T+}$.

(b): Für alle $A \in \mathfrak{M}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$A \in \mathfrak{M}_{T+} \Leftrightarrow (A \cap \{T \leqslant t\}) \in \mathfrak{M}_{t+} \; \forall\, t \in \overline{\mathbf{R}}_+ \Leftrightarrow$$
$$(A \cap \{T \leqslant t\}) \in \mathfrak{M}_{t+s} \forall\, t \in \overline{\mathbf{R}}_+, s > 0 \Leftrightarrow (A \cap \{T + s \leqslant t + s\}) \in \mathfrak{M}_{t+s}$$
$$\forall\, t \in \overline{\mathbf{R}}_+, s > 0 \Leftrightarrow A \in \mathfrak{M}_{T+s} \; \forall\, s > 0 \Leftrightarrow A \in \bigcap_{s > 0} \mathfrak{M}_{T+s}.$$

Lemma 7: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ gelte: $\mathfrak{M}_t = \mathfrak{M}_{t+}$.

Dann gilt:

Eine Abbildung $T: M \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ ist genau dann eine Markoffzeit,
wenn $\{T < t\} \in \mathfrak{M}_t$ für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ ist.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus den folgenden Ergebnissen:

$$\{T < t\} = \bigcup_{\substack{s < t \\ s \in Q}} \{T \leqslant s\} \in \mathfrak{M}_t \text{ für alle } t \in \overline{\mathbf{R}}_+,$$

$$\{T \leqslant t\} = \bigcap_{\substack{s > t \\ s \in Q}} \{T < s\} \in \bigcap_{s > t} \mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_{t+} = \mathfrak{M}_t \text{ für alle } t \in \overline{\mathbf{R}}_+,$$

$$\{T \leqslant t\} = M \in \mathfrak{M}_t \text{ für } t = \infty.$$

Satz 8: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$.

Sei $T: M \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ mit der Eigenschaft:

$(T + t)$ ist für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ eine starke Markoffzeit.

Für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ definieren wir: $\mathfrak{M}'_t := \mathfrak{M}_{T+t}$, $X'_t := X_{T+t}$.

Dann gilt:

(a) $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}'_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, (X'_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+})$ ist ebenfalls ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$.

(b) Es gelte zusätzlich: $\mathfrak{M}_{t+} = \mathfrak{M}_t$ für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Eine Abbildung $S: M \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ ist genau dann eine Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}'_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+}, (X'_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+})$, wenn $(S + T)$ eine Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+})$ ist. In diesem Fall gilt: $\mathfrak{M}'_S = \mathfrak{M}_{S+T}$.

Beweis: Trivialerweise erfüllt $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}'_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+}, (X'_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+})$ die Eigenschaften 1(i) und 1(ii).

Da $(T + t)$ für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ eine starke Markoffzeit ist, folgt aus 2(ii) unmittelbar die Eigenschaft 1(iii).

Die Abbildungen $X: (\overline{\mathbf{R}}_+ \times M) \longrightarrow E$, $(t, w) \longrightarrow X_t(w)$, $F: (\overline{\mathbf{R}}_+ \times M) \longrightarrow (\overline{\mathbf{R}}_+ \times M)$, $(t, w) \longrightarrow (t + T(w), w)$

sind $(\overline{\mathfrak{R}}_+ \otimes \mathfrak{M})$-$\mathfrak{E}$-meßbar bzw. $(\overline{\mathfrak{R}}_+ \otimes \mathfrak{M})$-$(\overline{\mathfrak{R}}_+ \otimes \mathfrak{M})$-meßbar.

Folglich ist die Abbildung $(X \circ F)$ $(\overline{\mathfrak{R}}_+ \otimes \mathfrak{M})$-$\mathfrak{E}$-meßbar.

Da $(X \circ F)(t, w) = X'_t(w)$ für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$, $w \in M$ ist, folgt hieraus die Eigenschaft 1(iv). Für alle $s \in \overline{\mathbf{R}}$, $t \in \mathbf{R}_+$ und $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ können wir schließen:

$E(f \circ X'_{s+t}/\mathfrak{M}'_s) = E(f \circ X_{T+s+t}/\mathfrak{M}_{T+s}) = (P_t f) \circ X_{T+s}$ (denn $(T + s)$ ist eine starke Markoffzeit) $= (P_t f) \circ X'_s$ P-f.s.

Damit ist (a) vollständig bewiesen.

(b): Sei $(S + T)$ eine Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+})$. Für alle $t, u \in \overline{\mathbf{R}}_+$ sind die Abbildungen $\inf(S + T, u)$ und $\inf(T + t, u)$ $\mathfrak{M}_u$-$\overline{\mathfrak{R}}_+$-meßbar, denn $\inf(S + T, u)$ und $\inf(T + t, u)$ sind Markoffzeiten. Daraus folgt:

(1) $\{\inf(S + T, u) < \inf(T + t, u)\} \in \mathfrak{M}_u$ für alle $t, u \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Sei $A \in \mathfrak{M}_{S+T}$. Dann gilt:

(2) $(A \cap \{(S + T) \leqslant u\}) \in \mathfrak{M}_u$, $\{(T + t) \leqslant u\} \in \mathfrak{M}_u$ für alle $t, u \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Für alle $t, u \in \overline{\mathbf{R}}_+$ können wir schließen:

$$A \cap \{S \leqslant t\} \cap \{(T + t) \leqslant u\} = A \cap \{(S + T) \leqslant (T + t)\} \cap \{(T + t) \leqslant u\}$$
$$= A \cap \{(S+T) \leqslant u\} \cap \{(T+t) \leqslant u\} \cap \{\inf(S+T,u) \leqslant \inf(T+t,u)\} \in \mathfrak{M}_u$$

(nach (1) und (2)). Wir haben damit gezeigt:

(3) $A \cap \{S \leqslant t\} \cap \{(T + t) \leqslant u\} \in \mathfrak{M}_u$ für alle $t, u \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Wählen wir $A = M$, so folgt aus (3): $\{S \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_{T+t} = \mathfrak{M}'_t$ für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$. Also ist S Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}'_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+}, (X'_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+})$.

Ist $A \in \mathfrak{M}_{S+T}$ beliebig, so folgt aus (3):

$$(A \cap \{S \leqslant t\}) \in \mathfrak{M}_{T+t} = \mathfrak{M}'_t \text{ für alle } t \in \overline{\mathbf{R}}_+.$$

Daraus folgt schließlich: $\mathfrak{M}_{S+T} \subset \mathfrak{M}'_S$.

Wir wollen nun die Umkehrung beweisen.

Sei also S eine Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}'_t)_{t\in\bar{\mathbb{R}}_+}, (X'_t)_{t\in\bar{\mathbb{R}}_+})$. Dann gilt:

$$(A \cap \{S \leqslant p\}) \in \mathfrak{M}'_p \text{ für alle } A \in \mathfrak{M}'_S,\ p \in \bar{\mathbb{R}}_+.$$

Hieraus folgt:

$$A \cap \{S \leqslant p\} \cap \{(T+p) \leqslant q+p\} \in \mathfrak{M}_{p+q} \text{ für alle } A \in \mathfrak{M}'_S,\ p, q \in \bar{\mathbb{R}}_+.$$

Schließlich folgt:

(4) $$A \cap \{S \leqslant p\} \cap \{T \leqslant q\} \in \mathfrak{M}_{p+q} \text{ für alle } A \in \mathfrak{M}'_S,\ p, q \in \bar{\mathbb{R}}_+.$$

Insbesondere gilt (man wähle $A = M$):

$$(\{S \leqslant p\} \cap \{T \leqslant q\}) \in \mathfrak{M}_{p+q} \text{ für alle } p, q \in \bar{\mathbb{R}}_+.$$

Daraus folgt: $\{(S+T) < t\} = \bigcup_{\substack{p+q<t \\ p,q\in\mathbb{Q}_+}} (\{S \leqslant p\} \cap \{T \leqslant q\}) \in \mathfrak{M}_t$ für alle $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$.

Nach Lemma 7 ist $(S+T)$ dann eine Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\bar{\mathbb{R}}_+})$. Aus (4) folgt:

$$A \cap \{(S+T) < t\} = \bigcup_{\substack{p+q<t \\ p,q\in\mathbb{Q}_+}} (A \cap \{S \leqslant p\} \cap \{T \leqslant q\}) \in \mathfrak{M}_t$$

für alle $A \in \mathfrak{M}'_S$, $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$. Zusammen mit Lemma 6(a) und 5 folgt daraus:

$$\mathfrak{M}'_S \subset \mathfrak{M}_{(S+T)+} = \mathfrak{M}_{S+T}.$$

Lemma 9: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\bar{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$.

$(V_p)_{p>0}$ sei die zu $(P_t)_{t\geq 0}$ gehörige Resolvente. T sei eine starke Markoffzeit. Dann gilt für alle $p > 0$ und alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$:

$$e^{-p\cdot T} \cdot (V_p f) \circ X_T = E\Big(\int_T^\infty e^{-pt} \cdot f \circ X_t \, dt \,/\, \mathfrak{M}_T\Big) \text{ P-f.s.}$$

Insbesondere gilt:

$$E(e^{-p\cdot T} \cdot (V_p f) \circ X_T) = E\Big(\int_T^\infty e^{-pt} \cdot f \circ X_t \, dt\Big).$$

Beweis: Sei $p > 0$, $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ und $A \in \mathfrak{M}_T$.

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können:

$$E(I_A \cdot e^{-p\cdot T} \cdot (V_p f) \circ X_T) = E\Big(I_A \cdot \int_T^\infty e^{-pt} \cdot f \circ X_t \, dt\Big).$$

Dies sieht man folgendermaßen ein:

$$E(I_A \cdot e^{-p\cdot T} \cdot (V_p f) \circ X_T) = E\Big(I_A \cdot e^{-p\cdot T} \cdot \int_0^\infty e^{-pt} \cdot (P_t f) \circ X_T \, dt\Big)$$

$$= \int_0^\infty E(I_A \cdot e^{-p\cdot T} \cdot e^{-pt} \cdot (P_t f) \circ X_T) \, dt \text{ (nach Fubini)}$$

$$= \int_0^\infty E\left(I_A \cdot e^{-p(T+t)} \cdot E(f \circ X_{T+t} / \mathfrak{M}_T)\right) dt \text{ (T ist starke Markoffzeit)}$$

$$= \int_0^\infty E\left(E(I_A \cdot e^{-p(T+t)} \cdot f \circ X_{T+t} / \mathfrak{M}_T)\right) \quad \begin{array}{l}\text{(die Funktionen } e^{-p(T+t)}, I_A \text{ sind} \\ \mathfrak{M}_T\text{-}\overline{\mathbb{R}}_+\text{-meßbar)}\end{array}$$

$$= \int_0^\infty E(I_A \cdot e^{-p(T+t)} \cdot f \circ X_{T+t}) \, dt$$

$$= E\left(\int_0^\infty I_A \cdot e^{-p(T+t)} \cdot f \circ X_{T+t} \, dt\right) \text{ (nach Fubini)} =$$

$$E\left(I_A \cdot \int_T^\infty e^{-pt} \cdot f \circ X_t \, dt\right) \text{ (Variablentransformation } t \longrightarrow t+T).$$

Korollar 10: $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ sei ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Sei $a > 0$ und f eine a-exzessive Funktion. Dann gilt:

(a) $E(e^{-a \cdot T} \cdot f \circ X_T / \mathfrak{M}_S) \leqslant e^{-a \cdot S} \cdot f \circ X_S$ P-f.s.
für alle starken Markoffzeiten S, T mit $S \leqslant T$.

(b) $(e^{-a \cdot t} \cdot f \circ X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist ein Supermartingal bezüglich $(\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

(c) $E(e^{-a \cdot T} \cdot f \circ X_T) \leqslant E(f \circ X_0)$ für alle starken Markoffzeiten T.

Beweis: (b) und (c) folgen unmittelbar aus (a).

Nach I, 1.13 existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $B_+(E, \mathfrak{E})$ mit:

(1) $V_a g_n \uparrow f$.

Wir schließen jetzt:

$$E(e^{-a \cdot T} \cdot f \circ X_T / \mathfrak{M}_S) = \sup_n E(e^{-a \cdot T} \cdot (V_a g_n) \circ X_T / \mathfrak{M}_S) \text{ (nach (1))}$$

$$= \sup_n E\left(E\left(\int_T^\infty e^{-a \cdot t} \cdot g_n \circ X_t \, dt / \mathfrak{M}_T\right) / \mathfrak{M}_S\right) \text{ (nach Lemma 9)}$$

$$= \sup_n E\left(\int_T^\infty e^{-a \cdot t} \cdot g_n \circ X_t \, dt / \mathfrak{M}_S\right) \text{ (nach (3))}$$

$$\leqslant \sup_n E\left(\int_S^\infty e^{-a \cdot t} \cdot g_n \circ X_t \, dt / \mathfrak{M}_S\right)$$

$$= \sup_n e^{-a \cdot S} \cdot (V_a g_n) \circ X_S \text{ (nach Lemma 9)}$$

$$= e^{-a \cdot S} \cdot f \circ X_S \text{ (nach (1))}.$$

Lemma 11: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$.

Dann ist jede Markoffzeit, die nur endlich viele Werte annimmt, bereits eine starke Markoffzeit.

Beweis: Sei T eine Markoffzeit, die nur endlich viele Werte annimmt. Die Menge $D := T(M)$ ist dann endlich.

Für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ und alle $A \in \mathfrak{M}_T$ gilt:

$$(1) \qquad A \cap \{T = t\} = (A \cap \{T \leqslant t\}) - (\bigcup_{\substack{s < t \\ s \in Q}} A \cap \{T \leqslant s\}) \in \mathfrak{M}_t.$$

Insbesondere gilt:

$$(2) \qquad \{T = t\} \in \mathfrak{M}_t \text{ für alle } t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ und $B \in \mathfrak{E}$ gilt:

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \leqslant t\} = \bigcup_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} (\{X_T \in B\} \cap \{T = s\})$$

$$= \bigcup_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} (\{X_s \in B\} \cap \{T = s\}) \in \mathfrak{M}_t \text{ (nach 1(iii) und (2)). Daraus folgt:}$$

$$\{X_T \in B\} \in \mathfrak{M}_T \text{ für alle } B \in \mathfrak{E}.$$

Also erfüllt T die Bedingung 2(ii). Wir wollen nun die Bedingung 2(iii) für T nachweisen. Es genügt für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ und $A \in \mathfrak{M}_T$ zu zeigen:

$$E(I_A \cdot f \circ X_{T+t}) = E(I_A \cdot (P_t f) \circ X_T).$$

Dies sieht man folgendermaßen ein:

$$E(I_A \cdot f \circ X_{T+t}) = E\Big(\sum_{s \in D} I_{(A \cap \{T = s\})} \cdot f \circ X_{T+t}\Big)$$

$$= \sum_{s \in D} E(I_{(A \cap \{T = s\})} \cdot f \circ X_{s+t}) = \sum_{s \in D} E\big(E(I_{(A \cap \{T = s\})} \cdot f \circ X_{s+t} / \mathfrak{M}_s)\big)$$

$$= \sum_{s \in D} E\big(I_{(A \cap \{T = s\})} \cdot E(f \circ X_{s+t} / \mathfrak{M}_s)\big) \text{ (nach (1))}$$

$$= \sum_{s \in D} E\big(I_{(A \cap \{T = s\})} \cdot (P_t f) \circ X_s\big) \text{ (nach 1(v))}$$

$$= E\Big(\sum_{s \in D} I_{(A \cap \{T = s\})} \cdot (P_t f) \circ X_T\Big) = E(I_A \cdot (P_t f) \circ X_T).$$

Lemma 11 läßt sich verallgemeinern: Eine Markoffzeit T ist bereits dann eine starke Markoffzeit, wenn T außerhalb einer P-Nullmenge nur abzählbar viele Werte annimmt.

Definition 12: Sei $(E, \mathfrak{E})$ ein Meßraum.
$(P_t)_{t \geq 0}$ sei eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe auf $(E, \mathfrak{E})$.
$(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ heißt ein *starker (Doobscher) Markoff-Prozeß* mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ist ein Doobscher Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$,

(ii) $\mathfrak{M}_t = \mathfrak{M}_{t+}$ für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$,

(iii) $P((A - B) \cup (B - A)) = 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{M}_t$ für alle $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}_t$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$,

(iv) (starke Markoff-Eigenschaft)
jede Markoffzeit ist eine starke Markoffzeit.

Aus Satz 8(a), (b) und Lemma 6(b) folgt sofort:

Korollar 13: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$ ein starker Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$. Sei T eine Markoffzeit. Für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ definieren wir: $\mathfrak{M}'_t := \mathfrak{M}_{T+t}$, $X'_t := X_{T+t}$.
Dann ist $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}'_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X'_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$ ebenfalls ein starker Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$.

Zum Schluß wollen wir zwei Existenzsätze für Markoff-Prozesse angeben:

Satz 14: Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Markoffsche Halbgruppe auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$.
μ_0 sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E, \mathfrak{E})$ mit:

$$\int P_0(f \cdot P_0 g)\, d\mu_0 = \int P_0(f \cdot g)\, d\mu_0 \text{ für alle } f, g \in B_+(E, \mathfrak{E}).$$

μ_∞ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E, \mathfrak{E})$ mit:

$$\mu_\infty P_t = \mu_\infty \text{ für alle } t \geqslant 0.$$

Dann existiert ein Prozeß $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$, der einerseits die Eigenschaften 1(i), (ii), (iii), (v) und andererseits die folgenden Bedingungen an den Anfangs- und Endzustand erfüllt:

$(\mu_0 P_0)$ ist die Verteilung von X_0,
μ_∞ ist die Verteilung von X_∞.

Die Konstruktion des obigen Prozesses folgt im wesentlichen der Darstellung in **Ne**, 5.2. Der bei dieser Konstruktion entstehende Prozeß erfüllt aber nur in trivialen Fällen die Eigenschaft 1(iv).

Satz 15: Sei $(E, \mathfrak{E})$ ein Meßraum mit der Eigenschaft:

Es existiert ein kompakter Raum E' mit $E \subset E'$ und
$\mathfrak{E} = \{A \subset E: A \text{ ist universell-meßbare Menge von } E'\}$
(insbesondere ist E selbst eine universell-meßbare Teilmenge von E').

$(P_t)_{t\geq 0}$ sei eine meßbare, Markoffsche Halbgruppe auf $(E, \mathfrak{E})$. Die Menge aller für ein $a > 0$ a-exzessiven Funktionen sei punktetrennend. μ_0 und μ_∞ sei wie in Satz 14.
Dann existiert ein Doobscher Markoff-Prozeß $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$ mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$, mit Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ und mit den folgenden Bedingungen an den Anfangs- und Endzustand:

$(\mu_0 P_0)$ ist die Verteilung von X_0,
μ_∞ ist die Verteilung von X_∞.

Der Beweis von Satz 15 benutzt als entscheidendes Hilfsmittel die sogenannte Ray-Knight-Kompaktifikation (siehe **En**(6)) der zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörigen Resolvente. Wegen **En**(6), Proposition 8(2) müssen wir die obige Bedingung an den Meßraum $(E, \mathfrak{E})$ stellen.

Schlußbemerkung: Unsere Definition eines Doobschen Markoff-Prozesses unterscheidet sich von der üblichen Definition (siehe z. B. **Ba**, Satz 65.3) im wesentlichen nur in der Bedingung 1(iv). Gerade diese Bedingung ist aber für § 2 entscheidend.

Wie wir in Satz 15 gesehen haben, bereitet Bedingung 1(iv) bei der Konstruktion von Doobschen Markoff-Prozessen die meisten Schwierigkeiten (der Beweis von Satz 15 wäre sehr langwierig). Bedingung 1(iv) ist jedoch erheblich schwächer als die üblichen Regularitätsforderungen an die Pfade des Prozesses.

II, § 2 Wesentliche Eintrittszeiten und starke Balayage

Definition 1: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Doobscher Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$. Wegen 1.1 (iv) können wir für alle $A \in \mathfrak{E}$ definieren:

$$W_A: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$w \longrightarrow \inf\{t \geqslant 0: \int_0^t I_A \circ X_s(w)\, ds > 0\}.$$

Offensichtlich gilt:

$$W_A(w) = \sup\{t \geqslant 0: \int_0^t I_A \circ X_s(w)\, ds = 0\} \text{ für alle } w \in M.$$

Wir nennen W_A die *wesentliche Eintrittszeit* des Markoff-Prozesses $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$ in die Menge A.

Lemma 2: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$. $(V_p)_{p>0}$ sei die zu $(P_t)_{t\geq 0}$ gehörige Resolvente.

(a) Sei $A, B \in \mathfrak{E}$. Die Menge $(A - B)$ sei vom Potential 0.
Dann gilt: $W_A \leqslant W_B$ P-f.s..

(b) Sei $A, B \in \mathfrak{E}$. Die Menge $((A - B) \cap (B - A))$ sei vom Potential 0.
Dann gilt: $W_A = W_B$ P-f.s..

(c) Für alle Mengen $A \in \mathfrak{E}$ vom Potential 0 gilt:
$W_A = \infty$ P-f.s..

Beweis: Es genügt (a) zu zeigen, denn (b) und (c) folgen sofort aus (a).
Sei $p > 0$ beliebig.
Da $T = 0$ eine starke Markoffzeit ist, folgt nach Lemma 1.9:

$$E(e^{-p\cdot 0}\cdot (V_p I_{(A-B)}) \circ X_0) = E(\int_0^\infty e^{-ps}\cdot I_{(A-B)} \circ X_s\, ds).$$

Da $V_p I_{(A-B)} = 0$ ist, folgt hieraus:

$$0 = E(\int_0^\infty e^{-ps}\cdot I_{(A-B)} \circ X_s\, ds).$$

Daraus folgt für P-fast alle $w \in M$:

$$\int_0^t I_{(A-B)} \circ X_s(w)\, ds = 0 \text{ für alle } t \geqslant 0.$$

Hieraus folgt schließlich für P-fast alle $w \in M$:

$$\int_0^t I_A \circ X_s(w)\, ds \leqslant \int_0^t I_B \circ X_s(w)\, ds \text{ für alle } t \geqslant 0.$$

Trivialerweise folgt jetzt: $W_A \leqslant W_B$ P-f.s..

Man vergleiche Lemma 2 mit Lemma I, 2.3.

Mengen vom Potential o verändern weder die starke Gefegte noch die wesentliche Eintrittszeit.

Dieser oberflächliche Zusammenhang zwischen starker Balayage und wesentlicher Eintrittszeit wird durch unseren Hauptsatz erheblich vertieft.

Ein wichtiges Hilfsmittel beim Umgang mit wesentlichen Eintrittszeiten sind die folgenden „diskreten" Eintrittszeiten:

Lemma 3: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$.

Für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ gelte: $\mathfrak{M}_{t+} = \mathfrak{M}_t$.

Sei $D \subset \overline{\mathbf{R}}_+$ eine höchstens abzählbare Menge. Sei $A \in \mathfrak{E}$.

Dann ist $T_{D,A}: M \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$

$$w \longrightarrow \inf \{ t \in D: X_t(w) \in A \}$$

eine Markoffzeit.

Beweis: Für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ gilt:

$$\{T_{D,A} < t\} = \bigcup_{\substack{s \in D \\ s < t}} \{X_s \in A\} \in \mathfrak{M}_t.$$

Zusammen mit Lemma 1.7 folgt jetzt die Behauptung.

Lemma 4: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Sei $D \subset \overline{\mathbf{R}}_+$ eine endliche Menge. Sei $A \in \mathfrak{E}$.

Dann ist $T_{D,A}$ eine starke Markoffzeit, und es gilt:

(i) $\quad X_{T_{D,A}}(w) \in A$ für alle $w \in \{T_{D,A} < \infty\}$.

Beweis: Da D endlich ist, gilt:

$$\{T_{D,A} \leqslant t\} = \bigcup_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} \{X_s \in A\} \in \mathfrak{M}_t \text{ für alle } t \in \overline{\mathbf{R}}_+.$$

Wir haben damit gezeigt: $T_{D,A}$ ist eine Markoffzeit. Da D endlich ist, gilt:

(1) $\quad T_{D,A}(w) = \min \{t \in D: X_t(w) \in A\}$ für alle $w \in \{T_{D,A} < \infty\}$.

Aus (1) folgt: $T_{D,A}(M) \subset (D \cup \{\infty\})$. Zusammen mit Lemma 1.11 folgt daraus:

$T_{D,A}$ ist starke Markoffzeit.

Aus (1) folgt auch: $X_{T_{D,A}}(w) \in A$ für alle $w \in \{T_{D,A} < \infty\}$.

Lemma 5: Sei $(M, \mathfrak{M}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $F \in (\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{M})$.
Für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ sei $F_t := \{w \in M: (t, w) \in F\}$.

Sei $H := \{w \in M: \int_0^\infty I_F(t, w)\, dt > o\}$.

Dann existiert eine λ^1-Nullmenge $U \subset \mathbf{R}_+$ mit:

$$P(F_t - H) = o \text{ für alle } t \in (\mathbf{R}_+ - U).$$

Beweis: Annahme: Für ein $w \in M$ gilt $\int_0^\infty I_{F-(H \times \bar{\mathbf{R}}_+)}(t, w)\, dt > o$.

Dann gilt insbesondere: $\int_0^\infty I_F(t, w)\, dt > o$. Hieraus folgt: $w \in H$.

Dies bedeutet aber: $I_{F-(H \times \bar{\mathbf{R}}_+)}(t, w) = o$ für alle $t \in \bar{\mathbf{R}}_+$.

Jetzt ergibt sich ein Widerspruch: $\int_0^\infty I_{F-(H \times \bar{\mathbf{R}}_+)}(w, t)\, dt = o$.

Wir haben damit gezeigt:

$$(1) \qquad \int_0^\infty I_{F-(H \times \bar{\mathbf{R}}_+)}(t, w)\, dt = o \text{ für alle } w \in M.$$

Wir können schließen:

$$\int_0^\infty P(F_t - H)\, dt = \int_0^\infty \int I_{F-(H \times \bar{\mathbf{R}}_+)}(t, w)\, P(dw)\, dt$$

$$= \int \int_0^\infty I_{F-(H \times \bar{\mathbf{R}}_+)}(t, w)\, dt\, P(dw) \text{ (nach Fubini)} = o \text{ (nach (1))}.$$

Hieraus folgt:

Die Menge $U := \{t \in \mathbf{R}_+: P(F_t - H) > o\}$ ist eine λ^1-Nullmenge.

Satz 6: Sei $(M, \mathfrak{M}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $F \in (\bar{\mathfrak{R}}_+ \otimes \mathfrak{M})$.

Für jede abzählbare Menge $D \subset \bar{\mathbf{R}}_+$ definieren wir:

$$T_D: M \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$$
$$w \longrightarrow \inf \{t \in D: (t, w) \in F\}.$$

Weiter definieren wir: $W: M \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$

$$w \longrightarrow \inf \{t \geqslant o: \int_0^t I_F(s, w)\, ds > o\}.$$

Dann ist W eine $\mathfrak{M} - \bar{\mathfrak{R}}_+$-meßbare Abbildung, und es existiert eine abzählbare Menge $D \subset \bar{\mathbf{R}}_+$ mit der Eigenschaft:

$$T_D = W \text{ P-f.s.}.$$

Beweis: Für alle $q \in \mathbf{R}_+$ sei $F^q := F \cap (M \times [o, q[)$.

Analog zum vorhergehenden Lemma führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$F^q_t := \{w \in M: (t, w) \in F^q\} \quad (q, t \in \mathbf{R}_+)$$

$$H^q := \{w \in M: \int_0^\infty I_{F^q}(t, w)\, dt > o\} = \{w \in M: \int_0^q I_F(t, w)\, dt > o\}.$$

Die Abbildung $w \longrightarrow \int_0^q I_F(t,w)\,dt$ ist nach dem Satz von Fubini $\mathfrak{M}$ — $\mathfrak{R}_+$-meßbar. Daraus folgt:

$$\{W < q\} = H^q \in \mathfrak{M} \text{ für alle } q \in \mathbf{R}_+.$$

Folglich ist die Abbildung W $\mathfrak{M}$ — $\mathfrak{R}_+$-meßbar.

Nach Lemma 5 existiert für alle $q \in \mathbf{R}_+$ eine λ^1-Nullmenge U^q mit:

$$P(F_t^q - H^q) = 0 \text{ für alle } t \in (\mathbf{R}_+ - U^q).$$

$U := \bigcup_{q \in Q_+} U^q$ ist dann ebenfalls eine λ^1-Nullmenge, und es gilt:

(1) $\quad P(F_t^q - H^q) = 0$ für alle $q \in \mathbf{Q}_+$ und alle $t \in (\mathbf{R}_+ - U)$.

Sei nun $E \subset (\mathbf{R}_+ - U)$ eine abzählbare Menge. Dann gilt:

(2) $\quad \{T_E < q\} = \bigcup_{\substack{t \in E \\ t < q}} F_t^q \in \mathfrak{M}$ für alle $q \in \mathbf{R}_+$.

Für alle $q \in \mathbf{Q}_+$ schließen wir: $P(\{T_E < q\} \cap \{W \geqslant q\}) =$

$$P(\{T_E < q\} - \{W < q\}) = P\Big(\bigcup_{\substack{t \in E \\ t < q}} F_t^q - H^q\Big) \text{ (nach (2))} \leqslant$$

$$\sum_{\substack{t \in E \\ t < q}} P(F_t^q - H^q) = 0 \text{ (nach (1))}.$$

Wir haben gezeigt: $P(\{T_E < q\} \cap \{W \geqslant q\}) = 0$ für alle $q \in \mathbf{R}_+$.

Jetzt können wir schließen:

$$P(\{T_E < W\}) = P\Big(\bigcup_{q \in Q_+} (\{T_E < q\} \cap \{W \geqslant q\})\Big) \leqslant$$

$$\sum_{q \in Q_+} P(\{T_E < q\} \cap \{W \geqslant q\}) = 0. \text{ Also gilt:}$$

(3) $\quad W \leqslant T_E$ P-f.s. für alle $E \subset (\mathbf{R}_+ - U)$ abzählbar.

Wir definieren: $\alpha := \sup \{E(e^{-T_E}) : E \subset (\mathbf{R}_+ - U)$ abzählbar$\}$. Dann existiert eine Folge $(E_n)_{n \in N}$ von abzählbaren Teilmengen von $(\mathbf{R}_+ - U)$ mit: $\alpha = \sup_n E(e^{-T_{E_n}})$.

Wir definieren: $D := \bigcup_{n \in N} E_n$.

Für alle $n \in \mathbf{N}$ ist $T_D \leqslant T_{E_n}$, da $E_n \subset D$ ist. Daraus folgt:

$$\alpha = \sup_n E(e^{-T_{E_n}}) \leqslant E(e^{-T_D}) \leqslant \alpha. \text{ Wir haben gezeigt:}$$

(4) $\quad E(e^{-T_D}) = \alpha$.

