BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 175

NOVA KEPLERIANA
Neue Folge – Heft 9

Dieter Launert

Nicolaus Reimers Ursus

Stellenwertsystem und Algebra in der Geodaesia und der Arithmetica

Vorgelegt von Roland Bulirsch
in der Sitzung vom 2. Februar 2007

MÜNCHEN 2007
VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEIM VERLAG C. H. BECK MÜNCHEN

Mit 51 Abbildungen

ISSN 0005–6995
ISBN 978 3 7696 0969 1

Gesamtherstellung: Druckerei C. H. Beck, Nördlingen
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier
(hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff)
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Johannes Kepler gilt als einer der größten Astronomen des 16. und 17. Jahrhunderts, aber auch zur Algebra, zur Coss, hatte er Bezug. Er redigierte die Vorlagen zu Bürgis Coss und schrieb eine Einleitung zu dessen Canon Sinuum, der Sinustafel mit dem Kunstweg zur schnellen Berechnung derselben. Bürgi betrachtete die Coss als wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung seines Canon Sinuum, der vermutlich 1598 vollendet war. Allerdings wurde die *Arithmetica Bürgii,* wie sie seit Hansch genannt wird, auch nach der Redaktion Keplers nicht gedruckt.

Die Coss hatte sich am Ende des 16. Jh. als Vorstufe zur heutigen Algebra etabliert, und viele Mathematiker der Zeit haben Beiträge geleistet, z.B. Christoph Rudolf oder Michael Stifel, aber auch Nicolaus Reimers Ursus, der sonst mehr durch sein *Fundamentum Astronomicum* 1588 bekannt ist. Das wesentliche Verdienst der Cossisten ist die Formalisierung der algebraischen Schreibweise, insbesondere die konsequente Verwendung des Potenzbegriffes. Gerade hierbei ist das Werk von Ursus besonders zu beachten. List/Bialas schreiben 1973 zutreffend: „So verbindet die Coss so verschiedene Geister wie Kepler und Bürgi, Brahe und Ursus."

Kepler steht zu Ursus in besonderer Beziehung, weil er in den Streit zwischen Brahe und Ursus hineingezogen worden war. Wegen seiner finanziellen Abhängigkeit von Brahe stellte Kepler sich in diesem Streit nach außen hin auf die Seite Brahes, vermied es aber, sich direkt einzumischen. So ist denn seine im Auftrag Brahes angefertigte Arbeit *Apologia Tychonis contra Ursum* auch weniger eine Parteinahme für Brahe, als viel mehr eine Auseinandersetzung mit Ursus' Hypothesenvorstellung. Kepler hatte diese Schrift selbst nur als *De Hypothesibus Tractatus* bezeichnet. Nach seiner Ernennung zum kaiserlichen Mathematiker, nach Brahes Tod 1601, schien es Kepler nicht mehr angemessen, weiter an der ungeliebten *Apologia* zu arbeiten. Schon gar nicht wollte er den Ruf von Ursus anfechten, auch weil dieser Brahes und sein Vorgänger im Amt war.

Noch im Januar 1600, während seiner endgültigen Übersiedlung nach Prag, traf sich Kepler, wohl auf eigenen Antrieb, mit Ursus. Dabei sagte er Ursus „seine Meinung ins Gesicht" über die ohne seine Zustimmung erfolgte Veröffentlichung seines Briefes vom 15. Nov. 1595 an Ursus, die ihn beinahe in Konflikt mit Brahe gebracht hätte. Seinem Charakter entsprechend schied Kepler jedoch von Ursus in friedlichem Einvernehmen.

In diesem Brief hatte der noch junge, unerfahrene und noch unbekannte Kepler den kaiserlichen Mathematiker Ursus in hohen Tönen gelobt, ihn als seinen Lehrmeister bezeichnet, weil er aus dessen Buch *Fundamentum Astronomicum* gelernt habe. Es erscheint mir daher angemessen, gerade den algebraischen Teil von Ursus' Werk, das Stellenwertsystem in seiner *Geodaesia* und seine Coss in der *Arithmetica Analytica* bzw. in der ihr zu Grunde liegenden Handschrift *Tractatiuncula* zu beleuchten.

Ich danke der Österreichischen Nationalbibliothek Wien (*Tractatiuncula*, Sign. Cod. Series nova 10943); der Herzog-August-Bibliothek Wolfenbüttel (*Geodaesia*, Sign. Nb 555); der Universitäts- und Forschungsbibliothek Erfurt/Gotha (*Geodaesia*, Sign. Math. 4° 44/8 (4)); der Studienbibliothek Dillingen (*Arithmetica*, Sign. XVI 1394); The British Library (*De la Roche*, Sign. 1605/26); dem Germanischen Nationalmuseum Nürnberg (*Johann Junge*, Sign. 8° H. 2673); der Stadtbibliothek Trier für eine hervorragende Kopie von Ludolph van Ceulens *Van den Circkel,* Delf 1596.

Meldorf, 13. Mai 2007.

Erstes Buch:

Nicolaus Reimers Ursus

Geodaesia Ranzoviana

Landrechnen und Feldmessen

Leipzig 1583

GEODÆSIA

RANZOVIANA.

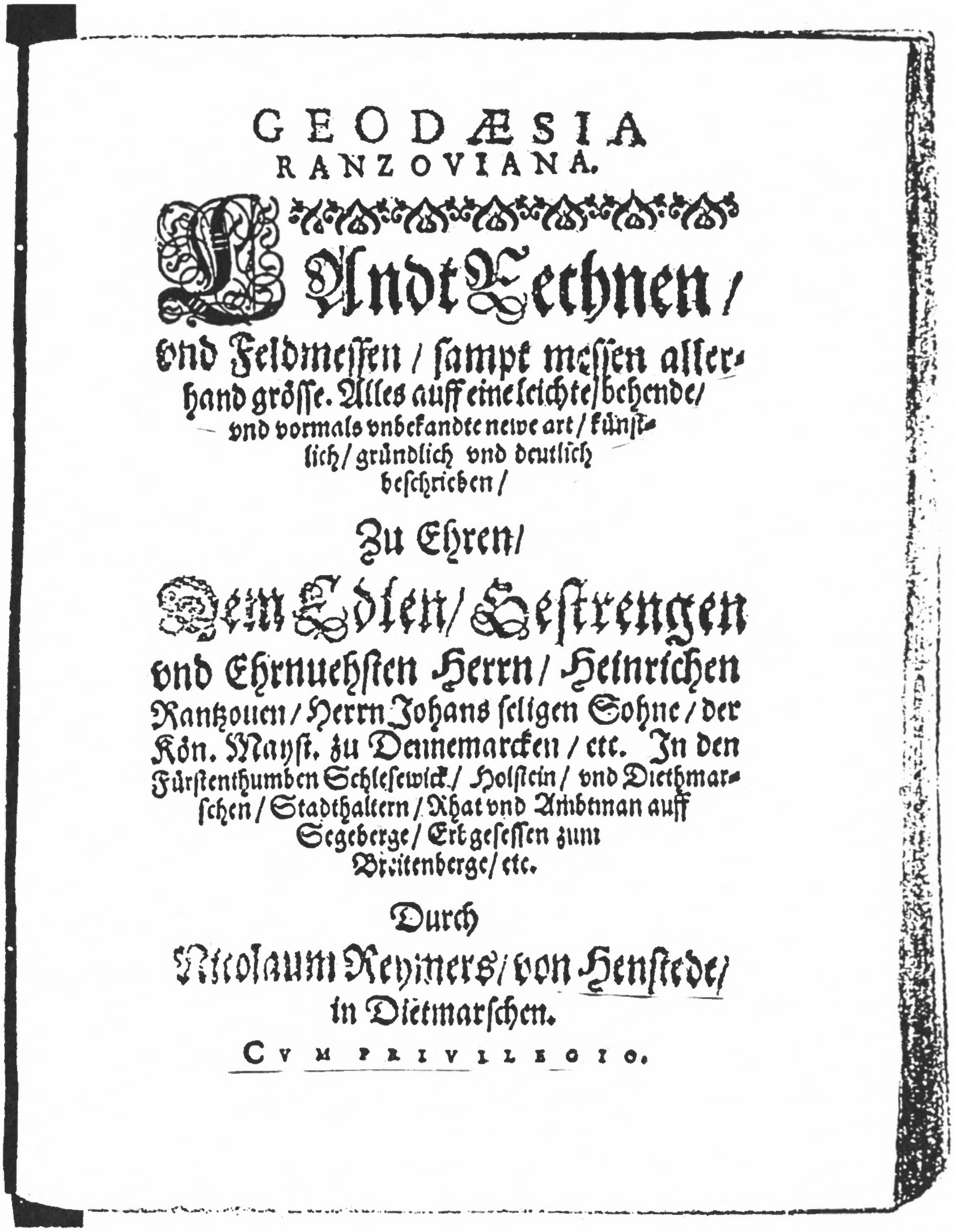
Landrechnen

und Feldmessen, samt Messen von allerhand Größen.
Alles auf eine leichte, schnelle und vormals unbekannte, neue Art,
günstig, gründlich und deutlich beschrieben

zu Ehren
dem edlen, gestrengen
und ehrenfesten Herrn Heinrich Rantzau,
seligen Herrn Johanns Sohne,
der königlichen Majestät zu Dänemark etc. Statthalter
in den Fürstentümern Schleswig, Holstein und Dithmarschen,
Rat und Amtmann auf Segeberg,
erbgesessen zu Breitenburg etc.

Durch
Nicolaus Reymers von Hennstedt
in Dithmarschen.
CUM PRIVILEGIO.

[1583, bei Georg Defner in Leipzig]



GEODÆSIA
RANZOVIANA.
Landt Rechnen /
vnd Feldmessen / sampt messen aller-
hand grösse. Alles auff eine leichte/behende/
vnd vormals vnbekandte newe art / künst-
lich / gründlich vnd deutlich
beschrieben /
Zu Ehren /
Dem Edlen / Gestrengen
vnd Ehrnuehsten Herrn / Heinrichen
Rantzouen / Herrn Johans seligen Sohne / der
Kön. Mayst. zu Dennemarcken / etc. In den
Fürstenthumben Schleswick / Holstein / vnd Diethmar-
schen / Stadthaltern / Rhat vnd Ambtman auff
Segeberge / Erbgesessen zum
Breitenberge / etc.
Durch
Nicolaum Reymers / von Henstede /
in Dietmarschen.
CUM PRIVILEGIO.

Abb.1: Titelblatt, Forschungsbibliothek Erfurt/Gotha Schloss Friedenstein, Sign. Math.4° 44/8 (4)

Einleitung

Nicolaus Reimers[1] Ursus wurde am 2. Februar 1551 in Hennstedt in Dithmarschen geboren, einem Dorf im heutigen Schleswig-Holstein. Über seine Eltern ist nichts bekannt, er hat in seinen autobiographischen Angaben nie über diese berichtet. Aus sehr ärmlichen Verhältnissen stammend, hat er schulischen Unterricht nicht genossen, insbesondere hat er nie eine der damaligen Lateinschulen besucht. Er berichtet selbst: „Ich aber durchlief die Schulen wie die Sau den Garten durchstreift und grüßte sie kaum von weitem."[2] Der Vergleich stammt offensichtlich aus eigener Anschauung während der Zeit, da er mit 18 Jahren, 1569 in Hennstedt, die Schweine hütete.[3] Ein Grundwissen kann Ursus nur bei seinem Pfarrer in Hennstedt erworben haben, ansonsten lernte er autodidaktisch Lesen und Schreiben, Latein und Griechisch und die Mathematik.

Heinrich Rantzau (1526-1598) auf Schloss Breitenburg bei Itzehoe, Statthalter des dänischen Königs im königlichen südlichen Anteil Schleswig-Holsteins, wurde ca. 1574 auf den 23-jährigen Ursus aufmerksam und holte ihn auf seinen Hof Hattstedt bei Süderhastedt in Dithmarschen als Landmesser. Bei dieser Tätigkeit konnte Ursus sicherlich auf die berühmte Bibliothek Rantzaus auf Breitenburg zurückgreifen. Während seiner Zeit auf Hof Hattstedt schrieb Ursus zwei Bücher, die beide von seinem Förderer und Mäzen Rantzau auf dessen Kosten gedruckt wurden und die dieser in seine Bibliothek aufnahm,[4] 1580 die *Grammatica Ranzoviana*, und 1583 die *Geodaesia Ranzoviana*. Dieses Frühwerk *Geodaesia*, in der Ursus ein Stellenwertsystem zur Basis $^1/_{16}$ vorstellt, ist Gegenstand dieser Untersuchung.

1584 verließ Ursus den Dienst bei Heinrich Rantzau, vielleicht weil die Landvermessung in Dithmarschen abgeschlossen war, trat als Diener bei dem dänischen Edelmann Erik Lange in Dienst und besuchte mit ihm 1584 Tycho Brahe auf Ven.[5] Über zwei Anstellungen als Hauslehrer in Pommern kam Ursus 1586 an den Hof des Landgrafen Wilhelm IV. nach Kassel, wo er Jost (Justus) Bürgi zum Freund gewann. Von diesem lernte er Vieles über Astronomie, u.a. auch Paul Wittichs Gleichung zur Prosthaphaerese.[6] In Straßburg kam Ursus 1587-1591 in Berührung mit der akademischen Welt. Hier veröffentlichte er 1588 sein Hauptwerk *Fundamentum Astronomicum*, das ihn auch berühmt machte. 1591 schließlich wurde er als Mathematiker an den Hof Kaiser Rudolphs II. nach Prag berufen, wo er am 15. August 1600 an Schwindsucht starb.[7]

Ursus schrieb die *Geodaesia* im Alter von 31 Jahren. Dennoch ist sie als ein Jugendwerk anzusehen, da er erst im Alter von 18 Jahren Lesen und Schreiben lernte, und danach wohl auch erst Mathematik. In der *Geodaesia* finden sich kaum wesentlich neue Erkenntnisse, das Buch fällt jedoch auf wegen der pädagogisch geschickten Darstellung seines Inhalts. Und es ist nicht lateinisch geschrieben, sondern, wie während der Renaissance häufiger, auf Deutsch. Ursus' „Muttersprache" war allerdings niederdeutsch, frühneuhochdeutsch seine erste „Fremdsprache".

Die *Geodaesia* ist in vier „Bücher" aufgeteilt und beginnt mit der bemerkenswerten Darstellung eines Bruchstellenwertsystems in cossischer Schreibweise, mit hochgestellten römischen Zahlen zur Bezeichnung der Exponenten von Potenzen, deren Basis der Bruch $^1/_{16}$ ist. Ursus verwendet also Stammbrüche $(^1/_{16})^n$ mit natürlichem n bis zu n=9. Dabei ist die Darstellung unabhängig von der Basis $^1/_{16}$, so dass er im Grunde ein basisfreies Stellenwertsystem darstellt, bei dem statt der Basis $^1/_{16}$ jede beliebig andere gewählt werden könnte. Ursus schreibt: „Was hier von den Sechzehnern gesagt ist, soll gleichermaßen auch von Vierzehnern, Achtzehnern und von anderen Teilen verstanden werden." Ursus ist sich somit bewusst, dass man die Basis beliebig austauschen kann. Die cossische Schreibweise überzeugt auch heute noch durch ihre Einfachheit in Darstellung und im Rechnen auch gegenüber der heutigen Schreibweise mit Brüchen. Allerdings handelt es sich „nur" um ein Stellenwertsystem mit den Potenzen eines Stammbruches und nicht um Bruchrechnung mit beliebig verschiedenen Nennern. Ursus dazu: „Brüche sind Teile eines Ganzen, aber nicht gemeine Brüche, sondern Sechzehner genannt, sechzehn Teile sind ein Ganzes."[8]

---

[1] auch Reymers, Raimarus, Raymarus.

[2] *Astronomische Hypothesen*, Blatt G1r: „Ego vero ut sus per hortum scholas percurri, et vix à limine salutavi."

[3] Neocorus, *Chronik des Landes Dithmarschen*, hrsg. von F.C.Dahlmann, Kiel 1827, Bd. II, S. 392: „Nicolaus Ursus van Henstede hefft, do he alß ein grott Knecht van 18 Jaren de Schwine gehodt, unnd na entfangen Elementis sick sulvest geovet, unnd proprio Marte Latinam, Graecam ... gelernet."

[4] Peter Lindeberg, *Hypotyposis arcium*, Hamburg 1591, S. 64f.

[5] Insel im Öresund, Ven (heute schwedisch) = Hven (dänisch).

[6] $\sin\alpha \cdot \sin(90°-\gamma) = {}^1/_2 \cdot [\sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha-\gamma)]$.

[7] Ausführlicher zum Leben und Werk von Ursus siehe bei Dieter Launert, *Nicolaus Reimers (Raimarus Ursus), Günstling Rantzaus – Brahes Feind, Leben und Werk*, München 1999.

[8] Ursus, *Geodaesia* 1583, Blatt B2r.

Die Basis $^1/_{16}$ verwendet Ursus nach eigener Aussage, weil in Dithmarschen angeblich die Längenmaße jeweils in 16 Teile unterteilt wurden: 1 Rute in 16 Schuh (Fuß), 1 Schuh in 16 Fingerbreiten, 1 Finger in 16 Strohbreiten, 1 Stroh in 16 Haarbreiten. Schon die Wortwahl lässt erkennen, dass dies kein Abbild der Realität für die Längenmaße in Dithmarschen war. Zwar sind Rute, Schuh (Fuß) und Finger[9] alte dithmarscher Maße, aber Stroh und Haar lassen sich nicht nachweisen.

Ursus zeigt Beispiele zum Rechnen mit solchen Bruchzahlen, zuerst das Addieren, wobei einfach die Zähler bei gleichem Stellenwert zu addieren sind unter Beachtung von 16er-Überträgen, dann das Multiplizieren, wobei die Zähler zu multiplizieren, die Exponenten der Stellenwerte jedoch einfach zu addieren sind, wie wir es heute bei der Potenzrechnung tun. Erst dann folgen wie üblich Subtrahieren und Dividieren.

Schließlich noch das Wurzelziehen und das Ziehen der Kubikwurzel. Aus einem Beispiel zum Quadrieren heraus zeigt Ursus zuerst das Wurzelziehen als Division, wobei allerdings der Radikand bereits bekannt ist. Dann jedoch folgt das eigentliche Wurzelziehverfahren, wie es uns auch heute noch bekannt ist durch Gemma Frisius (1508-1555), der es in seiner *Arithmeticae Practicae Methodus facilis*[10] 1540 an Hand von vier Beispielen gut verständlich vorführt. Das Verfahren geht schon auf Theon von Alexandria zurück, der Sechzigerbrüche verwendete.[11] Auch Johannes Widmann von Eger hat in seinem Rechenbuch 1489[12] neben der elementaren Bruchrechnung schon das Wurzelziehverfahren beschrieben. Ursus' Beispiel im Hexadezimalsystem lautet, ins Dezimalsystem umgerechnet,

$$\sqrt{0{,}079.204.592.853.784.561.139.226.562.500} = 0{,}281.433.105.468.750,$$

an dem bereits moderne Taschenrechner scheitern. Anschließend folgt das analoge Verfahren zur Berechnung von Kubikwurzeln.

Es ist sicherlich beachtenswert, dass Ursus zwei Jahre vor der Veröffentlichung von Simon Stevins[13] nur 36 Seiten umfassenden kleinen Schrift *De Thiende*, die ursprünglich 1585 in holländischer Sprache erschienen war und im gleichen Jahr als *La Disme* in französischer, Stellenwertsysteme propagiert. Stevin hatte darin mit Überzeugungskraft die Einführung von Dezimalbrüchen und vor allem die Anwendung auf Münzen, Maße und Gewichte verlangt. Es heißt bei ihm, dass man die Rute „Anfang“ [Ganze] nennen werde und sie in zehn gleiche Teile teile, deren jeder dann „Erstes“ [Zehntel] ausmachen werde; danach werde man jedes Erste in zehn gleiche Teile teilen, deren jeder ② sein werde [Hundertstel], und so fort. Stevin weist auch auf das 60er-System der Antike hin und dass es nicht das Zweckmäßigste sei.

Die Sellenwertsystematik wurde schon früh in Indien für die ganzen Zahlen erfunden, mit einem eigenen Symbol 0 für „Leere“. Die Araber brachten das Stellenwertsystem nach Westeuropa, wo es ab ca. 1000 n.Chr. (Gerbert von Aurillac) auftritt. Spätestens vom 12. Jh. an besaß das Abendland das Dezimalsystem für die ganzen Zahlen und das Sexagesimalsystem für Brüche, das bereits die Babylonier in sumerischer Zeit benutzten, jedoch noch ohne ein Symbol für die Null. Und die meisten Rechenbücher des Mittelalters und der Renaissance in Europa enthalten Abschnitte über die Sechzigerbrüche.[14]

Ein vollständiges Positionssystem, das Ganze und Brüche einheitlich umfasst, entwickelte sich sowohl im Sechziger- als auch im Zehnersystem. Das Sechzigerpositionssystem umfasst dann auch die Ganzen in aufsteigenden Sechzigerpotenzen und tritt bei dem Araber Kušyār ibn Labbān um 1000 n.Chr. auf, in Europa dann in den Alfonsinischen Tafeln (um 1300 n.Chr.), bei Johann von Gmunden (ca. 1380-1442), bei Orontius Finäus (1532) und bei Caspar Peucer (1556).[15] Das vollständige Dezimalsystem, auch mit den Zehnerbrüchen, erreicht seinen Höhepunkt zweifellos bei Simon Stevin. Vorläufer finden sich Mitte des 15. Jh. in einer Wiener Handschrift,[16] in dem die Beispielrechnungen sehr modern aussehen und in dem der Begriff Ziffer (ψηφιά) verwendet wird.[17] Später dann in Christoph Rudolffs *Exempel Büchlin* von 1530 und in dessen Coss von 1525.

In der Vorrede widmet Nicolaus Reimers Ursus sein Buch seinem Förderer und Mäzen Heinrich Rantzau „als Neujahrsgabe“. Er begründet mit Hinweis auf Plato, warum die Beschäftigung mit der Arithmetik, der Geometrie und der Astronomie von besonderer Wichtigkeit und Nützlichkeit ist. Er stellt die Arithmetik und die Geometrie allegorisch nebeneinander als „zwei dem menschlichen Gemüt

---

[9] Otto Mensing, *Schleswig-Holsteinisches Wörterbuch*, Bd. II, Neumünster 1929, S. 99.

[10] Fol. XXIIII - XXIX. Erstausgabe dieses Buches Antwerpen 1540. Ich danke Helmut Haller in München für diesen Hinweis.

[11] Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig 1880, Bd. I, S. 420f.

[12] *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft*, Leipzig 1489, ab fol. 29.

[13] Brügge 1548 - Leiden 1620. Helmuth Gericke/Kurt Vogel, Hrsg., *Simon Stevin De Thiende*, Frankfurt a.M. 1965, S. 21.

[14] Siehe dazu Gericke/Vogel, *Simon Stevin De Thiende*, S. 41.

[15] Siehe Gericke/Vogel, S. 42f.

[16] Hunger/Vogel, *Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jh.*, Wien 1963. Siehe dazu Gericke/Vogel, S. 45.

[17] Siehe Gericke/Vogel, S. 45.

angeborene Flügel". Ursus begründet damit, warum er in einem Buch über das Landmessen die aus unserer Sicht so unterschiedlichen Bereiche wie die Arithmetik und die elementare Geometrie zusammenfasst. Deren „Töchter" Astronomie und Geodäsie seien daher ebenso verbunden. Die erste strebe himmelwärts, die zweite herab zur Erde. Den einen Flügel, die Geodäsie, beschreibt Ursus hier, den anderen, die Astronomie, will er dann später in Druck gehen lassen, ein Vorhaben, das er in Straßburg 1588 mit dem *Fundamentum Astronomicum* verwirklicht.

Obwohl die *Geodaesia* im Frühneuhochdeutschen des 16. Jahrhunderts geschrieben ist, wirkt die Satzstellung an das Lateinische angelehnt, wenn etwa das Verb, nach langen Einschüben, erst am Satzende auftritt.[18] Den folgenden Text der Vorrede und der *Geodaesia* selbst habe ich versucht, textnah in heutiges Deutsch zu übertragen. Zu lange Sätze habe ich zumeist geteilt, die Interpunktion ist heutigem Gebrauch angepasst. Die in heutiges Deutsch übertragenen Originaltexte von Ursus sind kursiv gedruckt, in eckigen Klammern [Anmerkung] stehen Anmerkungen, die nicht im Text vorkommen.

[18] Z.B. Vorrede A2v im Original: „Welches Göttliches und Platonisch oraculum ... ... mag verstanden werden."

„V o r r e d e

Dem edlen, gestrengen und ehrenfesten[19] *Herrn Heinrich Rantzau, seligen Herrn Johanns Sohn, der königlichen Majestät zu Dänemark etc. Statthalter in den Fürstentümern Schleswig, Holstein und Dithmarschen, Rat und Amtmann auf Segeberg und erbgesessen zu Breitenburg etc., meinem besonders großzügigen Herrn und lieben Junker.*

Edler, gestrenger und ehrenfester Herr. Euer Gestrengen gehören meine bereitwilligen, geflissentlichen Dienste neben Wünschen gottseliger Gnaden und alles Gute zu jeder Zeit. Großgünstiger Herr Statthalter: es sagt der hocherleuchtete und weitberühmte Philosoph Plato, dass die zwei freien Künste, die Arithmetik und die Geometrie, die Rechen- und die Messkünste, dem menschlichen Gemüt zwei von göttlicher Weisheit angeborene Flügel seien, damit der Astronom oder Sternkundige gen Himmel fliege und die oberen himmlischen Bewegungen gleichsam gegenwärtig betrachte und beschaue.[20] *Diese göttliche und platonische Weissagung oder dieser gottselige Spruch mag verstanden werden sowohl von der unaussprechlich nutzbaren Wissenschaft*[21] *der Geodaesie, das ist die Kunst von der Messung und Aufteilung der Erde, Äcker und Felder, als auch von der Astronomie oder der* [Wissenschaft von der] *Bewegung himmlischer Körper. Denn es wurde Thales von Milet, einer der sieben Weisen in Griechenland, von einer Magd schimpflich und spöttisch verlacht, als er bei der Betrachtung himmlischer Dinge, um diese zu durchsuchen*[22] *und um sie zu ergründen, in eine Grube fiel und also die irdischen Dinge vergaß, da er die himmlischen betrachtete.*[23] *Deshalb sollen diese zwei Wissenschaften, die himmlische Astronomie und die irdische Geodaesie, wie die unter vielen anderen vornehmsten zwei Töchter der Arithmetik und der Geometrie beide zugleich betrachtet, verbunden oder zusammengefügt werden und beide wie aus einem Grund ihren Ursprung nehmend nicht getrennt oder voneinander geschieden werden. Denn ebenso wie der Astronom oder Sternseher mit diesen zwei Flügeln aufwärts gen Himmel fliegt und daselbst sein Werk vollbringt, so steigt auch der Geometer oder Landmesser mit diesen zwei Flügeln zum Vollbringen seines Werkes hernieder zur Erde. Und somit haben diese zwei Wissenschaften, die Astronomie und die Geodaesie, keinen großen Unterschied; die eine steigt nur hernieder, die andere fliegt aufwärts.*

Den kleineren dieser zwei Flügel der genannten zwei Wissenschaften, nämlich die Geodaesie, habe ich im folgenden Werk aufs Günstigste und Gründlichste, dennoch aufs Leichteste und Deutlichste, mit meinem ganzen und besten Vermögen beschrieben und an den Tag gebracht, welche ich Euer Gestrengen als meinem großgünstigen Herrn und lieben Junker und Förderer, der mir auf allen Wegen, zu allen Zeiten und mit aller Gunst geneigt gewesen ist, der zusätzlich zu diesen mathematischen, astronomischen, geometrischen und zur Baukunst[24] *gehörenden Wissenschaften eine besondere Lust und Liebe hat, der mit Messen der Länderei und Felder oftmals beladen wird, da er die Verwaltung dieses Landes verantwortlich trägt,*[25] *als ein günstiges und köstliches Kleinod als Neujahrsgabe verehrt und zugeschrieben haben will, mit emsiger und dienstlicher Bitte, E.G. wollen mir solche Flügel gegen alle Geier, Eulen und Kauze und gegen aller unartigen Vögel unnützes Schreien und Schwatzen hochhalten helfen.*[26]

Alsdann will ich zum Zeichen der Dankbarkeit, will's Gott, in künftigen Jahren die Flügel der Göttlichen Wissenschaft Astronomie auch auf diese Art und auch zu Euer Gestrengen Ehren mit den allerschönsten Federn und mit allerhand Farben geschmückt in Druck gehen lassen. Ich stelle mich unter E.G. gnädigen Schutz und befehle mich derselben Gunst.

Datum auf E. Gest. Hofe zu Hattstedt[27] *in Dithmarschen, den 14. September 1583.*

E. Gest. gutwilliger Diener *Nicolaus Reymers,*[28] *Landmesser."*

---

[19] Gestrengen = Ehrenprädikat des Ritterstandes; siehe Grimm, *Deutsches Wörterbuch*. Ehrenfest = würdevoll; siehe Otto Mensing, *Schleswig-Holsteinisches Wörterbuch*, Neumünster 1927-35.

[20] Phaidros 246-248.

[21] Ursus verwendet hier stets das Wort „Kunst".

[22] „perscrutieren"

[23] Plato lässt dies Sokrates sagen. Theaitetos 174a.

[24] „Architectur"

[25] Heinrich Rantzau hatte nach der Eroberung Dithmarschens 1559 als Stellvertreter des dänischen Königs in Dithmarschen den Auftrag erhalten, die Vermessung des Landes für die Steuerveranlagung vornehmen zu lassen. Wegen der zwischen dem König und Herzog Adolf von Gottorf strittigen Fälle und wegen der späteren Zweiteilung des Landes statt der ursprünglichen Dreiteilung dauerte dieser Prozess bis in die 1580er Jahre.

[26] Ich habe diesen langen Satz in seiner Form ungeteilt übernommen, weil er die Sprache von Ursus gut wiedergibt, z. B. das weite Auseinanderziehen der Satzteile „welche [die Geodaesie] ich E.G. ... ... als Neujahrsgabe zueignen will". Fernerhin macht Ursus hier, wie auch im Folgenden und in allen seinen späteren Werken von der rhetorische Figur des Hendiadyoin ausgiebig Gebrauch, bei der ein Begriff durch zwei Synonyme ausgedrückt wird, wie etwa „nach meinem ganzen und besten Vermögen", „eine besondere Lust und Liebe", „ein günstiges und köstliches Kleinod".

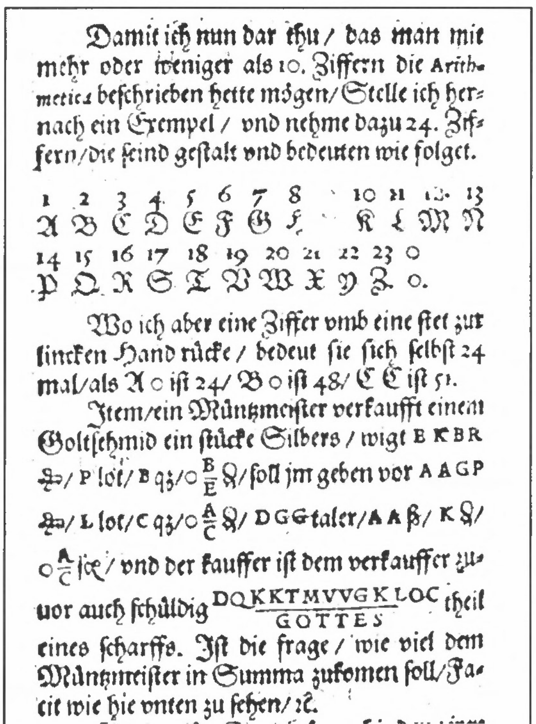
[27] Das ist Kleinhastedt/Lütjenhastedt bei Süderhastedt, nicht das bekanntere Hattstedt nördl. Husum in Nordfriesland.

[28] In der *Geodaesia* verwendet Ursus seinen deutschen Namen Nicolaus Reymers (in der Vorrede) bzw. Reimers (im Schluss). Später benutzt er die latinisierte Form Nicolaus Raimarus (Raymarus), mit dem Zusatz Ursus für das Geschlecht der Baren, aus dem er stammt.

Die *Geodaesia* ist in vier „Bücher" eingeteilt, zusätzlich Vorrede und Schluss. Sie haben etwa gleichen Umfang.[29] Im ersten Buch der *Geodaesia* benutzt Nicolaus Reimers Ursus ein Stellenwertsystem in cossischer Schreibweise, indem er die Stellenwerte, d.h. die Exponenten zur Basis, mit den römischen Zahlen I, II, III, IV, V, ... IX bezeichnet. Er beschreibt allerdings nicht ein Stellenwertsystem für die ganzen Zahlen, sondern ein solches für Brüche! Als Basis wählt Ursus $^1/_{16}$, so dass nach den ganzen Zahlen (in Dezimalschreibweise) die Brüche mit den Nennern 16, 16^2, 16^3 usw. bis zu 16^9 auftreten. Sein Stellenwertsystem ist im Grunde basisfrei, denn die Basis $^1/_{16}$ ist durch jeden anderen Stammbruch ersetzbar; die Basis erschließt sich aus den Überträgen in die nächste Stelle. Ursus sagt sogar ausdrücklich in Kapitel 2, dass statt der Basis 16 auch 14 oder 18 oder andere Teile gewählt werden können! Er begründet die Wahl von 16 damit, dass in Dithmarschen angeblich die Längenmaße in jeweils 16 Teile untergliedert würden, was für Rute/Fuß und Fuß/Finger zutrifft, hingegen in anderen Ländern halt eine andere Anzahl Schuh (Fuß) auf eine Rute kämen. Außerdem sei die 16 die geschickteste Zahl, weil sie eine Quadratzahl sei, ja sogar das Quadrat einer Quadratzahl.

In Süderdithmarschen, in weiten Teilen Norderdithmarschens, in Hamburg und Lübeck galt 1 Rute tatsächlich 16 Fuß, die Lundener Rute in Norderdithmarschen hingegen 18 Fuß, die Hamburger Marschrute nur 14 Fuß. Aber sowohl das Fußmaß wie damit auch die Rute wichen in den verschiedenen Regionen voneinander ab.[30]

Ursus ist sich bewusst, dass er keine elementare Bruchrechnung liefert, schon allein wegen der cossischen Schreibweise, in der ja quasi Variable verwendet werden, wenn auch noch nicht in der Form, wie wir sie nach Viëta kennen. Ursus bemerkt in Kap. 2 „hier aber nicht gewöhnliche Brüche".


Damit ich nun dar thu / das man mit mehr oder weniger als 10. Ziffern die Arithmetica beschrieben hette mögen / Stelle ich hernach ein Exempel / vnd nehme dazu 24. Ziffern / die seind gestalt vnd bedeuten wie folget.

1 2 3 4 5 6 7 8 10 11 12 13
A B C D E F G H K L M N
14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 0
P Q R S T V W X Y Z o.

Wo ich aber eine Ziffer vmb eine stet zur lincken Hand rücke / bedeut sie sich selbst 24 mal / als A o ist 24 / B o ist 48 / C C ist 51.

Item / ein Müntzmeister verkaufft einem Goltschmid ein stücke Silbers / wigt B K B R ℔ / P lot / B q / o $\frac{B}{E}$ ₰ / soll jm geben vor A A G P ℔ / L lot / C q / o $\frac{A}{C}$ ₰ / D G G taler / A A ß / K ₰ / o $\frac{A}{C}$ ſc / vnd der kauffer ist dem verkauffer zuvor auch schüldig $\frac{DQKKTMVVGKLOC}{GOTTES}$ theil eines scharffs. Ist die frage / wie viel dem Müntzmeister in Summa zukomen soll / Facit wie hie vnten zu sehen / etc.

Abb. 2: Johannes Junge, Rechenbuch 1578, Blatt L3v. 24-er Stellenwertsystem. Germ. Nat.museum Nürnberg, 8° H 2673.

Selbstverständlich werden bei Ursus noch keine modernen Begriffe wie Stellenwert oder Zahlensysteme oder Basis verwendet, und er wird die heutige Bedeutung derselben, insbesondere im Dualsystem, nicht gesehen haben. Er wollte nur eine neue Rechenmethode schaffen, die leider keinen Nachahmer fand. Ich weiß nicht einmal, ob Leibniz, der das Dualsystem beschrieb, an eine Verallgemeinerung auf andere Basen als 2 und 10 dachte. Da die *Geodaesia* im Frühneuhochdeutschen geschrieben ist, muss Ursus Begriffe für die Dezimalstelle einer ganzen Zahl als „statt" oder „stette", und für den Bruchstellenwert als „unterscheid" oder „der brüche unterscheid" prägen oder teilweise übernehmen. Und er beschreibt das Rechnen in einem solchen Hexadezimalsystem, jedoch nicht das Umrechnen von Dezimalzahlen in ein Sechzehnersystem. Von einer Theorie oder Grundlage von Stellenwertsystemen kann noch keine Rede sein. Dass Ursus jedoch tatsächlich ein Stellenwertsystem vor Augen hat, lässt sich belegen durch eine Seite aus dem Buch des Lübecker Rechenmeisters Johann Junge,[31] *Rechenbuch auff den Ziffern und Linien*, Lübeck 1578, Blatt L3v, das Ursus vorgelegen hat. Dort sagt Junge als Einführung zu einem Scherzbeispiel, dass er jedem Buchstaben von A bis Z (ohne J, O, U) die „Ziffern" 1 bis 23 zuordne und zusätzlich die 0 als 24. Ziffer. Stehe ein Buchstabe bzw. eine dieser „Ziffern" eine Stelle weiter links, so habe sie den 24-fachen Eigenwert. Als einfache Beispiele nennt Junge A0 = 24, B0 = 48 und BC = 2·24 + 3 = 51.[32] Da Ursus nachweislich dieses Buch in Händen und sorgfältig gelesen hatte, ist es wahrscheinlich, dass diese Beschreibung eines Stellenwertsystems mit 24 „Ziffern", bei dem halt die 24 Buchstaben

[29] Vorrede: 5 S., Buch I: 21 S., Buch II: 22 S., Buch III: 18 S., Buch IV: 16 S., Schluss: 2 S.

[30] Näheres siehe bei Klaus-Joachim Lorenzen-Schmidt, *Kleines Lexikon alter schleswig-holsteinischer Gewichte, Maße und Währungseinheiten*, Neumünster 1990.

[31] Johann Junge aus Schweidnitz, 1567 Schüler von Caspar Frantz in Schweidnitz, 1568 Caspar Schleupner in Breslau, 1570 Steffan Brechtel in Nürnberg, Andreas Gundelfinger in Nürnberg, Johann Neudörfer in Nürnberg. Weitere biographische Angaben im oben zitierten *Rechenbuch*, Lübeck 1578, und im Teil *Tractatiuncula* in diesem Buch.

[32] Druckfehler: CC = 51 statt BC.

(einschließlich der Null) als Ziffern auftreten können, ihn fasziniert hat. Wahrscheinlich beschreibt Johannes Junge die früheste Erwähnung eines solchen Stellenwertsystems mit mehr als zehn Ziffern.

Nach der Einführung des cossischen Stellenwertsystems folgen, mit Beispielen steigender Schwierigkeit, Erläuterungen zum Addieren und Multiplizieren, dann zum Subtrahieren und Dividieren, schließlich zum Ziehen von Quadratwurzel und dritter Wurzel. Das Addieren und Multiplizieren läuft ja bekanntlich auf das Addieren bzw. Multiplizieren der Zähler hinaus, wobei nur auf die Sechzehner-Überträge zu achten ist, beim Multiplizieren noch auf das Addieren der Stellenwerte (Exponenten). Beim Subtrahieren muss gegebenenfalls ein Sechzehner-Übertrag vom größeren Bruch auf den kleineren erfolgen, beim Dividieren werden die Zähler, nach Stellenwert fortschreitend und unter Mitnahme von Resten durch den Zähler des Divisors dividiert, wobei die Rechnungen natürlich aufgehen.

Das erste Buch: Vom Landrechnen

Kapitel 1: Von Zahlen[33]

„Die Geodäsie ist eine Wissenschaft, um die Größe eines Dinges zu finden. Dies geschieht durch Rechnen und Messen. Rechnen ist eine Lehre von Zahlen und enthält Bezeichnung und Rechenart.[34] *Bezeichnung der Zahlen ist eine Erläuterung, was jede Zahl bezeichnet, und sie gibt es in ganzen oder gebrochenen Zahlen. Ganze Zahlen sind solche, die ganze Dinge bezeichnen, deren Bedeutung in den Ziffern*[35] *oder in der Stelle*[36] *liegt. Die Ziffer ist eine Gestalt, mit der eine Zahl bezeichnet wird, und davon gibt es zehn. Sie bedeuten also:*

1. eins	*2. zwei*	*3. drei*	*4. vier*	*5. fünf*
6. sechs	*7. sieben*	*8. acht*	*9. neun*	*0. nichts*

Die Stelle ist ein Ort, an dem die Zahlen vielfältige Bedeutung haben. In der ersten Stelle von rechts einfach, in der zweiten Stelle nach links zehnfach, und in der dritten Stelle hundertfach. Es gilt also jede Stelle nach links zehnmal so viel als die nächste zur rechten.

Der erste Block[37] *der Zahlen wird von Einern erfüllt, der zweite Block von Tausendern, der dritte von tausend mal Tausendern, und so fort ohne Ende. Bei den ganzen Zahlen gibt es also drei Stellen* [Einer, Zehner, Hunderter], *aber von den Blöcken gibt es unzählig viele. Jeder Block hat drei Stellen, die erste rechts zählt einen, die zweite zehn, die dritte hundert. Dann fängt ein neuer Block an.*[38]

Zum Aussprechen großer Zahlen werden die Enden aller Blöcke mit Pünktchen gekennzeichnet. So viele Pünktchen vorhanden sind, so oft wird tausend gesagt, dem letzten Tausend das Wörtchen mal vorgesetzt. Zum Beispiel: 1.234.567.890

Eintausend mal tausend,[39] *zweihundertdreißigundvier tausend mal tausend, fünfhundertsechzigundsieben tausend, achthundertundneunzig."*[40]

Kapitel 2: Von Brüchen

„Brüche sind Teile eines Ganzen, hier aber nicht gewöhnliche Brüche, wie in üblicher Rechnung gebräuchlich, sondern Sechzehnerbrüche. Das sind Sechzehntel eines Ganzen, sechzehn Teile ergeben ein Ganzes. Von einem der ersten Sechzehner sind die zweiten jeweils der sechzehnte Teil der ersten, die dritten ein sechzehnter Teil der zweiten, die vierten einer der dritten und so weiter bis ins Unendliche. Es bedeutet also jedes Eine eines Bruchteils[41] *sechzehn des nächstfolgenden Bruchteils und ein sechzehntel Teil des vorangehenden Bruchteils, bis ins Unendliche. Wir brauchen aber für unser Vorhaben und um unser Werk zu vollbringen nur wenige Bruchteile* [im Stellenwertsystem]. *Darum nehmen wir als Ganzes eine Rute, die ersten Bruchteile nennen wir einen Schuh,*[42] *die zweiten*

---

[33] Von ganzen Zahlen in Dezimalschreibweise.
[34] „Wirkung", siehe Kapitel 3.
[35] „Zeichen"
[36] „Statt"
[37] „Stand"
[38] Man bedenke bei dieser heute allzu elementar anmutenden Erläuterung, dass sich das Dezimalsystem mit der Null erst allmählich durchgesetzt hatte; Ursus spricht von den römischen Zahlen noch als „den gebräuchlichen Zeichen für die gemeinen Zahlen". Er gehört nicht zu den universitär gebildeten Gelehrten, sondern bringt seine Erfahrung als Landmesser ein. Außerdem schreibt er die *Geodaesia* in Frühneuhochdeutsch, nicht in Latein.
[39] Es müsste heißen „eintausend tausend mal tausend".
[40] Man beachte die stellengerechte Sprechweise, etwa „zweihundertdreißig und vier" statt zweihundertvierunddreißig.
[41] „Unterscheid"
[42] „schuch" = Fuß, Schuh. Die Schreibart „schuch" ist zeittypisch, auch Jacob Köbel verwendet sie in seiner *Geometrei* 1570.

Bruchteile eine Fingerbreite,[43] *die dritten Bruchteile eine Strohbreite, und die vierten eine Haarbreite.*[44] *Dies auch zum besseren Verständnis für Anfänger und Laien.*[45] *Die Bruchstellenwerte bezeichnen wir mit den gebräuchlichen Zeichen für die gemeinen Zahlen:*[46] *I. ein Schuh; II. eine Fingerbreite; III. eine Strohbreite; IV. eine Haarbreite. Danach hast du dich im folgenden zu richten.*

1 süderdithmarscher Rute = 4,74 m			Stellenwert
1 Schuh/Fuß	= $^1/_{16}$ Rute	= 29,62 cm	$^1/_{16}$
1 Fingerbreite	= $^1/_{16}$ Schuh	= 1,85 cm	$(^1/_{16})^2$
1 Strohbreite	= $^1/_{16}$ Fingerbreite	= 1,16 mm	$(^1/_{16})^3$
1 Haarbreite	= $^1/_{16}$ Strohbreite		$(^1/_{16})^4$

Was hier von den Sechzehnern gesagt ist, soll gleichermaßen auch von Vierzehnern, Achtzehnern und von anderen Teilen verstanden werden, wie viele Schuh oder Teile an irgendeinem Orte oder Land auf eine Rute gezählt werden. Dann muss man sich vorstellen, dass jeder Teil der Rute, seien es Sechzehner oder anders, wiederum so viele Teile enthält als die Rute Teile in sich hat, und aber ein jegliches Teil wiederum so viele Teile und so fort. Summa: So viele gleiche Teile eine Rute hat, so viele Teile muss man dem hinteren Bruchteil für eins geben und wiederum eins des vorderen für so viele des hinteren rechnen. Es ist aber 16 dafür die beste, bequemste und geschickteste Zahl, denn sie ist eine Quadratzahl[47] *aus einer Quadratzahl. Auch werden allgemein und an fast allen Ecken und Orten dieser Lande sechzehn Schuh auf eine Rute gerechnet.“*[48]

Kapitel 3: Vom Summieren

Im folgenden dritten Kapitel wird das Addieren in diesem Hexadezimalsystem erläutert. Stellengerechtes Untereinanderschreiben und die Bedeutung der Sechzehner-Überträge werden betont. Das erste, ganz leichte Beispiel kommt noch ohne Überträge aus, stellt also nur die korrekte stellengerechte Schreibweise dar. Das zweite Beispiel zeigt Zehnerüberträge in den Ganzen, die beiden folgenden Beispiele liefern dann auch Sechzehnerüberträge, das vierte Beispiel bei einer Addition von drei Summanden. Die vier Beispiele sind also für Anfänger nach steigendem Schwierigkeitsgrad geordnet.