Wir machen nun die Annahme:

(5) $\quad P(\{W < T_D\}) > 0$.

Dann existiert ein $q \in \mathbf{Q}_+$ mit $P(\{W < q\} \cap \{T_D > q\}) > 0$.

Definieren wir $G := \{T_D \leqslant q\}$, so folgt hieraus:

$$P(\{w \in M: \int_0^q I_{F-(G \times \bar{\mathbb{R}}_+)}(t,w)\,dt > 0\}) > 0.$$

Daraus folgern wir: $0 < \int \int_0^q I_{F-(G \times \bar{\mathbb{R}}_+)}(t,w)\,dt\,P(dw) = \int_0^q \int I_{F-(G \times \bar{\mathbb{R}}_+)}(t,w)\,P(dw)\,dt$

(nach Fubini) $= \int_0^q P(F_t^q - G)\,dt = \int_{[0,q[-U} P(F_t^q - G)\,dt$ (denn U ist eine λ^1-Nullmenge).

Also existiert ein $t_0 \in ([0,q[- U)$ mit:

(6) $\quad P(F_{t_0}^q - G) > 0.$

Wir betrachten nun $D' := D \cup \{t_0\}$. Trivialerweise gilt: $T_{D'} \leqslant T_D$.

Nach (6) gilt: $P(\{T_{D'} < q\} \cap \{T_D > q\}) = P(F_{t_0}^q - G) > 0$.

Hieraus folgt: $E(e^{-T_{D'}}) > E(e^{-T_D}) = \alpha$ (nach (4)).

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Definition von α. Also ist Annahme (8) falsch.

Demnach gilt: $P(\{W < T_D\}) = 0$.

Zusammen mit (3) folgt schließlich: $W = T_D$ P-f.s..

7: Die Aussage von Satz 6 bleibt auch unter den folgenden Voraussetzungen richtig: $(M, \mathfrak{M}, P)$ ist ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum. $F \in \widetilde{(\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{M})}$, wobei $\widetilde{(\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{M})}$ die Vervollständigung der σ-Algebra $(\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{M})$ bezüglich des Maßes $(\lambda^1 \otimes P)$ ist.

Wir wollen nun Satz 6 auf Markoff-Prozesse anwenden:

Korollar 8: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Sei $A \in \mathfrak{E}$.

Dann ist W_A $\mathfrak{M}$ — $\bar{\mathfrak{R}}_+$-meßbar, und es existiert eine abzählbare Menge $D \subset \mathbf{R}_+$ mit:

$$W_A = T_{D,A} \text{ P-f.s..}$$

Beweis: Die Behauptung folgt sofort, wenn wir Satz 6 auf die Menge $F := \{(t, w) \in (\mathbf{R}_+ \times M): X_t(w) \in A\}$ anwenden. Wegen 1.1(iv) gilt nämlich: $F \in (\bar{\mathfrak{R}}_+ \otimes \mathfrak{M})$.

Korollar 9: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$.

Zusätzlich seien die Bedingungen 1.12(ii), (iii) erfüllt.

Dann ist W_A für alle $A \in \mathfrak{E}$ eine Markoffzeit.

Beweis: Nach Korollar 8 existiert eine abzählbare Menge $D \subset \mathbf{R}_+$ mit:

(1) $\quad W_A = T_{D,A}$ P-f.s..

Nach Lemma 3 ist $T_{D,A}$ eine Markoffzeit. Also gilt:

(2) $\{T_{D,A} \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_t$ für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

W_A ist nach Korollar 8 $\mathfrak{M}$ — $\overline{\mathfrak{R}}_+$-meßbar. Also gilt:

(3) $\{W_A \leqslant t\} \in \mathfrak{M}$ für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Aus (1) folgt für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$:

(4) $P((\{W_A \leqslant t\} - \{T_{D,A} \leqslant t\}) \cup (\{T_{D,A} \leqslant t\} - \{W_A \leqslant t\})) = 0$.

Mit Hilfe von Bedingung 1.12(iii) folgt aus (2), (3) und (4):

$\{W_A \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_t$ für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Dies bedeutet aber, daß W_A eine Markoffzeit ist.

Wir kommen nun zum Hauptsatz von Teil II. Wir bringen hierfür mehrere Versionen (siehe auch § 4).

Hauptsatz (1. Version) **10**: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geqslant 0}$. $(V_p)_{p>0}$ sei die zu $(P_t)_{t \geqslant 0}$ gehörige Resolvente. Dann gilt für alle $a > 0$, $g \in B_+(E, \mathfrak{E})$ und $A \in \mathfrak{E}$:

$$E({}^a\hat{S}^A_{V_a g} \circ X_0) = E\left(\int_{W_A}^{\infty} e^{-at} \cdot g \circ X_t \, dt\right).$$

Beweis: Sei $f := {}^a\hat{S}^A_{V_a g}$ und $A' := A \cap \{f \geqslant V_a g\}$.

Nach I, 2.9(c) gilt: $I_A \cdot V_a g \leqslant f$ $(V_p)_{p>0}$-f.ü..

Also ist $((A - A') \cup (A' - A))$ vom Potential 0. Aus 2(b) folgt dann:

(1) $W_A = W_{A'}$ P-f.s..

Nach Korollar 8 existiert eine abzählbare Menge $D' \subset \mathbf{R}_+$ mit:

(2) $W_{A'} = T_{D',A'}$ P-f.s..

Sei $(D'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge von endlichen Mengen mit:

(3) $D'_n \uparrow D'$.

Definieren wir $T'_n := T_{D'_n, A'}$, für alle $n \in \mathbf{N}$, so folgt aus (3):

(4) $T'_n \downarrow T_{D',A'}$.

Nach Lemma 4(i) gilt für alle $n \in \mathbf{N}$:

$X_{T'_n}(w) \in A'$ für alle $w \in \{T'_n < \infty\}$.

Da $V_a g \leqslant f$ auf A' ist, folgt hieraus für alle $n \in \mathbf{N}$:

$$e^{-a \cdot T'_n} \cdot f \circ X_{T'_n} \geqslant e^{-a \cdot T'_n} \cdot (V_a g) \circ X_{T'_n} \text{ auf } \{T'_n < \infty\}.$$

Auf der Menge $\{T'_n = \infty\}$ ist obige Ungleichung trivialerweise erfüllt. Wir erhalten also für alle $n \in \mathbf{N}$:

(5) $e^{-a \cdot T'_n} \cdot f \circ X_{T'_n} \geqslant e^{-a \cdot T'_n} \cdot (V_a g) \circ X_{T'_n}$ auf ganz M.

Nach Lemma 4 gilt:

(6) T'_n ist für alle $n \in \mathbf{N}$ eine starke Markoffzeit.

Jetzt können wir schließen:

$$E(f \circ X_0) \geqslant \sup_n E(e^{-a \cdot T'_n} \cdot f \circ X_{T'_n}) \text{ (nach (6) und Korollar 1.10(c))}$$

$$\geqslant \sup_n E(e^{-a \cdot T'_n} \cdot (V_a g) \circ X'_{T_n}) \text{ (nach (5))}$$

$$= \sup_n E\Big(\int_{T'_n}^{\infty} e^{-at} \cdot g \circ X_t \, dt\Big) \text{ (nach (6) und Lemma 1.9)}$$

$$= E\Big(\int_{T_{D',A'}}^{\infty} e^{-at} \cdot g \circ X_t \, dt\Big) \text{ (nach (4))} = E\Big(\int_{W_{A'}}^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot g \circ X_t \, dt\Big) \text{ (nach (2))}$$

$$= E\Big(\int_{W_A}^{\infty} e^{-at} \cdot g \circ X_t \, dt\Big) \text{ (nach (1))}.$$

Wir haben gezeigt:

(7) $E({}^a\hat{S}^A_{V_a g} \circ X_0) = E(f \circ X_0) \geqslant E\Big(\int_{W_A}^{\infty} e^{-at} \cdot g \circ X_t \, dt\Big)$.

Sei nun h eine Funktion aus $B_+(E, \mathfrak{E})$ mit:

(8) $V_a h \leqslant V_a g$,

(9) $\{h > 0\} \subset A$.

Offensichtlich gilt für alle $w \in M$: $\int_0^{W_A(w)} I_A \circ X_t(w) \, dt = 0$.

Zusammen mit (9) folgt:

$$\int_0^{W_A(w)} e^{-at} \cdot h \circ X_t(w) \, dt = 0 \text{ für alle } w \in M.$$

Daraus folgt:

(10) $\int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot h \circ X_t(w) \, dt = \int_{W_A(w)}^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot h \circ X_t(w) \, dt$ für alle $w \in M$.

Wenden wir Lemma 1.9 auf die konstante Markoffzeit 0 an, so erhalten wir:

$$E(e^{-a \cdot 0} \cdot (V_a h) \circ X_0) = E\Big(\int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot h \circ X_t \, dt\Big).$$

Zusammen mit (10) folgt:

(11) $E((V_a h) \circ X_0) = E\Big(\int_{W_A}^{\infty} e^{-at} \cdot h \circ X_t \, dt\Big)$.

Nach Korollar 8 existiert eine abzählbare Menge $D \subset \mathbf{R}_+$ mit:

(12) $W_A = T_{D,A}$ P-f.s..

Sei $(D_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge von endlichen Mengen mit: $D_n \uparrow D$. Definieren wir $T_n := T_{D_n, A}$ für alle $n \in \mathbf{N}$, so folgt daraus:

(13) $\quad T_n \downarrow T_{D, A}$.

Aus (8) folgt:

(14) $\quad e^{-a \cdot T_n} \cdot (V_a h) \circ X_{T_n} \leqslant e^{-a \cdot T_n} \cdot (V_a g) \circ X_{T_n}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Nach Lemma 4 gilt:

(15) $\quad T_n$ ist für alle $n \in \mathbf{N}$ eine starke Markoffzeit.

Jetzt können wir schließen:

$$E((V_a h) \circ X_0) = E\Big(\int_{W_A}^{\infty} e^{-at} \cdot h \circ X_t \, dt\Big) \text{ (nach (11))}$$

$$= \sup_n E\Big(\int_{T_n}^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot h \circ X_t \, dt\Big) \text{ (nach (12) und (13))}$$

$$= \sup_n E\big(e^{-a \cdot T_n} \cdot (V_a h) \circ X_{T_n}\big) \text{ (nach (15) und Lemma 1.9)}$$

$$\leqslant \sup_n E\big(e^{-a \cdot T_n} \cdot (V_a g) \circ X_{T_n}\big) \text{ (nach (14))}$$

$$= \sup_n E\Big(\int_{T_n}^{\infty} e^{-at} \cdot g \circ X_t \, dt\Big) \text{ (nach (15) und Lemma 1.9)}$$

$$= E\Big(\int_{W_A}^{\infty} e^{-at} \cdot g \circ X_t \, dt\Big) \text{ (nach (12) und (13))}.$$

Wir haben also für alle Funktionen $h \in B_+(E, \mathfrak{E})$, die die Eigenschaften (8) und (9) besitzen, folgendes bewiesen:

(16) $\quad E((V_a h) \circ X_0) \leqslant E\Big(\int_{W_A}^{\infty} e^{-at} \cdot g \circ X_t \, dt\Big)$.

Nach dem Approximationssatz (siehe I, 5.6) existiert nun eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $B_+(E, \mathfrak{E})$ mit den Eigenschaften:

(17) $\quad \{h_n > 0\} \subset A$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(18) $\quad V_a h_n \uparrow {}^a\hat{S}^A_{V_a g} = f \leqslant V_a g$.

Wegen (17) und (18) erfüllen die Funktionen h_n die Bedingungen (8) und (9).

Also folgt aus (16):

(19) $\quad E((V_a h_n) \circ X_0) \leqslant E\Big(\int_{W_A}^{\infty} e^{-at} \cdot g \circ X_t \, dt\Big)$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Wir können nun den Beweis des Hauptsatzes vollenden:

$$E({}^a\hat{S}^A_{V_a g} \circ X_0) = \sup_n E((V_a h_n) \circ X_0) \text{ (nach (18))}$$

$$\leqslant E\Big(\int_{W_A}^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot g \circ X_t \, dt\Big) \text{ (nach (19))} \leqslant E({}^a\hat{S}^A_{V_a g} \circ X_0) \text{ (nach (7))}.$$

Hauptsatz (2. Version) **11**: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$. $(V_p)_{p>0}$ sei die zu $(P_t)_{t\geq 0}$ gehörige Resolvente. V sei der Potentialkern von $(V_p)_{p>0}$. Dann gilt für alle $g \in B_+(E, \mathfrak{E})$ und alle $A \in \mathfrak{E}$:

$$E(\hat{S}^A_{Vg} \circ X_0) = E(\int_{W_A}^{\infty} g \circ X_t \, dt).$$

Beweis: Wir schließen:

$$E(\hat{S}^A_{Vg} \circ X_0) = \sup_{a>0} E({}^a\hat{S}^A_{V_a g} \circ X_0) \text{ (nach Satz I, 2.17(c))}$$

$$= \sup_{a>0} E(\int_{W_A}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot g \circ X_t \, dt) \text{ (nach der 1. Version des Hauptsatzes)}$$

$$= E(\int_{W_A}^{\infty} g \circ X_t \, dt).$$

Hauptsatz (3. Version) **12**: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$. $(V_p)_{p>0}$ sei die zu $(P_t)_{t\geq 0}$ gehörige Resolvente. Sei $A \in \mathfrak{E}$. W_A sei eine starke Markoffzeit.

(a) Für alle $a > 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f gilt dann:

$$E({}^a\hat{S}^A_f \circ X_0) = E(e^{-a\cdot W_A} \cdot f \circ X_{W_A}).$$

(b) Für alle exzessiven Funktionen f gilt:

$$E(\hat{S}^A_f \circ X_0) = E(I_{\{W_A<\infty\}} \cdot f \circ X_{W_A}).$$

Beweis: (a): Nach I, 1.13 existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $B_+(E, \mathfrak{E})$ mit $V_a g_n \uparrow f$. Wir schließen: $E({}^a\hat{S}^A_f \circ X_0) = \sup_n E({}^a\hat{S}^A_{V_a g_n} \circ X_0)$ (nach I, 2.18(c))

$$= \sup_n E(\int_{W_A}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot g_n \circ X_t \, dt) \text{ (nach der 1. Version des Hauptsatzes)}$$

$$= \sup_n E(e^{-a\cdot W_A} \cdot (V_a g_n) \circ X_{W_A}) \begin{pmatrix}\text{nach Lemma 1.9,}\\ \text{denn } W_A \text{ ist starke Markoffzeit}\end{pmatrix}$$

$$= E(e^{-a\cdot W_A} \cdot f \circ X_{W_A}).$$

(b): Für alle exzessiven Funktionen f können wir schließen:

$$E(\hat{S}^A_f \circ X_0) = \sup_{a>0} E({}^a\hat{S}^A_f \circ X_0) \text{ (nach I, 2.17(b))}$$

$$= \sup_{a>0} E(e^{-a\cdot W_A} \cdot f \circ X_{W_A}) \text{ (nach (a))} = E(I_{\{W_A<\infty\}} \cdot f \circ X_{W_A}).$$

Aus Korollar 9 und der 3. Version des Hauptsatzes folgt sofort:

Hauptsatz (4. Version) **13**: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$ ein *starker* Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$. Sei $A \in \mathfrak{E}$.

(a) Für alle $a > 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f gilt dann:

$$E({}^a\hat{S}_f^A \circ X_0) = E(e^{-a \cdot W_A} \cdot f \circ X_{W_A}).$$

(b) Für alle exzessiven Funktionen gilt:

$$E(\hat{S}_f^A \circ X_0) = E(I_{\{W_A < \infty\}} \cdot f \circ X_{W_A}).$$

Als erste Anwendung des Hauptsatzes geben wir in den nächsten beiden Korollaren eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation der S-Dünnheit:

Korollar 14: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Für alle $A \in \mathfrak{E}$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:

(i) $P(\{X_0 \in A^s\}) = 1.$

(ii) $P(\{W_A = 0\}) = 1.$

Beweis: Sei $(V_p)_{p>0}$ die zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente.

Sei $a > 0$. Nach Korollar I, 3.9 gilt:

(1) $A^s = \{V_a 1 = {}^a\hat{S}^A_{V_a 1}\}.$

Wir schließen:

$$P(\{W_A = 0\}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{W_A(w)}^{\infty} e^{-at} \cdot 1 \circ X_t(w)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot 1 \circ X_t(w)\, dt \text{ für P-fast alle } w \in M$$

$$\Leftrightarrow E\Big(\int_{W_A}^{\infty} e^{-at} \cdot 1 \circ X_t\, dt\Big) = E\Big(\int_0^{\infty} e^{-at} \cdot 1 \circ X_t\, dt\Big)$$

$$\Leftrightarrow E({}^a\hat{S}^A_{V_a 1} \circ X_0) = E\Big(\int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot 1 \circ X_t\, dt\Big) \left(\begin{matrix}\text{nach der 1. Version}\\ \text{des Hauptsatzes}\end{matrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow E({}^a\hat{S}^A_{V_a 1} \circ X_0) = E((V_a 1) \circ X_0) \left(\begin{matrix}\text{man wende Lemma 1.9 auf die}\\ \text{starke Markoffzeit 0 an}\end{matrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow P(\{{}^a\hat{S}^A_{V_a 1} \circ X_0 = (V_a 1) \circ X_0\}) = 1 \text{ (da } {}^a\hat{S}^A_{V_a 1} \leqslant V_a 1 \text{ ist)}$$

$$\Leftrightarrow P(\{X_0 \in A^s\}) = 1 \text{ (nach (1))}.$$

Lemma 15: Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ eine submarkoffsche, meßbare Halbgruppe auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $x \in E$ und alle $A \in \mathfrak{E}$ gilt:

$$x \in A^s \Leftrightarrow P_0(x, E - A^s) = 0.$$

Beweis: Sei $a > 0$. Nach Korollar I, 3.9 gilt:

(1) $A^s = \{V_a 1 = {}^a\hat{S}^A_{V_a 1}\}.$

Trivialerweise gilt:

(2) $P_0 f(x) = f(x)$ für alle a-exzessiven Funktionen f.

Wir schließen: $x \in A^s \Leftrightarrow {}^a\hat{S}^A_{V_a 1}(x) = V_a 1(x)$ (nach (1))
$\Leftrightarrow P_0(V_a 1)(x) = P_0({}^a\hat{S}^A_{V_a 1})(x)$ (nach (2))
$\Leftrightarrow P_0(x, \{{}^a\hat{S}^A_{V_a 1} < V_a 1\}) = 0$ (da ${}^a\hat{S}^A_{V_a 1} \leqslant V_a 1$ ist)
$\Leftrightarrow P_0(x, E - A^s) = 0$ (nach (1)).

Korollar 16: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Sei $x \in E$. $(\varepsilon_x P_0)$ sei die Verteilung von X_0.

Für alle $A \in \mathfrak{E}$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:

(i) $x \in A^s$.

(ii) $P(\{W_A = 0\}) = 1$.

Beweis: $x \in A^s \Leftrightarrow (\varepsilon_x P_0)(E - A^s) = P_0(x, E - A^s) = 0$ (nach Lemma 15)
$\Leftrightarrow P(\{X_0 \in (E - A^s)\}) = 0$ (denn $(\varepsilon_x P_0)$ ist die Verteilung von X_0)
$\Leftrightarrow P(\{X_0 \in A^s\}) = 1$
$P(\{W_A = 0\}) = 1$ (nach Korollar 14).

Schlußbemerkung: Die 4. Version des Hauptsatzes kennt man für die Brownsche Bewegung schon lange (siehe **Cie**, Theorem 10.15 oder **Str**, S. 847).

T. Watanabe bewies dieses Resultat für Standard-Prozesse. Sein Beweis hängt entscheidend von einem Resultat in **Ro**, § 2 ab. Unser Beweis, der zu einem wesentlich allgemeineren Ergebnis führt, gründet sich zum einen auf Korollar 8, welches sofort aus Satz 6 folgt, und zum anderen auf dem Approximationssatz.

II, § 3 Verzweigungspunkte Markoffscher Prozesse

In diesem Abschnitt wollen wir einige Resultate aus **En**(3) verfeinern. Die Bedingung 1.1(iv) werden wir dabei nur selten benötigen. Wir führen einige Bezeichnungen ein:

1: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$

$$\mathfrak{S} := \{f \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E}): f \text{ ist a-supermedian für ein } a \geqslant 0\},$$

$$\tilde{\mathfrak{E}} := \{f \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E}): f \text{ ist a-exzessiv für ein } a > 0\}.$$

Lemma 2: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $E(f \circ X_t / \mathfrak{M}_{0+}) = (P_t f) \circ X_0$ P-f.s. für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$, $t \geqslant 0$.

(ii) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} E(|f \circ X_t - f \circ X_0|) = 0$ für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$.

Beweis: (i) nach (ii): Wir nehmen an, es existiert $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$ mit:

(1) $\limsup\limits_{t \longrightarrow 0} E(|f \circ X_t - f \circ X_0|) > 0.$

Dann existiert eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n \downarrow 0$ und:

(2) $\limsup\limits_{t \longrightarrow 0} E(|f \circ X_{t_n} - f \circ X_0|) > 0.$

Aus Korollar 1.10(b) folgt:

$(e^{-a \cdot t_n} \cdot f \circ X_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist für ein $a > 0$ ein absteigendes Supermartingal bezüglich $(\mathfrak{M}_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ (in **Ba** sind dies gerade die mit (—N) indizierten Supermartingale).

Nach **Ba**, Satz 60.8 existiert eine Zufallsvariable $Z: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mit:

(3) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} E(|e^{-a \cdot t} \cdot f \circ X_{t_n} - Z|) = 0,$

(4) Z ist $(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}_{t_n})$ — $\overline{\mathfrak{R}}_+$-meßbar.

Da $\mathfrak{M}_{0+} \supset \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}_{t_n}$ ist, folgt aus (4):

(5) Z ist $\mathfrak{M}_{0+}$ — $\overline{\mathfrak{R}}_+$-meßbar.

Für alle $A \in \mathfrak{M}_{0+}$ können wir schließen:

$$E(I_A \cdot Z) = \lim_{n \longrightarrow \infty} E(I_A \cdot e^{-a \cdot t_n} \cdot f \circ X_{t_n}) \text{ (nach (3))}$$

$$= \lim_{n \longrightarrow \infty} E\big(I_A \cdot e^{-a \cdot t_n} \cdot E(f \circ X_{t_n} / \mathfrak{M}_{0+})\big)$$

$= \lim_{n \to \infty} E(I_A \cdot e^{-a \cdot t_n} \cdot (P_{t_n} f) \circ X_0)$ (genau an dieser Stelle haben wir Bedingung (i) ausgenützt)

$\leqslant E(I_A \cdot f \circ X_0)$ (denn f ist a-exzessiv).

Wir haben damit gezeigt:

(6) $E(I_A \cdot Z) \leqslant E(I_A \cdot f \circ X_0)$ für alle $A \in \mathfrak{M}_{0+}$.

Andererseits gilt: $E(Z) = \lim_{n \to \infty} E(e^{-a \cdot t_n} \cdot f \circ X_{t_n})$ (nach (3))

$= \lim_{n \to \infty} E(e^{-a \cdot t_n} \cdot (P_{t_n} f) \circ X_0)$ (schwache Markoff-Eigenschaft)

$= E(f \circ X_0)$ (es gilt $\lim_{s \to 0} e^{-as} \cdot P_s f = f$, da f a-exzessiv ist).

Zusammen mit (6) folgt daraus:

$E(I_A \cdot Z) = E(I_A \cdot f \circ X_0)$ für alle $A \in \mathfrak{M}_{0+}$.

Da Z und $(f \circ X_0)$ beide $\mathfrak{M}_{0+} - \overline{\mathfrak{R}}_+$-meßbar sind, folgt hieraus:

$Z = f \circ X_0$ P-f.s..

Zusammen mit (3) folgt dann: $\lim_{n \to \infty} E(|e^{-a \cdot t_n} \cdot f \circ X_{t_n} - f \circ X_0|) = 0$.

Schließlich folgt: $\lim_{p \to \infty} E(|f \circ X_{t_n} - f \circ X_0|) = 0$.

Dies steht aber im Widerspruch zu (2).

Also ist die oben gemachte Annahme falsch.

(ii) nach (i): Wir benötigen die folgende Stetigkeitsaussage über bedingte Erwartungen (siehe **Hu** (2)):

(7) Sei $(Z_n)_{n \in N}$ eine gleichmäßig beschränkte, gegen eine ZV Z punktweise konvergierende Folge von ZVen.

Sei $(\mathfrak{F}_n)_{n \in N}$ eine gegen $\mathfrak{F}_\infty$ absteigende Folge von σ-Algebren.

Dann gilt: $E(Z/\mathfrak{F}_\infty) = \lim_{n \to \infty} E(Z_n/\mathfrak{F}_n)$ P-f.s..

Sei $f \in \mathfrak{E}$ und $t \geqslant 0$.

Dann ist auch $P_t f \in \mathfrak{E}$. Nach Bedingung (ii) gilt:

(8) $\lim_{s \to 0} E(|(P_t f) \circ X_s - (P_t f) \circ X_0|) = 0$.

Wir wählen uns eine Folge $(s_n)_{n \in N}$ mit $s_n \downarrow 0$ und $0 < s_n \leqslant t$.

Nach I, 1.26(c) gilt: $\lim_{n \to \infty} P_{s_n} f = f$.

Da außerdem $\mathfrak{M}_{0+} = \bigcap_{n \in N} \mathfrak{M}_{s_n}$ ist, folgt mit Hilfe von (7):

(9) $E(f \circ X_t/\mathfrak{M}_{0+}) = \lim_{n \to \infty} E((P_{s_n} f) \circ X_t/\mathfrak{M}_{s_n})$ P-f.s..

Wir können jetzt schließen:

$$E(f \circ X_t / \mathfrak{M}_{0+}) = \lim_{n \to \infty} E((P_{s_n} f) \circ X_t / \mathfrak{M}_{s_n}) \text{ (nach (9))}$$

$$= \lim_{n \to \infty} E(E(f \circ X_{s_n + t} / \mathfrak{M}_t) / \mathfrak{M}_{s_n}) \text{ (schwache Markoff-Eigenschaft)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} E(f \circ X_{s_n + t} / \mathfrak{M}_{s_n}) \text{ (da } s_n \leqslant t \text{ und somit } \mathfrak{M}_{s_n} \subset \mathfrak{M}_t \text{ ist)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} (P_t f) \circ X_{s_n} \text{ (schwache Markoff-Eigenschaft) P-f.s..}$$

Zusammen mit (8) folgt daraus: $E(f \circ X_t / \mathfrak{M}_{0+}) = (P_t f) \circ X_0$ P-f.s. .

Satz 3: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$.
Es existiere ein Punkt $x_0 \in E$ mit: $P(\{X_0 = x_0\}) = 1$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) x_0 ist kein Verzweigungspunkt bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$.

(ii) $E(f \circ X_t / \mathfrak{M}_{0+}) = (P_t f) \circ X_0$ P-f.s. für alle $f \in \mathfrak{E}$, $t \geqslant 0$.

Beweis: Für alle $f \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$, $t \geqslant 0$ gilt:

$$E(|f \circ X_t - f \circ X_0|) = E(|f \circ X_t - f(x_0)|) \text{ (da } X_0 = x_0 \text{ P-f.s. ist)}$$

$$= E(E((|f - f(x_0)|) \circ X_t / \mathfrak{M}_0)) = E((P_t(|f - f(x_0)|) \circ X_0) \text{ (schwache}$$

Markoff-Eigenschaft) $= P_t(|f - f(x_0)|)(x_0)$ (da $X_0 = x_0$ P-f.s.).

Zusammen mit Korollar I, 4.15 folgt daraus:

(1) Eine Funktion $f \in \mathfrak{E}$ ist genau dann $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x_0,
wenn $\lim_{t \to 0} E(|f \circ X_t - f \circ X_0|) = 0$ ist.

Die Behauptung folgt jetzt aus den folgenden Äquivalenzen:

x_0 ist kein Verzweigungspunkt $\Leftrightarrow$. Jede Funktion $f \in \mathfrak{E}$ ist $\mathfrak{R}$-stetig im Punkt x_0 (nach Korollar I, 4.17) $\Leftrightarrow \lim_{t \to 0} E(|f \circ X_t - f \circ X_0|) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{E}$ (nach (1)) $\Leftrightarrow E(f \circ X_t / \mathfrak{M}_{0+}) = (P_t f) \circ X_0$ P-f.s. für alle $f \in \mathfrak{E}$, $t \geqslant 0$ (nach Lemma 2).

Wir benötigen die Markoff-Eigenschaft in der folgenden Form:

Lemma 4: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. T sei eine starke Markoffzeit.

Dann gilt für alle $F \in B_+((E \times E), (\mathfrak{E} \otimes \mathfrak{E}))$ und alle $t \geqslant 0$:

$$E(F(X_{T+t}, X_T) / \mathfrak{M}_T) = \int F(x, X_T) \, P_t(X_T, dx) \text{ P-f.s..}$$

Beweis: Sei $\mathfrak{F} := \{(f \otimes g): f, g \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})\}$,

wobei $(f \otimes g): (E \times E) \longrightarrow R_+$ ist.
$(x, y) \longrightarrow f(x) \cdot g(y)$

Für alle $F = (f \otimes g) \in \mathfrak{F}$ und alle $t \geqslant 0$ können wir schließen:

$$E(F(X_{T+t}, X_T)/\mathfrak{M}_T) = E((f \circ X_{T+t}) \cdot (g \circ X_T)/\mathfrak{M}_T) = (g \circ X_T) \cdot E(f \circ X_{T+t}/\mathfrak{M}_T)$$

(denn die Funktion $(g \circ X_T)$ ist nach 1.2(ii) $\mathfrak{M}_T$-$\mathfrak{R}_+$-meßbar)

$$= (g \circ X_T) \cdot (P_t f) \circ X_T \text{ (nach 1.2(iii))} = \int F(x, X_T)\, P_t(X_T, dx).$$

Sei nun $\mathbf{H}$ der Vektorraum aller Funktionen $F \in B_b((E \times E), (\mathfrak{E} \otimes \mathfrak{E}))$ mit:

(1) $$E(F(X_{T+t}, X_T)/\mathfrak{M}_T) = \int F(x, X_T)\, P_t(X_T, dx) \quad P\text{-f.s.}.$$

Wie wir eben bewiesen haben, gilt: $\mathfrak{F} \subset \mathbf{H}$.

$\mathbf{H}$ und $\mathfrak{F}$ erfüllen offenbar die Voraussetzungen von Satz I, 4.30.

Mit Hilfe dieses Satzes folgt dann: $B_b((ExE), \sigma(\mathfrak{F})) \subset \mathbf{H}$.

Offensichtlich gilt jedoch: $\sigma(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{E} \otimes \mathfrak{E})$.