„Das Rechnen mit den Zahlen ist eine Lehre, mit den Zahlen etwas zu tun [Rechenoperationen], *und zwar eine Lehre der Vermehrung oder Verminderung der Zahlen. Die Vermehrung ist eine Rechenart, welche lehrt, die Zahlen zu vermehren, und zwar als Summieren oder Vervielfachen. Summieren lehrt, viele Zahlen in einer Zahl zusammenzufassen, so dass man die Summe hat. Setz die gleichen Dezimalstellen* [der ganzen Zahlen] *und auch gleiche Bruchteile gerade untereinander, die ganzen unter die ganzen, und jeden Bruchstellenwert unter seinesgleichen. Dann fange von rechts an vom kleinsten Bruchteil und summiere die ersten untereinander gesetzten Zahlen von oben herunter. Und was für eine Zahl aus diesem Summieren sich ergibt, setzt gerade unter eine daruntergezogene Linie. Kommt aus dem Summieren der ersten Dezimalstelle eine zweistellige Zahl, so schreibe die erste Stelle darunter und behalte die zweite im Sinne und gib sie nach der Summierung der nächsten Stelle von oben herab zu deren Summe dazu. Erwächst nun aber aus den Summen der Bruchstellen eine Zahl gleich oder über Sechzehn, so gib für jede Sechzehn eine Eins zum nächsten Bruchteil. Und so fahre fort bis zum Ende deiner Rechnung, dann erscheint die Summe der Zahlen unten unter der untergezogenen Linie.*

---

[43] Die Fingerbreite ist ein altes dithmarscher Längenmaß, 16 bzw. 18 Finger auf einen Fuß, noch Anfang des 19. Jh. bekannt. Hierbei darf man nicht an Zoll denken; der dithm. Zoll maß 2,46-2,48 cm, 12 Zoll = 1 Fuß.

[44] Strohbreite und Haarbreite sind als Längenmaße nicht überliefert; sie dürften Erfindungen von Ursus sein, um solch kleine Stellenwerte zu benennen.

[45] „Einfeltige“ habe ich als „Laien“ übersetzt.

[46] Römische Zahlzeichen.

[47] „eine gevierte Zahl“.

[48] Dies triff zu auf Hamburg, Lübeck, Lauenburg, Kremper Marsch, Wilster Marsch, Süderdithmarschen, Heide, Eiderstedt, Husum, Altholstein. Hingegen: Hamburger Marschrute 14 Fuß, Grafschaft Rantzau 17 Fuß, Lunden, Bredstedt, Tondern, Alsen jeweils 18 Fuß.

Vier Beispiele:

		I	II	III	Erklärungen
+	*342*	*12*	*2*	*11*	Summand $342\ ^{12}/_{16}\ ^{2}/_{256}\ ^{11}/_{4096}$
	534	*3*	*12*	*2*	Summand $+\ 534\ ^{3}/_{16}\ ^{12}/_{256}\ ^{2}/_{4096}$
	876	*15*	*14*	*13*	Summe $876\ ^{15}/_{16}\ ^{14}/_{256}\ ^{13}/_{4096}$

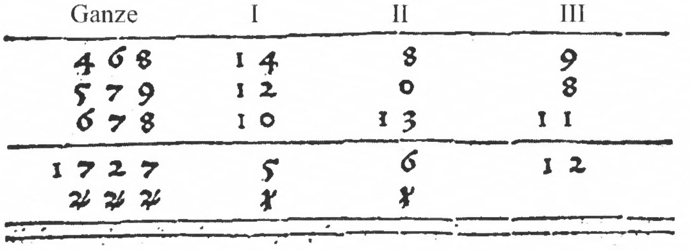
	974	*4*	*0*	*10*	Summand $974\ ^{4}/_{16}\ ^{0}/_{256}\ ^{10}/_{4096}$
+	*538*	*6*	*12*	*4*	Summand $+\ 538\ ^{6}/_{16}\ ^{12}/_{256}\ ^{4}/_{4096}$
	1512	*10*	*12*	*14*	Summe $1512\ ^{10}/_{16}\ ^{12}/_{256}\ ^{14}/_{4096}$
	~~*11*~~				Dezimalüberträge bei den Ganzen.

	576	*8*	*13*	*12*	12 + 13 = 25 = 1Ü (16) + 9
+	*974*	*7*	*14*	*13*	13 + 14 + 1Ü = 28 = 1Ü + 12
	1551	*0*	*12*	*9*	8 + 7 + 1 Ü = 16 = 1Ü
					576 + 974 + 1Ü = 1551
	~~*11*~~	~~*1*~~	~~*1*~~		Überträge. Es müsste bei den Ganzen ~~111~~ heißen.

	468	*14*	*8*	*9*	9 + 8 + 11 = 28 = 1Ü + 12
+	*579*	*12*	*0*	*8*	8 + 0 + 13 + 1Ü = 22 = 1Ü + 6
+	*678*	*10*	*13*	*11*	14 + 12 + 10 + 1Ü = 37 = 2Ü + 5
	1727	*5*	*6*	*12*	468 + 579 + 678 + 2Ü = 1727
	~~*222*~~	~~*1*~~	~~*1*~~		Überträge

Das vierte Beispiel sieht in Ursusscher Schreibweise heute so aus:

$(468+14^{I}+8^{II}+9^{III}) + (579+12^{I}+8^{III}) + (678+10^{I}+13^{II}+11^{III}) = 1727+5^{I}+6^{II}+12^{III}$.



Ganze	I	II	III
468	14	8	9
579	12	0	8
678	10	13	11
1727	5	6	12
~~222~~	~~1~~	~~1~~	

Abb.: 3: *Geodaesia*. Das 4. Beispiel zur Addition, Blatt B3v. Forschungsbibliothek Gotha, 4° 44/8 (4).

Zum Vergleich:
Addition bei Stevin 1585.
8⓪ 5① 6② + 5⓪ 7② =
13⓪ 6① 3②

⓪	①	②	heute:
8	5	6	8,56
5	0	7	5,07
13	6	3	13,63

Kapitel 4: Vom Vervielfachen

Beim Multiplizieren, das in der Reihenfolge der Rechenarten sogleich nach dem Addieren folgt, müssen nun die beiden Faktoren nicht stellengerecht untereinander geschrieben werden; Ursus benutzt dies auch im 3. Beispiel. Multipliziert wird nun jede Bruchstelle (und ggf. die ganze Zahl) der ersten Zahl mit jeder der zweiten. Dazu müssen „die Zeichen", also die mit römischen Zahlen geschriebenen Stellenwerte addiert werden, um den neuen Stellenwert zu bestimmen. Die Teilprodukte müssen allerdings zur anschließenden Addition stellengerecht untereinander geschrieben werden. Wie man an den folgenden Beispielen sieht, ist die cossische Schreibweise mit den römischen Zahlen als Exponenten der $^{1}/_{16}$-Brüche einfacher und vor allem übersichtlicher als unsere heutige ausführliche Bruchschreibweise. So wird etwa

$(6 + {}^{4}/_{16}) \cdot (2 + {}^{3}/_{16}) = 12 + {}^{26}/_{16} + {}^{12}/_{256} = 13 + {}^{10}/_{16} + {}^{12}/_{256}$

aus dem folgenden ersten Beispiel durch den Verzicht auf die 16er-Nenner verkürzt zu

$(6 + 4^{I}) \cdot (2 + 3^{I}) = 12 + 26^{I} + 12^{II} = 13 + 10^{I} + 12^{II}$, wobei sich das Addieren der (römischen) Exponenten übersichtlich gestaltet. Auch hier steigt der Schwierigkeitsgrad der Beispiele, im dritten und vierten Beispiel fehlt z.B. ein mittlerer Stellenwert. Jedoch ist die cossische Schreibweise einfacher nur für die hier verwendeten Stellenwertsysteme, also für Aufgaben, die ausschließlich gleiche Stammbrüche haben und nicht für die elementare Bruchrechnung mit unterschiedlichen Nennern. Hingegen kann sie auch für die Benutzung von Variablen verwendet werden, wie es Ursus in seiner *Arithmetica Analytica* 1601 tut.

„Das Vervielfachen lehrt, eine Zahl mit der anderen zu vervielfachen, damit man die daraus sich ergebende Zahl hat. Und hier müssen nicht gleiche Dezimalstellen und Bruchteile unter gleiche gesetzt werden, sondern du magst sie nach deinem Gefallen setzen. Vervielfache alle Bruchteile der unteren Zahl mit jedem Bruchteil der oberen Zahl. Setze gleiche sich daraus ergebende Bruchteile gerade untereinander unter die untergezogene Linie, und was aus dem nächsten Bruchteil durch solche Vervielfachung erwächst, um eine Bruchstelle weiter zur linken. Ziehe dazu vorher von oben herab Linien zwischen die Bruchstellenwerte. Die Einerstellen setze unter die Einer [der ganzen Zahlen] *und die Zehner unter die Zehner.*

Nach fertiger Vervielfachung summiere alle Zahlen zwischen den von oben abgehenden Linien, wie oben gesagt wurde. So erscheint das Ergebnis unten. Alsdann gib die [römischen] *Stellenwerte der beiden letzten Bruchteile zusammen, so erhältst du den Bruchstellenwert der letzten aus der Vervielfältigung entsprungenen Zahl, von dem aus dann jede um einen Bruchstellenwert weiter links stehende ein* [römisches] *Zeichen weniger haben wird. Und wisse, dass aus der Vervielfachung der Zahlen eine Fläche erwächst.“*

Erstes Beispiel: $\mathbf{6\,{}^{4}/_{16} \cdot 2\,{}^{3}/_{16}} = 12 + {}^{18}/_{16} + {}^{8}/_{16} + {}^{12}/_{256} = \mathbf{13\,{}^{10}/_{16}\,{}^{12}/_{256}}$
Cossische Schreibweise: $(6 + 4^{I}) \cdot (2 + 3^{I}) = 12 + 18^{I} + 8^{I} + 12^{II} = 13 + 10^{I} + 12^{II}$

		I		Die hochgestellten römischen Zahlen
	6	*4*	Faktor	bedeuten die Bruchstellenwerte, also
				$I = {}^{1}/_{16}$, $II = ({}^{1}/_{16})^{2} = {}^{1}/_{256}$,
		I		$III = ({}^{1}/_{16})^{3} = {}^{1}/_{4096}$ usw.
	2	*3*	Faktor	
	18	*12*	Teilprodukt mit ${}^{3}/_{16}$	$(6+4^{I}) \cdot 3^{I} = 18^{I} + 12^{II}$
12	*8*		Teilprodukt mit 2	$(6+4^{I}) \cdot 2 = 12 + 8^{I}$
	I	*II*		
13	*10*	*12*	Produkt	$26^{I} = 1Ü + 10^{I}$
~~*1*~~			Übertrag	

Zweites Beispiel: $\mathbf{32\,{}^{12}/_{16} \cdot 24\,{}^{14}/_{16}} = 768 + {}^{448}/_{16} + {}^{288}/_{16} + {}^{168}/_{256} = 768 + {}^{736}/_{16} + {}^{168}/_{256} = \mathbf{814\,{}^{10}/_{16}\,{}^{8}/_{256}}$
Cossisch: $(32+12^{I}) \cdot (24+14^{I}) = 768+448^{I}+228^{I}+168^{II} = 768+736^{I}+168^{II} = 814+10^{I}+8^{II}$

		I		
	32	*12*	Faktor	
		I		
	24	*14*	Faktor	
	128	*48*	Teilprodukt mit ${}^{14}/_{16}$	$4^{I} \cdot (32 + 12^{I}) = 128^{I} + 48^{II}$
	32	*12*	„	$10^{I} \cdot (32 + 12^{I}) = 320^{I} + 120^{II}$
128	*48*		Teilprodukt mit 24	$4 \cdot (32 + 12^{I}) = 128 + 48^{I}$
64	*24*		„	$20 \cdot (32 + 12^{I}) = 640 + 240^{I}$
	I	*II*		$48^{II}+120^{II} = 168^{II} = 10Ü+8^{II}$
814	*10*	*8*	Produkt	$128^{I}+320^{I}+48^{I}+240^{I}+10Ü = 46Ü+10^{I}$
~~***46***~~	~~***10***~~		Überträge	$128 + 640 + 46Ü = 814$

Drittes Beispiel: $\mathbf{36\ {}^{10}/_{16}\ {}^{14}/_{256} \cdot {}^{13}/_{16}\ {}^{14}/_{4096} = 29\ {}^{14}/_{16}\ {}^{13}/_{256}\ {}^{7}/_{4096}\ {}^{8}/_{65536}\ {}^{4}/_{1048576}}$
Cossisch: $(36+10^{I}+14^{II}) \cdot (13^{I}+14^{III}) = 29+14^{I}+13^{II}+7^{III}+8^{IV}+4^{V}$

		36	*I* 10	*II* 14	Faktor
		I 13	*II* 0	*III* 14	Faktor
		144	40	56	Teilprod. ${}^{14}/_{4096}$
		36	10	14	
108	30	42			Teilprodukt ${}^{13}/_{16}$
36	10	14			
I	*II*	*III*	*IV*	*V*	
478	13	7	8	4	Produkt
~~10~~	~~43~~	~~9~~	~~12~~		Der Übertrag ~~12~~ fehlt im Druck.

$4^{III}\cdot(36+10^{I}+14^{II})=144^{III}+40^{IV}+56^{V}$
$10^{III}\cdot(36+10^{I}+14^{II})=360^{III}+100^{IV}+140^{V}$
$3^{I}\cdot(36+10^{I}+14^{II})=108^{I}+30^{II}+42^{III}$
$10^{I}\cdot(36+10^{I}+14^{II})=360^{I}+100^{II}+140^{III}$
$56^{V}+140^{V}=196^{V}=12Ü+4^{V}$
$40^{IV}+100^{IV}+12Ü=152^{IV}=9Ü+8^{IV}$
$144^{III}+360^{III}+42^{III}+140^{III}+9Ü=43Ü+7^{III}$
$30^{II}+100^{II}+43Ü=173^{II}=10Ü+13^{II}$
$108^{I}+360^{I}+10Ü=478^{I}$ $(=29+14^{I})$.
Die Umrechnung von 478^{I} zu $29\ {}^{14}/_{16}$ fehlt im Druck aus Platzmangel.

Viertes Beispiel: $({}^{4}/_{16}\ {}^{8}/_{16^2}\ {}^{12}/_{16^4})^2 = {}^{16}/_{16^2} + {}^{(2\cdot 32)}/_{16^3} + {}^{64}/_{16^4} + {}^{(2\cdot 48)}/_{16^5} + {}^{(2\cdot 96)}/_{16^6} + {}^{144}/_{16^8}$
$= {}^{1}/_{16} + {}^{4}/_{16^2} + {}^{4}/_{16^3} + {}^{6}/_{16^4} + {}^{12}/_{16^5} + {}^{9}/_{16^7}$

$$({}^{18\,444}/_{65\,536})^2 = {}^{340\,181\,136}/_{4\,294\,967\,296} = {}^{21\,261\,321}/_{268\,435\,456}$$

Cossisch: $(4^{I}+8^{II}+12^{IV})^2 = 16^{II}+64^{III}+64^{IV}+96^{V}+192^{VI}+144^{VIII} = 1^{I}+4^{II}+4^{III}+6^{IV}+12^{V}+9^{VII}$

				I 4	*II* 8	*III* 0	*IV* 12	Faktor
				I 4	*II* 8	*III* 0	*IV* 12	Faktor
				8	16	0	24	Teilprod.
				4	8	0	12	mit ${}^{12}/_{16^4}$
		32	64	0	96			mit ${}^{8}/_{16^2}$
	16	32	0	48				mit ${}^{4}/_{16}$
I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*IIX*	
1	4	4	6	12	0	9	0	Produkt
	II	~~4~~	~~6~~					Überträge.
	~~4~~			~~12~~				~~12~~ fehlt.

$2^{IV}\cdot(4^{I}+8^{II}+12^{IV})=8^{V}+16^{VI}+24^{VIII}$
$10^{IV}\cdot(4^{I}+8^{II}+12^{IV})=40^{V}+80^{VI}+120^{VIII}$
$8^{II}\cdot(4^{I}+8^{II}+12^{IV})=32^{III}+64^{IV}+96^{VI}$
$4^{I}\cdot(4^{I}+8^{II}+12^{IV})=16^{II}+32^{III}+48^{V}$

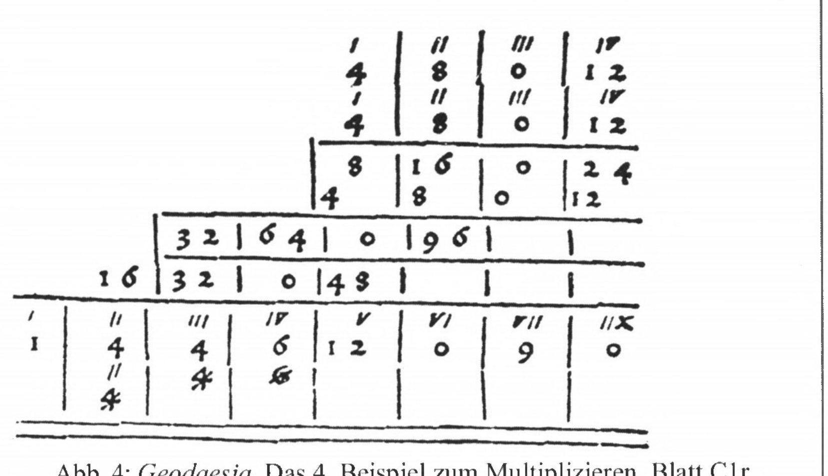


Abb. 4: *Geodaesia*. Das 4. Beispiel zum Multiplizieren, Blatt C1r. Forschungsbibliothek Gotha, 4° 44/8 (4).

Um das Multiplizieren bei Ursus in seinem Hexadezimalsystem in einfacher Form darzustellen, soll hier ein eigenes Beispiel folgen:

$3\ 12^{I}\ 5^{II} \cdot 2\ 10^{I}\ 4^{III}$								
	6	24	10					
		30	120	50				
			0	0	0			
				12	48	20		
	6	54	130	62	48	20		
	3	8	4	3	1		Überträge	
	9	14	6	1	1	4	=	$9\ 14^{I}\ 6^{II}\ 1^{III}\ 1^{IV}\ 4^{V}$

16·n	n
16	1
32	2
48	3
64	4
80	5
96	6
112	7
128	8
144	9
160	10

Oder eleganter, wobei die 16er-Überträge sofort gerechnet werden:

$3\ 12^{I}\ 5^{II} \cdot 2\ 10^{I}\ 4^{III}$							
	7	8	10				
	2	5	11	2			
		0	0	0	0		
				15	1	4	
		1	1				Überträge
	9	**14**	**6**	**1**	**1**	**4**	

Für die Multiplikation hat Ursus vielleicht zurückgegriffen auf die Schreibweise bei den Sexagesimalbrüchen. Dort wird seit al-Ḫwārizmī geschrieben
$2^\circ \cdot 2' = 4'$ (für $2^\circ \cdot {}^{2}/_{60}{}^\circ = {}^{4}/_{60}{}^\circ$) oder $7'' \cdot 9' = 63''' = 1''\ 3'''$ (für ${}^{7}/_{3600} \cdot {}^{9}/_{60} = {}^{63}/_{216000}$),
ganz wie es Ursus für sein ${}^{1}/_{16}$-Bruchsystem tut.[49]

Kapitel 5: Vom Abziehen

Wenn beim Addieren und Multiplizieren noch nach unten gerechnet wurde, d.h. Summe und Produkt unterhalb der Aufgabe auftraten, so wird beim Subtrahieren nach oben gerechnet, d.h. die Differenz erscheint oberhalb der Aufgabe, oberhalb von Minuend und Subtrahend. Auch beim Subtrahieren muss natürlich stellengerecht untereinander geschrieben werden. Ursus erklärt dann die bekannte Methode, wenn ein Subtrahend größer ist als sein Minuend, dass man sich von der nächst größeren Stelle einen Sechzehner (oder wenn es sich um die Ganzen handelt, einen Zehner) umwandelt. Ursus spricht hierbei, wie auch heute noch manchmal üblich, von „leihen". Abgearbeitete Zahlen werden durchgestrichen, so dass zum Schluss nur die Differenz stehen bleibt. Beim ersten, zweiten und vierten Beispiel beachte man, dass bei den Ganzen die nicht durchgestrichenen Ziffern zur Zahl dazugehören, auch wenn sie nicht in derselben Zeile stehen, so etwa $^{12}|_{5}$ im ersten Beispiel für 125.

„Die Verminderung ist eine Rechenart, die lehrt, die Zahlen zu verkleinern, und zwar als Abziehen oder Teilen. Abziehen lehrt, eine Zahl von einer größeren wegzunehmen, so dass man das Übrigbleibende erhält. Setz die Zahl oben, von der du abziehen willst, und diejenige unten, welche du abziehen willst, gleiche Dezimalstellen und Bruchteile gerade untereinander, wie beim Summieren erklärt. Fange links bei den Ganzen oder beim größten Bruchteil an und nimm die untere Zahl von der oberen weg. Was übrig bleibt, setz gerade darüber und streiche die abgezogenen [den Minuenden] *und die davon abgezogenen* [den Subtrahenden] *Zahlen durch. Wenn du eine Dezimalstelle oder einen Bruchteil von der oberen Zahl nicht abziehen kannst, weil sie zu groß ist, so wechsle eine Eins aus der linken Stelle in 10 dieser rechten Stelle, und wechsle eine Eins aus dem linken Bruchteil in Sechzehn des rechten. Und von dieser geliehenen Zehn oder Sechzehn nimm die Dezimalstelle oder den Bruchteil, der vorhin zu groß war, weg und zum verbleibenden Rest gib die Dezimalstelle oder den Bruchteil, der zuvor zu klein war, dazu. Das sich daraus Ergebende schreibe darüber. Und so fahre fort bis zum Ende der Zahl, dann erscheint die übrig bleibende Zahl* [die Differenz] *oben unausgelöscht."*

[49] Siehe Menso Folkerts, *Die älteste latein. Schrift über das indische Rechnen nach al-Ḫwārizmī*, München 1997, S. 75 und 134.