Damit ist die Eigenschaft (1) für alle $F \in B_b((E \times E), (\mathfrak{E} \otimes \mathfrak{E}))$ gezeigt. Mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz für bedingte Erwartungen folgt dann die Eigenschaft (1) für beliebige Funktionen $F \in B_+((E \times E), (\mathfrak{E} \otimes \mathfrak{E}))$.

Lemma 5: Sei $(E, \mathfrak{E})$ ein Meßraum. Sei $\mathfrak{F} \subset B(E, \mathfrak{E})$ mit $\mathfrak{E} = \sigma(\mathfrak{F})$.

$\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{E}$ sei eine abzählbar erzeugte σ-Algebra.

Dann existiert eine abzählbare Menge $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{E}' \subset \sigma(\mathfrak{F}')$.

Beweis: Wir betrachten $\tilde{\mathfrak{F}} := \{A \in \mathfrak{E}: \exists\ \mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ abzählbar mit $A \in \sigma(\mathfrak{G})\}$.

Man sieht sofort:

$\tilde{\mathfrak{F}}$ ist eine σ-Algebra, $\mathfrak{F} \subset B(E, \tilde{\mathfrak{F}})$.

Daraus folgt: $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{E} = \sigma(\mathfrak{F}) \subset \tilde{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{E}$.

Sei $\{A_n: n \in \mathbf{N}\}$ ein abzählbarer Erzeuger der σ-Algebra $\mathfrak{E}'$.

Wie wir vorhin zeigten, existiert dann für alle $n \in \mathbf{N}$ eine abzählbare Menge $\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{F}$ mit $A_n \in \sigma(\mathfrak{G}_n)$.

Die Menge $\mathfrak{F}' := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{G}_n$ leistet dann das Gewünschte.

Theorem 6: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geqslant 0}$.

Über die Halbgruppe $(P_t)_{t \geqslant 0}$ machen wir folgende Voraussetzungen

(P 1) $\mathfrak{E} = \sigma(\mathfrak{S})$.

(P 2)[1] Für alle $A \in \mathfrak{E}$ existiert eine abzählbar erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{E}'$ mit $A \in \mathfrak{E}'$ und $P_t I_A \in B(E, \mathfrak{E}')$ für alle $t \geqslant 0$.

[1] Die Bedingung (P 2) ist immer erfüllt, siehe Nachtrag.

(Die Bedingung (P 2) ist trivialerweise erfüllt, wenn $\mathfrak{E}$ selbst abzählbar erzeugt ist.)

Sei $T: M \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ mit der Eigenschaft:

$(T + t)$ ist für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ eine starke Markoffzeit.

μ_T sei die Verteilung von X_T.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $E(f \circ X_{T+t} / \mathfrak{M}_{T+}) = (P_t f) \circ X_T$ P-f.s. für alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$, $t \geqslant 0$.

(ii) $E(f \circ X_{T+t} / \mathfrak{M}_{T+}) = (P_t f) \circ X_T$ P-f.s. für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$, $t \geqslant 0$.

(iii) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} E(|f \circ X_{T+t} - f \circ X_T|) = 0$ für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$.

(iv) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \int P_t(|f - f(x)|)(x)\, \mu_T(dx) = 0$ für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$.

Beweis: Auf Grund der Voraussetzung über T ist nach Satz 1.8(a) auch $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}'_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, (X'_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit derselben Halbgruppe, wobei $\mathfrak{M}'_t := \mathfrak{M}_{T+t}$, $X'_t := X_{T+t}$ für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ ist. Nach Lemma 1.6(b) gilt: $\mathfrak{M}_{T+} = \mathfrak{M}'_{0+}$.

Die Bedingungen (i) bis (iii) nehmen jetzt folgende Form an:

(i') $E(f \circ X'_t / \mathfrak{M}'_{0+}) = (P_t f) \circ X'_0$ P-f.s. für alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$, $t \geqslant 0$.

(ii') $E(f \circ X'_t / \mathfrak{M}'_{0+}) = (P_t f) \circ X'_0$ P-f.s. für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$, $t \geqslant 0$.

(iii') $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} E(|f \circ X'_t - f \circ X'_0|) = 0$ für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$.

An der Bedingung (iv) ändert sich nichts, denn diese ist ja rein analytisch (μ_T ist dann die Verteilung von X'_0). Haben wir also die Behauptung für den Spezialfall $T = 0$ bewiesen, so folgt der allgemeine Fall, wenn wir die Aussage des speziellen Falles auf den Prozeß $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}'_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, (X'_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+})$ anwenden. Wir können uns also auf den Fall $T = 0$ beschränken. Sei $\mu := \mu_T$.

(i) nach (ii) ist trivial.

(ii) nach (i): Sei $f \in \mathfrak{S}$.

Die Funktionen $s \longrightarrow \int P_s f(x)\, \mu(dx)$,

$s \longrightarrow \int P_s \hat{f}(x)\, \mu(dx)$ besitzen dieselbe Laplace-Transformierte,

nämlich die Funktion $p \longrightarrow \int V_p f(x)\, \mu(dx) = \int V_p \hat{f}(x)\, \mu(dx)$ (man beachte I, 1.12(b)).

Nach dem Eindeutigkeitssatz der Laplace-Transformation existiert deshalb eine λ^1-Nullmenge N_f mit der Eigenschaft:

$$\int P_t \hat{f}(x)\, \mu(dx) = \int P_t f(x)\, \mu(dx) \text{ für alle } t \in (R_+ - N_f).$$

Für alle $t \in (\mathbf{R}_+ - N_f)$ folgern wir hieraus:

$$E(\hat{f} \circ X_t) = E((P_t \hat{f}) \circ X_0) \text{ (schwache Markoff-Eigenschaft)} = \int P_t \hat{f}(x)\, \mu(dx)$$

$$= \int P_t f(x)\, \mu(dx) = E((P_t f) \circ X_0) = E(f \circ X_t) \text{ (schwache Markoff-Eigenschaft).}$$

Da außerdem $\hat{f} \leqslant f$ ist, folgt hieraus:

(1) $\hat{f} \circ X_t = f \circ X_t$ P-f.s. für alle $t \in (\mathbf{R}_+ - N_f)$.

Für alle $t \in (\mathbf{R}_+ - N_f)$ können wir jetzt schließen:

$$E(f \circ X_t / \mathfrak{M}_{0+}) = E(\hat{f} \circ X_t / \mathfrak{M}_{0+}) \text{ (nach (1))} = (P_t \hat{f}) \circ X_0 \text{ (nach (ii))}$$
$$= E(\hat{f} \circ X_t / \mathfrak{M}_0) \text{ (schwache Markoff-Eigenschaft)} = E(f \circ X_t / \mathfrak{M}_0) \text{ (nach (1))}$$
$$= (P_t f) \circ X_0 \text{ (schwache Markoff-Eigenschaft) P-f.s..}$$

Wir haben gezeigt:

(2) Für alle $f \in \mathfrak{S}$ existiert eine λ^1-Nullmenge N_f mit:
$E(f \circ X_t / \mathfrak{M}_{0+}) = (P_t f) \circ X_0$ P-f.s. für alle $t \in (\mathbf{R}_+ - N_f)$.

Sei nun $f \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$.

Nach (P 2) existiert eine abzählbar erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{E}'$ mit:

(3) $f \in B(E, \mathfrak{E}')$,

(4) $P_t f \in B(E, \mathfrak{E}')$ für alle $t \geqslant 0$.

Nach (P 1) und Lemma 5 existiert eine abzählbare Menge $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ mit:

(5) $\mathfrak{E}' \subset \sigma(\mathfrak{S}')$.

Wir dürfen o.B.d.A. annehmen:

(6) $1 \in \mathfrak{S}'$, $(g + h) \in \mathfrak{S}'$, $\inf(g, h) \in \mathfrak{S}'$ für alle $g, h \in \mathfrak{S}'$.

Sei $N := \bigcup_{g \in \mathfrak{S}'} N_g$. Aus (2) folgt dann:
$E(g \circ X_s / \mathfrak{M}_{0+}) = (P_s g) \circ X_0$ P-f.s. für alle $g \in \mathfrak{S}'$, $s \in (\mathbf{R}_+ - N)$.

Wegen (6) dürfen wir das „monotone class theorem" anwenden. Wir erhalten:

(7) $E(g \circ X_s / \mathfrak{M}_{0+}) = (P_s g) \circ X_0$ P-f.s. für alle $g \in B_b(E, \sigma(\mathfrak{S}'))$ und alle $s \in (\mathbf{R}_+ - N)$.

Sei nun $t \geqslant 0$ beliebig.
Da N eine λ^1-Nullmenge ist, existiert ein $s \in (\mathbf{R}_+ - N)$ mit $0 < s \leqslant t$.

Nach (4) und (5) gilt:

(8) $P_{t-s} f \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E}') \subset B_b(E, \sigma(\mathfrak{S}'))$.

Wir schließen jetzt: $E(f \circ X_t / \mathfrak{M}_{0+}) = E(E(f \circ X_t / \mathfrak{M}_s) / \mathfrak{M}_{0+})$
$$= E((P_{t-s} f) \circ X_s / \mathfrak{M}_{0+}) \text{ (schwache Markoff-Eigenschaft)}$$
$$= (P_s(P_{t-} f)) \circ X_0 \text{ (nach (7), (8))} = (P_t f) \circ X_0 \text{ P-f.s..}$$

Wir haben gezeigt:

(9) $E(f \circ X_t / \mathfrak{M}_{0+}) = (P_t f) \circ X_0$ P-f.s. für alle $f \in B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$, $t \geqslant 0$.

Mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz für bedingte Erwartungen können wir (9) dann auf alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ ausdehnen. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Lemma 2. Sei $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$. Wir definieren: $F\colon (E \times E) \longrightarrow \overline{R}_+$

$$(x, y) \longrightarrow |f(x) - f(y)|.$$

Für alle $t \geqslant 0$ können wir jetzt schließen:

$$E(|f \circ X_t - f \circ X_0|) = E(E(F(X_{0+t}, X_0)/\mathfrak{M}_0)) = E(\int F(z, X_0)\, P_t(X_0, dz))$$

(man wende Lemma 4 auf die starke Markoffzeit $T = 0$ an)

$$= \int\int F(z, x)\, P_t(x, dz)\, \mu(dx) = \int\int |f(z) - f(x)|\, P_t(x, dz)\, \mu(dx)$$

$$= \int P_t(|f - f(x)|)(x)\, \mu(dx).$$

Daraus folgt jetzt sofort die Äquivalenz von (iii) und (iv).

Wir wollen nun die analytische Bedingung 6(iv) eingehend studieren:

Lemma 7: Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ eine submarkoffsche, meßbare Halbgruppe auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die Funktion 1 sei exzessiv. μ sei ein endliches Maß auf $(E, \mathfrak{E})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \int P_t(|f - f(x)|)(x)\, \mu(dx) = 0$ für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$.

(ii) $\mu(S(f)) = 0$ für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$,
wobei $S(f) := \{x \in E\colon f \text{ ist nicht } \mathfrak{R}\text{-stetig im Punkt } x\}$ ist.

(iii) Es existiert ein inf-stabiler, konvexer Kegel $\mathfrak{C}$ mit:
$\tilde{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{S}$,
$\int \hat{f}\, d\mu = \int f\, d\mu$ für alle $f \in \mathfrak{C}$.

(iv) $\int \widehat{\inf(f, 1)}(x)\, \mu(dx) = \int \inf(f, 1)(x)\, \mu(dx)$ für alle $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$.

Beweis: Nach Korollar I, 4.15 gilt für alle $f \in \mathfrak{S}$:

$$S(f) = \{x \in E\colon \limsup_{t \longrightarrow 0} P_t(|f - f(x)|)(x) > 0\}.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Äquivalenz von (i) und (ii).

(ii) nach (iii): Sei $\mathfrak{C} := \{f \in \mathfrak{S}\colon \mu(S(f)) = 0\}$. Offenbar ist $\mathfrak{C}$ ein inf-stabiler, konvexer Kegel. Wegen (ii) gilt: $\tilde{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{S}$. Sei $f \in \mathfrak{C}$. Nach Lemma I, 4.8 gilt: $\hat{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in (E - S(f))$. Da $\mu(S(f)) = 0$ ist, folgt hieraus: $\int \hat{f}\, d\mu = \int f\, d\mu$.

(iii) nach (iv): Sei $\mathfrak{C}$ wie in (iii). Sei $f \in \tilde{\mathfrak{E}}$. Dann ist $f, 1 \in \mathfrak{C}$.

Da $\mathfrak{C}$ inf-stabil ist, folgt: $\inf(f, 1) \in \mathfrak{C}$.

Daraus folgt wiederum: $\int \widehat{\inf(f, 1)}(x)\, \mu(dx) = \int \inf(f, 1)(x)\, \mu(dx)$.

(iv) nach (ii): Sei $f \in \mathfrak{E}$. Für alle $q > 0$ gilt:

$$\int \widehat{\inf(f, q)}\,(x)\,\mu(dx) = q \cdot \int \widehat{\inf\left(\tfrac{1}{q} \cdot f, 1\right)}\,(x)\,\mu(dx)$$

$$= q \cdot \int \inf\left(\tfrac{1}{q} \cdot f, 1\right)(x)\,\mu(dx)\ (\text{nach (iv)}) = \int \inf(f, q)\,(x)\,\mu(dx).$$

Daraus folgt:

(1) $\quad \mu\left(\{\widehat{\inf(f, q)} < \inf(f, q)\}\right) = 0$ für alle $q \geqslant 0$.

Nun können wir schließen:

$$\mu(S(f)) = \mu\Big(\bigcup_{q \in Q_+} \{\widehat{\inf(f, q)} < \inf(f, q)\}\Big)\ (\text{nach Theorem I, 4.14})$$

$$\leqslant \sum_{q \in Q_+} \mu(\{\widehat{\inf(f, q)} < \inf(f, q)\}) = 0\ (\text{nach (1)}).$$

Das folgende Korollar zeigt die Bedeutung von Theorem 6 auf:

Korollar 8: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Die σ-Algebra $\mathfrak{E}$ sei abzählbar erzeugt, und es gelte $\mathfrak{E} = \sigma(\mathfrak{S})$. E_b sei die Menge aller Verzweigungspunkte bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$.

Sei $T: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mit der Eigenschaft:

$(T + t)$ ist für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ eine starke Markoffzeit.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\quad P(\{X_T \in E_b\}) = 0$.

(ii) $\quad E(f \circ X_{T+t} / \mathfrak{M}_{T+}) = (P_t f) \circ X_T$ für alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$, $t \geqslant 0$.

Beweis: Sei $(V_p)_{p>0}$ die zu $(P_t)_{t \geq 0}$ gehörige Resolvente. μ_T sei die Verteilung von X_T. Bedingung (i) sieht dann so aus:

(i') $\quad \mu_T(E_b) = 0$.

(i) nach (ii): Nach Korollar I, 4.17 gilt:

$S(f) \subset E_b$ für alle $f \in \mathfrak{E}$.

Zusammen mit (i') folgt: $\mu_T(S(f)) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{E}$. Wegen Lemma 7(ii) $\Rightarrow$ (i) ist die Bedingung 6(iv) erfüllt. Aus Theorem 6(iv) $\Rightarrow$ (i) folgt schließlich (ii).

(ii) nach (i): Sei $\mathfrak{F}$ ein abzählbarer Erzeuger für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$. Sei $a > 0$. Nach Korollar I, 4.35 und Theorem I, 4.14(i) $\Rightarrow$ (ii) gilt: $E_b = \bigcup_{g \in \mathfrak{F}} S(V_a g)$. Insbesondere gilt: $E_b \in \mathfrak{E}$. Aus Theorem 6(i) $\Rightarrow$ (iv) und Lemma 7(i) $\Rightarrow$ (ii) folgt:

$\mu_T(S(V_a g)) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{F}$.

Jetzt können wir schließen:

$$\mu_T(E_b) = \mu_T\Big(\bigcup_{g \in \mathfrak{F}} S(V_a g)\Big) \leqslant \sum_{g \in \mathfrak{F}} \mu_T\big(S(V_a g)\big) = 0.$$

Wenden wir Korollar 8 für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ auf die konstante Markoffzeit $T = t$ an, so erhalten wir:

Korollar 9: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Die σ-Algebra $\mathfrak{E}$ sei abzählbar erzeugt, und es gelte $\mathfrak{E} = \sigma(\mathfrak{S})$. E_b sei die Menge aller Verzweigungspunkte. μ sei die Verteilung von X_0.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ist ebenfalls ein Markoff-Prozeß mit Halbgruppe $(P_p)_{t \geq 0}$.

(ii) $(\mu P_t)(E_b) = 0$ für alle $t \geqslant 0$.

Im Beweis von Korollar 8(ii) $\Rightarrow$ (i) wurde die Voraussetzung, daß $\mathfrak{E}$ abzählbar erzeugt ist, nicht voll ausgenutzt. Wie man sieht, genügt bereits die Bedingung (P 2). Die Menge E_b ist dann i. a. nicht mehr meßbar. Wir müssen deshalb Bedingung 8(i) etwas anders schreiben: $P^*(\{X_T \in E_b\}) = 0$, wobei P^* das zu P gehörige äußere Maß ist.

In analoger Weise können wir Korollar 9(ii) $\Rightarrow$ (i) verbessern. Insbesondere erhalten wir:

Korollar 10: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Ist die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ normal, und sind die Bedingungen (P 1) und (P 2) erfüllt, so ist auch $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$.

11: Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die Funktion 1 sei exzessiv. Sei $\mathfrak{S}_0 := \{f \in \mathfrak{S}: P_t \hat{f} = P_t f$ für alle $t > 0\}$.

Engelbert nennt die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ „right continous", falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(RC 1) $\mathfrak{E} = \sigma(\mathfrak{S}_0)$.

(RC 2) $\mathfrak{S}_0$ ist inf-stabil.

Offensichtlich gilt:

(a) Erfüllt $(P_t)_{t \geq 0}$ die Bedingung (RC 1), so ist auch (P 1) erfüllt.

Sei $f \in \mathfrak{S}_0$. Für alle $x \in E$ ist dann die Funktion $t \longrightarrow P_t \hat{f}(x)$ rechtsseitig stetig auf $[0, \infty[$. Daraus folgt:

(b) Die Funktion $t \longrightarrow P_t f(x)$ ist für alle $x \in E$ rechtsseitig stetig auf $]0, \infty[$ (hiervon kommt der Name „right continous").

Sei $\mathfrak{E}' := \sigma(\{P_q f: q \in Q_+\} \cup \{f\})$. Aus (b) folgt:

$\mathfrak{E}'$ ist abzählbar erzeugt, $f \in B(E, \mathfrak{E}')$ und $P_t f \in B(E, \mathfrak{E}')$ für alle $t \geqslant 0$.

Hieraus folgt mit Hilfe von (RC 1), (RC 2) und dem „monotone class theorem" (siehe I, 4.29) die Bedingung (P 2). Wir haben damit gezeigt:

(c) Erfüllt $(P_t)_{t \geq 0}$ die Bedingungen (RC 1) und (RC 2), so ist auch Bedingung (P 2) erfüllt.

Sei nun Bedingung (RC 2) erfüllt. Für alle $t > 0$, $x \in E$ erfüllt dann $\mathfrak{C} := \mathfrak{S}_0$ und $\mu := P_t(x, \ )$ die Bedingung 7(iii). Nach Lemma 7 folgt:

(1) $P_t(x, S(f)) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{E}$, $t > 0$ und $x \in E$.

Sei jetzt umgekehrt Bedingung (1) gültig. Für alle $f, g \in \mathfrak{S}_0$, $t > 0$ und $x \in E$ gilt dann:

(2) $P_t(x, S(\inf(\hat{f}, \hat{g})) = 0$,

(3) $\widehat{\inf(\hat{f}, \hat{g})}(y) = \inf(\hat{f}, \hat{g})(y)$ für alle $y \in (E - S(\inf(\hat{f}, \hat{g}))$ (nach Lemma I, 4.8),

(4) $P_t(x, \{\inf(\hat{f}, \hat{g}) < \inf(f, g)\}) = 0$ (da $f, g \in \mathfrak{S}_0$).

Für alle $f, g \in \mathfrak{S}_0$, $t > 0$ und $x \in E$ können wir jetzt schließen:

$$P_t\widehat{(\inf(f, g))}(x) \leqslant P_t(\inf(f, g))(x) = P_t(\inf(\hat{f}, \hat{g}))(x) \text{ (nach (4))}$$

$$= P_t\widehat{(\inf(\hat{f}, \hat{g}))}(x) \text{ (nach (2) und (3))} \leqslant P_t\widehat{(\inf(f, g))}(x).$$

Also ist $\mathfrak{S}_0$ inf-stabil. Wir haben damit gezeigt:

(d) Bedingung (RC 2) ist äquivalent zu:

$P_t(x, S(f)) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{E}$, $t > 0$ und $x \in E$.

Hieraus folgt ähnlich dem Beweis von Korollar 8(ii) $\Rightarrow$ (i):

(e) Ist $\mathfrak{E}$ abzählbar erzeugt, so ist (RC 2) äquivalent zu:

$P_t(x, E_b) = 0$ für alle $t > 0$ und $x \in E$.

Für Halbgruppen von Markoffschen Prozessen, die die Bedingung (RC 1) erfüllen, wurde (e) bereits von Engelbert bewiesen. (e) zeigt auch, daß die Bedingungen (RC 1) und (RC 2) erheblich stärker sind als (P 1) und (P 2). Wir geben ein Beispiel:

12: Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ die Halbgruppe der verzweigten Bewegung nach rechts (siehe I, 4.46). Sei x ein Punkt der strikt links von 0 liegt. Sei t der Zeitpunkt, zu dem die verzweigte Bewegung nach rechts im Punkt 0 ankommt, wenn sie im Punkt x gestartet ist. t ist

strikt positiv, denn x liegt strikt links von o. Wie in I, 4.46 ausgeführt wurde, ist o ein Verzweigungspunkt bezüglich $(P_t)_{t \geq 0}$. Also gilt:

$$P_t(x, E_b) = P_t(x, \{o\}) = 1.$$

Wegen 11(e) kann die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ also nicht die Bedingung (RC 2) erfüllen. Trivialerweise sind aber die Bedingungen (P 1) und (P 2) erfüllt.

13: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Wir führen einige σ-Algebren ein:

$$\mathfrak{F}_t^0 := \sigma(\{X_s : o \leqslant s \leqslant t\}) \quad (t \in \overline{\mathbb{R}}_+)$$

$$\mathfrak{F}_t := \{A \in \mathfrak{M} : \exists\, A' \in \mathfrak{F}_t^0 \; P((A - A') \cup (A' - A)) = o\} \quad (t \in \overline{\mathbb{R}}_+)$$

$$\mathfrak{F}^0 := \mathfrak{F}_\infty^0, \; \mathfrak{F} := \mathfrak{F}_\infty.$$

Offensichtlich sind $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{F}_t^0)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ und $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ebenfalls Markoff-Prozesse mit Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Das folgende Lemma von Engelbert liefert eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von $\mathfrak{F}_{t+} = \mathfrak{F}_t$:

Lemma 14: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Sei $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Gilt dann: $E(f \circ X_{s+t} / \mathfrak{M}_{t+}) = (P_s f) \circ X_t$ P-f.s.
für alle $s \geqslant o$ und alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$.

so gilt auch: $\mathfrak{F}_{t+} = \mathfrak{F}_t$.

Beweis: Trivialerweise gilt $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$. Sei o.B.d.A. $t < \infty$. Mit Hilfe vollständiger Induktion zeigen wir:

(1) $$E\left(\prod_{i=1}^{n} f_i \circ X_{s_i} / \mathfrak{M}_{t+}\right) \in B(M, \mathfrak{F}_t), \text{ wobei}$$

$$n \in \mathbb{N}, \; s_1 < \ldots\ldots < s_n < \infty, \; f \in B_+(E, \mathfrak{E}) \; (1 \leqslant i \leqslant n) \text{ ist.}$$

$n = 1$: Der Fall $s_1 \leqslant t$ ist trivial. Im Fall $t < s_1$ gilt:

$$E(f_1 \circ X_{s_1} / \mathfrak{M}_{t+}) = (P_{s_1 - t}) \circ X_t \in B(M, \mathfrak{F}_t).$$

Induktionsnahme: Die Beh. (1) sei für n richtig. Im Fall $s_1 \leqslant t$ gilt:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n+1} f_i \circ X_{s_i} / \mathfrak{M}_{t+}\right) = (f_1 \circ X_{s_1}) \cdot E\left(\prod_{i=2}^{n+1} f_i \circ X_{s_i} / \mathfrak{M}_{t+}\right) \text{ (denn es gilt:}$$

$$f_1 \circ X_{s_1} \in B(M, \mathfrak{F}_{s_1}^0) \subset B(M, \mathfrak{M}_{t+})) \in B(M, \mathfrak{F}_t) \text{ (nach Induktionsannahme).}$$

Im Fall $t < s_1$ gilt $\mathfrak{M}_{t+} \subset \mathfrak{M}_{s_n}$. Wir schließen:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n+1} f_i \circ X_{s_i} / \mathfrak{M}_{t+}\right) = E\left(E\left(\prod_{i=1}^{n+1} f_i \circ X_{s_i} / \mathfrak{M}_{s_n}\right) / \mathfrak{M}_{t+}\right)$$

$$= E\left(E\left(f_{n+1} \circ X_{s_{n+1}} / \mathfrak{M}_{s_n}\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} f_i \circ X_{s_i} / \mathfrak{M}_{i+}\right)$$

$$= E\left((f_n \cdot (P_{s_{n+1}-s_n} f_{n+1})) \circ X_{s_n} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f_i \circ X_{s_i} / \mathfrak{M}_{t+}\right) \in B(M, \mathfrak{F}_t)$$

(nach Induktionsannahme).

Wir wählen jetzt ein $h > t$ fest. Die Menge $\mathfrak{D}$ aller $A \in \mathfrak{F}_h^0$ mit $P(A/\mathfrak{M}_{t+}) \in B(M, \mathfrak{F}_t)$ ist offenbar ein Dynkin-System.

Die Mengen von der Form $\bigcap_{i=1}^{n} \{X_{s_i} \in B_i\}$ $(0 \leqslant s_i \ldots\ldots s_n \leqslant h, B_i \in \mathfrak{E})$ bilden einen $\cap$-stabilen Erzeuger der σ-Algebra $\mathfrak{F}_h^0$ und sind nach (1) in $\mathfrak{D}$ enthalten. Mit Hilfe von Ba, 2.4 folgt daraus: $\mathfrak{F}_h^0 = \mathfrak{D}$. Dies besagt aber nichts anderes als:

(2) $P(A/\mathfrak{M}_{t+}) \in B(M, \mathfrak{F}_t)$ für alle $A \in \mathfrak{F}_h^0$.

Sei $A \in \mathfrak{F}_{t+}$. Dann existiert eine Menge $A' \in \mathfrak{F}_{t+}^0 \subset \mathfrak{F}_h^0$ mit $P((A - A') \cup (A' - A)) = 0$. Also gilt: $I_A = I_{A'} = P(A'/\mathfrak{M}_{t+})$ P-f.s.. Zusammen mit (2) folgt daraus: $I_A \in B(M, \mathfrak{F}_t)$.

Das folgende Korollar zeigt unter anderem, daß unter den Zusatzbedingungen (P 1) und (P 2) auch die Umkehrung des obigen Lemmas gilt:

Korollar 15: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ erfülle die Bedingungen (P 1) und (P 2). Sei $t \geqslant 0$. μ_t sei die Verteilung von X_t. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathfrak{F}_{t+} = \mathfrak{F}_t$.

(ii) $E(f \circ X_{s+t}/\mathfrak{M}_{t+}) = (P_s f) \circ X_t$ P-f.s. für alle $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$, $s \geqslant 0$.

(iii) $\lim_{s \to 0} \int P_s(|f - f(x)|)(x)\, \mu_t(dx) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{E}$.

Ist die σ-Algebra $\mathfrak{E}$ abzählbar erzeugt, so gilt auch Äquivalenz mit:

(iv) $\mu_t(E_b) = 0$, wobei E_b die Menge der Verzweigungspunkte ist.

Beweis: Die Äquivalenz von (ii) und (iii) wurde bereits in Theorem 6 bewiesen. (ii) nach (i) wurde in Lemma 14 bewiesen.

(i) nach (iii): Man wende Theorem 6(i) $\Rightarrow$ (iv) auf den Markoff-Prozeß $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ und die konstante Markoffzeit $T = t$ an.

Die Äquivalenz von (ii) und (iv) wurde in Korollar 8 bewiesen.

16: Erfüllt ein Markoff-Prozeß $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ für alle $t \geqslant 0$ eine der Bedingungen von Korollar 15, so ist W_A für alle $A \in \mathfrak{E}$ nach Korollar 2.9 eine Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$. Ist zusätzlich die Bedingung 1.12 (iii) erfüllt, so ist W_A dann auch eine Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$, denn in diesem Fall gilt $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{M}_t$ für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Aus Korollar 15 folgt auch:

Korollar 17: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Die Bedingung 1.12(iv) sei erfüllt. Die σ-Algebra $\mathfrak{E}$ sei abzählbar erzeugt, und es gelte $\mathfrak{E} = \sigma(\mathfrak{S})$. μ_0 sei die Verteilung von X_0.

Dann ist $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{F}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+})$ genau dann ein starker Markoff-Prozeß, wenn für alle $t \geqslant 0$ gilt: $(\mu_0 P_t)(E_b) = 0$. E_b sei hierbei die Menge der Verzweigungspunkte.

Schlußbemerkung: Satz 3 wurde im wesentlichen bereits von Engelbert bewiesen. Auch Theorem 6 wurde in einer etwas anderen Form von Engelbert bewiesen, allerdings benötigte er die einschneidenden Zusatzvoraussetzungen (RC 1) und (RC 2).

Auch dieser Paragraph bestätigte die „Philosophie", daß immer dann Verzweigungspunkte auftreten, wenn „Pathologien" (im Vergleich zur Brownschen Bewegung oder allgemeiner zu Hunt-Prozessen) vorhanden sind.

II, § 4 Anwendung auf Dynkinsche Markoff-Prozesse

In diesem Paragraphen wollen wir die in den vorhergehenden Paragraphen gewonnenen Ergebnisse über Doobsche Markoff-Prozesse auf Dynkinsche Markoff-Prozesse übertragen. Wir beginnen mit der Definition Dynkinscher Markoff-Prozesse:

Definition 1: Sei $(E, \mathfrak{E})$ ein Meßraum. $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ heißt ein *(Dynkinscher) Markoff-Prozeß* mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $(M, \mathfrak{M}, P^x)$ ist für alle $x \in E$ ein Wahrscheinlichkeitsraum,

(ii) für alle $A \in \mathfrak{M}$ ist die Abbildung $E \longrightarrow \mathbf{R}_+$, $x \longrightarrow P^x(A)$ $\mathfrak{E}$ — $\mathfrak{R}_+$-meßbar,

(iii) $\mathfrak{M}_t$ ist für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ eine σ-Algebra, $\mathfrak{M}_s \subset \mathfrak{M}_t \subset \mathfrak{M}$ für alle $s, t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ mit $s \leqslant t$,

(iv) X_t ist für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ eine $\mathfrak{M}_t$ — $\mathfrak{E}$-meßbare Abbildung,

(v) die Abbildung $(\overline{\mathbf{R}}_+ \times M) \longrightarrow E$, $(t, w) \longrightarrow X_t(w)$ ist $(\overline{\mathfrak{R}}_+ \otimes \mathfrak{M})$ — $\mathfrak{E}$-meßbar,

(vi) (schwache Markoff-Eigenschaft) $E^x(f \circ X_{s+t} / \mathfrak{M}_s) = E^{X_s}(f \circ X_t)$ P^x-f.s. für alle $x \in E$, $s \in \overline{\mathbf{R}}_+$, $t \in \mathbf{R}_+$ und $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$.

Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E, \mathfrak{E})$. Wegen (ii) wird durch

$$P^\mu(A) := \int P^x(A)\, \mu(dx) \quad (A \in \mathfrak{M})$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(M, \mathfrak{M})$ definiert. (vi) läßt sich sofort verallgemeinern zu:

(vi') $E^\mu(f \circ X_{s+t} / \mathfrak{M}_s) = E^{X_s}(f \circ X_t)$ P^μ-f.s. für alle W-Maße μ auf $(M, \mathfrak{M})$, alle $s \in \overline{\mathbf{R}}_+$, $t \in \mathbf{R}_+$ und $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$.

Für eine Abbildung $H: M \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ definieren wir:

$$X_H: M \longrightarrow E, \quad w \longrightarrow X_{H(w)}(w).$$

Ist H zusätzlich $\mathfrak{M}$ — $\mathfrak{R}_+$-meßbar, so ist die Abbildung X_H nach (v) $\mathfrak{M}$ — $\mathfrak{E}$-meßbar.

Definition 2: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Dynkinscher Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$.

(a) Eine Abbildung $T: M \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ heißt eine *Markoffzeit*, wenn für alle $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ gilt: $\{T \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_t$.

Für alle Markoffzeiten T definieren wir:

$$\mathfrak{M}_T := \{A \in \mathfrak{M} : A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_t \text{ für alle } t \in \overline{\mathbf{R}}_+\}.$$

(b) Eine Abbildung $T: M \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ heißt eine *starke Markoffzeit*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) T ist eine Markoffzeit,

(ii) X_T ist $\mathfrak{M}_T$ — $\mathfrak{E}$-meßbar,

(iii) $E^x(f \circ X_{T+t}/\mathfrak{M}_T) = E^{X_T}(f \circ X_t)$ P^x-f.s.
für alle $x \in E$, $t \in \mathbf{R}_+$ und $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$.

Wir wollen nun die Verbindung zu den Doobschen Markoff-Prozessen herstellen:

Satz 3: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+})$ ein Dynkinscher Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$.

(a) Dann wird durch $P_t(x, A) := P^x(\{X_t \in A\})$ $(t \geqslant 0, x \in E, A \in \mathfrak{E})$ eine meßbare, Markoffsche Halbgruppe auf $(E, \mathfrak{E})$ definiert.

(b) Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(E, \mathfrak{E})$ ist $(M, \mathfrak{M}, P^\mu, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+})$ ein Doobscher Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$.

(c) Eine Abbildung $T: M \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ ist genau dann eine Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+})$, wenn T für alle $x \in E$ eine Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, P^x, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+})$ ist.

(d) Eine Abbildung $T: M \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ ist genau dann eine starke Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+})$, wenn T für alle $x \in E$ eine starke Markoffzeit bezüglich $(M, \mathfrak{M}, P^x, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+})$ ist.

Beweis: (a): Nach 1 (ii) ist P_t für alle $t \geqslant 0$ ein Markoffscher Kern auf $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $x \in E$, $s, t \geqslant 0$ und $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$ gilt:

$$P_s P_t f(x) = E^x((P_t f) \circ X_s) = E^x(E^{X_s}(f \circ X_t)) \text{ (nach Def. von } (P_t)_{t \geq 0})$$
$$= E^x(E^x(f \circ X_{s+t}/\mathfrak{M}_s)) \text{ (nach 1 (vi))} = E^x(f \circ X_{s+t}) = P_{s+t} f(x).$$

Also ist $(P_t)_{t \geq 0}$ eine Markoffsche Halbgruppe.

Das System $\mathfrak{D}$ aller Mengen $F \in (\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{M})$ mit der Eigenschaft:

(1) $(t, x) \longrightarrow P^x(\{w \in M : (t, w) \in F\})$ ist $(\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{E})$ — $\mathfrak{R}_+$-meßbar

ist offenbar ein Dynkinsystem. Der $\cap$-stabile Erzeuger $\{(S \times T) : S \in \mathfrak{R}_+, T \in \mathfrak{M}\}$ ist nach 1 (ii) in $\mathfrak{D}$ enthalten. Nach **Ba**, 2.4 gilt dann die Eigenschaft (1) für alle $F \in (\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{M})$. Insbesondere gilt für alle $A \in \mathfrak{E}$:

$$(t, x) \longrightarrow P_t(x, A) = P^x(\{X_t \in A\}) = P^x(\{w \in M : (t, w) \in F_A\})$$

ist $(\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{E})$—$\mathfrak{R}_+$-meßbar, wobei nach 1(v) $F_A := \{(t, w): X_t(w) \in A\} \in (\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{M})$ ist. Also ist die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ auch meßbar. (b), (c) und (d) sind trivial.

Definition 4: Die in Satz 3(a) definierte Halbgruppe heißt die Halbgruppe des Markoff-Prozesses $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$. Die zu dieser Halbgruppe gehörige Resolvente heißt die Resolvente des Markoff-Prozesses $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$.

5: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. Wir führen einige σ-Algebren ein:

$$\mathfrak{F}_t^0 := \sigma(\{X_s: 0 \leqslant s \leqslant t\}) \; (t \in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

$$\mathfrak{M}_t^\mu := \{A \in \mathfrak{M}: \exists\, A' \in \mathfrak{M}_t \; P^\mu((A - A') \cup (A' - A)) = 0\} \; (t \in \overline{\mathbb{R}}_+),$$

wobei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E, \mathfrak{E})$ ist. Analog definiert man $\mathfrak{F}_t^\mu$.

$$\mathfrak{M}_t^x := \mathfrak{M}_t^{\varepsilon_x}, \; \mathfrak{F}_t^x := \mathfrak{F}_t^{\varepsilon_x} \; (t \in \overline{\mathbb{R}}_+, x \in E).$$

$$\mathfrak{M}_t^* := \bigcap_{x \in E} \mathfrak{M}_t^x, \; \mathfrak{F}_t^* := \bigcap_{x \in E} \mathfrak{F}_t^x \; (t \in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

Definition 6: Sei $(E, \mathfrak{E})$ ein Meßraum. $M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ heißt ein *starker (Dynkinscher)* Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ist ein Dynkinscher Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$,

(ii) $\mathfrak{M}_t = \mathfrak{M}_{t+}$ für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$,

(iii) $\mathfrak{M}_t = \mathfrak{M}_t^*$ für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$,

(iv) (starke Markoff-Eigenschaft)
jede Markoffzeit ist eine starke Markoffzeit.

Man sieht leicht: Ist $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ein starker Dynkinscher Markoff-Prozeß, so ist $(M, \mathfrak{M}, P^\mu, (\mathfrak{M}_t^\mu)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ für alle Wahrscheinlichkeitsmaße μ auf $(E, \mathfrak{E})$ ein starker Doobscher Markoff-Prozeß.

7: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. Genau so wie in 2.1 definieren wir für alle $A \in \mathfrak{E}$ die *wesentliche Eintrittszeit*

$$W_A: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$w \longrightarrow \inf\{t \geqslant 0: \int_0^t I_A \circ X_s(w)\, ds > 0\}.$$

Satz 8: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. Sind dann die Bedingungen 6(ii) und 6(iii) erfüllt, so ist W_A für alle $A \in \mathfrak{E}$ eine Markoffzeit.

Beweis: Wegen 6(ii) erfüllt der Prozeß $(M, \mathfrak{M}, P^x, (\mathfrak{M}_t^x)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$ für alle $x \in E$ die Eigenschaften 1.12(ii), (iii). Aus 2.9 folgt dann: $\{W_A \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_t^x$ für alle $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $x \in E$. Daraus folgt schließlich:

$$\{W_A \leqslant t\} \in \bigcap_{x\in E} \mathfrak{M}_t^x = \mathfrak{M}_t^* = \mathfrak{M}_t \text{ (nach 6(iii)) für alle } t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

9: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x\in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. $(P_t)_{t\geq 0}$ sei die Halbgruppe dieses Prozesses. $(\varepsilon_x P_0)$ ist dann nach Def. von P_0 die Verteilung von X_0, wenn auf $(M, \mathfrak{M})$ das Wahrscheinlichkeitsmaß P^x liegt. Für jede für ein $a \geqslant 0$ a-exzessive Funktion f gilt dann:

$$f(x) = P_0 f(x) = E^x(f \circ X_0) \text{ für alle } x \in E.$$

Mit Hilfe von 9 folgt aus 2.10 und 2.11:

Hauptsatz (5. Version) **10**: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x\in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. $(V_p)_{p>0}$ sei die Resolvente dieses Markoff-Prozesses. Sei $A \in \mathfrak{E}$.

(a) Für alle $x \in E$, $a > 0$ und $g \in B_+(E, \mathfrak{E})$ gilt:

$${}^a\hat{S}^A_{V_a g}(x) = E^x\Big(\int_{W_A}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot g \circ X_t \, dt\Big).$$

(b) Für alle $x \in E$ und $g \in B_+(E, \mathfrak{E})$ gilt:

$$\hat{S}^A_{Vg}(x) = E^x\Big(\int_{W_A}^{\infty} g \circ X_t \, dt\Big).$$

Mit Hilfe von 9 folgt aus 2.12:

Hauptsatz (6. Version) **11**: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x\in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. $(V_p)_{p>0}$ sei die Resolvente dieses Markoff-Prozesses. Sei $A \in \mathfrak{E}$. W_A sei eine starke Markoffzeit.

(a) Für alle $x \in E$, $a > 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f gilt:

$${}^a\hat{S}^A_f(x) = E^x(e^{-a\cdot W_A} \cdot f \circ X_{W_A}).$$

(b) Für alle $x \in E$ und alle exzessiven Funktionen f gilt:

$$\hat{S}^A_f(x) = E^x(I_{\{W_A<\infty\}} \cdot f \circ X_{W_A}).$$

Aus der 6. Version des Hauptsatzes und Satz 8 folgt:

Hauptsatz (7. Version) **12**: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x\in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+})$ ein starker Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. $(V_p)_{p>0}$ sei die Resolvente dieses Markoff-Prozesses. Sei $A \in \mathfrak{E}$.

(a) Für alle $x \in E$, $a > 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f gilt:

$$ {}^a\hat{S}_f^A(x) = E^x(e^{-a \cdot W_A} \cdot f \circ X_{W_A}). $$

(b) Für alle $x \in E$ und alle exzessiven Funktionen f gilt:

$$ \hat{S}_f^A(x) = E^x(I_{\{W_A < \infty\}} \cdot f \circ X_{W_A}). $$

Wir wollen nun eine bereits in I, 2.19 vorweggenommene Aussage beweisen:

Korollar 13: Sei $(V_p)_{p>0}$ die Resolvente eines starken Dynkinschen Markoff-Prozesses mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. Für alle $x \in E$ und $A \in \mathfrak{E}$ existiert dann ein Maß $\mu_{A,x}$ auf $(E, \mathfrak{E})$ mit:

$$ \hat{S}_f^A(x) = \int f \, d\mu_{A,x} \text{ für alle exzessiven Funktionen f.} $$

Beweis: Man definiere: $\mu_{A,x}(B) := E^x(I_{\{W_A < \infty\}} \cdot I_B \circ X_{W_A})$ $(B \in \mathfrak{E})$. Nach 2.12(b) leistet $\mu_{A,x}$ das Gewünschte.

Mit Hilfe von 9 folgt aus Korollar 2.16:

Korollar 14: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. $(V_p)_{p>0}$ sei die Resolvente dieses Markoff-Prozesses. Für alle $x \in E$ und $A \in \mathfrak{E}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $x \in A^s$.

(ii) $P^x(\{W_A = 0\}) = 1$.

Das nächste Ergebnis überrascht auf den ersten Blick:

Korollar 15: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. $(V_p)_{p>0}$ sei die Resolvente dieses Markoff-Prozesses. Für alle $A \in \mathfrak{E}$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:

(i) $P^x(\{W_A = \infty\}) = 1$ für alle $x \in E$.

(ii) $P^x(\{W_A > 0\}) > 0$ für alle $x \in E$.

(iii) A ist vom Potential 0.

Beweis: (i) nach (ii) ist trivial.

(ii) nach (iii): Nach Korollar 14 folgt aus (ii):

A ist S-dünn in allen Punkten oder: $A^s = \varnothing$.

Zusammen mit I, 3.15 folgt: A ist vom Potential 0.

(iii) nach (i) folgt sofort aus 2.2(c).

Für die erste Eintrittszeit T_A eines Huntprozesses in eine Menge A des Zustandsraumes ($T_A(w) := \inf\{t > 0 : X_t(w) \in A\}$) gilt i.a. *nicht* die folgende, zu Korollar 15 analoge Äquivalenz:

(i) $P^x(\{T_A = \infty\}) = 1$ für alle $x \in E$.

(ii) $P^x(\{T_A > 0\}) > 0$ für alle $x \in E$.

Mengen mit der Eigenschaft (i) heißen polar, Mengen mit der Eigenschaft (ii) heißen total-dünn. Wie man weiß, stimmen in den „meisten" Fällen polare und total-dünne Mengen nicht überein.

Wir kommen jetzt wieder zu den Verzweigungspunkten. Wir beginnen mit einem Resultat über Halbgruppen.

Satz 17: Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ eine meßbare, submarkoffsche Halbgruppe auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die Funktion 1 sei exzessiv. Sei $x \in E$ mit $\{x\} \in \sigma(\check{\mathfrak{E}})$.
Ist dann x kein Verzweigungspunkt, so gilt: $P_0(x, \{x\}) = 1$.

Beweis: Sei $\mathfrak{F} := \{f \in \mathfrak{S} : \hat{f}(x) = f(x),\ P_0 f(x) = f(x)\}$. Offensichtlich gilt:

(1) $\check{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{F}$.

Sei $f, g \in \mathfrak{F}$. Dann ist auch $\inf(f, g) \in \mathfrak{S}$, und es gilt:

$$\inf(f, g)(x) = \inf(\hat{f}, \hat{g})(x) \text{ (da } f, g \in \mathfrak{F}) = \widehat{\inf(f, g)}(x)$$

$$\text{(nach I, 3.20, denn x ist kein Verzweigungspunkt)} \leqslant \widehat{\inf(f,g)}(x)$$

$$\leqslant \inf(f,g)(x). \text{ Wir schließen weiter:}$$

$$P_0(\inf(f,g))(x) \leqslant \inf(P_0 f(x), P_0 g(x)) = \inf(f(x), g(x))$$

$$(\text{da } f,g \in \mathfrak{F}) = \widehat{\inf(f,g)}(x) \text{ (wie vorhin bewiesen wurde)}$$

$$= P_0\widehat{(\inf(f,g))}(x)\ (\text{da } \widehat{\inf(f,g)} \in \check{\mathfrak{E}}) \leqslant P_0(\inf(f,g))(x).$$

Wir haben damit bewiesen: $\inf(f,g) \in \mathfrak{F}$. Also gilt:

(2) $\mathfrak{F}$ ist ein inf-stabiler, konvexer Kegel mit $1 \in \mathfrak{F}$.

Sei $\mathfrak{H} := \{f \in B_b(E, \mathfrak{E}) : P_0 f(x) = f(x)\}$. Dann gilt $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$.

Wegen (2) erfüllen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}$ die Voraussetzungen des „monotone class theorem" I, 4.29. Daraus folgt dann:

$$B_b(E, \sigma(\mathfrak{F})) \subset \mathfrak{H}.$$

Zusammen mit (1) folgt: $I_{\{x\}} \in B_b(E, \sigma(\check{\mathfrak{E}})) \subset B_b(E, \sigma(\mathfrak{F})) \subset \mathfrak{H}$. Also gilt:

$$P_0(x, \{x\}) = P_0 I_{\{x\}}(x) = I_{\{x\}}(x) = 1.$$

Korollar 18: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. Es gelte: $\mathfrak{M}_{0+} = \mathfrak{M}_0$. Sei $x \in E$ mit $\{x\} \in \sigma(\check{\mathfrak{E}})$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) x ist kein Verzweigungspunkt.

(ii) $P^x(\{X_0 = x\}) = 1$.

Beweis: (i) nach (ii) folgt aus Satz 17. (ii) nach (i) folgt aus Satz 3.3.

Das nächste Korollar folgt sofort aus Korollar 18 und zeigt, warum wir Resolventen, die keine Verzweigungspunkte besitzen, normal genannt haben.

Korollar 19: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{R}_+}, (X_t)_{t \in \overline{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. $(P_t)_{t \geq 0}$ sei die Halbgruppe dieses Markoff-Prozesses. Es gelte: $\mathfrak{M}_{0+} = \mathfrak{M}_0$. Für alle $x \in E$ gelte: $\{x\} \in \sigma(\mathfrak{E})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ ist normal.

(ii) $P^x(\{X_0 = x\}) = 1$ für alle $x \in E$.

Wie das nachfolgende Theorem zeigt, ist die Bedingung $\mathfrak{M}_{0+} = \mathfrak{M}_0$ für Dynkinsche Markoff-Prozesse eine erheblich stärkere Bedingung als für Doobsche Markoff-Prozesse. Beispielsweise folgt hieraus bereits $\mathfrak{F}^*_{t+} = \mathfrak{F}^*_t$ für alle $t \in \overline{R}_+$.

Theorem 20: Sei $(M, \mathfrak{M}, (P^x)_{x \in E}, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \overline{R}_+}, (X_t)_{t \in \overline{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$. Die Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ dieses Prozesses erfülle die Bedingungen (P 1) und (P 2). Für alle $t \in \overline{R}_+$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathfrak{F}^*_{t+} = \mathfrak{F}^*_t$.

(ii) $\mathfrak{F}^*_{s+} = \mathfrak{F}^*_s$ für alle $s \geqslant t$.

(iii) $E^x(f \circ X_{t+h} / \mathfrak{M}_{t+}) = (P_h f) \circ X_t$ P^x-f.s. für alle $x \in E$, $h \geqslant 0$ und $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$.

(iv) $E^x(f \circ X_{s+h} / \mathfrak{M}_{s+}) = (P_h f) \circ X_s$ P^x-f.s. für alle $x \in E$, $s \geqslant t$, $h \geqslant 0$ und $f \in B_+(E, \mathfrak{E})$.

(v) $\lim\limits_{h \to 0} \int P_h(|f - f(y)|)(y)\, P_t(x, dy) = 0$ für alle $x \in E$ und alle $f \in \mathfrak{E}$.

(vi) $\lim\limits_{h \to 0} \int P_h(|f - f(y)|)(y)\, P_s(x, dy) = 0$ für alle $x \in E$, $s \geqslant t$ und $f \in \mathfrak{E}$.

Ist $\mathfrak{E}$ zusätzlich abzählbar erzeugt, so gilt auch Äquivalenz mit folgenden Aussagen:

(vii) $P_t(x, E_b) = 0$ für alle $x \in E$,
E_b sei hierbei die Menge der Verzweigungspunkte.

(viii) $P_s(x, E_b) = 0$ für alle $x \in E$ und $s \geqslant t$.

Beweis: Die Äquivalenz von (iii), (v), (vii) und die Äquivalenz von (iv), (vi), (viii) folgt sofort aus Theorem 3.6 und Korollar 3.8. Man beachte, daß $P_t(x, \ )$ bzw. $P_s(x, \ )$ die Verteilung von X_t bzw. X_s ist, wenn auf $(M, \mathfrak{M})$ das Wahrscheinlichkeitsmaß P^x liegt. (vi) nach (v) ist trivial.

(v) nach (vi): Sei $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Nullfolge aus $\mathbf{R}_+$. Sei $f \in \mathfrak{E}$. Nach (v) konvergieren die Funktionen

$$g_n(x) := \int P_{h_n}(|f - f(y)|)\,(y)\ P_t(x, dy) \quad (x \in E)$$

punktweise gegen 0. Die Folge $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ist auch gleichmäßig beschränkt, denn f ist beschränkt. Mit Hilfe des Lebesgueschen Konvergenzsatzes folgt daraus für alle $x \in E$ und $s \geqslant t$:

$$0 = \lim_{n \to \infty} P_{s-t} g_n(x) = \lim_{n \to \infty} \int\int P_{h_n}(|f - f(y)|)\,(y)\ P_t(z, dy)\ P_{s-t}(x, dz)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int P_{h_n}(|f - f(y)|)\,(y)\ P_s(x, dy).$$

Da $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine beliebige Nullfolge aus $\mathbf{R}_+$ sein darf, folgt schließlich:

$$\lim_{h \to 0} \int P_h(|f - f(y)|)\,(y)\ P_s(x, dy) = 0.$$

(i) nach (iv): Für alle $x \in E$ wende man Theorem 3.6(i) $\Rightarrow$ (iv) auf den Markoff-Prozeß $(M, \mathfrak{M}, P^x, (\mathfrak{F}_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}_+})$ an.

(iv) nach (ii): Wendet man Lemma 3.14 für alle $x \in E$ auf den Markoff-Prozeß $(M, \mathfrak{M}, P^x, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}_+}, (X_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}_+})$ an, so folgt aus (iv):

(1) $\mathfrak{F}^x_{s+} = \mathfrak{F}^x_s$ für alle $x \in E$ und $s \geqslant t$. Jetzt können wir schließen:

$$\mathfrak{F}^*_{s+} = \bigcap_{u > s} \mathfrak{F}^*_u = \bigcap_{u > s} \bigcap_{x \in E} \mathfrak{F}^x_u = \bigcap_{x \in E} \bigcap_{u > s} \mathfrak{F}^x_u = \bigcap_{x \in E} \mathfrak{F}^x_{s+} = \bigcap_{x \in E} \mathfrak{F}^x_s$$

$$(\text{nach (1)}) = \mathfrak{F}^*_s.$$

(ii) nach (i) ist wiederum trivial.

Die Äquivalenz von 20(i) und 20(ii) wie auch die Äquivalenz von 20(iii) und 20(iv) überraschen auf den ersten Blick. Für Doobsche Markoff-Prozesse gelten keine analogen Äquivalenzen.

Schlußbemerkung: Im Gegensatz zur Definition in **Dy**, S. 77 oder in **BG**, I, 3.1 haben wir in unserer Definition eines Dynkinschen Markoff-Prozesses auf die Einführung von „Shift-Operatoren" verzichtet. Die Sätze 1.8 und 1.13 erlauben es in den meisten Fällen diese zu umgehen. Allerdings bereitet in diesem Rahmen die Theorie der additiven und multiplikativen Funktionale Schwierigkeiten. Der Vorteil unseres Vorgehens liegt darin, daß man die Ergebnisse über Dynkinsche Markoff-Prozesse mühelos auf Doobsche Markoff-Prozesse verallgemeinern kann. Schließlich ist es dann naheliegend, die gesamte Theorie für Doobsche Markoff-Prozesse zu entwickeln und sie dann auf Dynkinsche Markoff-Prozesse anzuwenden. Genau auf diese Weise sind wir in Teil II verfahren.

III, § 1 Resolventen auf harmonischen Räumen

Für den gesamten Paragraphen vereinbaren wir: (X, **H***) sei ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum im Sinne von Constantinescu und Cornea. Die Funktion 1 sei hyperharmonisch. X besitze eine abzählbare Basis. $\mathfrak{X}$ sei die σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von X.

Definition 1: Eine submarkoffsche Resolvente $(V_p)_{p>0}$ auf dem Meßraum $(X, \mathfrak{X})$ heißt *an den harmonischen Raum* (X, **H***) *assoziiert*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Der Potentialkern V von $(V_p)_{p>0}$ ist eigentlich,

(ii) eine positive Funktion auf X ist genau dann exzessiv bezüglich $(V_p)_{p>0}$, wenn sie hyperharmonisch ist.

Wir wollen jetzt die Existenz von an (X, **H***) assoziierten Resolventen erörtern. Aus **CC**, Proposition 10.2.2 folgt:

Satz 2: Zu jedem beschränkten, stetigen Potential q existiert genau eine Resolvente $(V_p)_{p>0}$ auf $(X, \mathfrak{X})$ mit:

(i) $V\,1 = q$,

(ii) jede exzessive Funktion ist hyperharmonisch,

(iii) jede positive, hyperharmonische Funktion auf X ist supermedian.

$(V_p)_{p>0}$ heißt die *zu q gehörige Resolvente.*

Obiger Satz läßt sich verallgemeinern: q braucht weder beschränkt noch stetig zu sein. Es genügt, daß q aus Band M ist. Constantinescu untersucht in **Co** und **Co**(2) ausführlich Resolventen (bzw. Potentialkerne), die die Eigenschaften 2(i), (ii), (iii) erfüllen (siehe auch **Ta**(3), § 4).

Lemma 3: Seien q und q′ zwei endliche, positive, hyperharmonische Funktionen auf X mit: $q' \prec c \cdot q$ für ein $c \geqslant 0$ (hierbei sei $\prec$ die spezifische Ordnung, siehe **CC**, S. 99). Für alle $A \subset X$ folgt dann aus $R_q^A = q$ auch $R_{q'}^A = q'$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine positive, hyperharmonische Funktion q″ mit: $q' + q'' = c \cdot q$. Sei $A \subset X$ mit $R_q^A = q$. Wir schließen:

$$q' = c \cdot q - q'' = c \cdot R_q^A - q'' = R_{q'+q''}^A - q'' = R_{q'}^A + R_{q''}^A - q'' \leqslant R_{q'}^A.$$

Satz 4: Sei q ein beschränktes, stetiges Potential. $(V_p)_{p>0}$ sei die zu q gehörige Resolvente. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $(V_p)_{p>0}$ ist an (X, **H***) assoziiert.

(ii) Das Potential q ist strikt.

(iii) $R_q^{(X-U)} \neq q$ für alle fein-offenen Mengen $U \neq \emptyset$.
Anders ausgedrückt: X ist der „feine Träger" von q.

(iv) Es existiert ein bezüglich $(V_p)_{p>0}$ exzessives, striktes Potential.

Beweis: Die Äquivalenz der Bedingungen (i), (ii) und (iii) folgt aus **Co** (2), Theorem 1.1 und Corollary 1.3 (oder **Ta** (3), 4.1 und 4.2).

(ii) nach (iv) ist trivial.

(iv) nach (iii): Sei p ein bezüglich $(V_p)_{p>0}$ exzessives, striktes Potential. Da p strikt ist, folgt:

(1) $R_p^{(X-U)} \neq p$ für alle fein-offenen Mengen $U \neq \emptyset$.

Da p exzessiv ist, existiert nach I.1.13 eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $B_{b,+}(X, \mathfrak{X})$ mit: $Vg_n \uparrow p$. Zusammen mit (1) folgt:

$$\sup_n R_{Vg_n}^{(X-U)} = R_p^{(X-U)} \neq p = \sup_n Vg_n$$

für alle fein-offenen Mengen $U \neq \emptyset$.

Also existiert für alle fein-offenen Mengen $U \neq \emptyset$ ein $n \in \mathbf{N}$ mit:

(2) $R_{Vg_n}^{(X-U)} \neq Vg_n$.

Da $Vg_n < \|g_n\|_\infty \cdot V1 = \|g_n\|_\infty \cdot q$ ist, folgt aus (2) mit Hilfe von Lemma 3:

$R_q^{(X-U)} \neq q$ für alle fein-offenen Mengen $U \neq \emptyset$.

Nach **CC**, Proposition 7.2.1 existieren immer beschränkte, stetige strikte Potentiale. Also folgt aus Satz 4:

Korollar 5: Es existiert eine an (X, **H***) assoziierte Resolvente.

Wir wollen jetzt die Bedingung $q' < c \cdot q$, $R_{q'}^A = q'$ in Bezug auf die zu q gehörige Resolvente untersuchen. Die gewonnenen Ergebnisse werden dann im Beweis von Theorem 2.14 eine entscheidende Rolle spielen. Theorem 2.14 wiederum bildet die Grundlage für § 3. Zunächst benötigen wir jedoch zwei Lemmas:

Lemma 6: Sei q ein beschränktes, stetiges Potential. Sei $(V_p)_{p>0}$ die zu q gehörige Resolvente. q' sei ein weiteres Potential mit $q' < c \cdot q$ für ein $c \geqslant 0$. Dann existiert ein $g \in B_{b,+}(X, \mathfrak{X})$ mit $Vg = q'$. Umgekehrt gilt offenbar für alle $h \in B_{b,+}(X, \mathfrak{X})$:

$$Vh < \|h\|_\infty \cdot q.$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus **CC**, Exercise 10.2.1 oder **CL**, 3.2.4.

Lemma 7: Sei p ein stetiges Potential mit der Eigenschaft: Für alle $x \in X$ existiert eine fein-offene Menge U, $x \in U$ mit

$$R_p^{(X-U)} = p.$$

Anders ausgedrückt: Der „feine Träger" von p ist leer. Dann gilt: $p = o$.

Beweis: Sei $\tilde{\mathfrak{S}} := \{(q - a \cdot p)$: q stetiges Potential, $a \in \mathbf{R}_+\}$. $\tilde{\mathfrak{S}}$ ist ein verschränkt punktetrennender, adaptierter, konvexer Kegel von stetigen Funktionen auf dem LKAB X. Wir wollen zeigen, daß der Choquet-Rand $\tilde{\mathfrak{S}}$ leer ist. Wir müssen also für alle $x \in X$ ein Maß μ auf $(X, \mathfrak{X})$ finden mit:

(1) $\quad \mu \neq \varepsilon_x$, $\int f \, d\mu \leqslant f(x)$ für alle $f \in \tilde{\mathfrak{S}}$.

Sei $x \in X$. Nach Voraussetzung existiert eine fein-offene Menge U mit $x \in U$ und $R_p^{(X-U)} = p$. Für alle $f = (q - a \cdot p) \in \tilde{\mathfrak{S}}$ gilt dann:

$$\int f \, d\varepsilon_x^{(X-U)} = \hat{R}_q^{(X-U)}(x) - a \cdot \hat{R}_p^{(X-U)}(x) \leqslant q(x) - a \cdot p(x) = f(x).$$

Da x nicht im feinen Abschluß von $(X - U)$ enthalten ist, gilt auch: $\varepsilon_x^{(X-U)} \neq \varepsilon_x$. Also erfüllt das Maß $\varepsilon_x^{(X-U)}$ die in (1) gewünschten Bedingungen. Der Choquet-Rand von $\mathfrak{S}$ ist also leer. Aus dem Minimumprinzip folgt dann: $f \geqslant o$ für alle $f \in \tilde{\mathfrak{S}}$. Insbesondere gilt: $-p = p - 2 \cdot p \geqslant o$. Daraus folgt schließlich: $o \geqslant p \geqslant o$.