Erstes Beispiel: $\mathbf{345\ {}^{8}/_{16}\ {}^{14}/_{16^2}\ {}^{12}/_{16^3}\ -\ 220\ {}^{4}/_{16}\ {}^{12}/_{16^2}\ {}^{12}/_{16^3}\ =\ 125\ {}^{4}/_{16}\ {}^{2}/_{256}}$

Cossisch: $345+8^{I}+14^{II}+12^{III} - 220+4^{I}+12^{II}+12^{III} = 125+4^{I}+2^{II}$

	I	*II*	*III*	
12	*4*	*2*	*0*	Differenz
~~*345*~~	~~*8*~~	~~*14*~~	~~*12*~~	Minuend
~~*220*~~	~~*4*~~	~~*12*~~	~~*12*~~	Subtrahend

Ganze	$^{1}/_{16}$	$^{1}/_{16^2}$	$^{1}/_{16^3}$	
345	8	14	12	
− 220	4	12	12	
125	4	2	0	Differenz

Zweites Beispiel: $\mathbf{456\ {}^{12}/_{16}\ {}^{14}/_{16^2}\ {}^{9}/_{16^3}\ -\ 289\ {}^{8}/_{16}\ {}^{6}/_{16^2}\ {}^{7}/_{16^3}\ =\ 167\ {}^{4}/_{16}\ {}^{8}/_{256}\ {}^{2}/_{4096}}$

Cossisch: $456+12^{I}+14^{II}+9^{III} - 289+8^{I}+6^{II}+7^{III} = 167+4^{I}+8^{II}+2^{III}$

16 ~~*277*~~	*4*	*8*	*2*	Differenz
~~*456*~~	~~*12*~~	~~*14*~~	*9*	Minuend
~~*289*~~	~~*8*~~	~~*6*~~	~~*7*~~	Subtrahend

Ganze	$^{1}/_{16}$	$^{1}/_{16^2}$	$^{1}/_{16^3}$	
456	12	14	9	
− 289	8	6	7	
~~2~~ ~~7~~ 7 1 6	4	8	2	Differenz

Drittes Beispiel: $\mathbf{345\ {}^{4}/_{16}\ {}^{6}/_{16^2}\ {}^{3}/_{16^3}\ -\ 159\ {}^{12}/_{16}\ {}^{14}/_{16^2}\ {}^{7}/_{16^3}\ =\ 185\ {}^{7}/_{16}\ {}^{7}/_{256}\ {}^{12}/_{4096}}$

Cossisch: $345+4^{I}+6^{II}+3^{III} - 159+12^{I}+14^{II}+7^{III} = 185+7^{I}+7^{II}+12^{III}$

185 ~~*296*~~	*7* ~~*8*~~	*7* ~~*8*~~	*12*	Differenz
~~*345*~~	~~*4*~~	*6*	~~*3*~~	Minuend
~~*159*~~	~~*12*~~	~~*14*~~	~~*7*~~	Subtrahend

Ganze	$^{1}/_{16}$	$^{1}/_{16^2}$	$^{1}/_{16^3}$	
345	4	6	3	
− 159	12	14	7	
~~2 9 6~~ 1 8 5	~~8~~ 7	~~8~~ 7	12	Differenz

Viertes Beispiel: $\mathbf{248 - 209\ {}^{14}/_{16}\ {}^{12}/_{16^2}\ {}^{10}/_{16^3}\ =\ 38\ {}^{1}/_{16}\ {}^{3}/_{16^2}\ {}^{6}/_{16^3}}$

Cossich: $248 - 209+14^{I}+12^{II}+10^{III} = 38+1^{I}+3^{II}+6^{III}$

8 ~~*39*~~	*1* ~~*2*~~	*3* ~~*4*~~	*6*	Differenz
~~*248*~~	~~*0*~~	~~*0*~~	~~*0*~~	Minuend
~~*209*~~	~~*14*~~	~~*12*~~	~~*10*~~	Subtrahend

Ganze	$^{1}/_{16}$	$^{1}/_{16^2}$	$^{1}/_{16^3}$	
248	0	0	0	
− 209	14	12	10	
~~4 9~~ 3 8	~~2~~ 1	~~4~~ 3	6	Differenz

Kapitel 6: Vom Teilen

Das erste, einfache Beispiel zum cossischen Dividieren lautet $13\ {}^{10}/_{16}\ {}^{12}/_{16^2}\ :\ 6\ {}^{4}/_{16}$. Wir würden aus unserem Wissen um die elementare Bruchrechnung heraus die Sechzehnerbrüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen und die Aufgabe umformen zu $13\ {}^{172}/_{16^2} : 6\ {}^{4}/_{16} = {}^{3500}/_{256} : {}^{100}/_{16}$ und dann mit dem Kehrwert multiplizieren, also ${}^{3500}/_{256} \cdot {}^{16}/_{100} = {}^{35}/_{16} = 2\ {}^{3}/_{16}$. In cossischer Sprechweise, aber noch nicht in cossischer Schreibweise, rechnet man folgendermaßen, wie wir es beim schriftlichen Dividieren tun. Zuerst fragen wir, wie oft geht 13 durch 6? 2-mal. Multipliziere diese 2 mit dem Divisor, $2 \cdot 6\ {}^{4}/_{16} = 12\ {}^{8}/_{16}$. Dieses Teilprodukt subtrahieren wir vom Dividenden: $13\ {}^{10}/_{16}\ {}^{12}/_{16^2} - 12\ {}^{8}/_{16} = 1\ {}^{2}/_{16}\ {}^{12}/_{16^2}$. Nun fragen wir, wie oft dieser Rest durch den Divisor zu teilen geht. Natürlich nicht mehr ganzzahlig, sondern $(1\ {}^{2}/_{16} =)\ {}^{18}/_{16} : 6 = {}^{3}/_{16}$. Auch dieser Teilquotient wird mit dem Divisor multipliziert und ergibt ${}^{18}/_{16}\ {}^{12}/_{16^2}$, so dass kein Rest bleibt, die Division geht auf, der Quotient ist $2\ {}^{3}/_{16}$. Schreibt man nun cossisch die Stellenwerte und wie beim schriftlichen Dividieren, so lautet diese Aufgabe:

$$\begin{array}{l} 13+10^{I}+12^{II}\ :\ 6+4^{I}\ =\ 2+3^{I} \\ \underline{12+\ 8^{I}} \\ \quad 1+\ 2^{I} \qquad (=18^{I}) \\ \underline{\quad 18^{I}+12^{II}} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Dies empfinde ich als eine schön einfache Form, außerdem kann jeder Stammbruch statt $^{1}/_{16}$ verwendet werden. Bei Ursus erscheint lediglich der Quotient nicht am rechten Ende der Rechnung hinter dem Gleichheitszeichen, sondern in einer Tabelle zwischen Dividend und Divisor. Auch beim Dividieren sind die drei Beispielaufgaben wieder nach steigenden Schwierigkeiten geordnet. Das erste Beispiel zeigt noch keine solchen; beim zweiten Beispiel verwendet Ursus, dass bei der Aufgabe $814+10^{I} : 24+14^{I}$ zwar 814:24 gar 33-mal ginge, aber das Teilprodukt des Teilquotienten 33 mit dem Divisor $24+14^{I}$ wäre größer als 814, also ist der erste Teilquotient nur 32, eine Schwierigkeit, die wir beim schriftlichen Dividieren kennen.

„Teilen lehrt, eine Zahl in etliche gleiche Teile zu zerlegen, damit man den Teil eines jeden erhält. Setz den ersten Bruchteil und die erste Dezimalstelle des Teilers [Divisor] *unter den ersten Bruchteil und die erste Dezimalstelle der Zahl, die geteilt werden soll* [Dividend]. *Stelle fest, wie oft du den letzten Bruchteil des Teilers* [Divisor] *in den letzten Bruchteil der zu teilenden Zahl* [Dividend] *haben kannst, doch so, dass du die folgenden Bruchteile des Teilers in den folgenden Bruchteilen der zu teilenden Zahl auch so oft haben kannst*[50] *(aber nicht mit 10, wie im gemeinen Rechnen, sondern mit 16). Und die Zahl, wie oft der Teiler in die obere Zahl* [den Dividenden] *passt, setz zwischen die zwei durchgezogenen Linien und vervielfältige mit dieser gefundenen Zahl alle Bruchteile des Teilers. Das sich daraus Ergebende subtrahiere von der oberen Zahl, den Rest setz darüber und streiche die anderen* [die verarbeiteten] *durch, wie beim Abziehen gelehrt wurde.*

Nach diesem Abziehen rück den Teiler um einen Bruchteil nach rechts, stelle fest wie oft, vervielfältige und ziehe ab wie vorher. Und so fort bis zum Ende des Teilens. Letztlich erscheint das Teil [Quotient] *zwischen den zwei durchgezogenen Linien. Und um wieviel das Zeichen* [Stellenwert] *des ersten Bruchteils des Teilers kleiner ist als das Zeichen des ersten Bruchteils der zu teilenden Zahl, um so viel ist der erste Bruchteil des gefundenen Teils* [Quotient] *kleiner als ein Ganzes, und jeder Bruchteil rechts davon wird ein Zeichen mehr haben. Wisse auch, dass aus der Teilung der Zahlen eine Länge entspringt, denn die Rechenarten sind gegensätzlich und zueinander invers: So etwa ist die Vermehrung zum Vermindern, das Summieren zum Abziehen, das Vervielfältigen zum Teilen invers. Im dritten Beispiel siehst du, dass der Teiler auch über 16-mal in den Ganzen* [in den Dividenden] *gehen kann, so oft man mag."*

Das erste Beispiel zum Dividieren, schrittweise erläutert: : **13 $^{10}/_{16}$ $^{12}/_{256}$: 6 $^{4}/_{16}$ = 2 $^{3}/_{16}$**

Cossisch: $13+10^{I}+12^{II}$: $6+4^{I}$ = $2+3^{I}$

	I	*II*	
~~*1*~~	~~*2*~~		
~~*13*~~	~~*10*~~	~~*12*~~	Dividend
		I	
	2	*3*	Quotient
	I	*I*	
~~*6*~~	~~*4*~~		Divisor
	~~*6*~~	~~*4*~~	„
~~*12*~~	~~*8*~~	~~*12*~~	
~~*1*~~	~~*2*~~		

Erster Schritt:

	I	II	
1	**2**		
~~13~~	~~10~~	12	Dividend
	2		Quotient
~~6~~	~~4~~		Divisor
~~**12**~~	~~**8**~~		Subtrahend

13:6 ≈ **2** (als Teilquotient), Teilprodukt ist $2 \cdot 6+4^{I} = 12+8^{I}$, subtrahiert vom Dividenden $13+10^{I}$ bleibt Rest $\mathbf{1+2^{I}}$ (über dem Dividenden), verarbeitete Zahlen durchstreichen.

$2 \cdot (6+4^{I}) = 12+8^{I}$

Zweiter Schritt:

	I	II	
~~1~~	~~2~~		
~~13~~	~~10~~	~~12~~	Dividend
		I	
	2	**3**	Quotient
~~6~~	~~4~~		
	~~**6**~~	**4**	Divisor
~~12~~	~~8~~		
~~**1**~~	~~**2**~~	~~**12**~~	Subtrahend

$1+2^{I}+12^{II}$ (s. vorige Tabelle) = $18^{I}+12^{II} : 6+4^{I} = \mathbf{3^{I}}$.

Divisor um eine Stelle nach rechts rücken.
$3^{I} \cdot 6+4^{I} = 18^{I}+12^{II} = 1+2^{I}+12^{II}$. Subtrahieren vom Dividendenrest ergibt 0, Division geht auf.

[50] Hiermit ist die Schwierigkeit wie in Beispiel 2 gemeint, dass bei der Überschlagdivision die kleineren Stellenwerte ggf. berücksichtigt werden müssen.

Das erste Beispiel bedeutet also zusammengefasst und wie bei schriftlicher Division geschrieben:

	I	II			I			I	
13	10	12	:	6	4	=	2	3	$\mathbf{13+10^{I}+12^{II} : 6+4^{I} = 2+3^{I}}$
- 12	8								$2\cdot 6+4^{I} = 12+8^{I}$
1	2	12							$3^{I} \cdot 6+4^{I} = 18^{I}+12^{II} = 1+2^{I}+12^{II}$
- 1	2	12							
0	0	0							

Zweites Beispiel: $\mathbf{814\,{}^{10}/_{16}\,{}^{8}/_{256} : 24\,{}^{14}/_{16} = 32\,{}^{12}/_{16}}$
Cossisch: $814+10^{I}+8^{II} : 24+14^{I} = 32+12^{I}$

~~1~~			
~~128~~			
~~814~~	~~10~~	~~8~~	Dividend
	32	12	Quotient
~~24~~	~~14~~		Divisor
	~~24~~	~~14~~	„
~~796~~	~~0~~	~~8~~	
~~18~~	~~10~~		

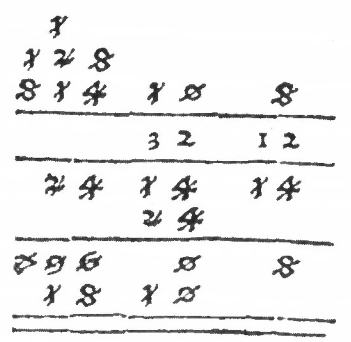


Abb.: 5: Zweites Beispiel zur Division, Blatt C2v.

Der erste Schritt lautet:

	I	II		
1				$814:24 \approx \mathbf{32}$. $32 \cdot (24+14^{I}) = 768+448^{I} = 796+0^{I}$.
~~128~~				$796+0^{I}$ (stehen unten) subtrahiert vom Dividenden $814+10^{I}$,
				Rest 18 steht über dem Dividenden als $^{1}|_{8}$;
~~814~~	10	8	Dividend	die ~~12~~ ist Zwischenrechnung.
	32		Quotient	
~~24~~	~~14~~		Divisor	
~~**796**~~	~~**0**~~		Subtrahend	$32 \cdot (24+14^{I}) = 768+448^{I} = 796+0^{I}$.

Der zweite Schritt lautet:

	I	II		
~~1~~				$18+10^{I}$ (s. vorige Tabelle) $= 298^{I} : 24 \approx \mathbf{12^{I}}$.
~~128~~				
~~814~~	~~10~~	~~8~~	Dividend	
	32	**12**	Quotient	
~~24~~	~~14~~			
	~~**24**~~	~~**14**~~	Divisor	Divisor um eine Stelle nach rechts rücken.
~~796~~	~~0~~			
~~**18**~~	~~**10**~~	~~**8**~~	Subtrahend	$12^{I} \cdot 24+14^{I} = 288^{I}+168^{II} = 18+10^{I}+8^{II}$. Rest 0.

Das zweite Beispiel bedeutet also zusammengefasst:

	I	II			I			I	
814	10	8	:	24	14	=	32	12	$\mathbf{814+10^{I}+8^{II} : 24+14^{I} = 32+12^{I}}$
- 796	0								$32 \cdot 24+14^{I} = 796+0^{I}$
18	10	8							$12^{I} \cdot 24+14^{I} = 288^{I}+168^{II} =$
- 18	10	8							$= 18+10^{I}+8^{II}$
0	0	0							

Das dritte Beispiel lautet: $\mathbf{478\ {}^{13}/_{16}\ {}^{7}/_{16^2}\ {}^{8}/_{16^3}\ {}^{4}/_{16^4}\ :\ 13\ {}^{14}/_{16^2}\ =\ 36\ {}^{10}/_{16}\ {}^{14}/_{16^2}}$

Cossisch: $478+13^{I}+7^{II}+8^{III}+4^{IV}\ :\ 13+14^{II} = 36+10^{I}+14^{II}$

	I	*II*	*III*	*IV*		
	~~*1*~~	~~*6*~~				
~~*8*~~	~~*3*~~	~~*7*~~				
~~*19*~~	~~*14*~~	~~*15*~~	~~*12*~~			
~~*478*~~	~~*13*~~	~~*7*~~	~~*8*~~	~~*4*~~	Dividend	
		36	*10*	*4*	Quotient	Druckfehler, es müsste 14 statt 4 heißen.
~~*13*~~	~~*0*~~	~~*14*~~			Divisor	
	~~*13*~~	~~*0*~~	~~*14*~~		„	Divisor um eine Stelle nach rechts;
		~~*13*~~	~~*0*~~	~~*14*~~	„	Divisor noch eine Stelle nach rechts.
~~*469*~~	~~*15*~~	~~*8*~~	~~*12*~~	~~*4*~~		
~~*8*~~	~~*2*~~	~~*8*~~	~~*12*~~			
	~~*11*~~	~~*8*~~				Druckfehler, es müsste 6 statt 8 heißen.

Der erste Schritt lautet:

8	**3**					478:13 ≈ **36**. Teilprodukt $36\cdot13+14^{II}$ =
~~19~~	**14**	**15**				$468+504^{II} = 468+31^{I}+8^{II} = 469+15^{I}+8^{II}$,
~~478~~	~~13~~	~~7~~	8	4	Dividend	subtrahieren vom Dividenden, verbleibt
						$8+13^{I}+15^{II}$.
		36			Quotient	
~~13~~	~~0~~	~~14~~			Divisor	
~~469~~	~~15~~	8			Subtrahend	$36 \cdot 13+14^{II} = 469+15^{I}+8^{II}$

Der zweite Schritt lautet:

	1	**6**				$8+13^{I}$ (s. vorige Tabelle, $=141^{I}$) : 13 ≈ $\mathbf{10^{I}}$.
~~8~~	~~3~~	~~7~~				$10^{I} \cdot 13+14^{II} = 130^{I}+140^{III} = 8+2^{I}+8^{II}+12^{III}$
~~19~~	**14**	~~15~~	**12**			subtrahieren vom Restdividenden, verbleibt
~~478~~	~~13~~	~~7~~	~~8~~	4	Dividend	$11^{I}+6^{II}+12^{III}$.
		36	**10**		Quotient	
~~13~~	~~0~~	~~14~~				
	~~13~~	~~0~~	~~14~~		Divisor	
~~469~~	~~15~~	~~8~~				
~~8~~	~~2~~	~~8~~	~~12~~			$10^{I} \cdot 13+14^{II} = 130^{I}+140^{III} = 8+2^{I}+8^{II}+12^{III}$.

Der dritte Schritt lautet:

	~~1~~	~~6~~				$11^{I}+6^{II}$ (s. vorige Tabelle, $= 182^{II}$) : 13 ≈ $\mathbf{14^{II}}$.
~~8~~	~~3~~	~~7~~				$14^{II}\cdot13+14^{II} = 182^{II}+196^{IV} = 11^{I}+6^{II}+12^{III}+4^{IV}$
~~19~~	~~14~~	~~15~~	~~12~~			subtrahieren vom Restdividenden ergibt 0; die
~~478~~	~~13~~	~~7~~	~~8~~	4	Dividend	Division geht auf.
		36	10	**14**	Quotient	
~~13~~	~~0~~	~~14~~				
	~~13~~	~~0~~	~~14~~			
		~~13~~	~~0~~	~~14~~	Divisor	
~~469~~	~~15~~	~~8~~				
~~8~~	~~2~~	~~8~~	~~12~~			
	~~11~~	~~6~~	~~12~~	4		$14^{II}\cdot13+14^{II} = 182^{II}+196^{IV} = 11^{I}+6^{II}+12^{III}+4^{IV}$.

Das dritte Beispiel bedeutet also zusammengefasst:

	I	II	III	IV			II			I	II	
478	13	7	8	4	:	13	14	=	36	10	14	$\mathbf{478+13^{I}+7^{II}+8^{III}+4^{IV} : 13+14^{II} = 36+10^{I}+14^{II}}$
- 469	15	8										
8	13	15	8									
- 8	2	8	12									
	11	6	12	4								
	11	6	12	4								
0	0	0	0	0								

Auch für das Dividieren mag das folgende eigene Beispiel einen Eindruck geben von der einfachen Form dieses Rechnens:

46	**3^{I}**	**10^{II}**	**9^{III}**	**1^{IV}**	**8^{V}**	**: 3 8^{II}**	=	**15 4^{I} 0^{II} 3^{III}**
45	7	8				$46 : 3 \approx 15$		
	12	2				$12^{I} : 3 \approx 4^{I}$		
	12	2	0					
	0	0	9	1		$9^{III} : 3 \approx 3^{III}$		
			9	1	8			
			0	0	0			

16·n	n
16	1
32	2
48	3
64	4
80	5
96	6
112	7
128	8
144	9
160	10

Kapitel 7: Von der Wurzel

Ursus benennt die Potenzen bis zum Exponenten vier und weist darauf hin, dass es beliebig hohe Exponenten gibt. Er nennt die entsprechenden Wurzeln und beschränkt sich auf Quadrate (Flächen) und Kuben (Volumina) und deren Wurzeln, da für die Geodäsie nur diese von Bedeutung seien. Die Quadratzahl heißt bei ihm „gevierte Zahl“, die Kubikzahl „zweimal in sich selbst gevielfältigte Zahl“, die Quadratwurzel und die Kubikwurzel heißen „gevierte Wurzel“ und „leibliche Wurzel“. Ich erwähne dies so ausführlich, weil Ursus, obwohl er Latein beherrscht, dieses Buch auf Deutsch (Frühneuhochdeutsch) schreibt und vor dem Problem steht, dass es keine feststehenden, allgemein gültigen Fachworte gibt.

Bevor er zum eigentlichen Wurzelziehen kommt, gibt er ein Beispiel für das Quadrieren und dann für das Quadrieren der erhaltenen Quadratzahl. Seine Schreibweise ist pädagogisch geschickt und so, wie wir auch heute schriftliche Multiplikationen ausführen. Binomische Formeln zum Quadrieren benutzt er hier nicht, sondern das Standardmultipliziererverfahren.

„Die Wurzel ist eine Zahl, die aus einer mit sich selbst multiplizierten Zahl erwächst. Sie ist zu unterscheiden nach der Art des Vervielfachens der Zahlen mit sich selbst. Denn eine Zahl ist die Quadratwurzel aus einer einmal mit sich selbst multiplizierten Zahl. Diese erzeugt eine Fläche, und hat Länge und Breite, diese der Länge gleich,[51] *in sich.*

Wird jedoch diese Quadratzahl[52] *wiederum mit der ursprünglichen Zahl multipliziert, so entsteht die Zahl einer Größe, die Länge, Breite und Dicke in sich hat, alle drei einander gleich. Die dritte Wurzel*[53] *ist die Zahl, die aus einer zweimal mit sich selbst multiplizierten Zahl erwächst.*

Multipliziert man eine solche Kubikzahl noch einmal mit der ursprünglichen Zahl, so erwächst daraus eine Vierte Wurzel,[54] *eine Quadratwurzel aus einer Quadratwurzel, oder eine Fläche einer anderen Fläche.*[55] *Und so fort ohne Ende. Für unser vorgefasstes Werk und zur Vollbringung dieser Wissenschaft* [Geodaesie], *die von Linien, Flächen und Körpern handelt, genügen die Quadratwurzel und die Dritte Wurzel. Darum werde ich hier auch nur diese zwei erklären und das Ziehen dieser zwei Wurzeln zeigen. Doch ehe wir dazu schreiten, haben wir für dich ein Beispiel* [für das Quadrieren und die vierte Potenz] *heiter für die Augen erstellt, wodurch du diese* [Rechnungen] *verinnerlichen und erlernen mögest.“*

[51] Länge und Breite haben dieselbe Dimension, dieselben Einheiten.
[52] „diese aus getaner Vervielfältigung einer Zahl mit sich selbst erwachsene Zahl“
[53] „leibliche Wurzel“
[54] Ursus nennt diese nur „eine andere Wurzel“.
[55] Es ist bemerkenswert, dass Ursus eine Größe vierter Dimension beschreibt.