Satz 8: Sei q ein beschränktes, stetiges Potential. Sei $(V_p)_{p>0}$ die zu q gehörige Resolvente. Sei $f \in B_{b,+}(X, \mathfrak{X})$ und $A \subset X$ mit $R_{Vf}^A = Vf$. Dann ist die Menge $(\{f > o\} - b(A))$ vom Potential o. Insbesondere gilt: $V(I_{b(A)} \cdot f) = Vf$.

Beweis: Da $Vf < \|f\|_\infty \cdot q$ ist, folgt:

Vf ist ein beschränktes, stetiges Potential.

Nach **BH**, II, 2.5 folgt aus $R_{Vf}^A = Vf$: $R_{Vf}^{\beta(A)} = Vf$, wobei $\beta(A)$ die essentielle Basis von A ist (siehe **BH**, S. 94). Da $\beta(A) \subset b(A)$ ist, folgt:

(1) $\quad R_{Vf}^{b(A)} = Vf.$

Annahme: $(\{f > o\} - b(A))$ ist nicht vom Potential o. Dann existiert ein $x_0 \in X$ mit $V(x_0, (\{f > o\} - b(A))) > o$. Wegen der Regularität von innen des Maßes $V(x_0, \ )$ existiert eine kompakte Menge $K \subset (\{f > o\} - b(A))$ mit $V(x_0, K) > o$. Also gilt:

(2) $\quad V(I_K \cdot f)(x_0) > o.$

Wir schließen: $V(I_K \cdot f) = \hat{S}_{V(I_K \cdot f)}^K$ (nach Lemma I, 5.1) $\leqslant S_{V(I_K \cdot f)}^K \leqslant R_{V(I_K \cdot f)}^K$ (nach 2 (iii)) $\leqslant V(I_K \cdot f)$. Wir haben gezeigt:

(3) $\quad R_{V(I_K \cdot f)}^K = V(I_K \cdot f).$

Aus $V(I_K \cdot f) < Vf$, $R_{Vf}^{b(A)} = Vf$ folgt nach Lemma 3:

(4) $\quad R_{V(I_K \cdot f)}^{b(A)} = V(I_K \cdot f).$

Die Mengen $U_1 := (X - K)$, $U_2 := (X - b(A))$ sind fein-offen, und es gilt $U_1 \cup U_2 = X$. Da Vf stetig und $V(I_K \cdot f) \prec Vf$ ist, ist $V(I_K \cdot f)$ ein stetiges Potential. Wegen (3) und (4) gilt:

$$R^{(X-U_1)}_{V(I_K \cdot f)} = R^{K}_{V(I_K \cdot f)} = V(I_K \cdot f) = R^{b(A)}_{V(I_K \cdot f)} = R^{(X-U_2)}_{V(I_K \cdot f)}.$$

Also erfüllt das Potential $V(I_K \cdot f)$ die Voraussetzungen von Lemma 7. Daraus folgt dann: $V(I_K \cdot f) = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu (2). Also ist obige Annahme falsch.

Aus Satz 7 folgt sofort:

Korollar 9: Sei q ein beschränktes, stetiges Potential. $(V_p)_{p>0}$ sei die zu q gehörige Resolvente. Sei $A \subset X$ mit $R^A_q = q$. Dann gilt: $V(I_{(X-b(A))}) = 0$.

In Satz 7 und Korollar 8 ist die Operation R^A_p im Sinne der Theorie der harmonischen Räume zu verstehen und *nicht* im Sinne von I, 2.1.

III, § 2 Starke Balayage auf harmonischen Räumen

Wir vereinbaren für den gesamten Paragraphen: $(X, \mathbf{H}^*)$ sei ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum. Die Funktion 1 sei hyperharmonisch. X besitze eine abzählbare Basis. $\mathfrak{X}$ sei σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von X. $(V_p)_{p>0}$ sei eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente. Wir können dann alle Begriffe von Teil I verwenden. Sie beziehen sich immer auf die fest vorgegebene Resolvente $(V_p)_{p>0}$. Es kann nämlich durchaus passieren, daß, wenn man $\hat{S}_f^A$ bezüglich zweier verschiedener Resolventen definiert, auch zwei verschiedene Ergebnisse herauskommen.

Die Operation R_f^A kann zum einen im Sinne der Theorie der harmonischen Räume und zum anderen im Sinne von I, 2.1 verstanden werden. Wegen 1.2 (iii) ergibt diese Operation in beiden Fällen dasselbe Ergebnis. Es können also keine Verwechselungen auftreten. Die positiven, hyperharmonischen Funktionen sind inf-stabil. Mit Hilfe von Korollar I, 3.21 (vi) $\Rightarrow$ (i) folgt daraus:

Satz 1: Die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ist normal.

Nach I, 1.17 besitzt die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ein Referenzmaß. Mit Hilfe von Korollar I, 2.12 folgt daraus:

Satz 2: Jede Teilmenge von X ist in $\mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$ enthalten.

Aus Satz I, 2.8 folgt sofort:

Satz 3: $\hat{S}_f^A \leqslant \hat{R}_f^A$ für alle $A \subset X$ und alle positiven, hyperharmonischen Funktionen f. Insbesondere gilt: $A^s \subset b(A)$.

Im allgemeinen gilt *nicht*: $\hat{S}_f^A = \hat{R}_f^A$. Wir bringen hierfür das folgende Beispiel:

4: Sei $X := \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\| < 2\}$.
$\mathbf{H}^*$ sei die Garbe der im klassischen Sinne hyperharmonischen Funktionen. $(X, \mathbf{H}^*)$ ist dann ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum. $(V_p)_{p>0}$ sei die Resolvente der Brownschen Bewegung auf $(X, \mathfrak{X})$. Sei $A := \{x \in X : \|x\| \geqslant 1\} \cup \{(t, 0) : t \geqslant 0\}$.
$(X - A)$ ist eine einfach zusammenhängende, offene Teilmenge des $\mathbf{R}^2$. Jede einfach zusammenhängende, offene Teilmenge des $\mathbf{R}^2$ ist regulär. Also gilt: $b(A) = A$.
Die Menge $\{(t, 0) : 0 \leqslant t < 1\}$ ist eine λ^2-Nullmenge und damit vom Potential 0. Also gilt:

$$A^s = (\{x \in X : \|x\| \geqslant 1\})^s \subset b(\{x \in X : \|x\| \geqslant 1\}) = \{x \in X : \|x\| \geqslant 1\}.$$

Wir haben damit gezeigt:

$$\{(t, 0) : 0 \leqslant t < 1\} \subset (b(A) - A^s).$$

Wegen $b(A) \neq A^s$ existiert eine positive, hyperharmonische Funktion f und ein $x \in (b(A) - A^s)$ mit: $\hat{S}_f^A(x) < f(x) = \hat{R}_f^A(x)$.

Es existieren sogar wesentlich einfachere Beispiele: Man wähle für A eine Menge vom Potential 0, die nicht polar ist. Dann gilt: $\hat{S}_1^A = 0$, $\hat{R}_1^A \neq 0$. In **Kac**(2), S. 33 wird ein besonders reguläres Beispiel konstruiert.

Wir kehren zur allgemeinen Theorie zurück. Aus Satz 2 und Theorem I, 3.13 folgt sofort:

Satz 5: Für alle $A \subset X$ und alle positiven, hyperharmonischen Funktionen f gilt:

$$\hat{S}_f^A = \hat{S}_f^{A^s} = \hat{S}_f^{(A \cap A^s)} = R_f^{A^s} = R_f^{(A \cap A^s)} = \hat{R}_f^{A^s} = \hat{R}_f^{(A \cap A^s)}.$$

Aus Satz 5 folgt unmittelbar:

Korollar 6: Für alle $A \subset X$ gilt: $A^s = b(A^s) = b(A \cap A^s)$.

Aus Korollar 6 und **CC**, Corollary 7.2.1 folgt:

Korollar 7: Für alle $A \subset X$ ist A^s eine G_δ-Menge.

Aus **Co**, Theorem 4.2 folgt:

Satz 8: Jede semipolare Menge A ist vom Potential 0. Insbesondere gilt: $A^s = \emptyset$.

Satz 9: Für alle $A \subset X$ und $x \in X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist S-dünn im Punkt x.

(ii) Es existiert eine Umgebung U von x derart, daß $(A \cap U)$ S-dünn im Punkt x ist.

(iii) Es existiert eine feine Umgebung U von x derart, daß $(A \cap U)$ S-dünn im Punkt x ist.

(iv) Für jede stetige, hyperharmonische Funktion f auf X mit $f(x) > 0$ existiert eine offene Umgebung U von x derart, daß $\hat{S}_f^{(A \cap U)}(x) < f(x)$ ist.

(v) Es existiert eine Umgebung U von x mit $\hat{S}_1^{(A \cap U)}(x) < 1$.

Beweis: (i) nach (ii) nach (iii) ist trivial.

(iii) nach (i): Sei U eine feine Umgebung von x mit:

(1) $(A \cap U)$ ist S-dünn im Punkt x.

Trivialerweise gilt: $(A — U)$ ist dünn im Punkt x. Mit Hilfe von Satz 3 folgt daraus:

(2) $(A -\!\!- U)$ ist S-dünn im Punkt x.

Da x kein Verzweigungspunkt ist (nach Satz 1), folgt aus (1), (2):

$A = (A - U) \cup (A \cap U)$ ist S-dünn im Punkt x.

(i) nach (iv): Sei f eine stetige, hyperharmonische Funktion mit $f(x) > 0$. Nach Korollar 6 ist A^s dünn in x, denn A ist S-dünn in x. Nach CC, Proposition 6.3.2 existiert dann eine offene Umgebung U von x mit $\hat{R}_f^{(A^s \cap U)}(x) < f(x)$.

Da $(A - A^s)$ vom Potential 0 ist (siehe I, 3.11), ist auch die Menge $(A \cap U) - (A^s \cap U)$ vom Potential 0. Nach I, 2.3(a) folgt dann:

$$\hat{S}_f^{(A \cap U)}(x) \leqslant \hat{S}_f^{(A^s \cap U)}(x) \leqslant \hat{R}_f^{(A^s \cap U)}(x) < f(x).$$

(iv) nach (v) nach (ii) ist trivial.

10: Nach I, 1.17 besitzt die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ ein Referenzmaß μ. Wir halten dieses fest und definieren für alle $A \subset X$, $x \in X$ und alle Funktionen f auf X:

$$\mu - \inf_{y \in A} f(y) := \sup_{\substack{N \in \mathfrak{X} \\ \mu(N) = 0}} \inf \{f(y) : y \in (A - N)\}$$

(wie immer sei $\inf \emptyset = +\infty$),

$$\mu - \liminf_{A \ni y \to x} f(y) := \sup_{\substack{U \text{ offen} \\ x \in U}} \mu - \inf_{y \in (A \cap U)} f(y).$$

Satz 11: Für alle $A \subset X$ und $x \in X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist S-dünn im Punkt x.

(ii) Es existiert eine positive, hyperharmonische Funktion f mit:
$\mu - \liminf_{A \ni y \to x} f(y) > f(x)$.

Beweis: (i) nach (ii): Da A S-dünn im Punkt x ist, existiert eine positive, hyperharmonische Funktion f mit $\hat{S}_f^A(x) < f(x)$. Da $(A \cap \{\hat{S}_f^A \neq f\}) \subset (A - A^s)$ eine μ-Nullmenge ist, folgt:

(1) $$\mu - \liminf_{A \ni y \to x} \hat{S}_f^A(y) = \mu - \liminf_{A \ni y \to x} f(y).$$

Für jede positive, hyperharmonische Funktion g auf X gilt:

$$\mu - \liminf_{A \ni y \to x} g(y) \geqslant \mu - \liminf_{X \ni y \to x} g(y) \geqslant \liminf_{y \to x} g(y) = g(x).$$

Zusammen mit (1) folgt daraus:

$$\mu - \liminf_{A \ni y \to x} \hat{S}_f^A(y) = \mu - \liminf_{A \ni y \to x} f(y) \geqslant f(x) > \hat{S}_f^A(x).$$

Die Funktion $\hat{S}_f^A$ leistet also das in (ii) Gewünschte.

(ii) nach (i): Sei f eine positive, hyperharmonische Funktion auf X mit:

$$\mu - \liminf_{A \ni y \to x} f(y) > f(x).$$

Dann existiert eine Umgebung U von x und ein $q > 0$ mit:

(2) $\mu - \inf_{y \in (A \cap U)} f(y) \geqslant q > f(x)$.

Daraus folgt: $I_{(A \cap U)} \leqslant \frac{1}{q} \cdot f$ μ — f.ü. $(= (V_p)_{p>0}$ — f.ü.).

Nach Def. von $\hat{S}_1^{(A \cap U)}$ folgt dann: $\hat{S}_1^{(A \cap U)} \leqslant \frac{1}{q} \cdot f$. Zusammen mit (2) folgt daraus:

$$\hat{S}_1^{(A \cap U)}(x) \leqslant \frac{1}{q} \cdot f(x) < 1.$$

(i) folgt nun aus Satz 9 (v) $\Rightarrow$ (i).

In der klassischen Theorie benützt man Bedingung 11 (ii) zur Definition der S-Dünnheit (siehe z. B. Cie § 8.2). μ ist dann natürlich das Lebesguesche Maß.

Wir kommen nun zum Approximationssatz. Unmittelbar aus den Korollaren I, 5.7 (a) und I, 5.10 (a) folgt:

Satz 12: Für alle $A \in \mathfrak{X}$ und alle positiven, hyperharmonischen Funktionen f gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_f^A &= \sup \{ Vh: h \in B_{b,+}(X, \mathfrak{X}), \{h > 0\} \subset A, Vh \leqslant f \} \\
&= \sup \left\{ Vh: \begin{array}{l} h \in B_{b,+}(X, \mathfrak{X}), Vh \leqslant f, \\ \exists\ F \subset A \text{ fein-abgeschlossen } \{h > 0\} \subset F \end{array} \right\} \\
&= \sup \left\{ Vh: \begin{array}{l} h \in B_{b,+}(X, \mathfrak{X}), Vh \leqslant f, \\ \exists\ K \subset A \text{ kompakt } \{h > 0\} \subset K \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber bringen wir noch die folgende Version des Approximationssatzes (eine ähnliche, aber etwas schwächere Aussage für die Brownsche Bewegung kann man in Cie (2), Theorem 6.1 finden):

Satz 13: Sei $A \in \mathfrak{X}$ derart, daß VI_A stetig und beschränkt ist. Dann existiert für jede positive, hyperharmonische Funktion f eine Folge $(g_n)_{n \in N}$ von stetigen, beschränkten Funktionen auf X mit: $V(I_A \cdot g_n) \uparrow \hat{S}_f^A$.

Beweis: Sei $C := C_b(X)$. Für alle $g \in C_{b,+}(X)$ gilt: $V(I_A \cdot g) < \|g\|_\infty \cdot VI_A$. Da VI_A stetig und beschränkt ist, folgt daraus:

(1) $V(I_A \cdot g) \in C$ für alle $g \in C$.

Nach CC, Corollary 2.3.1 existiert eine Folge $(f_n)_{n \in N}$ von positiven, hyperharmonischen Funktionen mit:

(2) $f_n \uparrow f$,

(3) $f_n \in C$ für alle $n \in N$.

Für alle $n \in N$ sei $h_n := I_A$. Wegen (1), (2) und (3) sind die Voraussetzungen (V 1), (V 2), (V 3) und (V 4) von Korollar I, 5.3 erfüllt. Danach existiert eine Folge $(g_n)_{n \in N}$ von positiven Funktionen aus $C = C_b(X)$ mit: $V(I_A \cdot g_n) = V(h_n \cdot g_n) \uparrow \hat{S}_f^A$.

Wir kommen nun zu einer Beschreibung der starken Gefegten, die auf Begriffe aus der Theorie der Resolventen verzichtet:

Theorem 14: Sei $q: = V\,1$ ein stetiges, beschränktes Potential (nach 1.3 ist das Potential q auch strikt). Dann gilt für alle $A \in \mathfrak{X}$ und alle positiven, hyperharmonischen Funktionen f auf X:

$$\hat{S}_f^A = \sup \left\{ q' : \begin{array}{l} q' \text{ ist Potential, } q' < c \cdot q \text{ für ein } c \geqslant 0, \\ q' \leqslant f, \exists\ F \subset A \text{ fein-abgeschlossen } R_{q'}^F = q' \end{array} \right\}$$

$$= \sup \left\{ q' : \begin{array}{l} q' \text{ ist Potential, } q' < c \cdot q \text{ für ein } c \geqslant 0, \\ q' \leqslant f, \exists\ K \subset A \text{ kompakt } R_{q'}^K = q' \end{array} \right\}.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst für alle Potentiale q' und alle fein-abgeschlossenen Mengen F die Äquivalenz folgender Bedingungen:

(α) $\quad q' < c \cdot q$ für ein $c \geqslant 0$, $R_{q'}^F = q'$.

(β) $\quad \exists\ h \in B_{b,+}(X, \mathfrak{X})$ $Vh = q'$, $\{h > 0\} \subset F$.

(β) nach (α): Offensichtlich gilt: $q' = Vh < \|h\|_\infty \cdot q$.

Weiter gilt: $q' = Vh = \hat{S}_{Vh}^F$ (nach I, 5.1) $= \hat{S}_{q'}^F \leqslant R_{q'}^F \leqslant q'$.

(α) nach (β): Nach 1.6 existiert $h' \in B_{b,+}(X, \mathfrak{X})$ mit: $Vh' = q'$.

Aus $R_{q'}^F = q'$ folgt nach Satz 1.8: $V(I_{b(F)} \cdot h') = Vh' = q'$.

Für die Funktion $h: = I_{b(F)} \cdot h'$ gilt dann:

$$Vh = q',\ \{h > 0\} \subset b(F) \subset F \text{ (da F fein-abgeschlossen).}$$

Der Beweis von Theorem 14 folgt jetzt unmittelbar aus der Äquivalenz von (α) und (β) und aus Satz 12.

In Theorem 14 kann die Voraussetzung, daß die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ an (X, **H***) assoziiert ist, abgeschwächt werden: Es genügt, daß q ein beschränktes, stetiges Potential ist, und daß $(V_p)_{p>0}$ die zu q gehörige Resolvente ist.

Man könnte in Analogie zu Satz 12 folgendes Ergebnis vermuten:

(a) $$\hat{S}_f^A = \sup \left\{ q' : \begin{array}{l} q' \text{ ist ein Potential, } q' < c \cdot q \text{ für ein } c \geqslant 0 \\ q' \leqslant f,\ R_{q'}^A = q' \end{array} \right\}.$$

Diese Vermutung ist *falsch*. Man sieht leicht, daß der rechte Ausdruck in (a) $= \hat{S}_f^{A'}$ ist, wobei A' der feine Abschluß von A ist.

Diese Bemerkung reicht aus, um selbst für die Laplace-Gleichung Gegenbeispiele zu (a) zu finden (es existieren Lebesguesche Nullmengen, deren feiner Abschluß der Gesamtraum ist).

Schlußbemerkung: Die Ergebnisse 3 bis 11 sind für den klassischen Fall im wesentlichen in **Cie**, § 8.2 zu finden. Die Verwendung der Resultate von **CC** macht unsere Beweise besonders kurz.

III, § 3 Beziehungen zwischen starker Balayage und anderen Balayage-Operationen

Wir vereinbaren für den gesamten Paragraphen:

1: $(X, \mathbf{H}^*)$ sei ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum. Die Funktion 1 sei hyperharmonisch. X besitze eine abzählbare Basis. Den konvexen Kegel aller positiven, hyperharmonischen Funktionen auf X bezeichnen wir mit $\mathbf{H}^*_{X,+}$. $\mathfrak{X}$ sei die σ-Algebra der universell-meßbaren Mengen von X.

Für alle $A \subset X$ definieren wir:

$$A^i := b(\bigcup \{F \subset A : b(F) = F\}),\ A^0 := A - (X - A)^i,\ \beta(A) := (A \cup b(A))^i.$$

A^i heißt die *innere Basis*, A^0 der *essentielle Kern* und $\beta(A)$ die *essentielle Basis* von A. $\beta(A)$ wurde bereits in **BH**, S. 94 definiert. Man sieht leicht ein, daß beide Definitionen übereinstimmen. Wir arbeiten in diesem Paragraphen *nicht* mit einer festen Resolvente. Um Irrtümer zu vermeiden, bezeichnen wir die starke Gefegte einer Funktion $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ über einer Menge $A \subset X$ bezüglich einer an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierten Resolvente $(V_p)_{p>0}$ mit

$$\hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0}).$$

Die Menge aller Punkte, in denen die Menge A nicht S-dünn bezüglich $(V_p)_{p>0}$ ist, bezeichnen wir mit $b(A, (V_p)_{p>0})$.

Ist $q := V1$ ein beschränktes, stetiges Potential (das dann automatisch auch strikt ist), so benützen wir auch die Bezeichnungen

$$\hat{S}(f, A, q) := \hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0}),\ b(A, q) := b(A, (V_p)_{p>0}).$$

Theorem 2.14 liefert dann eine Beschreibung von $\hat{S}(f, A, q)$, die nur von f, A und q abhängt.

Unser Hauptziel ist es, das folgende Theorem zu beweisen, dessen Bedeutung man am besten an Hand der nachfolgenden Sätze einsieht:

Theorem 2: Sei $A \in \mathfrak{X}$.

(a) Für jede an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente $(V_p)_{p>0}$ gilt:

(i) $(A \cap b(A, (V_p)_{p>0}))^i = b(A, (V_p)_{p>0})$,

(ii) $A^0 \subset b(A^0) \subset b(A, (V_p)_{p>0}) \subset A^i$.

(b) Sei umgekehrt $B \subset X$ eine Menge mit den Eigenschaften:

(i) $(A \cap B)^i = B$,

(ii) $A^0 \subset B$.

Dann existiert ein beschränktes, stetiges, striktes Potential q mit: $b(A, q) = B$.

Wir teilen den Beweis von Theorem 2 in mehrere Sätze und Lemmas auf. Zunächst bestimmen wir die größte Menge $B \subset X$ mit $b(A,q) = B$ für ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q. Es wird sich zeigen (Satz 13), daß gerade $B := A^i$ diese Menge ist. Für $B := A^i$ können wir die Voraussetzungen von Theorem 2(b) folgendermaßen verifizieren:

Wegen Lemma 3(c) gilt $(A \cap B)^i = (A \cap A^i)^i = A^i = B$,
wegen Theorem 2(a) gilt $A^0 \subset A^i = B$.

Als erstes beweisen wir einige Eigenschaften der Operation $A \to A^i$:

Lemma 3: Für alle $A \subset X$ gelten folgende Aussagen:

(a) $b(A^i) = A^i$, $b(\beta(A)) = \beta(A)$.

(b) $(A^i)^i = A^i$, $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

(c) $(A - A^i)^i = \emptyset$, $(A \cap A^i)^i = A^i$.

(d) $A^1 \subset \beta(A) \subset b(A)$.

(e) $\beta(A) = \beta(b(A)) = (b(A))^i$.

(f) $A^i = b(\bigcup \{\beta(F): F \subset A \text{ fein-abgeschlossen}\})$.

Beweis: (a): Für alle $C \subset X$ gilt: $b(b(C)) \subset b(C)$.
Insbesondere gilt: $b(A^i) \subset A^i$.
Für alle $F \subset A$ mit $b(F) = F$ gilt: $b(A^i) \supset b(F) = F$.
Daraus folgt: $\bigcup \{F \subset A: b(F) = F\} \subset b(A^i) \subset A^i$.
Hieraus folgt wiederum: $A^i = b(\bigcup \{F \subset A: b(F) = F\}) \subset b(A^i)$.
Jetzt folgt auch: $b(\beta(A)) = b((A \cup b(A))^i) = (A \cup b(A))^i = \beta(A)$.

(b) folgt unmittelbar aus (a).

(c): Sei $F \subset (A - A^i)$ mit $b(F) = F$. Dann folgt $F \subset A^i$ und somit $F = \emptyset$.

Daraus folgt nun: $(A - A^i)^i = \emptyset$.

Sei $F \subset A$ mit $b(F) = F$. Dann gilt $F \subset (A \cap A^i)$. Daraus folgt schließlich:

$$A^i \subset (A \cap A^i)^i \subset A^i.$$

(e): Trivialerweise gilt: $\beta(A) \supset (b(A))^i = \beta(b(A))$.

Für alle $F \subset (A \cup b(A))$ mit $b(F) = F$ gilt: $F \subset b(A \cup b(A)) = b(A)$.

Daraus folgt:

$$\bigcup \{F \subset (A \cup b(A)): b(F) = F\} = \bigcup \{F \subset b(A): b(F) = F\} \subset b(A).$$

Schließlich folgt:

(1) $\beta(A) = (A \cup b(A))^i = (b(A))^i \subset b(b(A)) \subset b(A)$.

(d): Trivialerweise gilt: $A^i \subset (A \cup b(A))^i = \beta(A)$.

Nach (1) gilt: $\beta(A) \subset b(A)$.

(f): Für alle $F \subset A$ fein-abgeschlossen ($\Leftrightarrow b(F) \subset F$) gilt:

$$b(\beta(F)) = \beta(F) \text{ (nach (a))} \subset b(F) \text{ (nach (d))} \subset F.$$

Daraus folgt:

(2) $$\{\beta(F): b(F) \subset F \subset A\} \subset \{F \subset A: b(F) = F\}.$$

Für alle $F \subset A$ mit $b(F) = F$ gilt: $\beta(F) = F^i = F$.

Daraus folgt:

$$\{F \subset A: b(F) = F\} = \{\beta(F): b(F) = F \subset A\} \subset \{\beta(F): b(F) \subset F \subset A\}.$$

Zusammen mit (1) folgt:

$$\{F \subset A: b(F) = F\} = \{\beta(F): b(F) \subset F \subset A\}.$$

Schließlich folgt:

$$A^i = b(\bigcup \{F \subset A: b(F) = F\}) = b(\bigcup \{\beta(F): b(F) \subset F \subset A\}).$$

Aus Lemma 3(a) und **CC**, Corollary 7.2.1 folgt:

Korollar 4: Für alle $A \subset X$ sind A^i und $\beta(A)$ G_δ-Mengen.

Insbesondere gilt: $A^i \in \mathfrak{X}$, $\beta(A) \in \mathfrak{X}$.

Lemma 5: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente. Dann gilt für alle $A \subset X$:

$$b(A, (V_p)_{p>0}) = b(b(A, (V_p)_{p>0})) = \beta(b(A, (V_p)_{p>0}))$$
$$= (b(A, (V_p)_{p>0}))^i \subset \beta(A) \subset b(A).$$

Beweis: Nach Satz 2.3 und Korollar 2.6 gilt:

(1) $$b(A, (V_p)_{p>0}) \subset b(A),$$

(2) $$b(b(A, (V_p)_{p>0})) = b(A, (V_p)_{p>0}).$$

Aus (1) und (2) folgt:

(3) $$b(A, (V_p)_{p>0}) \subset \beta(A) \subset b(A) \text{ (nach Lemma 3(d))}.$$

Aus (2) und Lemma 3(e) folgt:

(4) $$b(A, (V_p)_{p>0}) = (b(A, (V_p)_{p>0}))^i = \beta(b(A, (V_p)_{p>0})).$$

Die Behauptung ist in (2), (3) und (4) enthalten.

Lemma 6: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente. Dann gilt für alle $A \in \mathfrak{X}$:

$$b(A, (V_p)_{p>0}) = b(\bigcup \{b(K, (V_p)_{p>0}): K \subset A \text{ kompakt}\}).$$

Beweis: Wir schließen:

$$b(A, (V_p)_{p>0}) = b\left(\bigcup \{b(K, (V_p)_{p>0}): K \subset A \text{ kompakt}\}, (V_p)_{p>0}\right)$$
$$\text{(nach I, 5.12)} \subset b\left(\bigcup \{b(K, (V_p)_{p>0}): K \subset A \text{ kompakt}\}\right)$$
$$\text{(nach Lemma 5)} \subset b\left(b(A, (V_p)_{p>0})\right) = b(A, (V_p)_{p>0}) \text{ (nach 5)}.$$

Lemma 7: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente. Dann gilt für alle $A \in \mathfrak{X}$:

$$(A \cap b(A, (V_p)_{p>0}))^i = b(A, (V_p)_{p>0}) \subset A^i.$$

Beweis: Wir schließen:

$$b(A, (V_p)_{p>0}) = b\left(\bigcup \{b(K, (V_p)_{p>0}): K \subset A \text{ kompakt}\}\right) \text{ (nach 6)}$$
$$\subset b\left(\bigcup \{\beta(K): K \subset A \text{ kompakt}\}\right) \text{ (nach 5)} \subset A^i$$
(denn jede kompakte Menge ist fein-abgeschlossen, man beachte auch 3 (f)).

Wir haben gezeigt:

(1) $$b(A, (V_p)_{p>0}) \subset A^i.$$

Wir schließen weiter:

$$b(A, (V_p)_{p>0}) = b(A \cap b(A, (V_p)_{p>0}), (V_p)_{p>0}) \text{ (nach I, 3.14)}$$
$$\subset (A \cap b(A, (V_p)_{p>0}))^i \text{ (nach (1))} \subset (b(A, (V_p)_{p>0}))^i$$
$$= b(A, (V_p)_{p>0}) \text{ (nach Lemma 5)}.$$

Zusammen mit (1) folgt jetzt die Behauptung.

Lemma 8: Für alle $A \subset X$ und alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ gilt:

$$R_f^{A^i} = \sup \{R_f^{\beta(F)}: F \subset A \text{ fein-abgeschlossen}\}.$$

Beweis: Für alle $F \subset X$ gilt $R_f^{\beta(F)} = \hat{R}_f^{\beta(F)}$, denn es gilt $b(\beta(F)) = \beta(F)$ nach Lemma 3(a). Deswegen ist die Funktion $g := \sup \{R_f^{\beta(F)}: F \subset A \text{ fein-abgeschlossen}\}$ hyperharmonisch, und es gilt: $I_{A'} \cdot f \leqslant g$, wobei $A' := \bigcup \{\beta(F): F \subset A \text{ fein-abgeschlossen}\}$ ist.

Daraus folgt: $g \geqslant R_f^{A'} \geqslant I_{b(A')} \cdot f = I_{A^i} \cdot f$. Also folgt:

$$R_f^{A^i} \leqslant g = \sup \{R_f^{\beta(F)}: F \subset A \text{ fein-abgeschlossen}\}.$$

Die umgekehrte Ungleichung ist trivial.

Der folgende, sehr wichtige Satz wird in **BH**, II, 2.6 bewiesen:

Satz 9: Für alle $F \subset X$ und alle stetigen Potentiale f gilt:

$$R_f^{\beta(F)} = \sup \{p \text{ stetiges Potential}: p \leqslant f, R_p^F = p\}.$$

Aus Lemma 8 und Satz 9 folgt sofort:

Korollar 10: Für alle $A \subset X$ und alle stetigen Potentiale f gilt:

$$R_f^{A'} = \sup \left\{ q' : \begin{array}{l} q' \text{ ist ein stetiges Potential,} \\ q' \leqslant f,\ \exists\, F \subset A \text{ fein-abgeschlossen } R_{q'}^F = q' \end{array} \right\}.$$

Für die weitere Entwicklung ist es entscheidend, Theorem 2.14 und Korollar 10 nebeneinander zu betrachten. Beide Sätze unterscheiden sich nur noch in den folgenden Bedingungen:

(i) $q' < c \cdot q$ für ein $c \geqslant 0$ (Theorem 2.14),

(ii) q' ist ein stetiges Potential (Korollar 10).

Offensichtlich ist Bedingung (i) stärker als (ii), denn q ist nach den Voraussetzungen von Theorem 2.14 ein stetiges Potential. Wir bereiten die Vereinigung von Theorem 2.14 und Korollar 10 durch zwei Lemmas vor:

Lemma 11: Sei $F \subset X$ und $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$. g, h seien zwei stetige Potentiale mit den Eigenschaften:

$$g \leqslant f,\ R_g^F = g,\ h \leqslant f,\ R_h^F = h.$$

Dann existiert ein stetiges Potential p mit den Eigenschaften:

$$\sup(g, h) \leqslant p \leqslant f,\ R_p^F = p.$$

Beweis: $p := R(\sup(g,h))$ ist nach CC, Proposition 2.2.3 eine stetige, hyperharmonische Funktion. Da $p \leqslant (g+h)$ ist, ist p ein Potential. Weiter gilt: $\hat{R}_p^F \geqslant \sup(\hat{R}_g^F, \hat{R}_h^F) = \sup(g,h)$. Nach Def. von $R(\sup(g,h))$ gilt dann: $\hat{R}_p^F \geqslant R(\sup(g,h)) = p$.

Lemma 12: Sei $\mathfrak{F}$ eine aufsteigend filtrierende Menge von positiven, n.u.h. Funktionen auf X. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $\mathfrak{F}$ mit der Eigenschaft:

$$f_n \uparrow \sup \mathfrak{F}.$$

Beweis: Sei $f := \sup \mathfrak{F}$. Die Menge $U := \{f > 0\}$ ist offen. Da f n.u.h. ist, existiert eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $\mathbf{C}_{k,+}(X)$ mit:

(1) $\overline{\{h_n > 0\}} \subset U$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(2) $h_n(x) < f(x)$ für alle $x \in \overline{\{h_n > 0\}}$ und $n \in \mathbf{N}$,

(3) $h_n \uparrow f$.

Wegen (1) und (2) ist $\{\{u > h_n\} : u \in \mathfrak{F}\}$ für alle $n \in \mathbf{N}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\overline{\{h_n > 0\}}$. Da $\mathfrak{F}$ aufsteigend filtrierend ist, existiert folglich für alle $n \in \mathbf{N}$ eine Funktion $f_n' \in \mathfrak{F}$ mit:

(4) $h_n \leqslant f_n'$.

Sei $f_1 := f_1'$. Seien $f_1, \ldots, f_n$ bereits definiert. Da $\mathfrak{F}$ aufsteigend filtrierend ist, existiert dann eine Funktion $f_{n+1} \in \mathfrak{F}$ mit:

(5) $\sup(f_n, f_{n+1}') \leqslant f_{n+1}$.

Nach Definition ist die Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aufsteigend. Den Rest der Behauptung erhalten wir folgendermaßen:

$$f = \sup_n h_n \text{ (nach (3))} \leqslant \sup_n f_n' \text{ (nach (4))} \leqslant \sup_n f_n \text{ (nach (5))} \leqslant \sup \mathfrak{F} = f.$$

Satz 13: Für alle $A \in \mathfrak{X}$ existiert ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit:

$$b(A, q) = A^i.$$

Beweis: Sei q_1 ein striktes, stetiges, beschränktes Potential.

$$\text{Sei } \mathfrak{F} := \left\{ q' : \begin{array}{l} q' \text{ ist stetiges Potential,} \\ q' \leqslant q_1, \exists\, F \subset A \text{ fein-abgeschlossen, } R_{q'}^F = q' \end{array} \right\}.$$

Nach Korollar 10 gilt:

(1) $\sup \mathfrak{F} = R_{q_1}^{A^i}$.

Nach Lemma 11 ist $\mathfrak{F}$ aufsteigend filtrierend.

Nach Lemma 12 existiert dann eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $\mathfrak{F}$ mit:

(2) $f_n \uparrow \sup \mathfrak{F}$.

Sei $q_2 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot f_n$, $q := q_1 + q_2$.

Da $\|f_n\|_\infty \leqslant \|q_1\|_\infty$ ist, sind q_2 und q beschränkte, stetige Potentiale. Da q_1 ein striktes Potential ist, folgt mit Hilfe von Satz 1.4 (ii $\Leftrightarrow$ (iii), daß q ebenfalls strikt ist, Es gilt:

(3) $f_n < 2^n \cdot q_2 < 2^n \cdot q$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Da $f_n \in \mathfrak{F}$ für alle $n \in \mathbf{N}$ ist, gilt für alle $n \in \mathbf{N}$:

(4) $f_n \leqslant q_1$, $R_{f_n}^F = f_n$ für eine fein-abgeschlossene Menge $F_n \subset A$.

Mit Hilfe von Theorem 2.14 folgt aus (3) und (4):

(5) $\sup_n f_n \leqslant \hat{S}(q_1, A, q)$.

Nach Satz 2.5 gilt:

(6) $\hat{S}(q_1, A, q) = \hat{R}_{q_1}^{b(A,q)}$.

Wir können jetzt schließen:

$$A^i = b(A^i) \text{ (nach Lemma 3(a))} \subset \{R_{q_1}^{A^i} = q_1\} = \{\sup_n f_n = q_1\}$$

$$\text{(nach (1) und (2))} \subset \{\hat{S}(q_1, A, q) \geqslant q_1\} \text{ (nach (5))} = \{\hat{R}_{q_1}^{b(A,q)} \geqslant q_1\}$$

(nach (6)) $= b(b(A, q))$ (nach CC, Proposition 7.2.2) $= b(A, q)$ (nach Lemma 5) $\subset A^i$ (nach Lemma 7).

Mit Hilfe von Satz 13 können wir jetzt einige tiefere Aussagen über die Operationen $A \longrightarrow A^i$ und $A \longrightarrow A^0$ beweisen:

Korollar 14: $(A \cup B)^i = A^i \cup B^i$ für alle $A, B \in \mathfrak{X}$.

Beweis: Trivialerweise gilt $A^i \cup B^i \subset (A \cup B)^i$. Nach Satz 13 existiert ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit $b(A \cup B, q) = (A \cup B)^i$. Wir schließen:

$(A \cup B)^i = b(A \cup B, q) = b(A, q) \cup b(B, q)$ (nach Satz 2.1) $\subset A^i \cup B^i$ (nach Lemma 7) $\subset (A \cup B)^i$.

Korollar 15: Für alle $A \in \mathfrak{X}$ gilt:

(a) $(A^0)^0 = A^0$.

(b) $(X - A^0)^i = (X - A)^i$.

(c) $(A^0)^i \cup (X - A)^i = X$.

Beweis: (b): $(X - A^0)^i = (X - (A - (X - A)^i))^i = ((X - A) \cup (X - A)^i)^i =$ $(X - A)^i \cup ((X - A)^i)^i$ (nach Korollar 14) $= (X - A)^i$ (nach 3 (b)).

(a): $(A^0)^0 = A^0 - (X - A^0)^i = A^0 - (X - A)^i$ (nach (b)) $= A^0$.

(c): $(A^0)^i \cup (X - A)^i = (A^0)^i \cup (X - A^0)^i$ (nach (b)) $= (A^0 \cup (X - A^0))^i$ nach (Korollar 14) $= X^i = X$.

Lemma 16: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine an (X, **H***) assoziierte Resolvente. Dann gilt für alle $A \in \mathfrak{X}$:

$$A^0 \subset b(A^0) = b(A^0, (V_p)_{p>0}) \subset b(A, (V_p)_{p>0}).$$

Beweis: Für alle $x \in A^0$ gilt: $x \notin (X - A)^i \supset b(X - A, (V_p)_{p>0})$ (nach Lemma 7). Mit Hilfe von Satz 2.1 folgt: $x \in b(A, (V_p)_{p>0})$. Wir haben damit gezeigt: $A^0 \subset b(A, (V_p)_{p>0})$. Wenden wir das letzte Ergebnis auf die Menge A^0 an, so folgt: $(A^0)^0 \subset b(A^0, (V_p)_{p>0})$. Zusammen mit Korollar 15 (a) folgt:

(1) $A^0 \subset b(A^0, (V_p)_{p>0})$.

Mit Hilfe von Lemma 5 folgt daraus:

(2) $b(A^0) \subset b(b(A^0, (V_p)_{p>0})) = b(A^0, (V_p)_{p>0}) \subset b(A^0)$.

Da $A^0 \subset A$ ist, folgt:

(3) $b(A^0, (V_p)_{p>0}) \subset b(A, (V_p)_{p>0})$.

Aus (1), (2) und (3) folgt schließlich die Behauptung.

Lemma 17: Seien q_1, q_2 zwei strikte, stetige, beschränkte Potentiale. Für ein $c \geqslant o$ gelte: $q_1 \prec c \cdot q_2$.

(a) Dann gilt für alle $A \subset X$ und $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$:

$\hat{S}(f, A, q_1) \leqslant \hat{S}(f, A, q_2)$.

(b) Für alle $A \subset X$ gilt: $b(A, q_1) \subset b(A, q_2)$.

Beweis: Seien $(V^1_p)_{p>0}$ und $(V^2_p)_{p>0}$ die zu q_1 und q_2 gehörigen Resolventen mit den Potentialkernen V_1 und V_2. Aus $q_1 \prec c \cdot q_2$ folgt nach CC, Theorem 8.1.2(b): $V_1 \leqslant c \cdot V_2$. Also ist jede Menge, die vom Potential o bezüglich $(V^2_p)_{p>0}$ ist, auch vom Potential o bezüglich $(V^1_p)_{p>0}$. Da beide Resolventen außerdem dieselben exzessiven Funktionen besitzen, folgt nach Definition der starken Gefegten unmittelbar die Behauptung (a). (b) folgt wiederum aus (a).

18: Ende des Beweises von Theorem 2: (a) folgt sofort aus Lemma 7 und Lemma 16. (b): Sei $B \subset X$ mit:

(1) $(A \cap B)^i = B$,

(2) $A^0 \subset B$.

Nach Satz 13 existieren zwei stetige, strikte, beschränkte Potentiale q'_1 und q'_2 mit:

(3) $b(A \cap B, q'_1) = (A \cap B)^i = B$, $b(X - A, q'_2) = (X - A)^i$.

$q' := q'_1 + q'_2$ ist dann ebenfalls ein striktes, stetiges, beschränktes Potential. Mit Hilfe von Lemma 17(b) und Lemma 7 folgt aus (3):

$$B = (A \cap B)^i = b(A \cap B, q'_1) \subset b(A \cap B, q') \subset (A \cap B)^i = B,$$
$$(X - A)^i = b(X - A, q'_2) \subset b(X - A, q') \subset (X - A)^i.$$

Wir haben gezeigt:

(4) $b(A \cap B, q') = B$, $b(X - A, q') = (X - A)^i$.

Sei $(V'_p)_{p>0}$ die zu q' gehörige Resolvente. Nach 2.13 existieren Folgen $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ und $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $B_{b,+}(X, \mathfrak{X})$ mit:

(5) $\{g_n > o\} \subset A \cap B$, $\{h_n > o\} \subset X - A$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(6) $V'g_n \uparrow \hat{S}(q', A \cap B, q')$, $V'h_n \uparrow \hat{S}(q', X - A, q')$.

Sei $C := (X - A) \cup B$. Wir wollen zeigen: $q := V'I_C$ ist ein stetiges, beschränktes Potential. Sei $(V_p)_{p>0}$ die zu q gehörige Resolvente. Dann gilt: $Vg = V'(I_C \cdot g)$ für alle $g \in B_+(X, \mathfrak{X})$. Insbesondere folgt aus (6):

(7) $Vg_n \uparrow \hat{S}(q', A \cap B, q')$, $Vh_n \uparrow \hat{S}(q', X - A, q')$.

Daraus folgt:

(8) $\hat{S}(q', A \cap B, q')$ und $\hat{S}(q', X - A, q')$ sind exzessiv bezüglich der Resolvente $(V_p)_{p>0}$.

Nach Korollar 15(c) und (2) gilt: $X = (A^0)^i \cup (X - A)^i \subset B \cup (X - A)^i$.
Zusammen mit (4) folgt daraus:

(9) $\quad q' = \sup(\hat{S}(q', A \cap B, q'), \hat{S}(q', X - A, q'))$.

Jetzt können wir folgern, daß auch q' bezüglich $(V_p)_{p>0}$ exzessiv ist:

$$\hat{q'} = \lim_{p \to \infty} pV_p q' \geqslant \lim_{p \to \infty} \sup(pV_p(\hat{S}(q', A \cap B, q')), pV_p(\hat{S}(q', X - A, q')))$$
$$= \sup(\hat{S}(q', A \cap B, q'), \hat{S}(q', X - A, q')) \text{ (nach (8))} = q' \text{ (nach (9))}.$$

Wir haben also ein bezüglich $(V_p)_{p>0}$ exzessives, striktes Potential gefunden. Mit Hilfe von Satz 1.4 (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) folgt:

(10) $\quad q$ ist ein striktes Potential.

Mit Hilfe von 2.12 folgt aus (5) und (7):

(11) $\quad \hat{S}(q', A \cap B, q') \leqslant \hat{S}(q', A \cap B, q)$.

Mit Hilfe von Lemma 17(a) folgt aus $q \prec q'$:

(12) $\quad \hat{S}(q', A \cap B, q) \leqslant \hat{S}(q', A \cap B, q')$.

Wir fassen (11) und (12) zusammen:

(13) $\quad \hat{S}(q', A \cap B, q) = \hat{S}(q', A \cap B, q')$.

Die Menge $(A - B)$ ist vom Potential 0, denn es gilt:

$$VI_{(A-B)} = V'(I_C \cdot I_{(A-B)}) = VI_\emptyset = 0.$$

Mit Hilfe von I, 2.3(a) folgt daraus:

(14) $\quad \hat{S}(q', A, q) = \hat{S}(q', A \cap B, q)$.

Wir können jetzt schließen:

$$b(A, q) = b(b(A, q)) \text{ (nach 5)} = \{\hat{R}_{q'}^{b(A,q)} = q'\} \text{ (nach CC, Proposition 7.2.2)}$$
$$= \{\hat{S}(q', A, q) = q'\} \text{ (nach 2.5)} = \{\hat{S}(q', A \cap B, q) = q'\} \text{ (nach (14))}$$
$$= \{\hat{S}(q', A \cap B, q') = q'\} \text{ (nach (13))} = \{\hat{R}_{q'}^{b(A \cap B, q')} = q'\} \text{ (nach 2.5)}$$
$$= b(b(A \cap B, q')) \text{ (nach CC, Proposition 7.2.2)} = b(A \cap B, q')$$
$$\text{(nach Lemma 5)} = B \text{ (nach (4))}.$$

Bevor wir Folgerungen aus Theorem 2 ziehen, setzen wir die Untersuchung der Operation $A \longrightarrow A^i$ fort.

Korollar 19: Für alle $A \subset X$ gilt:

$$A^i = b(\bigcup \{K^i : K \subset A \text{ kompakt}\})$$
$$= b(\bigcup \{\beta(K) : K \subset A \text{ kompakt}\}).$$

Beweis: Sei $F \subset A$ mit $b(F) = F$. Dann gilt $F^i = F$. Nach Korollar 4 folgt: $F \in \mathfrak{X}$. Nach Satz 13 existiert ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit $b(F,q) = F^i = F$. Wir folgern:

$$F = b(F,q) = b\left(\bigcup \{b(K,q): K \subset F \text{ kompakt}\}\right) \text{ (nach Lemma 6)}$$
$$\subset b\left(\bigcup \{K^i: K \subset F \text{ kompakt}\}\right) \text{ (nach Lemma 7)}$$
$$\subset b\left(\bigcup \{K^i: K \subset A \text{ kompakt}\}\right). \text{ Wir haben gezeigt:}$$
$$(1) \qquad \cup \{F \subset A: b(F) = F\} \subset b\left(\bigcup \{K^i: K \subset A \text{ kompakt}\}\right).$$

Wir schließen:

$$A^1 = b\left(\bigcup \{F \subset A: b(F) = F\}\right) \subset b\left(b\left(\bigcup \{K^i: K \subset A \text{ kompakt}\}\right)\right)$$
$$\text{(nach (1))} \subset b\left(\bigcup \{K^i: K \subset A \text{ kompakt}\}\right) \subset b\left(\bigcup \{\beta(K): K \subset A \text{ kompakt}\}\right)$$
$$\subset A^i \text{ (nach Lemma 3 (f))}.$$

Aus Korollar 19 folgt:

Korollar 20: Für alle $A \subset X$ und $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ gilt:

$$R_f^{A^1} = \sup \{R_f^{K^1}: K \subset A \text{ kompakt}\}$$
$$= \sup \{R_f^{\beta(K)}: K \subset A \text{ kompakt}\}.$$

21: Für alle $A \subset X$ und alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ definieren wir:

$$Q_f^A := \inf \{g \in \mathbf{H}^*_{X,+}: \exists\, S \text{ semipolar } I_{(A-S)} \cdot f \leqslant g\}.$$

Q_f^A wurde in **Bau** eingeführt und als *Quasi-Balayage* bezeichnet. Eine Menge $A \subset X$ *Q-dünn* in einem Punkt $x \in X$, wenn eine Funktion $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ mit $Q_f^A(x) < f(x)$ existiert. Mit A^q bezeichnen wir die Menge aller Punkte, in denen die Menge A nicht Q-dünn ist. A^q heißt die *Quasi-Basis* von A. Die folgenden Aussagen wurden in **Bau** bewiesen:

(a) $Q_f^A \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ für alle $A \subset X$ und $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$.

(b) $A^q = (A^q)^q = b(A^q)$ für alle $A \subset X$.

(c) $A^q \in \mathfrak{X}$ für alle $A \subset X$.

(d) $(A - A^q)$ ist semipolar für alle $A \subset X$.

(e) $(A \cup B)^q = A^q \cup B^q$ für alle $A, B \subset X$.

(f) A semipolar $\Leftrightarrow A^q = \emptyset$ für alle $A \subset X$.

(g) $Q_f^A = R_f^{A^q}$ für alle $A \subset X$.

Aus Satz 2.8 folgt sofort:

Lemma 22: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente. Dann gilt für alle $A \subset X$ und $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$:

$$\hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0}) \leqslant Q_f^A,\ b(A, (V_p)_{p>0}) \subset A^q.$$

Satz 23: Für alle fein-abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ gilt:

$$A^q = A^i = \beta(A).$$

Beweis: Da A fein-abgeschlossen ist, gilt:

(1) $\quad A^i = (A \cup b(A))^i = \beta(A).$

Offenbar gilt: $A^q \subset b(A) \subset A$. Nach 21(b) gilt: $b(A^q) = A^q$. Nach Definition von A^i folgt daraus:

(2) $\quad A^q \subset A^i.$

Nach Korollar 4 gilt: $A^i \in \mathfrak{X}$. Nach Satz 13 existiert dann ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit: $b(A^i, q) = (A^i)^i$. Wir können jetzt schließen:

$A^i = (A^i)^i$ (nach 3(b)) $= b(A^i, q) \subset b(A, q)$ (da $A^i \subset b(A) \subset A$ ist) $\subset A^q$ (nach Lemma 22). Zusammen mit (1) und (2) folgt daraus die Behauptung.

Definition 24: Eine Menge $A \subset X$ heißt *von innen semipolar*, wenn jede kompakte Teilmenge semipolar ist.

Korollar 25: Für alle $A \subset X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist von innen semipolar.

(ii) $A^i = \emptyset$.

(iii) Jede fein-abgeschlossene Teilmenge von A ist semipolar.

Ist A zusätzlich universell-meßbar, so gilt auch Äquivalenz mit:

(iv) A ist vom Potential o bezüglich jeder an (X, **H***) assoziierten Resolvente.

(v) $b(A, q) = \emptyset$ für alle strikten, stetigen, beschränkten Potentiale q.

Beweis: (i) nach (ii): $A^i = b(\bigcup \{K^i : K \subset A \text{ kompakt}\})$ (nach Korollar 19) $= b(\cup \{K^q : K \subset A \text{ kompakt}\})$ (nach Satz 23) $= \emptyset$ (nach (i) und 21(f)).

(ii) nach (iii): Sei $F \subset A$ fein-abgeschlossen.

Mit Hilfe von Satz 23 folgt aus (ii): $F^q = F^i \subset A^i = \emptyset$.
Unter Verwendung von 21(f) folgt daraus: F ist semipolar.

(iii) nach (i) ist trivial.

(ii) nach (iv): Sei $(V_p)_{p>0}$ eine an (X, **H***) assoziierte Resolvente.

Mit Hilfe von Lemma 7 folgt aus (ii): $b(A, (V_p)_{p>0}) \subset A^i = \emptyset$.
Nach Korollar I, 3.15 (ii) $\Rightarrow$ (i) folgt schließlich:

A ist vom Potential o bezüglich $(V_p)_{p>0}$.

(iv) nach (v) folgt aus Korollar I, 3.15 (i) $\Rightarrow$ (ii).

(v) nach (ii) folgt aus Satz 13.

Korollar 26: Die Vereinigung von abzählbar vielen von innen semipolaren, universell-meßbaren Mengen ist von innen semipolar.

Beweis: Die Eigenschaft 25(iv) ist stabil bezüglich der Bildung von abzählbaren Vereinigungen. Also folgt die Behauptung aus Korollar 25(i) $\Leftrightarrow$ (iv).

Korollar 27: Für alle $A \subset X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist semipolar.

(ii) A ist eine von innen semipolare feine F_σ-Menge (= Vereinigung abzählbar vieler fein-abgeschlossener Mengen).

Beweis: (i) nach (ii): Jede semipolare Menge läßt sich als Vereinigung von abzählbar vielen total dünnen Mengen darstellen. Jede total dünne Menge ist aber nach CC, Corollary 6.3.5 fein-abgeschlossen. Folglich ist jede semipolare Menge eine feine F_σ-Menge. Trivialerweise ist jede semipolare Menge auch von innen semipolar.

(ii) nach (i): Da A eine feine F_σ-Menge ist, existiert eine Folge $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von fein-abgeschlossenen Mengen mit $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$. Nach Korollar 25 (i) $\Rightarrow$ (iii) ist F_n für alle $n \in \mathbf{N}$ semipolar. Schließlich ist dann auch $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$ semipolar.

Ist A eine Borelsche Menge, so läßt sich Korollar 27 erheblich verschärfen. Dies ist die Aussage eines tiefliegenden Satzes von Dellacherie (siehe **De**, S. 34):

Theorem 28: Jede von innen semipolare, Borelsche Menge ist semipolar.

Korollar 29: Für alle Borelschen Mengen $A \subset X$ gilt:

$$A^q = A^i.$$

Beweis: $(A - A^i)$ ist ebenfalls eine Borelsche Menge, und nach Lemma 3 (c) folgt: $(A - A^i)^i = \emptyset$. Zusammen mit Korollar 25 folgt daraus: $(A - A^i)$ ist eine von innen semipolare, Borelsche Menge. Hieraus wiederum folgt mit Hilfe von Theorem 28:

(1) $(A - A^i)$ ist semipolar.

Sei q ein striktes Potential. Nach (1) gilt:

$$I_A \cdot q \leqslant \hat{R}_q^{A^i} \text{ bis auf eine semipolare Menge.}$$

Nach Definition von Q_q^A folgt dann:

(2) $$Q_q^A \leqslant R_q^{A^i}.$$

Jetzt können wir schließen:

$A^q = b(A^q)$ (nach 21(b)) $= \{\hat{R}_q^{A^q} \geqslant q\}$ (nach CC, Proposition 7.2.2) $= \{Q_q^A \geqslant q\}$ (nach 21(g)) $\subset \{\hat{R}_q^{A^i} \geqslant q\}$ (nach (2)) $= b(A^i)$ (nach CC, Proposition 7.2.2) $= A^i$ (nach Lemma 3(a)). Wir haben damit gezeigt:

(3) $A^q \subset A^i$.

Nach Satz 13 existiert ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q' mit: $b(A,q') = A^i$. Mit Hilfe von Lemma 22 folgt: $A^i = b(A,q') \subset A^q$.
Zusammen mit (3) folgt jetzt die Behauptung.

Aus Korollar 29 und Korollar 19 folgt:

Korollar 30: Für alle Borelschen Mengen $A \subset X$ gilt:

$$A^q = b\left(\bigcup \{K^q : K \subset A \text{ kompakt}\}\right)$$
$$= b\left(\bigcup \{\beta(K) : K \subset A \text{ kompakt}\}\right).$$

Aus Korollar 29, Korollar 20 und 21 (g) folgt:

Korollar 31: Für alle Borelschen Mengen $A \subset X$ und alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ gilt:

$$Q_f^A = \sup \{Q_f^K : K \subset A \text{ kompakt}\}$$
$$= \sup \{R_f^{\beta(K)} : K \subset A \text{ kompakt}\}.$$

Sei A eine Borelsche Menge. Nach Lemma 7, Satz 13 und Korollar 29 ist A^q die größte Menge B mit $b(A,q) = B$ für ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q. Also ist $f \longrightarrow Q_f^A$ die größte starke Balayage-Operation auf A. Auch Theorem 2 können wir mit Hilfe von Korollar 29 umformen:

Korollar 32: Sei $A \subset X$ eine Borelsche Menge.

(a) Für jede an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente $(V_p)_{p>0}$ gilt:

(i) $(A \cap b(A, (V_p)_{p>0}))^q = b(A, (V_p)_{p>0})$,

(ii) $(A - (X - A)^q) \subset b(A, (V_p)_{p>0}) \subset A^q$.

(b) Sei umgekehrt $B \subset X$ eine Menge mit den Eigenschaften:

(i) $(A \cap B)^q = B$,

(ii) $(A - (X - A)^q) \subset B$.

Dann existiert ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit: $b(A,q) = B$.

In **BH** (2) wird der folgende, einfache Satz bewiesen:

Satz 33: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Jede semipolare Menge ist total-dünn (Axiom der Dünnheit).

(ii) $A^q = b(A)$ für alle $A \subset X$.

Mit Hilfe von Satz 33 können wir Korollar 32 in die folgende Form bringen:

Korollar 34: Das feine Innere einer Menge $A \subset X$ bezeichnen wir mit f-int(A). Offenbar gilt: $\text{f-int}(A) = A - b(X - A)$.

Der harmonische Raum $(X, \mathbf{H}^*)$ erfülle das Axiom der Dünnheit. $A \subset X$ sei eine Borelsche Menge.

(a) Für jede an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente $(V_p)_{p>0}$ gilt:

(i) $b\big(A \cap b(A, (V_p)_{p>0})\big) = b\big(A, (V_p)_{p>0}\big)$,

(ii) $\text{f-int}(A) \subset b\big(A, (V_p)_{p>0}\big) \subset b(A)$.

(b) Sei umgekehrt $B \subset X$ eine Menge mit den Eigenschaften:

(i) $b(A \cap B) = B$,

(ii) $\text{f-int}(A) \subset B$.

Dann existiert ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit: $b(A, q) = B$.

Definition 35: Eine Abbildung $T: \mathbf{H}^*_{X,+} \longrightarrow \mathbf{H}^*_{X,+}$ heißt ein *(abstrakter) Balayage-Operator* auf dem harmonischen Raum $(X, \mathbf{H}^*)$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $T(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot Tf + b \cdot Tg$ für alle $a, b \in \mathbf{R}_+$, $f, g \in \mathbf{H}^*_{X,+}$,

(ii) $f \leqslant g \Rightarrow Tf \leqslant Tg$ für alle $f, g \in \mathbf{H}^*_{X,+}$,

(iii) $Tf \leqslant f$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$,

(iv) $T(\sup_n f_n) = \sup_n Tf_n$ für alle aufsteigenden Folgen $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $\mathbf{H}^*_{X,+}$,

(v) $T \circ T = T$.

$b_T := \{x \in X: Tf(x) = f(x) \text{ für alle } f \in \mathbf{H}^*_{X,+}\}$ heißt der *Träger* von T.

Wir bringen einige Beispiele:

36: (a) Sei $(V_p)_{p>0}$ eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente. Sei $A \subset X$. Nach I, 2.18 und I, 2.13 ist $T: f \longrightarrow \hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0})$ ein Balayage-Operator auf $(X, \mathbf{H}^*)$, und es gilt:

$$b_T = b\big(A, (V_p)_{p>0}\big).$$

(b) Für alle $A \subset X$ ist $Q^A: f \longrightarrow Q^A_f$ ein Balayage-Operator.

(c) Für alle $A \subset X$ ist $R^{\beta(A)}: f \longrightarrow R^{\beta(A)}_f$ ein Balayage-Operator.

(d) Für beliebiges $A \subset X$ ist $\hat{R}^A: f \longrightarrow \hat{R}_f^A$ i.a. *kein* Balayage-Operator auf $(X, \mathbf{H}^*)$ (die Bedingung 35 (v) ist möglicherweise verletzt).

(e) Für beliebiges $A \subset X$ definieren wir:

$$P^A: f \longrightarrow \sup \{p \text{ Potential}: p \leqslant f,\ R_p^A = p\}.$$

P^A wurde in **Lu** eingeführt und als „principal balayage" bezeichnet. P^A ist i.a. *kein* Balayage-Operator (die Bedingung 35(iv) ist möglicherweise verletzt).

Satz 37: Sei T ein Balayage-Operator auf $(X, \mathbf{H}^*)$. q sei ein striktes, stetiges, beschränktes Potential. Dann gilt: $b_T = \{Tq = q\} = b(b_T) = (b_T)^i$, und $T = \hat{R}^{b_T}$.