Quadrieren: $\mathbf{(12^4/_{16})^2 = 150\ ^1/_{16}}$ Vierte Potenz $\mathbf{(12\ ^4/_{16})^4 = 22518\ ^{12}/_{16}\ ^1/_{256}}$

Cossisch: $(12+4^{I})^2 = 150+1^{I}$ $(12+4^{I})^4 = 22518+12^{I}+1^{II}$

				I		
			12	*4*	Zahl $12+4^{I}$	
				I		
			12	*4*	Zahl $12+4^{I}$	
			48	*16*	Teilprodukte	$4^{I}\cdot(12+4^{I}) = 48^{I}+16^{II}$
		24	*8*		„	$2\cdot(12+4^{I}) = 24+8^{I}$
		12	*4*		„	$10\cdot(12+4^{I}) = 120+40^{I}$
			I	*II*		
		150	*1*	*0*	Quadratzahl	$144+96^{I}+16^{II} = 150+1^{I}$
			I	*II*		
		150	*1*	*0*	Quadratzahl	zum erneuten Quadrieren
	I	*II*	*III*	*IV*		
		0	*0*	*0*	Teilprodukte	$0^{II}\cdot(150+1^{I}+0^{II}) = 0^{II}+0^{III}+0^{IV}$
	150	*1*	*0*			$1^{I}\cdot(150+1^{I}) = 150^{I}+1^{II}$
000	*150*	*0*				$150\cdot1^{I} = 150^{I}$
750						$150\cdot50 = 7500$
150						$150\cdot100 = 15000$
	I	*II*				
22518	*12*	*1*			Vierte Potenz	$300^{I} = (18Ü)+12^{I}$

Kapitel 8: Von der Quadratwurzel

Bevor Ursus das eigentliche Verfahren zum Ziehen der Quadratwurzel erläutert, greift er das letzte Beispiel aus dem Kapitel *Vom Vervielfachen* auf:
$(4^{I}+8^{II}+12^{IV})^2 = 1^{I}+4^{II}+4^{III}+6^{IV}+12^{V}+9^{VII}$. Er bemerkt, dass die beiden Rechenarten Multiplizieren und Quadrieren und ihre Umkehrungen, das Dividieren und das Wurzelziehen, sehr viele Gemeinsamkeiten haben. Deshalb zeigt Ursus das Ziehen der Quadratwurzel aus $1^{I}+4^{II}+4^{III}+6^{IV}+12^{V}+9^{VII}$ zuerst als Division, und erst danach das noch heute bekannte schriftliche Verfahren, das u.a. Gemma Frisius (1508-1555) in seiner *Arithmetica Practica* 1540 für dezimal geschriebene ganze Zahlen anschaulich und gut verständlich und wie auch heute noch üblich vorführte, für Quadrat- und Kubikwurzel.[56] Schon vor ihm schildert dieses Verfahren u.a. Peter Apian (1495-1552) in seinem Rechenbuch 1527,[57] Johannes Widmann von Eger (ca. 1462-nach 1498) in seinem Rechenbuch 1489,[58] allerdings noch nicht so geformt, wie wir es heute kennen, und Leonardo von Pisa (1170/80-nach 1240) im *Liber Abbaci* 1201.[59] Auch bei al-Ḫwārizmī (Kap. 14) findet sich dieses Verfahren, allerdings ebenfalls nicht in heutiger, verständlicher Form.[60] Es geht wohl auf Theon von Alexandria (um 370 n.Chr.) zurück und beruht auf der binomischen Formel; man dividiert den Wurzelrest stets durch das Doppelte der bisherigen Näherung. Auch diese Beispiele zum Wurzelziehen stellt Ursus gut durchschaubar dar. Es ist müßig zu erwähnen, dass die Wurzeln stets aufgehen.

„Die Quadratwurzel ist diejenige Zahl in einer mit sich selbst multiplizierten Zahl [$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$], *die mit sich selbst multipliziert wurde, um die mit sich selbst multiplizierte Zahl zu erhalten. Das Wurzelziehen geschieht wie folgt: Setz die Bruchteile geordnet nacheinander. Suche unter den Ganzen oder den ersten Bruchteilen, die mit geraden Exponenten verzeichnet sind, eine Zahl, deren Quadrat ganz oder möglichst weitgehend abgezogen werden kann* [also eine erste Näherung x_0, so dass $x_0^2 \leq a$]. *Diese Zahl setz zwischen zwei unter die* [zu wurzelnde] *Zahl gezogenen Linien und quadriere sie. Das Quadrat nimm von der oberen Zahl weg, was bleibt, setz darüber und streiche die benutzten Zahlen durch.*

Danach verdopple die jetzt gefundene [Teil-]*Wurzel, das Ergebnis heißt der Teiler. Diesen setz unter die nächstfolgenden mit ungeraden Zeichen bezeichneten Bruchteile stellengerecht untereinander. Suche, wie oft der Teiler in Zahlen der oberen Bruchteile passt* [also $(a-x_0^2) : (2x_0) = h_0$]. *Diese Zahl setz zwischen die zwei untergezogenen Linien zu der zuerst gefundenen* [Teil-]*Wurzel, doch um einen geraden Bruchteil weiter rechts. Und das ist der zweite Bruchteil der neu gefundenen*

[56] Ich danke Herrn Rudolf Haller für den Hinweis. Siehe Tropfke, Bd. II, 3. Aufl. 1933, S. 176.
[57] Siehe dazu Siegmund Günther, *Peter und Philipp Apian*, Prag 1882, Nachdruck Osnabrück 1985, S. 25f.
[58] Siehe Barbara Gärtner, *Johannes Widmanns Behende und hubsche Rechenung*, Tübingen 2000, S. 371ff.
[59] Ich danke Herrn Ulrich Reich für seine Hinweise auf Apian und Leonardo.
[60] Menso Folkerts, *Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen*, München 1997, S. 97ff und 147ff.

Wurzel. Diesen setz auch zum Teiler um einen Bruchteil nach rechts und multipliziere ihn mit sich selbst [h_0^2] *und auch mit dem vorangesetzten Teiler* [$2x_0 \cdot h_0$]. *Was da herauskommt* [$h_0^2+2x_0 \cdot h_0$], *zieh von den Bruchteilen der oberen Zahl ab* [vom Dividendenrest]. *Und so fahre fort bis zum Ende, dann erscheint letztlich die Wurzel der Zahl zwischen den zwei untergezogenen Linien. Halbiere den Exponenten des letzten geraden Bruchteils. Dieser halbe Teil des Exponenten zeigt dir von der gefundenen Wurzel den Exponenten des letzten Bruchteils, nach welchem die nachfolgenden Bruchteile leicht zu bezeichnen sind.*

Du kannst sie auch nach der Teilungslehre nehmen, denn diese zwei Rechenarten haben viel gemeinsam. Um diese Gemeinsamkeit der beiden Rechenarten wie auch derselben besondere Eigenschaft zu erkennen und zu unterscheiden, ist das letzte Beispiel der Multiplikation [siehe Kapitel 4] *auf beide Weisen gezeigt. Als Division sieht es folgendermaßen aus:"*

Wurzelziehen in Divisionsform $a : \sqrt{a} = \sqrt{a}$. $\quad \frac{1}{16}\frac{4}{16^2}\frac{4}{16^3}\frac{6}{16^4}\frac{12}{16^5}\frac{9}{16^7} : \frac{4}{16}\frac{8}{16^2}\frac{12}{16^4} = \frac{4}{16}\frac{8}{16^2}\frac{12}{16^4}$

Cossisch: $\quad 1^{I} + 4^{II} + 4^{III} + 6^{IV} + 12^{V} + 9^{VII} \; : \; 4^{I} + 8^{II} + 12^{IV} \; = \; 4^{I} + 8^{II} + 12^{IV}$

I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*	
	~~2~~		~~3~~	~~6~~				
~~1~~	~~4~~	~~4~~	~~6~~	~~12~~	~~0~~	~~9~~	~~0~~	Dividend
							IV	
				4	*8*	*0*	*12*	Quotient = Wurzel
	~~4~~	~~8~~	~~0~~	~~12~~				Divisor
		~~4~~	~~8~~	~~0~~	~~12~~			Divisor um eine Stelle nach rechts geschoben
			~~4~~	~~8~~	~~0~~	~~12~~		Divisor um noch eine Stelle nach rechts
				~~4~~	~~8~~	~~0~~	~~12~~	Divisor um noch eine Stelle nach rechts
~~1~~	~~2~~	~~0~~	~~3~~	~~0~~				$1^{I}+4^{II} : 4^{I} \approx 4^{I}; 4^{I} \cdot 4^{I}+8^{II}+12^{IV} = 1^{I}+2^{II}+3^{IV}$
	~~2~~	~~4~~	~~0~~	~~6~~	~~0~~			$2^{II}+4^{III} : 4^{I} \approx 8^{II}; 8^{II} \cdot 4^{I}+8^{II}+12^{IV} = 2^{II}+4^{III}+6^{V}$
		~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~		
			~~3~~	~~6~~	~~0~~	~~9~~	~~0~~	$3^{IV}+6^{V} : 4^{I} \approx 12^{IV}; 12^{IV} \cdot 4^{I}+8^{II}+12^{IV} = 3^{IV}+6^{V}+9^{VII}$

Auf eine Aufschlüsselung dieses Beispiels in einzelne Schritte habe ich verzichtet. Woher die Wurzel kommt, wird nicht erläutert. Wie man die Wurzel tatsächlich zieht, wird im nächsten Beispiel gezeigt.

Wurzelziehen: $\quad \sqrt{\frac{1}{16}\frac{4}{16^2}\frac{4}{16^3}\frac{6}{16^4}\frac{12}{16^5}\frac{9}{16^7}} = \frac{4}{16}\frac{8}{16^2}\frac{12}{16^4}$

Cossisch: $\quad \sqrt{1^{I} + 4^{II} + 4^{III} + 6^{IV} + 12^{V} + 9^{VII}} = 4^{I} + 8^{II} + 12^{IV}$

I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*	
~~1~~	~~4~~	~~4~~	~~6~~	~~12~~	~~0~~	~~9~~	~~0~~	Radikand
	I		*II*		*III*		*VIII*	
	4		*8*		*0*		*12*	Wurzel
		~~8~~	~~8~~	~~9~~	~~0~~	~~0~~	~~12~~	Zwischenrechnungen
			~~9~~					
	~~4~~	~~4~~	~~6~~	~~12~~	~~0~~	~~9~~	~~0~~	

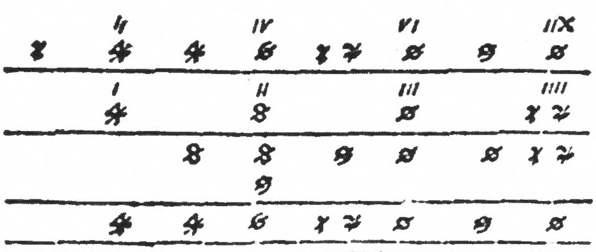


Abb. 6: Das Beispiel zum Wurzelziehen, Blatt D1v.

1. Schritt: $\sqrt{1^{I}+4^{II}} \approx 1^{I}$

I ~~1~~	II 4	III 4	Teilradikand $1^{I}+4^{II} = 20^{II} \gtrsim (\mathbf{4}^{I})^2 = 16^{II} = 1^{I}$
	I **4**		1. Näherung x_0 . Ihr Quadrat 1^{I} subtrahieren vom Radikanden.

2. Schritt:

I ~~1~~	II ~~4~~	III ~~4~~	IV 6	V 12	Radikandenrest (s. vorige Tabelle) $4^{II}+4^{III} = 68^{III}$ dividieren durch das Doppelte der Näherung x_0, also durch $2x_0 = 8^{I}$,
	I $4=x_0$		II $\mathbf{8=h_0}$		ergibt etwa $\mathbf{8^{II} = h_0}$ und damit $x_1 = x_0 + h_0 = 4^{I}+8^{II}$.
		I ~~8~~	II ~~8~~		Dieses $h_0 = 8^{II}$ multiplizieren mit $2x_0+h_0 = 8^{I}+8^{II}$,
	II ~~4~~	III ~~4~~			ergibt $64^{III}+64^{IV} = 4^{II}+4^{III}$. Subtrahenden $2x_0h_0 + h_0^2$ subtrahieren vom Radikandenrest.

3. Schritt:

~~1~~	II ~~4~~	~~4~~	IV 6	V 12	VI 0	Radikandenrest (s. vorige Tabelle) $6^{IV}+12^{V} = 108^{V}$ dividieren durch $2x_1 = 8^{I}+16^{II} = 9^{I}$
	I 4		II 8		III $\mathbf{0=h_1}$	ergibt $108^{V} : 9^{I} \approx \mathbf{0^{III} = h_1}$ und damit $x_2 = x_1+h_1 = 4^{I}+8^{II}+0^{III}$.
		I ~~8~~	II ~~8~~ ~~9~~			Diese $h_1=0^{III}$ multiplizieren mit $2x_1+h_1$ ergibt 0. $2 \cdot x_1$
	II ~~4~~	III ~~4~~				

4. Schritt:

~~1~~	II ~~4~~	~~4~~	IV 6	V 12	VI 0	9	VIII 0	Radikandenrest (s. vorige Tabelle) $6^{IV}+12^{V} = 108^{V}$ dividieren durch $2x_2 = 9^{I}+0^{II}$,
	I 4		II 8		III 0		IV $\mathbf{12=h_2}$	ergibt $108^{V} : 9^{I} = \mathbf{12^{IV} = h_2}$.
		I ~~8~~	II ~~8~~ ~~9~~	~~9~~	~~0~~	~~0~~	~~12~~	Diese 12^{IV} multiplizieren mit $2x_2+h_2 = 9^{I}+12^{IV}$,
	II ~~4~~	III ~~4~~	IV ~~6~~	V ~~12~~	VI ~~0~~	VII ~~9~~	VIII ~~0~~	ergibt $108^{V}+144^{VIII} = 6^{IV}+12^{V}+0^{VI}+9^{VII}+0^{VIII}$.

Die beiden letzten Schritte können auch gleich zusammengefasst werden. Das Beispiel zeigt auch, dass bei Zahlen, deren letzter Exponent ungerade ist, wie hier 9^{VII}, ein gerader Exponent ergänzt werden muss, hier 0^{VIII}.

Als Dezimalzahl geschrieben, wäre dieses Beispiel:
$\sqrt{0{,}079.204.592.853.784.561.139.226.562.500} = 0{,}281.433.105.468.750$,
an dem bereits moderne Taschenrechner scheitern. Bei Ursus wird stets mit Sechzehner-Brüchen gerechnet. Man könnte jedoch den kleinsten Bruchstellenwert als Einer, den nächst größeren als Sechzehner, den nächsten als 256er usw. ansehen, also mit 16^8 erweitern, und so das Verfahren statt für Brüche interpretieren als für ganze Zahlen in einem Hexadezimalsystem gedacht, was Ursus allerdings nicht gemeint hat. Tut man dies und setzt VIII als Einer, VII als Sechzehner, VI als 256er usw., so lautete dieses Beispiel statt

$\sqrt{3\ 40\ 18\ 11\ 36} = 1\ 8\ 4\ 4\ 4$
$\underline{-1}$ ← quadriert
$240 : 20 \approx 8$
$\underline{-224}$ $(20+8) \cdot 8$
$1618 : 360 \approx 4$
$\underline{-1456}$ $(360+4) \cdot 4$
$16211 : 3680 \approx 4$
$\underline{-14736}$ $(3680+4) \cdot 4$
$147536 : 36880 \approx 4$
$\underline{-147536}$ $(36880+4) \cdot 4$
0

$$\sqrt{1^{I}+4^{II}+4^{III}+6^{IV}+12^{V}+9^{VII}} = 4^{I}+8^{II}+12^{IV}$$

in heutiger Schreibweise

$$\sqrt{1 \cdot 16^7 + 4 \cdot 16^6 + 4 \cdot 16^5 + 6 \cdot 16^4 + 12 \cdot 16^3 + 9 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0} = \sqrt{340181136} = 18\,444 = 4 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^0$$

Das Verfahren entspricht dem auch heute noch bekannten schriftlichen Wurzelziehverfahren. Es beruht auf einer Iteration und sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{llllll}
\sqrt{a} & = & x_0 & & x_0+h_0=x_1 & x_1+h_1=x_2 \\
-x_0^2 \leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow & & \hookleftarrow & & \downarrow & \downarrow \\
(a-x_0^2) & : 2x_0 & = & h_0 & \downarrow & \downarrow \\
-(2x_0h_0+h_0^2) \leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow & & & h_0 \ \odot & \hookleftarrow & \downarrow \\
a-(x_0+h_0)^2 & = & (a-x_1^2) : 2x_1 = & h_1 & & \downarrow \\
 & & -(2x_1h_1+h_1^2) \leftarrow & & & h_1 \leftarrow \odot \hookleftarrow \\
 & & a-(x_1+h_1)^2 = & & a-x_2^2 & \text{usw. mit } x_i, h_i.
\end{array}$$

Oder in anderer Form: $\sqrt{a} \approx x_0$

1. Verbesserung: $\sqrt{a} \approx x_0 + h_0 = x_1 \Rightarrow a \approx x_0^2 + 2x_0h_0 + h_0^2 \approx x_0^2 + 2x_0h_0$

Also $h_0 \approx (a - x_0^2) : 2x_0$

2. Verbesserung: $\sqrt{a} \approx x_1 + h_1 = x_2 \Rightarrow a \approx x_1^2 + 2x_1h_1 + h_1^2 \approx x_1^2 + 2x_1h_1$

Also $h_1 \approx (a - x_1^2) : 2x_1$ usw.

Kapitel 9: Von der dritten Wurzel

„*Die dritte Wurzel ist diejenige Zahl in einer zweimal mit sich selbst multiplizierten Zahl,* [$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$], *die zweimal mit sich selbst multipliziert wurde, um die zweimal mit sich selbst multiplizierte Zahl selbst zu ergeben. Und das Ziehen der dritten Wurzel wird folgendermaßen vollbracht: Setz die Bruchteile geordnet nacheinander. Dann handle ebenso wie beim Ziehen der Quadratwurzel, nur dass du hier nicht auf einen geraden Exponenten der Bruchteile achtest, sondern auf einen durch drei teilbaren, also drei, sechs, neun oder dergleichen. Auch quadriere hier die Zahlen nicht, sondern multipliziere sie zweimal mit sich selbst.*

Danach musst du die jetzt gefundene erste Näherungswurzel nicht verdoppeln, sondern verdreifachen. Darüberhinaus multiplizierst du die dreifache Näherungswurzel mit der einfachen, so erhälts du den Teiler [$3x_0^2$] *zum neuen Bruchteil. Diesen Teiler multipliziere zuerst mit dem neuen Bruchteil* [h_0] *der Wurzel; danach multipliziere diesen neuen Bruchteil der Wurzel mit sich selbst und mit der vorigen dreifachen Näherung* [$3x_0h_0^2$]. *Schließlich multipliziere diesen neuen Bruchteil der Wurzel zweimal mit sich selbst* [h_0^3]. *Diese drei sich so ergebenden Zahlen setze geordnet so unter die zu wurzelnde Zahl, dass der letzte Bruchteil der zuletzt gefundenen Zahl* [h_0^3] *gerade unter den nächstfolgenden durch drei teilbaren Stellenwert kommt, die anderen beiden Zahlen jede um einen Stellenwert nach links. Schließlich summiere diese drei Zahlen* [$3x_0^2h_0 + 3x_0h_0^2 + h_0^3$] *und subtrahiere diese Summe vom Dividendenrest. Und dieses Verfahren setze fort bis zum Schluss.*

Teile den letzten durch drei teilbaren Exponenten durch drei, das sich ergebende Drittel ist der letzte Bruchteil der gefundenen Wurzel. Siehe folgendes Beispiel:"

Dritte Wurzel: $\sqrt[3]{\frac{2}{16^2}\frac{2}{16^3}\frac{15}{16^4}\frac{3}{16^5}\frac{6}{16^6}\frac{4}{16^7}\frac{3}{16^8}\frac{13}{16^9}} = \frac{3}{16}\frac{4}{16^2}\frac{5}{16^3}$

~~1~~ ~~2~~	~~7~~ ~~III~~ ~~2~~	~~9~~ ~~15~~	~~5~~ ~~13~~[1]	 VI ~~6~~	 ~~4~~	 ~~3~~	 IX ~~13~~	Es sollte 15 statt 5 heißen. Radikand. [1]Es müsste nur 3 statt 13 heißen. Die 1 ist also eine Zeile zu tief gesetzt.
	3			4			III 5	Dritte Wurzel
~~1~~	~~11~~ 6	~~12~~ 9 9	~~4~~ ~~14~~	~~0~~ ~~7~~ ~~15~~	~~0~~ ~~3~~	~~12~~ ~~7~~	~~13~~	Zwischenrechnungen
	~~7~~	~~5~~ 9	~~4~~ ~~15~~	~~0~~ 6	~~4~~	~~3~~	~~13~~	

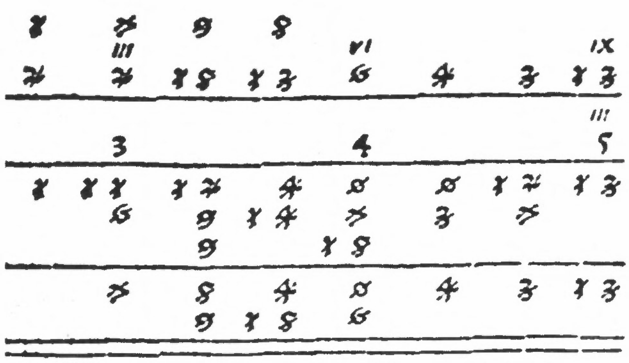


Abb. 7: Das Beispiel für die dritte Wurzel, Blatt D2v.

Erster Schritt: $\sqrt[3]{2^{II} + 2^{III}} \approx 3^{I}$

II ~~1~~ ~~2~~	III 7 ~~2~~	IV **15**	Radikand $2^{II}+2^{III}$ $(=34^{III}) \gtrsim (3^{I})^3$ $(=27^{III})$ $= 1^{II}+11^{III}$.
	I **$3=x_0$**		(Teil-)Wurzel
~~1~~	~~11~~		Subtrahenden vom Radikanden subtrahieren.

Zweiter Schritt:

II ~~1~~ ~~2~~	III ~~7~~ ~~2~~	IV **9** ~~15~~	V **15** ~~3~~	VI 6	Radikandenrest $7^{III}+15^{IV}$ (s. vorige Tabelle, $=127^{IV}$) dividieren durch $3x_0^2 = 27^{II}$,
	I $3=x_o$			II **$4=h_0$**	ergibt $127^{IV} : 27^{II} \approx \mathbf{4^{II} = h_0}$. $x_1 = x_0+h_0 = 3^{I}+4^{II}$.
~~1~~	~~11~~ 6	 12 9	 4	 0	Drei Produkte bilden: $3x_0^2h_0 = 3\cdot9^{II}\cdot4^{II} = 108^{IV} = 6^{III}+12^{IV}$ $3x_0h_0^2 = 3\cdot3^{I}\cdot1^{III} = 9^{IV}$ $h_0^3 = (4^{II})^3 = 64^{VI} = 4^{V}$
	7	5	4	0	Die Summe dieser drei Produkte $7^{III}+5^{IV}+4^{V}$ vom Radikandenrest $7^{III}+15^{IV}+3^{V}$ subtrahieren.

Dritter Schritt:

II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	
~~1~~	~~7~~	9	15					Radikandenrest $9^{IV}+15^{V}$ ($=159^{V}=2544^{VI}$)
~~2~~	~~2~~	~~15~~	~~3~~	6	4	3	13	dividieren durch $3x_1^2=507^{III}$,
	I			II			III	
	3			4			**$5=h_1$**	ergibt $5^{III}=h_1$.
~~1~~	~~11~~	~~12~~	~~4~~	~~0~~				
	~~6~~	~~9~~						Drei Produkte bilden:
		9	14	7	0			$3x_1^2h_1=3\cdot(52^{II})^2\cdot 5^{III}=40560^{VII}=9^{IV}+14^{V}+7^{VI}$
				15	3	12		$3x_1h_1^2=3\cdot 52^{II}\cdot(5^{III})^2=3900^{VIII}=15^{VI}+3^{VII}+12^{VIII}$
						7	13	$h_1^3=(5^{III})^3=125^{IX}=7^{VIII}+13^{IX}$
	~~7~~	~~5~~	~~4~~	~~0~~				Die Summe dieser drei Produkte vom
		9	15	6	4	3	13	Radikandenrest subtrahieren ergibt 0.