Beweis: Die obige Aussage ist für beliebige strikte Potentiale richtig. Unser Beweis, der nur strikte, stetige, beschränkte Potentiale erfaßt, läßt sich dafür auf eine wesentlich allgemeinere Situation übertragen. Sei $(V_p)_{p>0}$ die zu q gehörige Resolvente. Sei $x \in \{Tq = q\}$. Wir definieren:

$$T_1: \mathbf{H}^*_{X,+} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+, \qquad T_2: \mathbf{H}^*_{X,+} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$$
$$f \longrightarrow Tf(x) \qquad f \longrightarrow f(x).$$

Dann gilt: $T_1(V\,1) = T_1 q = Tq(x) = q(x) = T_2 q = T_2(V\,1)$.

T_1 und T_2 erfüllen also die Voraussetzungen von Lemma I, 2.14, denn $\mathbf{H}^*_{X,+}$ ist gerade der Kegel aller bezüglich $(V_p)_{p>0}$ exzessiven Funktionen. Aus Lemma I, 2.14 folgt: $T_1 f = T_2 f$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$. Daraus folgt schließlich: $x \in b_T$. Die umgekehrte Inklusion $b_T \subset \{Tq = q\}$ ist trivial. Wir haben damit gezeigt:

(1) $\qquad b_T = \{Tq = q\}.$

Sei nun $x \in X$ beliebig. Wegen 35(i), (ii) existiert nach **CC**, S. 160 ein Maß μ_x mit: $\int f\, d\mu_x = Tf(x)$ für alle stetigen Potentiale f. Mit Hilfe von **CC**, Corollary 2.3.1 und 35 (iv) folgt daraus:

(2) $\qquad \int f\, d\mu_x = Tf(x)$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$.

Wir schließen: $\int (q - Tq)\, d\mu_x = Tq(x) - T(Tq)(x)$ (nach (2)) $= 0$ (nach 35 (v)). Daraus folgt mit Hilfe von (1):

(3) $\qquad \mu_x(X - b_T) = \mu_x(\{Tq < q\}) = 0.$

Sei f eine positive, hyperharmonische Funktion auf X. Für alle $g \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ mit $I_{b_T} \cdot f \leqslant g$ gilt: $Tf(x) = \int f\, d\mu_x$ (nach (2)) $= \int I_{b_T} \cdot f\, d\mu_x$ (nach (3)) $\leqslant \int g\, d\mu_x = Tg(x)$ (nach (2)) $\leqslant g(x)$ (nach 35 (iii)). Daraus folgt: $Tf \leqslant R_f^{b_T}$. Da $Tf \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ ist, folgt:

$$Tf \leqslant \hat{R}_f^{b_T} \leqslant R_f^{b_T} \text{ für alle } f \in \mathbf{H}^*_{X,+}.$$

Die umgekehrte Ungleichung ist trivial, denn nach Def. von b_T gilt für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$: $f \leqslant Tf$ auf der Menge b_T. Es gilt weiter: $b(b_T) = \{\hat{R}_q^{b_T} = q\}$ (nach **CC**, Proposition 7.2.2) $= \{Tq = q\} = b_T$ (nach (1)). Aus $b(b_T) = b_T$ folgt schließlich: $(b_T)^i = b_T$.

Wir stellen nun eine wichtige Klasse von Balayage-Operatoren vor:

Satz 38: Sei μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{X})$. Jede universell-meßbare, semipolare Menge sei eine μ-Nullmenge. Für jede positive, hyperharmonische Funktion f definieren wir:

$$R_f^\mu := \inf \{g \in \mathbf{H}^*_{X,+} : \mu(\{g < f\}) = 0\}.$$

Dann wird durch R^μ: $\mathbf{H}^*_{X,+} \longrightarrow \mathbf{H}^*_{X,+}$

$$f \longrightarrow R_f^\mu$$

ein Balayage-Operator auf $(X, \mathbf{H}^*)$ definiert. Weiter gilt:

(i) $b_{R^\mu} = X - \{x \in X : \exists\, U \in \mathfrak{X}$ fein-offen, $x \in U$, $\mu(U) = 0\}$,

(ii) $\mu(X - b_{R^\mu}) = 0$.

Beweis: Sei $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$. Sei $\mathfrak{F} := \{g \in \mathbf{H}^*_{X,+} : \mu(\{g < f\}) = 0\}$. Nach einem Lemma von Choquet (siehe **CC**, S. 169) existiert eine Folge $(g_n)_{n \in N}$ aus $\mathfrak{F}$ mit:

$$\widehat{(\inf_n g_n)} = \widehat{(\inf \mathfrak{F})} =: g^*$$

(hierbei sei $\hat{h}$ die größte n.u.h. Minorante von h und nicht die untere Regularisierte im Sinne von I, 1.11).

Nach **CC**, Theorem 6.3.2 ist die Menge $\{g^* < \inf g_n\}$ semipolar, insbesondere also eine μ-Nullmenge. Daraus folgt $g^* \in \mathfrak{F}$, denn es gilt:

$$\mu(\{g^* < f\}) \leqslant \mu(\{g^* < \inf g_n\} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{g_n < f\})$$

$$\leqslant \mu(\{g^* < \inf_n g_n\}) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{g_n < f\}) = 0.$$

Wir folgern: $g^* = \widehat{(\inf \mathfrak{F})} \leqslant \inf \mathfrak{F} = R_f^\mu \leqslant g^*$ (da $g^* \in \mathfrak{F}$). Wir haben damit gezeigt:

(1) R_f^μ ist hyperharmonisch,

(2) $\mu(\{R_f^\mu < f\}) = \mu(\{g^* < f\}) = 0$.

Trivialerweise erfüllt R^μ die Eigenschaften 35(ii), (iii). Mit Hilfe von (1) und (2) beweist man die Eigenschaften 35(i), (iv) ähnlich wie Satz I, 2.18 (2. Beweisabschnitt). Die Eigenschaft 35(v) folgt unmittelbar aus (2). Also ist R^μ ein Balayage-Operator. Sei q ein striktes, stetiges, beschränktes Potential. Wir zeigen (ii):

$$\mu(X - b_{R^\mu}) = \mu(\{R_q^\mu < q\}) \text{ (nach Satz 37)} = 0 \text{ (nach (2))}.$$

Da b_{R^μ} nach Satz 37 fein-abgeschlossen ist, folgt aus (ii):

$$X - \{x \in X : \exists\, U \in \mathfrak{X} \text{ fein-offen}, x \in U, \mu(U) = 0\} \subset b_{R^\mu}.$$

Sei nun $U \in \mathfrak{X}$ fein-offen mit $\mu(U) = 0$. Aus $\mu(U) = 0$ folgt:

(1) $R_q^\mu \leqslant R_q^{(X-U)}$.

Nach CC, Proposition 7.2.2 gilt:

(2) $\quad (X - U) = \{R_q^{(X-U)} \geqslant q\}.$

Wir schließen: $b_{R^\mu} = \{R_q^\mu \geqslant q\}$ (nach Satz 37) $\subset \{R_q^{(X-U)} \geqslant q\}$ (nach (1)) $= (X - U)$ (nach (2)). Daraus folgt nun:

$$b_{R^\mu} \subset X - \{x \in X: \exists\, U \in \mathfrak{X} \text{ fein-offen}, x \in U, \mu(U) = 0\}.$$

Wir kommen nun zum Hauptsatz über Balayage-Operatoren:

Theorem 39: Sei $A \in \mathfrak{X}$. Für einen Balayage-Operator T auf $(X, \mathbf{H}^*)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente $(V_p)_{p>0}$ mit: $Tf = \hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0})$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$.

(ii) Es existiert ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit: $Tf = \hat{S}(f, A, q)$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$.

(iii) $A^0 \subset b_T = (A \cap b_T)^i$.

(iv) Es existiert ein endliches Maß μ auf $(X, \mathfrak{X})$ mit:

- (α) $\mu(B) = 0$ für alle semipolaren Mengen $B \in \mathfrak{X}$,
- (β) $\mu(X - A) = 0$,
- (γ) $\mu(U) > 0$ für alle $U \in \mathfrak{X}$ fein-offen mit $U \cap A^0 \neq \mathbf{0}$,
- (δ) $Tf = R_f^\mu \quad f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$.

Beweis: (i) nach (iii) folgt unmittelbar aus Theorem 2(a), wenn man beachtet, daß aus (i) $b(A, (V_p)_{p>0}) = b_T$ folgt.

(iii) nach (ii): Wegen (iii) existiert nach Theorem 2(b) ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit: $b(A, q) = b_T$. Für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ können wir jetzt schließen: $\hat{S}(f, A, q) = \hat{R}_f^{b(A,q)}$ (nach Satz 2.5) $= \hat{R}_f^{b_T} = Tf$ (nach Satz 37).

(ii) nach (i) ist trivial.

(i) nach (iv): Sei $(V_p)_{p>0}$ eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente mit: $Tf = \hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0})$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$. Sei μ' ein endliches Referenzmaß für die Resolvente $(V_p)_{p>0}$.

Durch $\mu(B) := \mu'(A \cap B)$ $(B \in \mathfrak{X})$ wird ein Maß auf $(X, \mathfrak{X})$ definiert, welches offenbar die Eigenschaft (β) besitzt. Nach Satz 2.8 erfüllt μ auch die Bedingung (α).

Aus den für alle $f, g \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ gültigen Äquivalenzen

$$I_A \cdot f \leqslant g \ (V_p)_{p>0}\text{-f.ü.} \Leftrightarrow I_A \cdot f \leqslant g \ \mu'\text{-f.ü.} \Leftrightarrow \mu(\{g < f\}) = 0$$

folgt: $R_f^\mu = \hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0})$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$.

Nach Wahl von $(V_p)_{p>0}$ gilt wiederum: $Tf = \hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0})$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$. Beides zusammen ergibt (δ). (γ) erhalten wir folgendermaßen:

$A^0 \subset b_T$ (nach (iii)) $= b_{R^\mu}$ (nach (δ)) $= X - \{x \in X: \exists\, U \in \mathfrak{X}$ fein-offen, $x \in U, \mu(U) = 0\}$ (nach Satz 38(i)).

(iv) nach (iii): Sei μ ein endliches Maß auf $(X, \mathfrak{X})$ mit den Eigenschaften (α), (β), (γ) und (δ). Wir schließen:

$$A^0 \subset X - \{x \in X: \exists\, U \in \mathfrak{X} \text{ fein-offen}, x \in U, \mu(U) = 0\} \text{ (nach } (\gamma)) = b_{R^\mu} \text{ (nach Satz 38(i))} = b_T \text{ (nach } (\delta)).$$

Wir haben gezeigt: $A^0 \subset b_T$. Wegen der Regularität von innen des Maßes μ existiert eine aufsteigende Folge $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von kompakten Teilmengen von $(A \cap b_T)$ mit:

(1) $\quad \sup_n \mu(K_n) = \mu(A \cap b_T) = \mu(A)$ (nach Satz 38(ii) und (δ)).

Für alle $n \in \mathbf{N}$ definieren wir durch $\mu_n(B) := \mu(K_n \cap B)$ $(B \in \mathfrak{X})$ ein endliches Maß auf $(X, \mathfrak{X})$. Aus (1) folgt:

$$R_f^{\mu_n} \uparrow R_f^\mu \text{ für alle } f \in \mathbf{H}^*_{X,+}.$$

Daraus folgt wiederum:

(2) $\quad b_T = b_{R^\mu} = b\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} b_{R^{\mu_n}}\right).$

Offenbar gilt:

(3) $\quad b_{R^{\mu_n}} \subset K_n \subset (A \cap b_T)$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Aus Satz 37 folgt:

(4) $\quad b(b_{R^{\mu_n}}) = b_{R^{\mu_n}}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Aus (2), (3) und (4) folgt schließlich: $b_T \subset (A \cap b_T)^i$.
Nach Satz 37 gilt aber: $(A \cap b_T)^i \subset (b_T)^i = b_T$.
Damit ist (iii) vollständig gezeigt.

Wählt man in Theorem 39 $A := b_T$, so folgt:

Korollar 40: Für jeden Balayage-Operator T auf $(X, \mathbf{H}^*)$ existiert ein endliches Maß μ auf $(X, \mathfrak{X})$ mit den Eigenschaften:

(i) $\quad \mu(B) = 0$ für alle semipolaren Mengen $B \in \mathfrak{X}$,

(ii) $\quad \mu(X - b_T) = 0$,

(iii) $\quad T = R^\mu$.

Zusammen mit 36(b) folgt aus Korollar 40:

Korollar 41: Für alle $A \subset X$ existiert ein endliches Maß μ auf $(X, \mathfrak{X})$ mit den Eigenschaften:

(i) $\quad \mu(B) = 0$ für alle semipolaren Mengen $B \in \mathfrak{X}$,

(ii) $\quad \mu(X - A^q) = 0$,

(iii) $\quad Q_f^A = R_f^\mu$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$.

Ist A eine Borelsche Menge, so läßt sich Korollar 41 erheblich verbessern:

Korollar 42: Für alle Borelschen Mengen $A \subset X$ existiert ein endliches Maß μ auf $(X, \mathfrak{X})$ mit den Eigenschaften:

(i) $\mu(B) = 0$ für alle semipolaren Mengen $B \in \mathfrak{X}$,

(ii) $\mu(X - A) = 0$,

(iii) $Q_f^A = R_f^\mu$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$.

Beweis: Nach Theorem 39 genügt es für $T := Q^A$ Bedingung 39(iii) nachzuweisen. Nach Theorem 2(a) (ii) und Korollar 29 gilt:

$$A^0 \subset A^i = A^q = b^T.$$

Den Rest erhalten wir folgendermaßen:

$$b_T = A^q = ((A - A^q) \cup (A \cup A^q)^q = (A - A^q)^q \cap (A \cap A^q)^q \text{ (nach 21(e))}$$
$$= \emptyset \cup (A \cap A^q)^q \text{ (nach 21(f), } A - A^q \text{ ist nach 21(d) semipolar)}$$
$$= (A \cap b_T)^q = (A \cap b_T)^i \text{ (nach Korollar 29).}$$

43: Jede semipolare Menge sei polar (Axiom der Polarität). Wie man leicht sieht, gilt dann:

$$\hat{R}_f^A = Q_f^A \text{ für alle } A \subset X \text{ und } f \in \mathbf{H}^*_{X,+}.$$

In dieser Situation können wir also in den Korollaren 41 und 42 Q_f^A durch $\hat{R}_f^A$ ersetzen.

In dieser Form wurden Korollar 41 und Korollar 42 in **Str** (2) unter Heranziehung tiefliegender wahrscheinlichkeitstheoretischer Sätze (Satz von McKean-Tanaka usw.) für die Laplace-Gleichung gezeigt.

Lemma 44: Für alle fein-offenen Mengen U gilt:

(a) $U^0 = U$.

(b) $b(U) = U^i = b(U^0) \supset U$.

Beweis: (a): $U^0 \subset U = U - (X - U) \subset U - b(X - U)$ (da $(X - U)$ fein-abgeschlossen und somit $b(X - U) \subset (X - U)$ ist) $\subset U - (X - U)^i$ (nach Lemma 3(d)) $= U^0$.

(b): Nach Theorem 2(a) (ii) gilt:

(1) $A^0 \subset A^i$ für alle $A \in \mathfrak{X}$.

Sei $x \in U$. Dann existiert eine fein-offene Menge $U' \in \mathfrak{X}$ mit $x \in U' \subset U$. Daraus folgt: $x \in U' = U'^0$ (nach (a)) $\subset U'^i$ (nach (1)) $\subset U^i$. Wir haben gezeigt: $U \subset U^i$. Da U^i nach Lemma 3(a) fein-abgeschlossen ist, folgt $b(U) \subset U^i$. Nach Lemma 3(d) gilt: $U^i \subset b(U)$. Fassen wir alle Ergebnisse zusammen, so folgt (b).

Korollar 45: Sei $A \subset X$ fein-abgeschlossen.

(a) Für jede an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente $(V_p)_{p>0}$ gilt:

$$\text{f-int}(A) \subset b(A, (V_p)_{p>0}) \subset A.$$

(b) Sei umgekehrt $B \subset X$ eine Menge mit der Eigenschaft:

$$\text{f-int}(A) \subset B = b(B) \subset A.$$

Dann existiert ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit: $b(A,q) = B$.

(c) Für jeden Balayage-Operator T auf $(X, \mathbf{H}^*)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente $(V_p)_{p>0}$ mit:
$Tf = \hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0})$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$.

(ii) Es existiert ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit:
$Tf = \hat{S}(f, A, q)$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$.

(iii) $\text{f-int}(A) \subset b_T \subset A$.

(iv) $\hat{R}_f^{\text{f-int}(A)} \subset Tf \subset \hat{R}_f^A$ für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$.

Beweis: Aus $\text{f-int}(A) \subset b(\text{f-int}(A)) \subset b(A)$ folgt:

(1) $\text{f-int}(A) \subset \text{f-int}(b(A))$.

Da A fein-abgeschlossen ist, gilt $b(A) \subset A$. Daraus folgt: $\text{f-int}(b(A)) \subset \text{f-int}(A)$. Zusammen mit (1) erhalten wir:

(2) $\text{f-int}(A) = \text{f-int}(b(A))$.

Da $(X - b(A))$ fein-offen ist, folgt nach 44(b): $(X - b(A))^i = b(X - b(A))$. Daraus folgt: $(b(A))^0 = b(A) - (X - b(A))^i = b(A) - b(X - b(A)) = \text{f-int}(b(A))$. Zusammen mit (2) folgt daraus:

(3) $(b(A))^0 = \text{f-int}(A) = \text{f-int}(b(A))$.

(a): $\text{f-int}(A) = (b(A))^0$ (nach (3)) $\subset b(b(A), (V_p)_{p>0})$ (nach Theorem 2(a) (ii)) $\subset b(A, (V_p)_{p>0})$ (da $b(A) \subset A$ ist) $= b(b(A, (V_p)_{p>0}), (V_p)_{p>0})$ (nach I, 3.14) $\subset b(b(A), (V_p)_{p>0})$ (nach Lemma 5) $\subset b(b(A))$ (nach Lemma 5) $\subset A$.

(b): Aus (3) und der Voraussetzung über B folgt:

(4) $(b(A))^0 \subset B$.

Wegen $b(B) = B \subset A$ gilt:

(5) $B \subset b(A)$,

(6) $(B \cap b(A))^i = B^i = B$.

Wegen (4) und (6) existiert nach Theorem 2(b) ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit: $b(b(A), q) = B$. Die Behauptung (b) erhalten wir jetzt folgendermaßen:

$b(A,q) = b(b(A,q),q)$ (nach I, 3.14) $\subset b(b(A),q)$ (nach 2.3) $= B = b(b(A),q) \subset b(A,q)$ (da $b(A) \subset A$ ist).

(c): (i) nach (iii) folgt unmittelbar aus (a). Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt aus Satz 37.

(iii) nach (ii): Wegen (iii) existiert nach (b) ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit: $b(A,q) = b_T$. Daraus folgt für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$: $Tf = \hat{R}_f^{b_T}$ (nach Satz 37) $= \hat{R}_f^{b(A,q)} = \hat{S}(f,A,q)$ (nach Satz 2.5).

Schon aus Theorem 2(b) kann man ersehen, daß die starke Gefegte je nach Wahl der zugrunde liegenden Resolvente sehr stark schwanken kann. Wir geben jetzt ein explizites Beispiel hierfür an:

46: Sei $X = \mathbf{R}^3$ und $\mathbf{H}^*$ die Garbe der im klassischen Sinne hyperharmonischen Funktionen. $(V_p)_{p>0}$ sei die Brownsche Resolvente auf dem $\mathbf{R}^n$. $A := \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{R}^2$ ist dann eine λ^3-Nullmenge und somit vom Potential o bezüglich $(V_p)_{p>0}$. Daraus folgt:

(a) $\qquad b(A,(V_p)_{p>0}) = \emptyset.$

Andererseits gilt:

(b) $\qquad b(A) = X.$

Wegen (b) existiert nach Korollar 34 ein striktes, stetiges, beschränktes Potential q mit:

(c) $\qquad b(A,q) = X.$

Der Unterschied zwischen $b(A,(V_p)_{p>0})$ und $b(A,q)$ ist also maximal.

Wir wollen nun die Mengen studieren, bezüglich derer die starke Gefegte unabhängig von der zugrunde liegenden Resolvente ist:

Definition 47: Eine Menge $A \subset X$ heißt *S-universell*, falls für zwei beliebige an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolventen $(V_p)_{p>0}$, $(W_p)_{p>0}$ gilt:

$$\hat{S}(f,A,(V_p)_{p>0}) = \hat{S}(f,A,(W_p)_{p>0}) \text{ für alle } f \in \mathbf{H}^*_{X,+}.$$

Nach 2.5 ist eine Menge $A \subset X$ genau dann S-universell, wenn für zwei beliebige an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolventen $(V_p)_{p>0}$, $(W_p)_{p>0}$ gilt:

$$b(A,(V_p)_{p>0}) = b(A,(W_p)_{p>0}).$$

48: (a) Sei $(V_p)_{p>0}$ eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente. Ist $A \subset X$ eine S-universelle Menge, so sind nach Satz 2.5 auch $b(A,(V_p)_{p>0})$ und $(A \cap b(A,(V_p)_{p>0})$ S-universell.

(b) Wie Beispiel 46 zeigt gilt die Umkehrung von (a) nicht. Es kann durchaus passieren, daß $b(A,(V_p)_{p>0})$ S-universell und A nicht S-universell ist.

(c) Nach Satz 2.8 ist jede semipolare Menge S-universell.

Satz 49: Die Vereinigung abzählbar vieler S-universeller Mengen ist wieder S-universell.

Beweis: Seien $(V_p)_{p>0}$ und $(W_p)_{p>0}$ zwei an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolventen: Sind $B, C \subset X$ zwei S-universelle Mengen, so gilt:

$$b(B \cup C, (V_p)_{p>0}) = b(B, (V_p)_{p>0}) \cup b(C, (V_p)_{p>0}) \text{ (nach 2.1 und I, 3.21)}$$
$$= b(B, (W_p)_{p>0}) \cup b(C, (W_p)_{p>0}) \text{ (da B und C S-universell sind)}$$
$$= b(B \cup C, (W_p)_{p>0}) \text{ (nach 2.1 und I, 3.21).}$$

Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von S-universellen Mengen. $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Vorhin haben wir gezeigt:

(1) $$b(B_n, (V_p)_{p>0}) = b(B_n, (W_p)_{p>0}).$$

Für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ folgt schließlich:

$$\hat{S}(f, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, (V_p)_{p>0}) = \sup_n \hat{S}(f, B_n, (V_p)_{p>0}) \text{ (nach Satz I, 2.20(b))}$$
$$= \sup_n \hat{S}(f, B_n, (W_p)_{p>0}) \text{ (nach (1))} = \hat{S}(f, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, (W_p)_{p>0}).$$

Satz 50: Jede fein-offene Menge ist S-universell.

Beweis: Seien $(V_p)_{p>0}$ und $(W_p)_{p>0}$ zwei an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolventen. Ist $U \subset X$ fein-offen, so ist U nach 2.1 und I, 4.20 $\mathfrak{R}$-offen bezüglich $(V_p)_{p>0}$ und $(W_p)_{p>0}$. Nach I, 4.26(b) folgt daraus für alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$:

$$\hat{S}(f, U, (V_p)_{p>0}) = R_f^U = \hat{S}(f, U, (W_p)_{p>0}).$$

Wir geben jetzt eine ziemlich allgemeine Charakterisierung von S-universellen Mengen an:

Satz 51:

(a) Für alle $A \in \mathfrak{X}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist S-universell.

(ii) $b(A^0) = A^i$.

(b) Für alle fein-abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist S-universell.

(ii) $b(\text{f-int}(A)) = \beta(A)$.

(c) Ist zusätzlich das Axiom der Dünnheit erfüllt, so sind für alle Borelschen Mengen $A \subset X$ folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist S-universell.

(ii) $b(\text{f-int}(A)) = b(A)$.

Beweis: (a): (ii) nach (i) folgt aus Theorem 2(a).

(i) nach (ii): Man sieht leicht ein:

(1) $A^0 \subset b(A^0) = (A \cap b(A^0))^i$,

(2) $A^0 \subset A^i = (A \cap A^i)^i$ (nach Lemma 3(c) und Korollar 14).

Nach Theorem 2(b) existieren dann zwei strikte, stetige, beschränkte Potentiale q_1, q_2 mit: $b(A, q_1) = b(A^0)$, $b(A, q_2) = A^1$. Da A S-universell ist, folgt hieraus:

$$b(A^0) = b(A, q_1) = b(A, q_2) = A^i.$$

Der Beweis von (b) bzw. (c) verläuft ähnlich wie der von (a), man muß lediglich statt Theorem 2 Korollar 45 bzw. Korollar 34 heranziehen.

Korollar 52: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente.

(a) Für alle S-universellen Mengen $A \in \mathfrak{X}$ und alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ gilt:
$\hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0}) = \hat{R}_f^{A^\circ} = \hat{R}_f^{A^1}$.

(b) Für alle fein-abgeschlossenen, S-universellen Mengen A und alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$ gilt:
$\hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0}) = \hat{R}_f^{\beta(A)}$.

(c) Ist zusätzlich das Axiom der Polarität erfüllt, so gilt für alle S-universellen Borelschen Mengen und alle $f \in \mathbf{H}^*_{X,+}$:
$\hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0}) = \hat{R}_f^A$.

Beweis: (a) und (b) folgen sofort aus Satz 51(a), (b).

(c): $\hat{S}(f, A, (V_p)_{p>0}) = \hat{R}_f^{A^1}$ (nach (a)) $= \hat{R}_f^{A^q}$ (nach 29) $= Q_f^A$ (nach 21(g)) $= \hat{R}_f^A$ (Axiom der Polarität!).

53: Fast alle harmonischen Räume besitzen eine Basis regulärer Mengen. Hat man die enge Beziehung zwischen Dirichlet-Problem und Balayage vor Augen (siehe CC, Theorem 7.1.2), so stellt sich die Frage, wann eine Basis von regulären Mengen existiert, deren Komplemente S-universell sind. Dieses Problem lösen wir im Anhang 3.

Zum Schluß belegen wir die Bemerkung I, 3.16 mit einem Beispiel:

54: Sei $X = \mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 3$) und $\mathbf{H}^*$ die Garbe der im klassischen Sinne hyperharmonischen Funktionen.
Sei $C := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$. Dann gilt:

(1) $b(C) = C$.

Dies sieht man mit Hilfe der folgenden Tatsachen ein:

(2) $b(C) \subset C$ (da C fein-abgeschlossen),

(3) $b(C) \neq \emptyset$ (da $(X - C)$ nicht zusammenhängend ist),

(4) $(X, \mathbf{H}^*)$ ist „rotationsinvariant".

Wegen (1) existiert nach Korollar 34(b) eine an $(X, \mathbf{H}^*)$ assoziierte Resolvente $(V_p)_{p>0}$ mit: $b(C, (V_p)_{p>0}) = C$. Insbesondere gilt:

(5) C ist nicht vom Potential o bezüglich $(V_p)_{p>0}$.

Die Menge $A := \{x \in R^n : \|x\| > 1\}$ ist nach Satz 50 S-universell. Nach Korollar 52(c) gilt dann:

$$b(A, (V_p)_{p>0}) = b(A) = \{x \in R^n : \|x\| \geqslant 1\}.$$

Zusammen mit (5) folgt daraus:

$(b(A, (V_p)_{p>0}) - A) = C$ ist *nicht* vom Potential o bezüglich der Resolvente $(V_p)_{p>0}$.

Schlußbemerkung: Grob gesprochen haben wir in diesem Paragraphen untersucht, in welchen Grenzen die starke Gefegte schwanken kann, wenn man die zugrunde liegende Resolvente variiert.

Für fein-offene Mengen ist die Lösung ziemlich trivial, sie sind immer S-universell. Für fein-abgeschlossene Mengen ist die Lösung (Korollar 45) besonders befriedigend.

BH, II, 2.6 ist das für uns entscheidende Resultat aus der Theorie der harmonischen Räume. Es besagt, daß sich die essentielle Gefegte *von innen* approximieren läßt. Gerade Approximationseigenschaften von innen sind aber für die starke Gefegte typisch.

BH, II, 2.6 folgt für harmonische Räume, die das Axiom der Polarität erfüllen, unmittelbar aus **CC**, Theorem 9.1.1 (a) $\Rightarrow$ (g).

Da wir nur die Balayage-Theorie harmonischer Räume verwendet haben, lassen sich die Resultate von Teil III sofort auf Standard-Balayage-Räume ausdehnen. Standard-Balayage-Räume besitzen nämlich mit Ausnahme von **CC**, Proposition 7.1.3 dieselbe Balayage-Theorie. Im Laufe von § 3 wurde eine Reihe von Ergebnissen bewiesen, die nichts mit starker Balayage zu tun haben, deren Beweise aber von Resultaten über starke Balayage Gebrauch machen:

Korollar 14, Korollar 19, Korollar 20, Satz 23, Korollar 26, Korollar 27, Korollar 29, Korollar 30, Korollar 31, Korollar 40, Korollar 41 und Korollar 42.

Direkt aus Theorem 28 und ohne Verwendung von Resultaten über starke Balayage kann man dagegen folgern:

$$A^q = b(\bigcup \{K^q : K \subset A \text{ kompakt}\}) \quad \text{für alle Borelschen Mengen } A \subset X.$$

Dieses Resultat, das auch in Korollar 30 enthalten ist, kann man dazu benützen, die wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation von A^q, die in **BH** (2) für alle $A \subset X$ mit $A^q \subset A$ bewiesen wurde, auf beliebige Borelsche Mengen $A \subset X$ zu verallgemeinern.

Das letzte Resultat kann mit Hilfe der Theorie der stetigen, additiven Funktionale auch aus Korollar II, 4.14, Satz 13 und Korollar 29 gefolgert werden. Für den klassischen Fall wurde dieses Programm in **Str** (3) durchgeführt.

Anhang 1: Eine Charakterisierung von Axiom (inf)

1: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die von $\{\{g < f\}: g$ a-supermedian, f a-exzessiv für ein $a \geqslant 0\}$ erzeugte Topologie heiße die $\mathfrak{T}$-*Topologie* von $(V_p)_{p>0}$. Wir nennen eine Menge $\mathfrak{T}$-abgeschlossen bzw. $\mathfrak{T}$-offen, wenn sie abgeschlossen bzw. offen bezüglich der $\mathfrak{T}$-Topologie ist. Ist die Funktion 1 exzessiv, so gilt:

2: Die $\mathfrak{T}$-Topologie ist die gröbste Topologie, bezüglich der für alle $a \geqslant 0$ jede a-supermediane Funktion n.o.h. und jede a-exzessive Funktion stetig ist. Insbesondere ist die feine Topologie gröber als die $\mathfrak{T}$-Topologie.

Satz 3: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. E_b sei die Menge aller Verzweigungspunkte.
Dann gilt für alle $\mathfrak{T}$-abgeschlossenen Mengen $A \subset E$:

$$A^s \subset (A \cup E_b).$$

Beweis: Sei g a-supermedian und f a-exzessiv für ein $a \geqslant 0$.
Sei $B := \{f \leqslant g\}$. Für alle $x \in (E—B)$ gilt: $g(x) < f(x)$, $I_B \cdot f \leqslant g$.
Daraus folgt: ${}^a\hat{S}_f^B(x) \leqslant {}^a\hat{S}_f^B(x) \leqslant g(x) < f(x)$ für alle $x \in (E—B)$.
Folglich ist B in allen $x \in (E—B)$ S-dünn. Wir haben gezeigt:

(1) $\{f \leqslant g\}$ ist in allen Punkten $x \in \{g < f\}$ S-dünn.

Sei nun $x \in (E—(A \cup E_b))$. Da $(E—A)$ $\mathfrak{T}$-offen ist, existieren a-exzessive Funktionen $f_1, \ldots\ldots, f_n$ und a-supermediane Funktionen $g_1, \ldots\ldots, g_n$ $(a \geqslant 0)$ mit:

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \{g_i < f_i\} \subset (E—A).$$

Nach (1) gilt:

$\{f_i \leqslant g_i\}$ ist für alle $1 \leqslant i \leqslant n$ S-dünn im Punkt x.

Da $x \notin E_b$ ist, folgt daraus: $\bigcup_{i=1}^{n} \{f_i \leqslant g_i\}$ ist S-dünn in x.

Da $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{f_i \leqslant g_i\}$ ist, folgt schließlich: $x \notin A^s$.

Lemma 4: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Sei $\mathfrak{E}^*: = \{A \subset E: \exists\, A' \in \mathfrak{E}\ ((A—A') \cup (A'—A))$ ist vom Potential $0\}$.
Dann existiert eine Fortsetzung $(V_p^*)_{p>0}$ der Resolvente $(V_p)_{p>0}$ auf den Meßraum $(E, \mathfrak{E}^*)$. Für alle $p > 0$ und $f \in B_+(E, \mathfrak{E}^*)$ gilt: $V_p^* f \in B_+(E, \mathfrak{E})$.

Beweis: Wir definieren:

$$V_p^* f := \inf \{V_p f' : f' \in B_+(E, \mathfrak{E}),\ f \leqslant f'\} \quad (f \in B_+(E, \mathfrak{E}^*)).$$

Sei $f \in B_+(E, \mathfrak{E}^*)$. Dann existieren Funktionen $f', f'' \in B_+(E, \mathfrak{E})$ mit:

$$f' \leqslant f \leqslant f'',\ \{f' < f''\} \text{ ist vom Potential o.}$$

Daraus folgt für alle $p > o$: $V_p^* f = V_p f' = V_p f'' \in B_+(E, \mathfrak{E})$. Jetzt sieht man auch ein, daß durch V_p^* für alle $p > o$ ein Kern auf $(E, \mathfrak{E}^*)$ definiert wird. Trivialerweise ist $(V_p^*)_{p>0}$ eine Resolvente.

Korollar 5: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die Menge E_b aller Verzweigungspunkte sei vom Potential o. $\mathfrak{E}^*$ sei wie in Lemma 4 definiert. Für alle $\mathfrak{T}$-abgeschlossenen Mengen $A \subset E$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:

(i) $A \in \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$.

(ii) $A \in \mathfrak{E}^*$.

Beweis: (i) nach (ii): Mit Hilfe von I, 3.11 (i) $\Rightarrow$ (iv) folgt:

(1) $A^s \in \mathfrak{E}$, $(A - A^s)$ ist vom Potential o.

Nach Satz 3 gilt: $(A^s - A) \subset E_b$. Da E_b vom Potential o ist, folgt:

(2) $(A^s - A)$ ist vom Potential o.

Aus (1) und (2) folgt:

$$A^s \in \mathfrak{E},\ ((A - A^s) \cup (A^s - A)) \text{ ist vom Potential o.}$$

Also gilt: $A \in \mathfrak{E}^*$.

(ii) nach (i): Nach (ii) existiert A' mit:

(3) $A' \in \mathfrak{E}$, $((A' - A) \cup (A - A'))$ ist vom Potential o.

Zusammen mit Lemma I, 2.3 (a) folgt daraus:

(4) $A^s = A'^s$.

Nach Theorem I, 3.11 (i) $\Rightarrow$ (iv) gilt:

(5) $A'^s \in \mathfrak{E}$, $(A' - A'^s)$ ist vom Potential o.

Aus (3), (4) und (5) folgt:

$$A^s \in \mathfrak{E},\ (A - A^s) \text{ ist vom Potential o.}$$

Nach Theorem I, 3.11 (iv) $\Rightarrow$ (i) folgt hieraus: $A \in \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$.

Theorem 6: Sei $(V_p)_{p>0}$ eine submarkoffsche Resolvente auf einem Meßraum $(E, \mathfrak{E})$. Die Funktion 1 sei exzessiv. Die Menge E_b aller Verzweigungspunkte sei vom Potential 0. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Für *alle* $a \geqslant 0$ erfüllt die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ Axiom (**inf**).

(ii) Für *ein* $a > 0$ erfüllt die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ Axiom (**inf**).

(iii) Jede Teilmenge von E ist in $\mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$ enthalten.

Ist der Potentialkern V eigentlich, so gilt auch Äquivalenz mit:

(iv) Die Resolvente $(V_p)_{p>0}$ erfüllt Axiom (**inf**).

Beweis: (i) nach (iv) ist trivial.

(iv) nach (iii): Nach Satz I, 2.11 gilt:

(1) Jede Teilmenge von E ist in $\mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$ enthalten.

Da V eigentlich ist, folgt aus Theorem I, 3.11 (iv) $\Leftrightarrow$ (i):

$\mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0}) = \mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$. Zusammen mit (1) folgt nun (iii).

(iii) nach (i): Sei $a > 0$. $\mathfrak{F}$ sei eine Menge von a-supermedianen Funktionen. Sei $\mathfrak{E}^*$ und $(V_p^*)_{p>0}$ wie in Lemma 4. Nach 2 ist jede Funktion $g \in \mathfrak{F}$ n.o.h. bezüglich der $\mathfrak{T}$-Topologie. Also ist auch $f' := \inf \mathfrak{F}$ n.o.h. bezüglich der $\mathfrak{T}$-Topologie. Das heißt:

$\{f' \geqslant t\}$ ist für alle $t \in \mathbf{R}$ $\mathfrak{T}$-abgeschlossen.

Mit Hilfe von Korollar 5 (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt daraus zusammen mit (iii):

$\{f' \geqslant t\} \in \mathfrak{E}^*$ für alle $t \in \mathbf{R}$.

Mit anderen Worten: $f' \in B_+(E, \mathfrak{E}^*)$ Für alle $p > 0$ schließen wir:

$$pV^*_{a+p}f' \leqslant \inf\{pV_{a+p}g : g \in \mathfrak{F}\} \leqslant \inf \mathfrak{F} = f'.$$

Also ist f' a-supermedian bezüglich $(V_p^*)_{p>0}$. Sei $f := \hat{f}'$. Nach Lemma 4 gilt:

$f \in B_+(E, \mathfrak{E})$.

Also ist f a-exzessiv bezüglich $(V_p)_{p>0}$. Offensichtlich gilt:

$f \leqslant f' = \inf \mathfrak{F}$,

$\{f < \inf \mathfrak{F}\} = \{f < f'\}$ ist vom Potential 0.

Damit ist Axiom (**inf**) für die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ nachgewiesen.

(i) nach (ii) ist trivial.

(ii) nach (iii): Wenden wir (iv) $\Rightarrow$ (i) auf die Resolvente $(V_{a+p})_{p>0}$ an, so erhalten wir:

(2) Jede Teilmenge von E ist in $\mathfrak{S}((V_{a+p})_{p>0})$ enthalten.

Trivialerweise gilt:

$$(3) \qquad \mathfrak{S}\left((V_{a+p})_{p>0}\right) \subset \mathfrak{S}_0\left((V_{a+p})_{p>0}\right).$$

Nach Theorem I, 3.11 (iii) $\Rightarrow$ (i) gilt:

$$(4) \qquad \mathfrak{S}_0\left((V_{a+p})_{p>0}\right) \subset \mathfrak{S}\left((V_p)_{p>0}\right).$$

Aus (2), (3) und (4) folgt schließlich (iii).

In Theorem 6 kann man auf die Bedingung, daß die Funktion 1 exzessiv ist, verzichten.

Anhang 2: Erste Eintrittszeit und wesentliche Eintrittszeit

Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$ ein Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$.

In Analogie zu Theorem I, 3.13 könnte man erwarten, daß für alle $A \in \mathfrak{E}$ die folgende Beziehung besteht:

$$W_A = T_{A^*} = T_{(A\cap A^*)} \text{ P-f.s. .}$$

(hierbei sei T_B für alle $B \subset E$ wie in Theorem 1 definiert).

Diese Vermutung ist im allgemeinen selbst für starke Markoff-Prozesse falsch. Immer gilt aber:

$$T_{A^*} \leqslant W_{A^*} = W_A \text{ P-f.s.}$$

Theorem 1: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$ ein starker Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$. Zusätzlich gelte:

(i) Für alle $a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f ist der Prozeß $(f \circ X_t)_{t\geq 0}$ P-f.s. rechtsseitig stetig.

Für alle $A \subset E$ sei $T_A: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$w \longrightarrow \inf\{t > 0: X_t(w) \in A\}$$

die erste Eintrittszeit des Prozesses in die Menge A. Dann gilt für alle $A \in \mathfrak{E}$:

$$W_A = T_{A^*} = T_{(A\cap A^*)}.$$

Zum Beweis: Die entscheidende Beweisidee kann man im Beweis von **Wal**, Theorem 4.3 finden. Entscheidende Hilfsmittel sind zum einen die Ergebnisse von II, § 2 und zum anderen der Schnittsatz für gut-meßbare Mengen (siehe **De**, IV, T 10).

Nach **De**, IV, T 28 ist Bedingung 1 (i) zur folgenden wesentlich schwächer aussehenden Bedingung äquivalent:

(i') Für alle $a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f ist der Prozeß $(f \circ X_t)_{t\geq 0}$ ununterscheidbar von einem bezüglich der Filterung $(\mathfrak{M}_t)_{t\geq 0}$ gut-meßbaren Prozeß (siehe **De**, IV, D 2).

Im Hinblick auf das Erfülltsein der Bedingung 1 (i) ist das folgende Resultat interessant (siehe **En** (7), Theorem 22):

Satz 2: Sei $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$ ein starker Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$.

E sei ein Lusin-Raum, und $\mathfrak{E}$ sei die σ-Algebra der Borelschen Mengen von E.

Der Wahrscheinlichkeitsraum $(M, \mathfrak{M}, P)$ sei vollständig.

Dann existiert eine Modifikation $(X'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ von $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit den Eigenschaften:

(i) $(M, \mathfrak{M}, P, (\mathfrak{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X'_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ist ebenfalls ein starker Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{E})$ und Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$.

(ii) Für alle $a \geqslant 0$ und alle a-exzessiven Funktionen f ist der Prozeß $(f \circ X_t)_{t \geq 0}$ P-f.s. rechtsseitig stetig.

(iii) Für alle Markoffzeiten T gilt: $X'_T = X_T$ P-f.s. .

Anhang 3: Stark reguläre Mengen

Wir vereinbaren fest:

$(X, \mathbf{H}^*)$ ist ein P-harmonischer Raum mit abzählbarer Basis.

Das Innere bzw. den Abschluß einer Menge $A \subset X$ bezeichnen wir mit $\mathring{A}$ bzw. $\bar{A}$.

Ist W eine offene Teilmenge von X, so bezeichnen wir die Einschränkung von $(X, \mathbf{H}^*)$ auf die Menge W mit $(W, {}^W\mathbf{H}^*)$.

Die Balayage-Operationen bezüglich dieses harmonischen Raumes bezeichnen wir mit

$${}^W\hat{R}_f^A,\ {}^W\varepsilon_x^A.$$

Definition 1: Eine offene Menge $U \subset X$ heißt *stark regulär*, wenn $b(\overset{0}{X-U}) = X-U$ ist.

2: (a) Jede stark reguläre Menge U ist regulär, denn es gilt:

$$X-U = b(\overset{0}{X-U}) \subset b(X-U) \subset (X-U).$$

(b) Ist U eine stark reguläre Menge, so gilt:

$$X-U = b(\overset{0}{X-U}) \subset b\,(\text{f-int}(X-U)) \subset \beta\,(X-U) \subset X-U.$$

Ist also die Funktion 1 hyperharmonisch, so folgt daraus mit Hilfe von Satz III, 3.51(b):

$(X-U)$ ist S-universell.

(c) Seien U, W zwei offene Mengen mit $\overline{U} \subset W$. Dann gilt:

U ist genau dann stark regulär bezüglich $(X, \mathbf{H}^*)$, wenn U stark regulär bezüglich $(W, {}^W\mathbf{H}^*)$ ist.

(d) Offene Kugeln sind bezüglich der Laplace- und der Wärmeleitungsgleichung stark regulär.

Alle offenen Mengen, die die Bedingung von Zaremba erfüllen (siehe **He**, Satz 8.27) sind stark regulär bezüglich der Laplace-Gleichung.

Der Beweis des folgenden Lemmas ist einfach:

Lemma 3: Sei h eine harmonische Funktion auf einer offenen Menge W. Sei $A \subset W$ derart, daß $(W-A)$ relativkompakt in W ist. Dann gilt für alle $x \in W$:

$$h(x) = \int h\, d\, {}^W\varepsilon_x^A.$$

Satz 4: Sei G eine relativkompakte, offene Menge und K eine kompakte Teilmenge von G. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert eine stark reguläre, offene Menge U mit:

$K \subset U \subset \overline{U} \subset G$.

(ii) Es existiert eine reguläre, offene Menge U mit:

$K \subset U \subset \overline{U} \subset G$.

(iii) Es existieren zwei offene Mengen V und W, ein striktes, stetiges Potential u auf W und eine harmonische Funktion h auf W mit den Eigenschaften:

(α) $K \subset V \subset \overline{V} \subset W \subset G$,

(β) $\frac{u(x)}{h(x)} < \frac{u(y)}{h(y)}$ für alle $x \in \partial V$ und $y \in K$.

Beweis: (i) nach (ii) folgt aus 2(a).

(ii) nach (iii): Sei p ein striktes, stetiges Potential auf G. Wir definieren:

$$W := U,\ h := ({}^{G}\hat{R}_{p}^{(G-W)})_{|W},\ u := (p_{|W}) - h.$$

Offensichtlich ist u ein striktes, stetiges Potential und h eine harmonische Funktion auf W. Da $W = U$ regulär ist, folgt:

(1) $\lim\limits_{x \to y} \frac{u(x)}{h(x)} = 0$ für alle $y \in \partial W$.

Da p ein striktes Potential ist, folgt:

(2) $\inf \left\{ \frac{u(x)}{h(x)} : x \in K \right\} > 0$.

Wegen (1) und (2) existiert dann eine offene Menge V derart, daß die Eigenschaften (α) und (β) erfüllt sind.

(iii) nach (i): Wegen (β) existiert ein $a \in \mathbf{R}$ mit:

(3) $\frac{u(x)}{h(x)} < a < \frac{u(y)}{h(y)}$ für alle $x \in \partial V$ und $y \in K$.

Wir definieren: $A := \left\{ x \in V : \frac{u(x)}{h(x)} < a \right\} \cup (X - V)$, $U := (X - \bar{A})$.

Wegen (3) ist A offen und es gilt:

(4) $K \subset U \subset \overline{U} \subset V \subset W \subset G$.

Da u und h stetig sind, gilt:

(5) $u(x) = a \cdot h(x)$ für alle $x \in \partial A = \partial (A \cap W)$.

Für alle $x \in \partial A \subset W$ (nach (4)) können wir schließen:

$${}^{W}\hat{R}_{u}^{(A \cap W)}(x) = \int u \, d\, {}^{W}\varepsilon_{x}^{(A \cap W)} = \int_{\partial A} u \, d\, {}^{W}\varepsilon_{x}^{(A \cap W)} \text{ (nach CC, Prop. 7.1.3)}$$

$$= \int_{\partial A} a \cdot h \, d\, {}^{W}\varepsilon_{x}^{(A \cap W)} \text{ (nach (5))} = \int a \cdot h \, d\, {}^{W}\varepsilon_{x}^{(A \cap W)} = a \cdot h(x)$$

(nach Lemma 3) $= u(x)$ (nach (5)).

Da p ein striktes Potential ist, folgt daraus: $\partial A \subset b(A \cap W)$.

Da A offen ist, gilt trivialerweise: $A \subset b(A) \subset \bar{A}$.

Wir haben damit gezeigt: $(X—U) = \bar{A} = b(A) = b(\overset{0}{X}—U)$.

Also ist U stark regulär.

Korollar 5: Der harmonische Raum $(X, \mathbf{H}^*)$ besitzt genau dann eine Basis stark regulärer Mengen, wenn er eine Basis regulärer Mengen besitzt.

Mit Hilfe von Korollar 5 und 2(b) können wir nun die in III, 3.53 aufgeworfene Frage beantworten:

Korollar 6: Die Funktion 1 sei hyperharmonisch. Der harmonische Raum $(X, \mathbf{H}^*)$ besitzt genau dann eine Basis regulärer Mengen, deren Komplemente S-universell sind, wenn er eine Basis regulärer Mengen besitzt.

7: Satz 4 ist eng verwandt mit Resultaten von Mokobodzki, Sibony und Köhn (siehe **CC**, Proposition 3.1.2 und Corollary 3.1.3). Weitaus früher wurde eine wahrscheinlichkeitstheoretische Version dieser Resultate in **CP**, 3.3 bewiesen.

Zum Schluß wollen wir noch auf eine charakteristische Eigenschaft stark regulärer Mengen aufmerksam machen, die man mit Hilfe von **BH**, II, Theorem 3.15 beweisen kann:

Satz 8: Eine relativkompakte, offene, reguläre Menge U ist genau dann stark regulär, wenn für alle Funktionen $h \in \mathbf{C}(\overline{U})$, die auf U harmonisch sind, eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $\mathbf{C}(\overline{U})$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

(i) Für alle $n \in \mathbf{N}$ existiert eine offene Menge U_n' und eine auf U_n' harmonische Funktion h_n' mit:
$\overline{U} \subset U_n'$, $h_n = h_{n \mid \overline{U}}'$,

(ii) $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen h.

Literaturverzeichnis

Bauer, H.

Ba Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Berlin–New York: Walter de Gruyter (1974).

Bauermann, U.

Bau Balayage-Operatoren in der Potentialtheorie. Math. Ann. 231, 181–186 (1977).

Bliedtner, J. – Hansen, W.

BH Simplicial cones in potential theory. Inventiones math. 29, 83–110 (1975).

BH (2) Bases in standard balayage spaces. Potential theory, Proc. Colloq., Copenhagen 1979, Lecture Notes in Mathematics 787, 55–63. Springer (1980).

Blumenthal, R. M. – Getoor, R. K.

BG Markov processes and potential theory. New York-San Francisco–London: Academic Press (1968).

Brelot, M.

Br On topologies and boundaries in potential theory. Lecture Notes in Mathematics 175. Springer (1971).

Ciesielski, Z.

Cie Lectures on Brownian motion, heat conduction and potential theory. Matematisk Institut Aarhus (1966).

Cie (2) Semiclassical potential theory. Markov processes and potential theory, Proc. Symp., Madison 1967. New York: Wiley (1967).

Constantinescu, C.

Co Kernels and nuclei on harmonic spaces. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 13, 35–57 (1968).

Co (2) Markov processes on harmonic spaces. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 13, 627–654 (1968).

Constantinescu, C.–Cornea, A.

CC Potential theory on harmonic spaces. Springer (1972).

Cornea, A.–Licea, G.

CL Order and potential resolvent families of kernels. Lexture Notes in Mathematics 494. Springer (1975).

Courrège, P.–Priouret, P.

CP Axiomatique du problème de Dirichlet et processus de Markov. Séminaire Brelot-Choquet-Deny, 8e année, n°8 (1963/64).

Dellacherie, C.

De Capacites et processus stochastiques. Springer (1972).

Doob, J. L.

Do Applications to analysis of a topological definition of smallness of a set. Bull. Amer. Soc. 72, 579–600 (1966).

Dynkin, E. B.

Dy Markov processes I. Springer (1965).

Dy (2) Grundlagen der Theorie der Markoffschen Prozesse. Springer (1961).

Engelbert, H. J.

Markov processes in general state spaces.

En Part I. Math. Nachr. **80**, 19–36 (1977).

En (2) Part II. Math. Nachr. **82**, 191–203 (1978).

En (3) Part III. Math. Nachr. **83**, 47–71 (1978).

En (4) Part IV. Math. Nachr. **84**, 277–300 (1978).

En (5) Part V. Math. Nachr. **85**, 111–130 (1978).

En (6) Part VI. Math. Nachr. **85**, 235–266 (1978).

En (7) Part VII. Math. Nachr. **86**, 67–83 (1978).

Getoor, R. K.

Ge Markov processes: Ray processes and right processes. Lecture Notes in Mathematics **440**. Springer (1975).

Hansen, W.

Ha Semi-polar sets and quasi-balayage. Preprint.

Helms, L. L.

He Einführung in die Potentialtheorie. Berlin–New York: Walter de Gruyter (1973).

Hunt, G. A.

Hu Markoff processes and potentials I. Ill. J. Math. **1**, 42–93 (1957).

Hu (2) Martingales et processus de Markov. Dunod (1966).

Kac, M.

Kac On some connections between probability theory and differential and integral equations. Proc. Second Berkley Symp., 189–215 (1951).

Kac (2) Aspects probabilistes de la théorie du potentiel. Les Presses de l'Université de Montréal (1970).

Lukeš, J.

Lu Principal solution of the Dirichlet problem in potential theory. Comm. Math. Univ. Carolinae **14**, 773–778 (1973).

Meyer, P. A.

Me Probability and potentials. Waltham (Mass.): Blaisdell Publishing Company (1966).

Me (2) Processus de Markov. Lecture Notes in Mathematics **26**. Springer (1967).

Me (3) Processus de Markov: la frontière de Martin. Lecture Notes in Mathematics **77**. Springer (1968).

Me (4) Caractérisation des noyaux potentiels des semi-groupes discrets. Ann. Inst. Fourier **16**, 225–240 (1966).

Neveu, J.

Ne Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie. München–Wien: R. Oldenbourg (1969).

Rost, H.

Ro Die Stoppverteilungen eines Markoff-Prozesses mit lokal-endlichem Potential. Manuscripta math. **3**, 321–329 (1970).

Stoica, L.

Sto Local operators and Markov processes. Lecture Notes in Mathematics **816**. Springer (1980).

Stroock, D. W.

Str The Kac approach to potential theory: Part I. J. Math. Mech. **16**, 829–852 (1967).

Str (2) The Kac approach to potential theory, II. Comm. Pure Appl. Math. **20**, 775–795 (1967).

Str (3) Penetration times and passage time. Markov processes and potential theory, Proc. Symp., Madison 1967. New York: Wiley (1967).

Taylor, J. C.

Ta Potential kernels of Hunt processes. Indiana Math. Jour. **22**, 1091–1102 (1973).

Ta (2) A characterization of the kernel $\lim_{\lambda \downarrow 0} V_\lambda$ for submarkovian resolvents (V_λ). Ann. Prob. **3**, 355–357 (1975).

Ta (3) Ray processes on locally compact spaces. Math. Ann. **208**, 233–248 (1974).

Ta (4) Balayage de fonctions excessives. Séminaire Brelot-Choquet-Deny, 14e année, n°2 (1970).

Walsh, J. B.

Wal Some topologies connected with Lebesgue measure. Lecture Notes in Mathematics **191**, 290–310. Springer (1971).

Watanabe, T.

Wa On balayées of excessive measures and functions with respect to resolvents. Lecture Notes in Mathematics **191**, 311–341. Springer (1971).

Bezeichnungen

A^1, A^0	III, 3.1
A^q	III, 3.21
A^s	I, 3.2
$b(A)$	CC, S. 168
$b(A, q)$, $b(A, (V_p)_{p>0})$	III, 3.1
$B(E, \mathfrak{E})$, $B_+(E, \mathfrak{E})$, $B_b(E, \mathfrak{E})$, $B_{b,+}(E, \mathfrak{E})$	I, 1.1
b_T	III, 3.35
$C(E)$, $C_+(E)$, $C_b(E)$, $C_{b,+}(E)$, $C_k(E)$ $C_{k,+}(E)$	I, 4.38
$\mathfrak{E}^*$	Anhang 1, 4
E_b	I, 4.36
$\mathfrak{E}_u$	I, 1.1
$\hat{f}$	I, 1.11
$\mathfrak{F}^*$, $\mathfrak{F}^0$, $\mathfrak{F}_t^\mu$.	II, 3.13
$\mathfrak{F}^0$	II, 3.13 und II, 4.5
$\mathfrak{F}_t^*$, $\mathfrak{F}_t^x$, $\mathfrak{F}_t^\mu$	II, 4.5
f-int (A)	feines Innere von A
$H^*_{X,+}$	= Kegel aller positiven, hyperharmonischen Funktionen auf X.
$\mathfrak{M}_T$, $\mathfrak{M}_{T+}$	II, 1.2 und II, 4.2
$\mathfrak{M}_t^*$, $\mathfrak{M}_t^x$, $\mathfrak{M}_t^\mu$	II, 4.5
Q_f^A	III, 3.21
R_f^A	I, 2.1 und CC, S. 108
$\hat{R}_f^A$	CC, S. 108
R^μ, R_f^μ	III, 3.38
$\mathfrak{S}$	II, 3.1
Sf	I, 1.10
$\hat{S}_f^A$, S_f^A	I, 2.2
$\hat{S}(f, A, q)$, $\hat{S}(f, A, (V_p)_{p\,0})$	III, 3.1
$\mathfrak{S}((V_p)_{p>0})$, $\mathfrak{S}_0((V_p)_{p>0})$	I, 2.10
T_A	Anhang 2, 1
U_F	I, 5.16
$V = V_0$	I, 1.3
V^A	I, 5.4
$(V_p)_{p>0}$-f. ü.	I, 1.5
$(V_p^*)_{p>0}$	Anhang 1, 3
$(V_p^\mu)_{p>0}$	I, 1.2
vag-lim $\infty \longrightarrow p$	I, 4.38
W_A	II, 2.1 und II, 4.7
$\beta(A)$	BH, S. 94
$\sigma(\mathfrak{F})$, $\sigma_u(\mathfrak{F})$	I, 4.27
$\prec$	spezifische Ordnung, CC, S. 99
$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_+$, $\overline{\mathfrak{R}}_+$	= σ-Algebren der Borelschen Mengen von $[0, t]$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$ und $\overline{\mathbf{R}}_+$ I, 1.1
N, Z, Q, R	= natürliche, ganze, rationale, reelle Zahlen

Index

abzählbar erzeugt	I, 4.27
a-exzessiv	I, 1.6, Il. 24
Approximationssatz	I, § 5
assoziiert an einem harmonischen Raum	III, 1.1
assoziiert an eine Resolvente	I, 4.1
a-supermedian	I, 1.6, I, 1.24
Axiom (**inf**), Axiom (**sup**)	I, 1.14
Axiom (**inf'**)	I, 3.12
Balayage-Operator	III, 3.35
Doobscher Markoff-Prozeß	II, 1.1
Dynkinscher Markoff-Prozeß	II, 4.1
eigentliche Menge	I, 5.4
Eintrittszeit	Anhang 2, 1
Erzeuger für eine Resolvente	I, 4.28
essentielle Basis	III, 3.1
essentieller Kern	III, 3.1
exzessiv	I, 1.6, I, 1.24
feine Topologie	I, 4.18
Halbgruppe	I, 1.21
Innere Basis	III, 3.1
Markoffzeit	II, 1.2, II, 4.2
meßbare Halbgruppe	I, 1.21
multiplikativer Erzeuger	I, 4.28
normale Resolvente bzw. Halbgruppe	I, 3.19
Potentialkern	I, 1.5
Potential o, vom	I, 1.5
Ψ-Topologie	I, 4.4
Q-dünn	III, 3.21
Quasi-Balayage, Quasi-Basis	III, 3.21
Reduzierte	I, 2.1
Referenzmaß	I, 1.15
Resolvente	I, 1.2
Riesz-Erzeuger	I, 4.28
$\mathfrak{R}$-Topologie ($\mathfrak{R}$-offen, $\mathfrak{R}$-n. u. h. usw.)	I, 4.4
S-dünn, S_0-dünn	I, 3.2
separable Resolvente	I, 4.28
starke Balayage bzw. Gefegte	I, 2.2
starke Markoffzeit	II, 1.2, II, 4.2
starker Doobscher Markoff-Prozeß	II, 1.12
starker Dynkinscher Markoff-Prozeß	II, 4.6
starke Reduzierte	I, 2.2

stark regulär	Anhang 3, 1
stochastisch stetig	I, 4.5
S-universell	III, 3.47
supermedian	I, 1.6, I, 1.24
Träger eines Balayage-Operators	III, 3.35
$\mathfrak{T}$-Topologie	Anhang 1, 1
u-abzählbar erzeugt	I, 4.27
untere Regularisierte	I, 1.11
V-dominant	I, 1.18
Verzweigungspunkt	I, 3.19
vollständiges Maximumprinzip	I, 1.18
von innen semipolar	III, 3.24
wesentliche Eintrittszeit	II, 2.1, II, 4.7

Nachtrag

Satz: Jede meßbare, submarkoffsche Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ auf einem meßbaren Raum $(E, \mathfrak{E})$ erfüllt die Bedingung (P 2) (siehe II, 3.6).

Beweis:

Sei $A \in \mathfrak{E}$. Dann ist die Abbildung $F : R_+ \times E \longrightarrow R_+ (t, x) \longrightarrow P_t(x, A)$ $(\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{E})$ — $\mathfrak{R}_+$ — meßbar. Da $\{L \times B : L \in \mathfrak{R}_+, B \in \mathfrak{E}\}$ ein Erzeuger von $(\mathfrak{R}_+ \otimes \mathfrak{E})$ ist, existiert nach Lemma II, 3.5 eine Folge $(L_n \times B_n)_{n \in N}$ mit $L_n \in \mathfrak{R}_+$, $B_n \in \mathfrak{E}$ für alle $n \in N$ und $F \in B(R_+ \times E, \sigma(\{L_n \times B_n : n \in N\}))$.
Definiert man $\mathfrak{E}' := \sigma(\{B_n : n \in N\} \cup \{A\})$ so folgt daraus $F \in B(R_+ \times E, \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{E}')$. Also gilt $P_t I_A = F(t, \,) \in B(E, \mathfrak{E}')$ für alle $t \geqq 0$. Da $\mathfrak{E}'$ abzählbar erzeugt ist, folgt die Behauptung.