Als Dezimalzahl lautet dieses Beispiel $\sqrt[3]{0{,}008.532.897.526...} = 0{,}204.345.703.125$.

Denkt man sich auch hier, wie beim Beispiel zur Quadratwurzel, die Ursus'sche Aufgabe $\sqrt[3]{2^{II}+2^{III}+15^{IV}+3^{V}+6^{VI}+4^{VII}+3^{VIII}+13^{IX}} = 3^{I}+4^{II}+5^{III}$ mit 16^9 erweitert, so lautet sie stattdessen

$$\sqrt[3]{2\cdot16^7+2\cdot16^6+15\cdot16^5+3\cdot16^4+6\cdot16^3+4\cdot16^2+3\cdot16^1+13\cdot16^0} = \sqrt[3]{586.376.253} = 837 = 3\cdot16^2+4\cdot16^1+5\cdot16^0$$

$\sqrt[3]{586\,376\,253} = 8\;3\;7$

$\underline{-512} \longleftarrow 512 = 8^3$

$74\,376 : 3\cdot80^2 (= 19200) \approx 3$

$\underline{-59\,787} \quad 3\cdot80^2\cdot3 + 3\cdot80\cdot3^2 + 3^3 = 59\,787$

$14\,589\,253 : 3\cdot830^2 (=2066700) = 7$

$\underline{-14\,589\,253} \quad 3\cdot830^2\cdot7 + 3\cdot830\cdot7^2 + 7^3 = 14\,589\,253$

0

Dieses Verfahren funktioniert auch, wenn die Wurzel nicht aufgeht.

Ursus hat solche Beispiele nicht verwendet. Das Verfahren ist heute kaum noch bekannt, es basiert auf der binomischen Formel für die dritte Potenz $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Das Verfahren beruht auf folgender Iteration:

$\sqrt[3]{a} \approx x_0 \qquad x_0+h_0 = x_1 \qquad x_1+h_1 = x_2$

$-x_0^3$

$(a - x_0^3) : 3x_0^2 = h_0$

$-(3x_0^2h_0+3x_0h_0^2+h_0^3)$

$a - (x_0+h_0)^3 = (a-x_1)^3 : 3x_1^2 = h_1$

$-(3x_1^2h_1+3x_1h_1^2+h_1^3)$

$a - (x_1+h_1)^3 = a - x_2^3$ usw.

Oder in anderer Form: $\sqrt[3]{a} \approx x_0$

1. Verbesserung: $\sqrt[3]{a} \approx x_0 + h_0 = x_1 \Rightarrow a = x_0^3 + 3x_0^2h_0 + 3x_0h_0^2 + h_0^3 \approx x_0^3 + 3x_0^2h_0$
   Also $h_0 \approx (a - x_0^3) : 3x_0^2$

2. Verbesserung: $\sqrt[3]{a} \approx x_1 + h_1 = x_2 \Rightarrow a = x_1^3 + 3x_1^2h_1 + 3x_1h_1^2 + h_1^3 \approx x_1^3 + 3x_1^2h_1$
   Also $h_2 \approx (a - x_1^3) : 3x_1^2$ usw.

„Was hier aber mehr von anderen Wurzeln zu sagen wäre, auch eine einfache und ganz leichte Regel vom Ausrechnen weiterer Wurzeln, wollen wir uns in unserer Rantzowischen Rechenkunst ersparen. Unterdessen genügen uns eben diese. Wir wollen demnach die Rechnung hiermit beschließen und zum Messen schreiten.

Ende des ersten Buches."

Damit hat Ursus „den ersten Flügel des menschlichen Gemütes", die Arithmetik, bearbeitet. Er geht nun zum zweiten Flügel über, zur Geometrie.

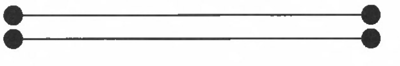
Das zweite Buch: Vom Feldmessen

Das zweite Buch behandelt das eigentliche Feldmessen. Ursus versucht zuerst, die elementaren geometrischen Grundfiguren, die er benötigt, sorgfältig zu definieren, gerade und gebogene Linien, die verschiedenen Winkel, Vierecke und Dreiecke, den Kreis und seine Teile. Dann folgen die Flächenberechnungen und das Messen unzugänglicher Strecken unter Verwendung des Strahlensatzes, die Dreiecksflächenberechnung mit der Heronformel, die Kreisfläche und das Messen gestückelter Flächen. Auch in diesem Kapitel legt Ursus neben den Definitionen Wert auf geschickte Darstellung, so etwa, wenn er das Dreieck als halbes Parallelogramm benennt, damit sich die Flächeninhalte als Länge mal Breite (Höhe) bzw. dessen Hälfte ergeben. Oder er weist auf die Analogie der Kreisflächenberechnung zur Dreiecksflächenberechnung hin, weil die Kreissektorfläche die Hälfte von Radius mal Bogenlänge ist, ebenso wie die Dreiecksfläche die Hälfte von Länge mal Höhe ist. Die Bezeichnungen, die Ursus im Deutschen benutzt, stimmen häufig nicht mit unserem heutigen Sprachgebrauch überein, so bezeichnet er mit „ecken", was wir heute Seiten nennen, er bezeichnet mit „seiten", was wir heute parallele Strecken nennen. Ursus spricht von „zwei ecken machen einen ort" und drückt damit aus, dass zwei in einer Ecke zusammenlaufende Seiten einen Winkel bilden. Hingegen ist bei Ursus der „winkel" stets ein Rechter Winkel, und konsequenterweise bezeichnet er ein Rechteck als „ein winkelrecht". Ich möchte hier die zum ersten Buch gemachte Aussage wiederholen, dass Ursus für die geometrischen Dinge Bezeichnungen im Deutschen zu prägen versucht, die ihm nur teilweise vorliegen. Eine Übersetzung des Euklid ins Deutsche hatte er noch nicht. Die Ausgabe von Xylander, Basel 1562, der ersten sechs Bücher, wird ihm nicht zur Verfügung gestanden haben. Und er hat keine universitäre Bildung genossen, sondern ist Autodidakt. Dies ermöglicht ihm jedoch, freier von gedanklichen Vorgaben zu arbeiten. Am Ende des Buches über die Geodäsie findet man eine Gegenüberstellung der von Ursus verwendeten Begriffe mit unseren heutigen.

Kapitel 1: Von der Fläche

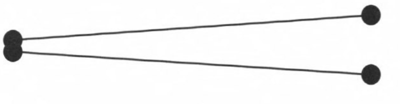
„Das Messen ist die Erkundung einer schnurgleichen[61] *Länge, was mit einer Messrute aus einer schnurgeraden Stange gemacht wird, die neben die ausgestreckte Schnur gelegt wird. Der Gegenstand des Messens ist eine Fläche. Fläche ist ein zwischen Linien eingeschlossener Raum, sie hat Länge und Breite, ihre Teile sind Seiten*[62] *und Winkel.*[63] *Eine Seite ist eine Linie, die eine Fläche begrenzt, und sie gibt es als Parallele Strecken*[64] *oder als Nichtparallele Strecken.*[65]

„Seiten" sind gleichlaufende [parallele] *„Ecken"* [Strecken, Linien], *die überall gleich weit voneinander entfernt sind. Darüberhinaus ist eine Seite einzeln oder gestückelt. Einzeln oder schlicht ist eine Seite aus einer einzigen Linie, und ist gerade oder krumm.*



[Ursus bezeichnet also als „Seiten" parallele Strecken, die eine Fläche begrenzen.]

„Enden" sind ungleich verlaufende Linien, die an einem Ende zusammen und am anderen auseinander laufen. [Ursus bezeichnet also als „Enden" nicht-parallele Strecken, die eine Fläche begrenzen.]



Ein „Rechteck" ist eine gerade Linie.

Ein „Krummeck" ist eine nicht-gerade Linie und ist gebogen oder gewunden. Gebogen bedeutet mit Krümmung gleichen Vorzeichens.[66]

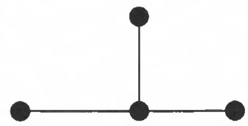
Gewunden bedeutet mit Krümmungen verschiedenen Vorzeichens.[67]

Gestückelt ist eine aus vielerlei Linien zusammengesetzte Linie.

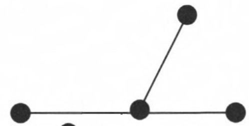
[61] Die „Schnur" findet allgemein Anwendung zum Messen, zur Bestimmung gerader Richtung. Jacob und Wilhelm Grimm, *Deutsches Wörterbuch*, Reprint Leipzig 1899, Bd. 15.
[62] „ecken"
[63] „ort", „örter"
[64] „seiten"
[65] „enden"
[66] „in eine Krümmung"
[67] „in viele Krümmungen"

Zwei Seiten ergeben einen Winkel. Ein Winkel ist der Zusammenstoß zweier Seiten,[68] *und ist ein Rechter Winkel oder ein nicht-rechter Winkel.*[69]

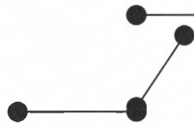
Ein Rechter Winkel[70] *ist also ein Ort, bei dem eine gerade Linie so auf eine gerade Linie gesetzt wird, dass die Winkel zu beiden Seiten gleich sind.*[71] [Mit „Winkel" bezeichnet Ursus stets den rechten Winkel.]



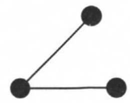
Eine „Schärfe" ist ein Ort, bei dem eine Strecke auf eine Strecke gesetzt wird, die Winkel zu beiden Seiten aber ungleich sind, ist also eine „Stumpfe" oder „Spitze".



Ein stumpfer Winkel[72] *ist ein Winkel größer als ein rechter Winkel.*

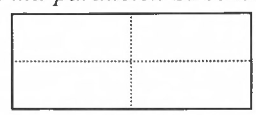


Ein spitzer Winkel[73] *ist ein Winkel kleiner als ein rechter Winkel.*

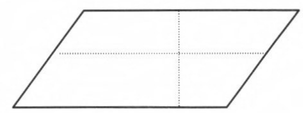


Die Winkel erzeugen eine Fläche. Die Fläche ist einzeln oder gestückelt. Einzeln ist eine schlichte Fläche, welche man einzeln direkt messen kann, und sie ist eckig oder rund. Eckig ist eine Fläche, die von geraden Linien eingefasst wird, und ist ein Viereck oder ein Dreieck. Ein Viereck ist eine Fläche, die von vier geraden Linien eingefasst wird, und davon wollen wir viererlei mit parallelen Strecken unterscheiden:

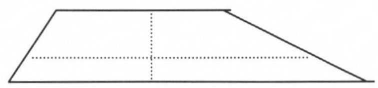
Ein Rechteck[74] *hat 4 rechte Winkel.*



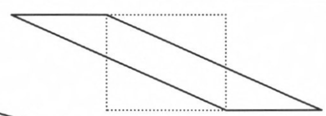
Ein Parallelogramm[75] *hat gegenüberliegend gleiche Seiten und Winkel.*



Ein Trapez[76] *hat ungleiche Parallelstrecken.*

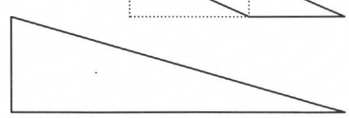


Beim auslaufenden Parallelogramm[77] *liegen die Lote von den Eckpunkten außerhalb der gegenüberliegenden Seite.*

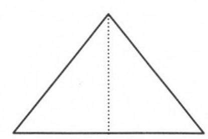


Vierecke ohne parallele Strecken werden beim Messen zu Dreiecken gemacht. Ein Dreieck ist eine Fläche, die von drei [geraden] *Strecken begrenzt wird. Wir müssen dabei drei verschiedene unterscheiden:*

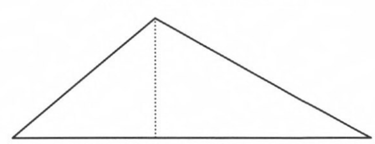
ein rechtwinkliges[78] *hat einen rechten Winkel,*



ein gleichseitiges[79] *hat gleich lange Seiten und gleich große Winkel,*



ein unregelmäßiges[80] *hat alle Seiten und Winkel unterschiedlich.*



Bei den durch [gerade] *Strecken begrenzten Flächen gibt es also nur vier Vierecke und drei Dreiecke auszumessen; auf diese sieben müssen alle anderen Vielecke zurückgeführt werden.*[81]

[68] Vergl. Euklid 1. Buch: „Ein Winkel ist eine Neigung zweier Linien gegeneinander, wenn sie einander treffen." Übersetzung von Clemens Thaer, Leipzig 1933.

[69] „eine scherffe"

[70] „winkel"

[71] Vergl. Euklid 1. Buch: „Wenn eine gerade Linie auf eine gerade Linie gestellt einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter."

[72] „eine stumpfe"

[73] „eine spitze"

[74] „ein winkelrecht"

[75] „ein rauteckig"

[76] „ein ungleichseitig"

[77] „auslauffig"

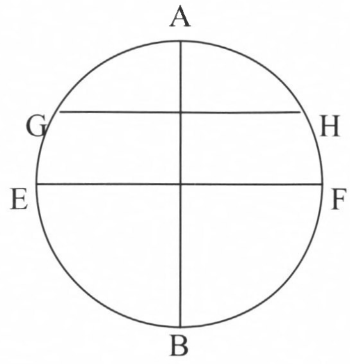
[78] „winkeleckt"

[79] „ortgleich"

[80] „ungleich"

[81] Die gepunkteten Linien in den Zeichnungen deuten auf die Flächenberechnung Mittellinie mal Höhe bzw. Grundlinie mal Höhe durch 2 hin.

Kapitel 2: Vom Kreis[82]



Der Kreis ist eine Fläche mit einer gebogenen Linie, die überall gleich weit von Mittelpunkt entfernt ist. Und die den Kreis umgebende gebogene Linie heißt der Umkreis.[83] *Die gerade Linie, die die Kreisfläche durch ihre Mitte teilt, heißt Durchmesser.*[84] *Jeder durch einen Durchmesser geteilte Teil der Kreisfläche ist ein Halbkreis. Die Linien, die die Kreisfläche teilen, heißen Sehnen. Das Stück der Kreisfläche, das durch eine Sehne abgeteilt wird, heißt Bogen. Die gekrümmte Linie des Bogens heißt Bogenlinie, die Höhe des Bogens* [Kreisabschnitt] *Bolzen.*[85] *Und es heißt größerer/kleinerer Bogen, welcher größer/kleiner ist als eine Halbkreisfläche. Das Stück der Kreisfläche aber, das durch vom Mittelpunkt zur Kreislinie gehende Linien abgeteilt wird, soll ein Kreisteil* [Sektor] *heißen. Damit wirst du dich im folgenden stark zu beschäftigen haben.*

Die Kreisfläche ist eben oder gebogen. Eine Kreisfläche ist eben, wenn der Mittelpunkt und der Umkreis miteinander eben sind. Eine Kreisfläche ist gebogen, wenn der Mittelpunkt und der Umkreis miteinander uneben sind. Sie ist aufwärts gebogen wie Berge oder niederwärts gebogen wie Täler. Ein Berg ist eine gebogene Fläche, deren Mitte aufwärts gebogen ist, und sie ist kegelig oder kugelig. Kegelig ist sie zugespitzt wie ein Kegel, und kugelig ist sie ausgedehnt wie eine Kugel. Ein Tal ist eine gebogene Fläche, deren Mitte niederwärts gebogen ist, sonst wie beim Berg gesagt.

Eine gestückelte Fläche ist aus einzelnen Flächen zusammengesetzt, und zwar aus gleichen oder verschiedenen Seiten; bei gleichen Seiten aus geraden oder krummen Seiten. Bei geraden Seiten gibt es die Vierecke ohne parallele Seiten, auch die Fünfecke, die Sechsecke, die Siebenecke und weitere. Bei krummen Seiten kann die zusammengesetzte Fläche von ausgebogenen, von eingebogenen oder von beiden, aus- und eingebogenen, Linien begrenzt sein.“

An mehreren Stellen, so auch im folgenden Kapitel, weist Ursus darauf hin, dass man Länge und Breite rechtwinklig zueinander zu messen habe. Der Hinweis darauf ist ihm wichtig. Wie er in Buch 4 über das Irrmessen belegt, scheint von Feldmessern häufiger hiergegen verstoßen worden zu sein, so auch von Jacob Köbel in seiner *Geometrei*, ein Werk, das Ursus offensichtlich kannte. Auch finden wir es heute befremdlich, wenn bei der Flächenberechnung von Dreiecken ausdrücklich erwähnt wird, dass die Division durch 2 nach der Produktberechnung oder vorher bei einem der Faktoren erfolgen könne. Unter Laien war das damals wohl nicht so selbstverständlich, wie es heutigen Schülern bereits erscheint.

Kapitel 3: Vom Messen von Vielecken[86]

„Und nun wollen wir endlich zum Messen selbst schreiten. Wie man alle vorgenannten unterschiedlichen Flächen richtig messen soll, wird hinfort gezeigt. Wenn du die bisher behandelten Dinge verstanden hast, sollst du, mein freundlicher lieber Leser, nun darauf achten.

Alle Flächenmessung geschieht mit dem rechten Winkel durch Länge und Breite. Die Länge ist ein Maß der Fläche nach der Länge, und die Breite nach der Breite. Es müssen sich die Länge und Breite in der Mitte des Vierecks kreuzweise rechtwinklig schneiden und sich auf der Basisseite[87] *des Dreiecks hammerweise rechtwinklig berühren.*

Alsdann multipliziert man die Länge und Breite miteinander, so erhält man des gemessenen Vierecks einfache, aber des Dreiecks zweifache Größe. Darum erhält man den wahren Flächeninhalt des Dreiecks als Hälfte des Produktes, oder man nimmt beim Multiplizieren entweder von der Länge oder von der Breite die Hälfte. Denn ein Dreieck ist die Hälfte seines Vierecks, demnach ist auch der Flächeninhalt dessen Hälfte.

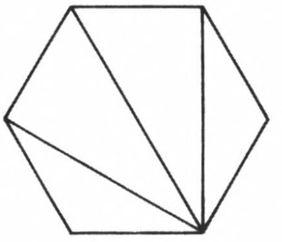
Im Viereck ist aber zu beachten, dass man eine rechtwinklige Linie von einer der parallelen Seiten zu der anderen gegenüber ziehen können muss. Ist das aber mit einer Senkrechten nicht möglich, wie im auslauffenden Viereck, so muss man eine Parallelseite verlängern, bis man es tun kann.

Man kann dann sowohl Vierecke wie auch Parallelogramme und alle anderen Vier-, Fünf-, Sechs- und Siebenecke und auch gestückelte geradlinige Flächen durch durchgezogene Linien in Dreiecke zerteilen. Und weil ein jedes Dreieck eine Fläche und drei Seiten hat und also zwei Seiten mehr als

[82] „von der runde“
[83] Ich verwende statt des Begriffes Kreislinie die von Ursus benutzte Vokabel „Umkreis“.
[84] „durchmaß“
[85] „der boltz“
[86] „eckter flechen“
[87] „auf der gelegsten Seite“

Flächen, wird es bei der Teilung anderer geradlinig begrenzter Flächen in Dreiecke stets zwei Flächen weniger geben als das Eck Seiten hatte.

Alsdann sind die Dreiecke jeweils einzeln auszumessen und deren Flächeninhalte zu summieren. Die Summe gibt dann den Flächeninhalt der gestückelten Fläche. Beim rechtwinkligen Dreieck ist auch zu bemerken, dass man dessen Länge und Breite auf seinen beiden kürzeren Seiten messen kann. Auch, dass man alle anderen nicht-rechtwinkligen Dreiecke in zwei rechtwinklige teilen und dann wie gesagt messen kann. Denn wenn man von einem seiner Eckpunkte eine Linie zur gegenüberliegenden Seite zieht, so dass diese Linie auf der Seite zwei rechte Winkel erzeugt, so ist dieses Dreieck in zwei andere rechtwinklige Dreiecke geteilt.“

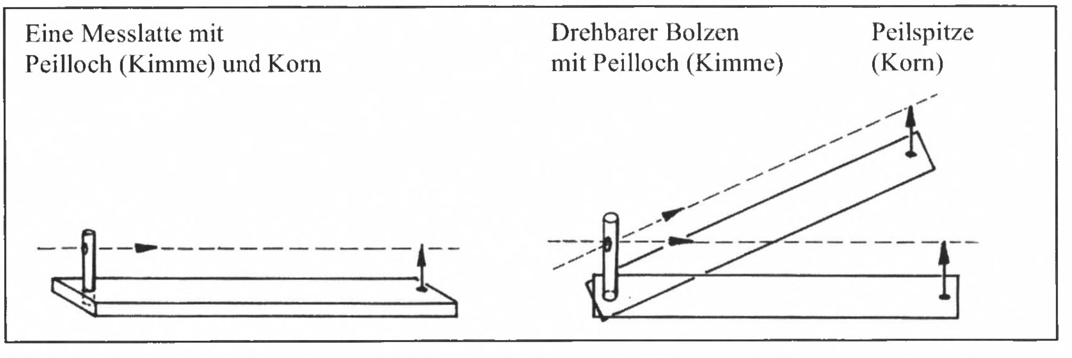


6 Seiten, 4 Dreiecke

Der Feldmesser muss im Gelände auch Strecken messen, die ihm nicht direkt zugänglich sind, z.B. weil er dazu einen Wasserlauf überqueren müsste oder weil das Abschreiten der Strecke durch andere Hindernisse erschwert wird. Außerdem ist es bequemer, aus zwei bekannten Strecken mit einem Gerät die dritte Strecke eines Dreiecks oder weitere Strecken zu berechnen, statt diese direkt durch Auslegen einer Messrute auszumessen. Ein solches Gerät hat Ursus benutzt. Er beschreibt es im folgenden Kapitel. Die Messung beruht auf der Anwendung des Strahlensatzes. Auf einer Messlatte mit Maßeinteilung, Ursus schlägt eine Länge von 16 Schuh vor, befinden sich Kimme und Korn, über die man von einem Endpunkt einer bekannten Strecke deren anderen Endpunkt anpeilt. Mit einer zweiten Messlatte mit gleicher Maßeinteilung peilt man von dem gleichen Endpunkt der beiden bekannten Strecken aus in Richtung des Endpunktes der zweiten bekannten Strecke. Die wirklichen Längen der bekannten Strecken, z.B. 12 Ruten und 10 Ruten, trägt man in irgendeinem Verkleinerungsverhältnis, z.B. 1:16 als Rute:Schuh, auf den entsprechenden Messlatten ab. Die Länge der direkten Verbindung der beiden Markierungen auf den beiden Messlatten wird bestimmt, hier z.B. 5 Schuh 7 Finger, natürlich abhängig von Winkel zwischen beiden Messlatten. Aus dem Verkleinerungsverhältnis, hier 1:16, ergibt sich die dritte unbekannte Strecke zu 5 Ruten 7 Schuh.

Weder das Messgerät noch die Anwendung des Strahlensatzes sind Erfindungen von Ursus. Er legt in seiner *Geodaesia* ja auch nur bekannte Tatsachen als Anwendung zum Landmessen dar. Dass dies notwendig war, ergibt sich aus dem vierten Buch, in dem er Landmesserkollegen auf grundsätzlich falsche Messungen oder Rechnungen hinweist.

Kapitel 4: Vom Messen unzugänglicher und nicht einsichtbarer Strecken



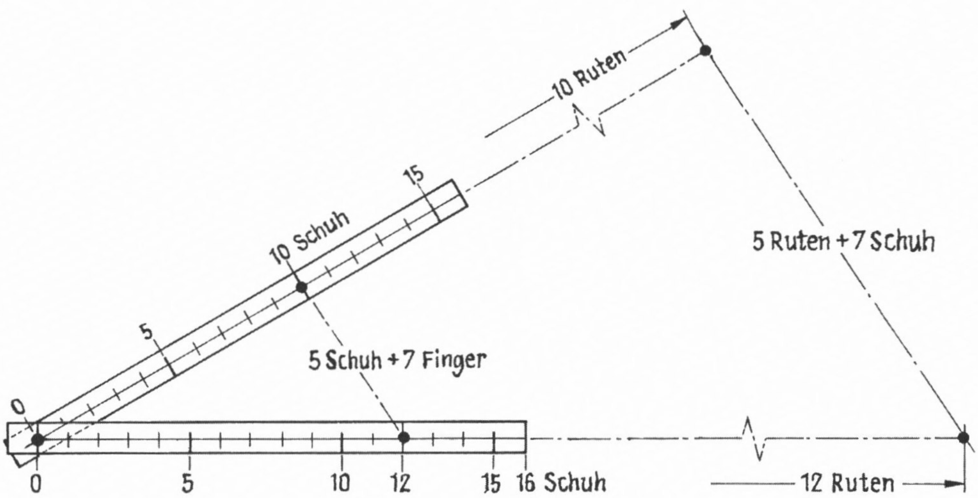
„Unzugängliche Seiten und Flächen misst man so: Man nimmt dazu zwei gerade und schnurgleiche Stöcke, je länger desto besser und genauer, und teilt jeden mit einem Zirkel in gleich viele Teile. Am besten dazu sind zwei Messruten, welche jeweils in 16 Schuh und jeder Schuh wiederum in 16 Fingerbreiten geteilt sind, also wird jede Rute 256 gleiche Teile haben.[88] *Jeder Stock habe vorn eine aufgerichtete Spitze und hinten ein Löchlein, durch welches sie mit einem Bolzen, der oben ein Peilloch hat und den man darin hin- und herbewegen kann, zusammengeheftet werden können. Und so wird der Bolzen wie ein Zielloch für beide Stöcke oder Ruten sein.*

Hiermit mag man die eine unbekannte Seite eines Dreiecks durch die zwei anderen bekannten finden. Man stellt an dem der unbekannten Seite gegenüberliegenden Winkel den einen Stock in Richtung des zweiten, den anderen Stock in Richtung des dritten Winkels [Eckpunktes] *des Dreiecks, so dass man jeden der zwei anderen Eckpunkte von diesem ersten Eckpunkt aus durch des Bolzens Zielloch über die aufgerichteten Zielspitzen schnurgerade sehen kann. Dann lässt man beide Stöcke unverrückt liegen. Danach misst man jede* [der zwei zugänglichen Seiten] *aus und teilt jede*

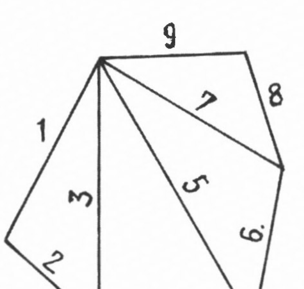
[88] Jeder Stock, jede Messrute, wird also ca. 5 m lang sein (1 Rute = 4,74 m).

Seitenlänge den Einheiten der Stöcke zu. Letztlich misst man neben einer gespannten Schnur die Länge von einem bezeichneten Teil des einen Stocks zum Teilpunkt des anderen Stocks, mit einem so weit wie jedes Teil an jedem Stock lang ist geöffneten Zirkel [d.i. mit der Einheit der beiden Stöcke]. *Und so viele Teile wie denn zwischen den beiden bezeichneten Teilen* [der Stöcke] *sind, so lang ist die gegenüberliegende und unbekannte Seite des Dreiecks. Denn so wie sich die Verhältnisse*[89] *dreier Dinge im kleinen verhalten, so verhalten sie sich auch im großen. Und aus dieser geometrischen Regel*[90] *der Dreiecke ergibt sich die ganze Proportionsregel in der Rechenkunst. Demnach kann man in den Fällen, in denen mehr Ruten in einer Seite als Teile am Stock vorhanden sind, ihre Länge durch diese Regel leicht finden. Denn so wie man auf dem einen Stock eine große Anzahl der Einheiten nimmt und setzt dieselbe anstatt der Seitenlänge, so findet man durch die andere Seitenlänge die Anzahl der Einheiten des anderen Stockes. Und aus diesen beiden gefundenen Maßzahlen für die Seitenlängen findet man die Länge der gemessenen zwei Seiten."*

Ein Beispiel zum Messen mit diesem Gerät: Gemessen werden die beiden Seiten in Peilrichtung zu z.B. 12 Ruten und 10 Ruten. Die Länge der Verbindung der Teilpunkte 12 und 10 auf den Schenkeln, hier z.B. 5 Schuh 7 Finger, liefert für die unbekannte dritte Seite damit 5 Ruten und 7 Schuh.



„Und so mag man nun leicht eine vielseitige Fläche, ohne alles durchzumessen, in ihre Dreiecke teilen und jedes Dreiecks unbekannte Seite durch zwei andere bekannte finden. Denn sofern man die eine Seitenlänge auf die erklärte Weise gefunden hat, und die Länge der anderen gemessen hat, die Stöcke wie erklärt wieder angelegt hat, zeigen sie die Länge der dritten nun unbekannten Seite und so fort. Wenn man nun alle Dreiecke und ihre Seitenlängen, die in einer Fläche vorhanden sind, gefunden hat, und man aber nun auf übliche Art durch rechtwinkliges Durchmessen der durch die Dreiecke gehenden Linien, die von einer Ecke des Dreiecks rechtwinklig hammerweise auf die der Ecke gegenüberliegende Seite gehen [die Höhen], *nicht berechnen will und dennoch ohne deren Kenntnis des Dreiecks Flächeninhalt wissen will, so macht man es folgendermaßen: Von der halben Summe aller Seiten subtrahiert man jeweils die eine Seite, die drei Differenzen multipliziert man miteinander und auch mit der halben Summe der drei Seiten. Aus dem Ergebnis zieht man die Wurzel, das ist des Dreiecks Flächeninhalt. Uneinsichtbare Seiten erhält man durch Leitung des Sonnensegers*[91] *oder durch Aufsetzen etlicher gerader Stöcke nacheinander, welche zu der verborgenen Seite als Ziel richtig hinweisen. Und wenn sie beim ersten Mal nicht genau darauf treffen, mag man sie nach Notwendigkeit verrücken, bis sie schnurgerade darauf zureichen. Und so viel vom Messen von Vielecken."*



1,2 messen ⇒ 3 berechnen.
4 messen ⇒ 5 berechnen.
6 messen ⇒ 7 berechnen.
8 messen ⇒ 9 berechnen.

[89] „der proportz"
[90] „Theoria"
[91] Die Bedeutung bleibt mir unklar. Es könnte sich um „Sonnenzeiger" handeln.

Hier wird die Benutzung der Heron-Formel für Dreiecke vorgeschlagen. „*Von der halben Summe aller Dreiecksseiten subtrahiert man jeweils die eine Seite*“ bedeutet:

$(a+b+c):2 - a = s-a$

$(a+b+c):2 - b = s-b$

$(a+b+c):2 - c = s-c$

„*Diese drei Differenzen miteinander und mit der halben Summe multiplizieren*“ und noch „*die Wurzel ziehen*“

$$F = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

ergibt die Heron-Formel, wobei $(a+b+c):2 = s$ gesetzt wird.

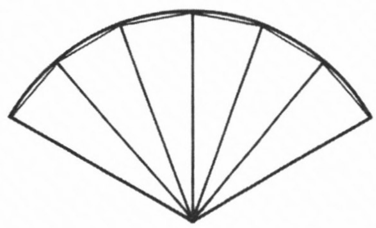
Kapitel 5: Vom Messen des Kreises

Im folgenden Kapitel wendet sich Ursus dem Kreis und seinen Teilen zu. Wichtig ist ihm offensichtlich, die Analogie der Flächenformeln herauszustellen.

Zur Berechnung der Kreisfläche nennt er $A = r \cdot U : 2$,

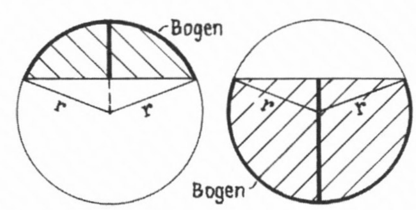
analog zur Dreiecksfläche $A = g \cdot h : 2$,

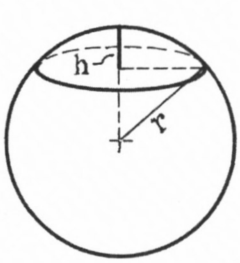
und analog für die Fläche des Kreissektors $A = r \cdot b : 2$.

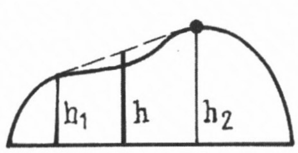


Als Begründung für die Formeln zur Kreisfläche und Kreissektorfläche führt er die Überlegung zur näherungsweisen Berechnung an: Man teile den Kreis oder den Sektor in viele Dreiecke, deren Flächen ja Radius · Höhe : 2 betragen; die Höhen addieren sich bei hinreichend vielen Dreiecken zum Umfang oder zur Bogenlänge des Sektors. Zum Kreisabschnitt weist Ursus darauf hin, dass man die Fläche des am Sektor fehlenden oder überschüssigen Dreiecks von der Fläche des Sektors subtrahieren oder zu ihr addieren müsse.

„Den Kreis und seine Teile misst man wie die Dreiecke: Man multipliziert die Länge des halben Durchmessers mit der Breite, das ist die Länge des halben Umkreises, und erhält so seine Fläche.[92] *Das ist eben nichts anderes, als wenn man eines Dreiecks Länge mit seiner halben Breite multiplizierte und als ob man den Kreis in viele Dreiecke teilte und bei jedem Dreieck die Länge*[93] *mit seiner halben Breite*[94] *multiplizierte. Ebenso misst man auch die Kreisabschnitte,*[95] *aber man verkürzt oder verlängert die Höhe des Kreisabschnittes bis auf den halben Durchmesser des Kreises und multipliziert seinen halben Durchmesser mit seiner halben Bogenlinie, wie beim Kreissektor. Danach addiert man bei einem Kreisabschnitt größer als der Halbkreis zum Kreissektor die Dreiecksfläche, welche innerhalb des Sektors bis zum Mittelpunkt des Kreises fehlt, oder man subtrahiert bei einem Kreisabschnitt kleiner als der Halbkreis vom Kreissektor die Dreiecksfläche, welche außerhalb des Sektors bis zum Mittelpunkt des Kreises übrig ist.*







Berge und Täler [Kugelhauben] *misst man wie Kreise, denn man multipliziert die Höhe vom Fuß bis zur Spitze (analog zum halben Durchmesser bei der Kreisfläche) mit dem halben Umkreis seiner Grundfläche.*[96] *Ist jedoch die Höhe des Berges auf einer Hälfte länger als auf der anderen, so muss man die Höhen durch Mittelwertbildung ausgleichen, wie auch in Vierecken mit zwei verschiedenen Längen geschieht.*[97] *Was hier von Bergen gesagt wird, soll auch beim Messen von Tälern gelten, denn es geben die gekrümmten Kreise gleichviel Oberfläche, egal ob sie aufwärts oder niederwärts gekrümmt sind. Darum ist auch ihre Oberfläche auf gleichem Wege zu suchen. Und die Oberfläche der Halbkugel ist zweimal ihre Kreisfläche.*[98]

---

[92] $(d:2)\cdot(U:2) = r\cdot\pi r = \pi\cdot r^2$, bzw. beim Sektor $(d:2)\cdot(b:2) = r\cdot b:2$. So auch bei Stifel in *Die Coß Christoffs Rudolffs*, Königsberg 1553, fol. 355v/356r. Ursus hat Stifels Buch gekannt und benutzt.

[93] Das ist jeweils der Radius des Kreises.

[94] Die Summe der Höhen ergibt den halben Kreisumfang.

[95] „bogen“

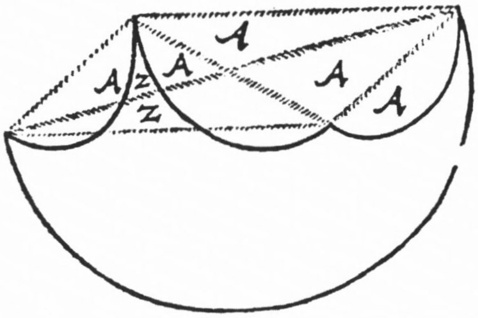
[96] Mantelfläche der Kugelhaube damit $U\cdot h = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h$.

[97] Vergleiche die Mittellinie beim Trapez.

[98] Oberfläche der Halbkugel $= 2\cdot\pi\cdot r^2$ (h=r in der Formel für die Haube).

Kapitel 6: Vom Messen gestückelter Flächen

Nun hast du dich, mein freundlicher lieber Leser, freundlich zu erinnern, dass alles Messen in geradlinigen oder runden Flächen gemacht wird: in geradlinigen also in Vierecken oder Dreiecken, und in runden Flächen in ebenen oder gebogenen. Erkenne auch mit den vernünftigen Augen deiner Sinne, wie eines aus dem anderen hervorgeht: aus dem Viereck als dem wahren Grund aller Flächen die Dreiecke, aus dem Dreieck der Kreis, und aus dem Kreis die Berge und Täler. Und weil nun alles Messen in diesen Figuren liegt, und die Größe aller Flächen hieraus gefunden werden kann, so muss man alle gestückelten und aus diesen Figuren wie auch immer zusammengesetzten Flächen, gleich welcher Gestalt oder welchen Aussehens, in diese Flächen zerlegen, nach Vorteil und Gegebenheit, wie man es vorteilhaft und behende kann. Und von jeder einzelnen dieser Flächen sucht man wie erklärt die Größe. Und diese jeweils einzeln gefundenen Größen muss man zusammengeben, dann zeigt die Summe die gesamte Größe der gestückelten Fläche.

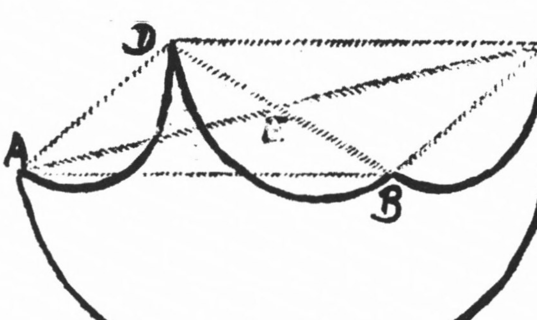


Man muss aber beachten, dass alle eingebogenen Flächen um so viel geringer sind als der eingebogene Teil enthält, hingegen dass alle ausgebogenen Flächen um so viel größer sind als der ausgebogene Teil enthält. Darum zieht man von der Hauptfläche die Größe der eingebogenen Fläche ab und gibt zu ihr die Größe der ausgebogenen Fläche dazu. So erhält man die wahre Größe der Fläche.[99]

Hierauf ist besonders aufmerksam zu achten, dass man, wenn viele Flächen hinzuzugeben oder wegzunehmen sind, sich beim Hinzugeben und Wegnehmen nicht irrt. Denn der Teil der Außenfläche, welcher zum Teil der Hauptfläche hinzugehört, muss auch zur Hauptfläche hinzugegeben werden. Der Teil, der aber nicht dazugehört, sondern ganz ausgeschlossen ist, ist wegzunehmen. Dazu siehe die hierbei gegebene Figur, in welcher A abzunehmen und Z zuzugeben bedeutet.

Ebenso muss man auch gestückelte Berge und Täler wie andere gestückelte Flächen in einzelne einfache oder ebene Flächen zerteilen und die Größe der einzelnen Flächen suchen, die dann alle zusammengetan die wahre Fläche des Berges oder Tales offenbaren. Und so viel vom Messen."

Abb. 8: *Geodaesia* 1583, Blatt F2v.



Die Zeichnung ist so zu verstehen: Über den Seiten AD und BC und über den Diagonalen AC und BD des Parallelogramms ABCD sind Halbkreise errichtet. Gesucht ist die von den Halbkreisen begrenzte Fläche AD-DB-BC-CA. Dazu müssen von der Gesamtfigur halbes Parallelogramm ADC + Halbkreis über AC die Dreiecke DEC und CEB sowie die Halkreise über AD, über DB und über BC subtrahiert werden, deswegen steht dort das A für Abziehen, die beiden mit Z bezeichneten Flächen gehören dazu. Eine interessante Aufgabe zu den sogenannten „Möndchen des Hippokrates"! Der gesuchte Flächeninhalt ist $A = {}^{\pi}/_{4} \cdot (a^2 - f^2)$, wobei a ist Basis des Parallelogramms ist und f die kürzere Diagonale BD.

Kapitel 7: Von der Feldteilung

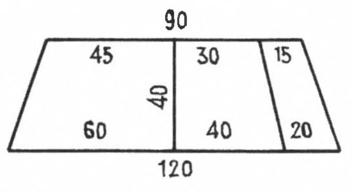
„Damit auch dem Titel und Namen dieses Buches genüge getan werde, will ich zum Schluss etwas von der Feldteilung sagen und aufzeigen, danach etwas von Morgenzahlen und Vergleich der ungleichen Äcker miteinander. Feldteilung bedeutet, die Felder in etliche Teile zu teilen und sie geschieht durch die gewöhnliche Rechnung in gleiche Teile oder in ungleiche, je nach Unterschied der Flächen. Man teilt aber am besten die Vierecke durch Teilung beider paralleler Seiten, die Dreiecke durch Teilung der einer Ecke gegenüberliegenden Seite und den Kreis und seine Sektoren und Abschnitte durch Teilung des Kreisbogens zum Mittelpunkt hin. Man teilt die Fläche in gleiche Teile durch Teilen der Strecken oder Kreisbögen in gleiche Teile; man teilt die Fläche in ungleiche

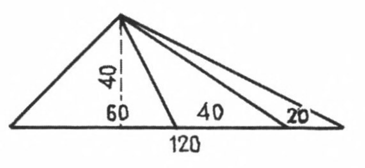
[99] Man darf hierbei nicht an Geländeformen mit Bergen und Tälern denken, sondern an ebene Flächen, bei denen Einbuchtungen fehlen oder Ausbuchtungen hinzukommen.

Teile aber nach der Regel der Gesellschaft[100] *und in ungleiche Längen. Man setzt die Größe der Fläche vorn, die Länge der parallelen Seiten, der Strecken oder Kreisbögen in die Mitte, und den Anteil der Flächengröße hinten und rechnet wie eine Gesellschaft. Danach verbindet man ihre Teilpunkte durch gerade Linien, dann erscheint jede Teilfläche mit dem ihr gebührenden Anteil zwischen zwei Linien. Und so ist das Feld durch die Zwischenlinien eingeteilt."*

Hierzu hat Ursus leider kein Beispiel gegeben. Ich will seine Aussage in vier Beispielen zu erläutern versuchen, einem Trapez, einem Dreieck, einem Kreissektor und einem Kreisabschnitt und die Flächen jeweils im Verhältnis 3:2:1 dreiteilen.

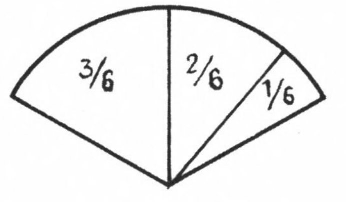
Beim Trapez darf man natürlich nicht die schrägen Schenkel teilen, sondern die beiden Parallelseiten, beim Dreieck die Grundseite, beim Kreissektor und Kreisabschnitt den Bogen.

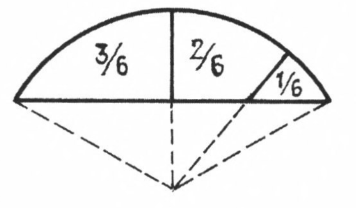




	Fläche	Seite	Anteile	Geteilte Seiten	Geteilte Flächen
Trapez	4200	120/90	$^3/_6$ $^2/_6$ $^1/_6$	60/45 40/30 20/15	2100 1400 700
Dreieck	2400	120	$^3/_6$ $^2/_6$ $^1/_6$	60 40 20	1200 800 400
	Quadratruten	Ruten		Ruten	Quadratruten

Nach Proklos hat bereits Euklid ein Buch über Teilungen geschrieben, das in arabischer Übersetzung überliefert ist. Darin treten Aufgaben auf, ein Dreieck, ein Trapez, einen Kreis in einem vorgegebenen Verhältnis zu teilen.[101]





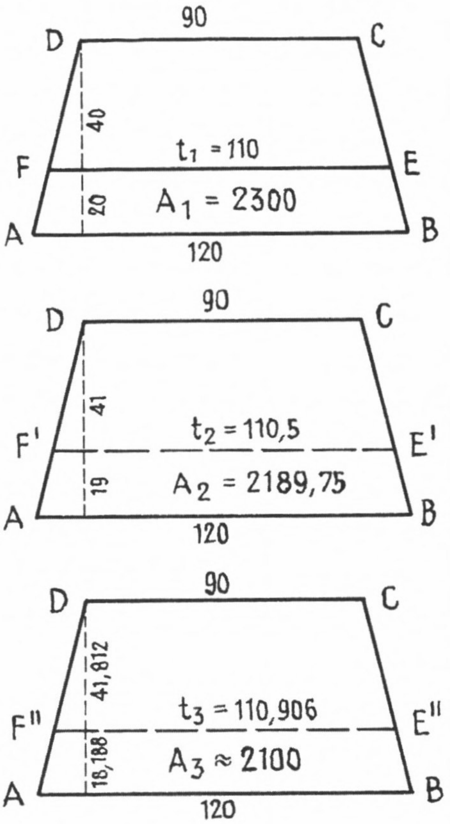
„Wenn man die Felder auf andere Art und Weise als geschildert teilen will, etwa die Vierecke [Trapeze] *durch Teilen der nicht parallelen Seiten oder die Dreiecke der Länge nach oder quer*[102] *oder die Kreise und Kreisabschnitte gerade, ebenso alle gestückelten Fläche nach eines jeden Willen und Gefallen, sei es in gleiche oder ungleiche Teile, so muss man ein Stück von dem Feld, welches zu teilen ist, ungefähr und nach Gutdünken und so, dass man es für groß genug schätzt, abmessen und dessen Größe nach dem oben geschilderten Verfahren bestimmen. Die gefundene Größe muss man mit der zu erreichenden vergleichen. Und wenn es sich zufällig ergibt, dass die gefundene und die gewünschte Größe gleich sind, mag man sie so belassen. Wenn sie zu groß war, muss man die Linie auswärts oder zurück, oder falls sie zu klein war, einwärts oder voran legen (und zwar auf beiden Seiten gleich weit). Und nachdem die Linie zurück oder voran gelegt wurde, ermittelt man abermals die Größe der durch die Linie abgeteilten Fläche nach genanntem Verfahren. Und sofern diese nun erneut gefundene Größe dieser Fläche der begehrten Fläche abermals nicht entspricht, so muss man die Differenz dieser beiden Flächen teilen durch die Länge der zweiten miteinander verglichenen Linien. Dann zeigt der Quotient, wieweit dieselbe Linie zum dritten Mal und nun endgültig einwärts oder auswärts gelegen ist. Und damit ist der erste Teil der gesuchten Flächen gefunden."*

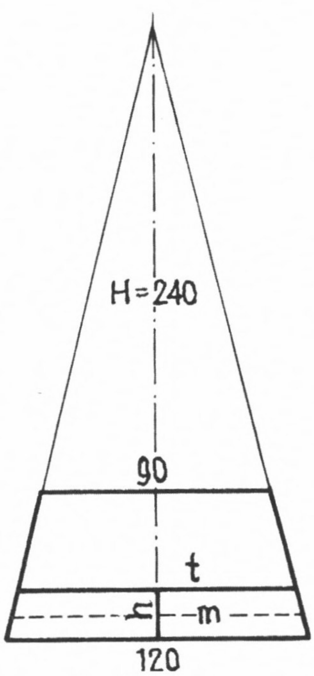
Ich will als Beispiel zur Erläuterung ein gleichseitiges Trapez wählen und der Einfachheit halber ein Drittel der Fläche abteilen. Als ersten Teilungsversuch auf den Schenkeln, jemand will ja unvernünftigerweise nicht die Parallelseiten teilen, wähle ich jeweils ein Drittel der Höhe; das ist identisch mit einem Drittel der Schenkel. Das Trapez ABCD hat die Fläche $A = 105 \cdot 60 = 6300$ Quadratruten. Abgeteilt werden sollen also 2100 Quadratruten. Der erste Drittelungsversuch mit dem Trapez ABEF liefert für $A_1 = 115 \cdot 20 = 2300$ Quadratruten, einen erwartungsgemäß zu großen Wert. Man verlegt nun die erste Teilungslinie t_1 nach unten um willkürlich 1 Rute. Damit ergibt sich $t_2 = 110{,}5$ Ruten, wie man leicht aus dem Strahlensatz errechnet, und damit der Flächeninhalt des Trapezes ABE′F′ zu $A_2 = 115{,}25 \cdot 19 = 2189{,}75$ Quadratruten, immer noch zu groß. Man muss nun nicht durch ständiges Probieren irgendwann das Ziel erreichen, Ursus schildert folgenden Trick: Der

[100] Bei der Gesellschaftsrechnung geht es darum, eine bestimmte Summe Geldes proportional an die Teilhaber zu verteilen, für jeden Teilhaber mit der Dreisatzrechnung.
[101] Helmuth Gericke, *Mathematik in Antike Orient und Abendland*, 8. Aufl. Wiesbaden 2004, T.2, S.15. Schon Heron in *Metrica III* und Jordanus Nemorarius haben das Teilen eines Dreiecks, Trapezes, Kreises in einem vorgegebenen Verhältnis behandelt.
[102] „zwerch"

Unterschied zur Zielfläche 2100 Quadratruten ist noch 89,75 Ruten. Dies teilen durch $t_2 = 110{,}5$ Ruten, liefert 0,812 Ruten, um diesen Wert muss t_2 noch nach unten verlegt werden. Damit liegt t_3 dann um 1,812 Ruten unterhalb von t_1, und $t_3 = 110{,}906$ Ruten. Damit ist $A_3 = 115{,}453 \cdot 18{,}188 = 2099{,}86 \approx 2100$ Quadratruten. Analog verführe man, wenn man die Restfläche des Trapezes auch noch unterteilen wollte.

Eine allgemeine Herleitung findet man z.B., wenn man die Schenkel des Trapezes verlängert, bis sie ein Dreieck bilden. Die Höhe des Dreiecks wird dann 240 Ruten. Der Strahlensatz im Dreieck liefert $120:240 = m : (240-{}^{h}/_{2})$, also $m = 120 - {}^{h}/_{4}$. Der gesuchte Flächeninhalt ist $2100 = m \cdot h = (120 - {}^{h}/_{4}) \cdot h$, dies liefert die quadratische Gleichung $h^2 - 480h + 8400 = 0$. Ihre Lösungen sind $h_{1/2} = 240 \pm 221{,}811$. Hierbei entfällt h_1, somit ist die Lösung $h = 18{,}189$ und $t = 110{,}905$ mit $m = 115{,}453$ Ruten.





„Danach suche man die anderen Teile ebenso. Zum Schluss wird das letzte Teil, wenn man richtig gearbeitet hat, übrig bleiben, denn wenn alle Teile von der Flächensumme richtig weggenommen wurden, muss notwendig der letzte übrig bleiben. Und hierbei sollte man beachten, dass man für den letzten Teil übrig lasse, was man wegen eines Winkels oder anderer Schwierigkeit nicht so leicht wie andere Teile finden kann. Es ist auch egal, wenn man eine Linie verrücken will, ob man sie an den beiden nicht-parallelen Seiten gleichweit einfach wie gewünscht oder nur an der einen Seite zweifach so viel wie an einer Seite allein verrückt.

Kapitel 8: Vom Vergleich der Äcker

Ein Vergleich der Äcker [Scheffel] *besagt, wie sich die ungleichen Äcker gegeneinander verhalten. Die Ungleichheit der Äcker gibt es in ungleicher Zahl* [von Ruten je Acker] *oder in ungleichem Maß* [einer Rute] *oder in beiderlei Ungleichheit, in ungleicher Zahl und in ungleichem Maß. Dazu merke dir diese drei Regeln:*

1. Wenn die Länge der Ruten oder das Maß gleich sind, aber nicht die Äcker, wie bei uns in Dithmarschen die Marner oder die Wöhrdener Rute, so ist ein Vergleich der beiden Äcker miteinander ein Vergleich der Zahl seiner Ruten wie 4 zu 3 [40:30].

2. Wenn die Zahlen der [Ruten in den] *Äckern gleich, aber die Länge der Ruten ungleich, wie bei uns die Wöhrdener und die Lundener, so bedeutet ein Vergleich der Äcker gegeneinander einen Vergleich der Zahl der Teile oder Schuh, die auf ein Maß oder eine Rute gehen, also wie 8 zu 9* [16:18].

3. Wenn aber beide, Maß und Acker, ungleich sind, wie in Dithmarschen Marner und Lundener, so bedeutet ein Vergleich der Äcker gegeneinander die Multiplikation der Verhältniszahlen jeder Rute mit ihren Teilen oder Schuh mit der Größe wie 32 zu 27, denn die Schuh sind gleich. Und es ist eine

Marner		*16*		*40*		*15*	
Wöhrdener	*Rute*	*16*	*Schuh. Und der Acker*	*30*	Ruten und	*20*	*Acker.“*
Lundener		*18*		*30*	der Morgen	*18*	

Die zuerst genannte „Rute“ ist das Längenmaß, die hinten genannte Rute ist die Quadratrute als Flächenmaß. Der „Schuh“ ist der Fuß, in Süderdithmarschen etwa 29,6 cm, in Norderdithmarschen etwa 29,9 cm; insofern stimmt die Aussage, dass das Maß „Schuh“ stets gleich sei. Mit „acker“ ist hier nicht allgemein ein Stück Ackerland gemeint, sondern das sonst Scheffel genannte Landmaß, das die Größe des Ackerlandes ursprünglich nach der Körnereinsaat bestimmte. Die ersten beiden Angaben von Ursus kann ich im ersten Landregister von 1560 bestätigen. Dort wird zuerst für den Süderdrittenteil Dithmarschens, den „Süderstrand“, in dem u.a. das Kirchspiel Marne liegt, beschrieben, dass für Marschland gilt: „Eine Morgen landes helt XV schepelsat [Scheffel]. Eine schepelsaet helt XL roeden [Quadrat-Ruten].“[103] Und zum zweiten für Marschland im Kirchspiel Wesselburen, was auch für Wöhrden gilt: „Is Marskland und 1 Morgen is XX schepelsat und 1 schepelsat XXX Rude.“[104] Allerdings wird dort auch für das Kirchspiel Lunden angegeben: „XX schepelsat up einen Morgenlandes“[105], wahrscheinlich die Neuregelung der Maße nach der Eroberung des Landes 1559. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht:[106]

	1 Rute hat ... Schuh	1 Acker (Scheffel) hat ... QR.	1 Morgen hat ... Acker	1 Morgen hat... Quadratruten	1 Quadratrute hat ... m^2	1 Morgen hat ... ha
Marne (Süderdith.)	16	40	15	600	22,46	1,35
Wöhrden/Wesselburen	16	30	20	600	22,87	1,37
Lunden (Norderdith.)	18	30	18	540	28,87	1,56

„Aus solch einem Vergleich der Äcker [Scheffel] *gegeneinander ist nun leicht zu finden, wie viel deiner Äcker einem anderen gleich sind. Denn man nimmt die kleinere Zahl von der größeren, durch diesen Rest teile man deines Ackers Größe, so erhält man, wieviel einer deiner Äcker einen anderen auftrage, wenn deines Ackers Zahl kleiner gewesen ist; oder abtrage, wenn sie größer gewesen ist. Falls man die Größe einer Morgenzahl zu einer anderen Morgenzahl machen will, so multipliziert man seine Größe mit seinem Maß, das Ergebnis teilt man durch die Größe der anderen Morgenzahl, so erhält man daraus die Größe der anderen Morgenzahl. Man ersieht hieraus auch, welcher Morgen größer ist, auch um wieviel der eine größer ist als der andere. Was hier aber noch von anderen Dingen zu sagen ist, auch ihre wahre Größe und den Gegeneindervergleich aus unwiderlegbarer Begründung zu erkunden, wird zu gegebener Zeit in unserer Ranzowischen Messkunst gesagt werden, zu der ich meine Gedanken jetzt wende, und ich mache dem Feldmessen ein Ende.*

Ende des zweiten Buches.“

[103] Michelsen, *Urkundenbuch zur Geschichte des Landes Dithmarschen*, Altona 1834, Ndr. Aalen 1969, Nr. CXV; S. 240f.
[104] ebenda S. 245.
[105] ebenda S. 241.
[106] Siehe Lorenzen-Schmidt und Emil Waschinski/Franz Böttger, *Alte schleswig-holsteinische Maße und Gewichte*, Neumünster 1952.

Das dritte Buch: Vom Messen

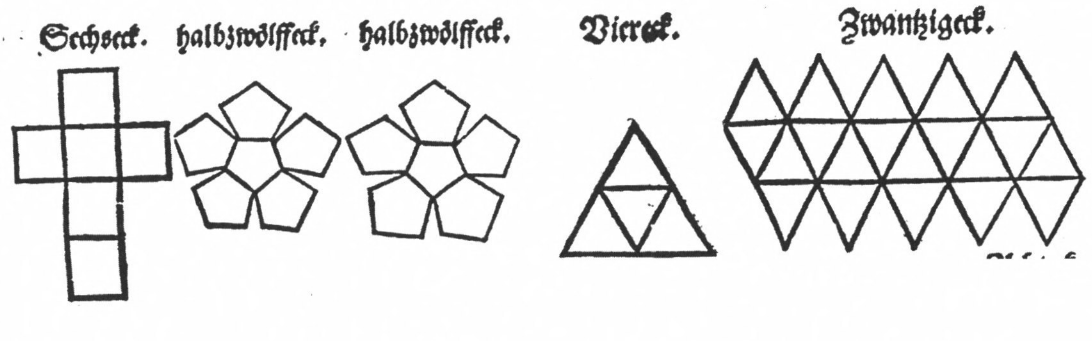
In diesem dritten Buch beschäftigt sich Ursus mit einfachen Körpern und Volumenberechnungen. Er greift auf Euklid zurück mit den Vorstellungen von einer Linie als breitenloser Länge, einer Fläche, die aus Breitenverschiebung einer Linie entsteht, und entsprechend einem Körper als Höhenverschiebung einer ebenen Fläche. Es folgen Bauanleitungen für Modelle der fünf regulären, platonischen Körper. Dazu erläutert er (Kapitel 2) die elementare Konstruktion für gleichseitige Dreiecke und für gleichseitige, von Kreisbögen begrenzte Bogendreiecke zum Bau einer Kugel. Der Bau des Kugelmodells gelingt überraschend einfach.

Zur Konstruktion eines Quadrates beschreibt Ursus die bekannte Methode des Errichtens eines Lotes auf einer Geraden und daraus drei Varianten der Quadraterstellung. Man kann hieraus schließen, dass die angesprochene Leserschaft eben nicht die universitär gebildeten Gelehrten sind, sondern eher mathematische Laien, Feldmesser ohne ausführlichere Ausbildung. Den Gebrauch des Zirkels setzt Ursus voraus.

Dann wird noch die Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks durch „Abrollen" des Kreisradius' auf dem Kreisumfang genannt, um daraus dann als Grundlage regelmäßige Vielecke beliebiger Eckenzahl zu zeichnen. Ursus löst hier natürlich nicht das Problem, den vorgegebenen 60°-Winkel in beliebigem Verhältnis mit Zirkel und Lineal zu teilen. Sein Ziel ist ein Verfahren zum Zeichnen regelmäßiger Vielecke mit beliebiger Eckenzahl. Dazu lässt er im Grunde den Zentriwinkel 60° mit einem Winkelmesser in gleiche Teile teilen. Das heute kaum mehr bekannte einfache Verfahren funktioniert überraschend einfach.

Kapitel 1: Von den Körpern

„Der Anfang der Messkunst ist es, sich einen Punkt im Geiste vorzustellen. Aus dem Punkt wird eine Linie, aus den Linien eine Fläche, aus den Flächen ein Körper. Ein Körper hat eine selbständige Größe, mit Flächen umgeben, und hat Länge, Breite und Dicke, und er ist vollkommen oder unvollkommen. Vollkommen ist ein mit einer gewissen Anzahl von gleichen Flächen abgeschlossener Körper. Und einer davon ist von sechs gleichen rechtwinkligen viereckigen Flächen eingeschlossen, der allervollkommenste unter allen Körpern, ein Sechsflächner[107] *genannt, der gleiche Länge, Breite und Dicke hat. Auf ihm beruht auch das Messen aller Körper, wie auf einem Quadrat/Rechteck das Messen aller Flächen beruht. Ein anderer Körper ist von 12 gleichen und regelmäßigen fünfeckigen Flächen eingeschlossen, ein Zwölfflächner genannt. Drei weitere Körper sind von gleichen und regelmäßigen Dreiecken eingefasst, ein Vierflächner, ein Achtflächner und ein Zwanzigflächner. Die Kugel wird auch unter die vollkommenen Körper gezählt. Sie wird auch aus acht Dreiecken wie der Achtflächner zusammengesetzt, aber die Linien der Dreiecke müssen ausgebogen und des Zirkels Fuß nachgezogen sein. Somit gibt es sechs vollkommene Körper, die anderen sind alle unvollkommen."*



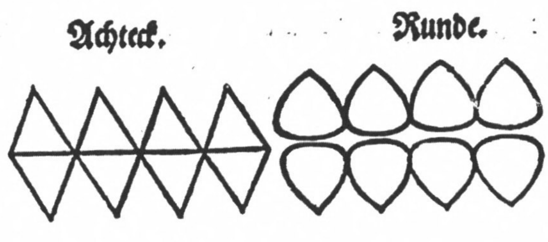


Abb. 9: Zeichnungen aus der *Geodaesia* Blätter G2v/G3r: Netze zum Würfel, zum Zwölfflächner (Dodekaeder, 2 Hälften), zum Vierflächner (Tetraeder), zum Zwanzigflächner (Ikosaeder), zum Achtflächner (Oktaeder) und zur Kugel. Ähnliche Netze bringt auch Stifel in seiner *Arithmetica Integra* 1544, bei den Errata.

---

[107] „sechseck"

Kapitel 2: Vom Herstellen vollkommener Körper

„Um diese oben geschilderten Körpern herzustellen, muss man ein ebenes Dreieck, beides mit gebogenen und mit geraden Seiten zeichnen können, ebenso auch ein Quadrat und ein Fünfeck. Dies wird im folgenden geschildert.

Ein Dreieck mit gebogenen Seiten zeichne wie folgt: Setz den Zirkel mit einem Radius deines Gefallens in a und in b und zeichne von a aufwärts eine Linie [Kreisbogen] *in Richtung c, danach auch von b aufwärts eine Linie in Richtung c. Benenne den Schnittpunkt der beiden Kreisbögen mit c und zeichne von c aus eine dritte Linie, die von a nach b verläuft. Damit hast du ein Dreieck mit gebogenen Linien, das zum Bau einer Kugel dienlich ist. Nun verbinde die drei Punkte a, b, c mit einem Lineal mit geraden Linien und du hast ein* [gleichseitiges] *Dreieck mit geraden Linien zum Vierflächner, zum Achtflächner und zum Zwanzigflächner.*

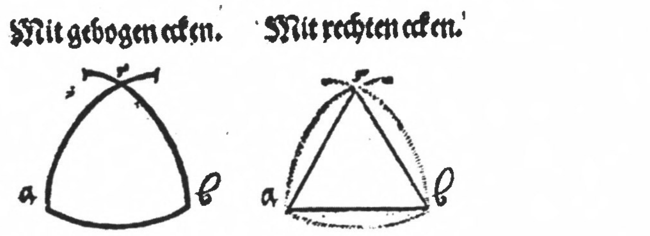


Abb. 10: *Geodaesia*, Blatt G3v.

Ein Quadrat zeichne wie folgt: Ziehe eine gerade Linie a, b nach deinem Belieben. Darauf wähle beliebig einen Punkt c. Nimm eine beliebige Zirkelspanne und markiere von c aus mit dieser Zirkelspanne auf a, b zwei Punkte d, e. Wähle nun als Zirkelspanne die Entfernung von d nach e und zeichne zwei Kreisbögen um d und e mit dieser Zirkelspanne. Deren Schnittpunkt nenne f. Zeichne mit einem Lineal cf.[108] *Damit hast du einen rechten Winkel fca links als auch fcb rechts. Nun zeichne die Streckenlänge von fc auf der Linie a,b von c aus nach links ab und nennen den Punkt g. Dann zeichne mit dem Zirkel mit derselben Zirkelspanne von f aus einen Kreisbogen hi und von g aus einen Kreisbogen kl, deren Schnittpunkt nenne m. Zeichne mit dem Lineal eine gerade Linie mf und eine solche gf. So hast du das Quadrat cfgm.* [109]

Oder zeichne nach gefundenem Winkel fca mit beliebiger Zirkelspanne einen Kreisbogen gh um c. Dann zeichne mit derselben Zirkelspanne Kreisbögen ik um g und lm um h, den Schnittpunkt nenne n. Zeichne noch mit dem Lineal die geraden Linien hn und gn, so hast du ein Quadrat chgn.[110] *Du kannst aber auch den Kreisbogen gh um c vom Punkt f aus zur Linie ca ziehen.*

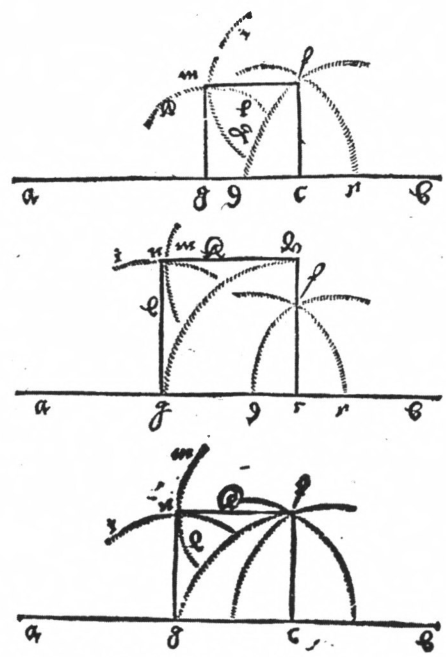


Abb. 11: Blätter G4r – H1r

Um ein Fünfeck und alle anderen zu zeichnen, musst du zuerst ein Sechseck zeichnen können, denn dasselbe ist die Grundlage aller anderen regelmäßigen Vieleckflächen. Und das mache so: Nimm einen Zirkel mit beliebiger Zirkelspanne und zeichne damit den Kreis. Teile seinen Umfang mit derselben Zirkelspanne in sechs Teile, denn der Kreis wird darin gerade aufgehen. Danach verbinde mit einem Lineal je zwei benachbarte Teilpunkte und du hast ein regelmäßiges Sechseck,[111] *woraus du nun eine andere regelmäßige Vieleckfläche nach Belieben machen kannst, auf folgende Weise:*

Alle Teile eines Ganzen zusammen genommen bilden ihr Ganzes. Wenn du nun aus einer regelmäßigen Sechseckfläche, als aus dem Fundament und Grunde aller anderen, eine andere regelmäßige Vieleckfläche machen willst, so musst du, sofern du eine andere Vieleckfläche mit weniger Seiten daraus machen willst, zu einer der Seiten des Sechsecks (nimm sie in den Zirkel) etwas zugeben, aber sofern du eine andere regelmäßige von

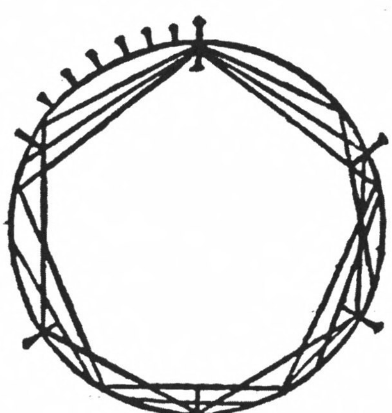
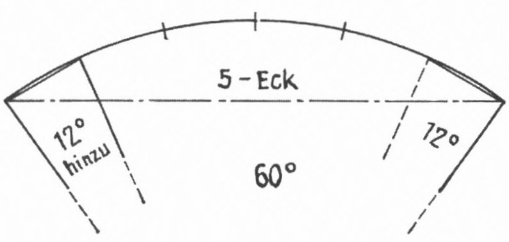


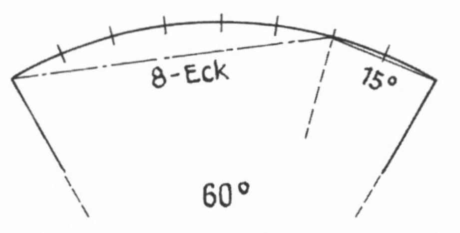
Abb. 12: Blatt H2r.

---

[108] Das ist das Zeichnen eines Lotes auf einer Geraden mit Zirkel und Lineal.
[109] Was wie „9" aussieht, ist der Buchstabe d. Was wie „r" aussieht, ist das e.
[110] „einen rechten viereck": recht bedeutet gerade, eck bedeutet parallele Seiten.
[111] „einen gerechten sechseck".

mehr gleichen Seiten eingeschlossene Vieleckfläche machen willst, so musst du von einer Seite des Sechsecks etwas wegnehmen. Denn je weniger Seiten sein sollen, desto länger muss jede werden, hingegen je mehr Seiten sein sollen, desto kürzer muss jede werden. Nun beachte, dass du den Seiten des Sechsecks einen solchen Teil zugeben oder abnehmen sollst, wie deine gewünschte Fläche gleiche Seiten haben soll, und dasselbige so oft, wie diese Fläche mehr oder weniger als sechs Seiten haben soll. Und wisse, dass diese Methode aus den gemeinen Brüchen erwächst. Wenn du nun ein Fünfeck zeichnen willst, dann teile eine Seite des Sechsecks auf des Zirkels Umkreis in fünf gleiche Teile. Und nimm eine Seite des Sechsecks und einen fünften Teil dieser Seite, so hast du die Länge einer Seite eines Fünfecks. Denn ein Sechstel und ein Fünftel eines Sechstels (das ist ein Dreißigstel) sind zusammen sechs Dreißigstel oder ein Fünftel. Dahingehend betrachte die nachfolgende Zeichnung: Also kannst du auch leicht und auf leichtere als oben gezeigte Weise aus dem Sechseck ein Dreieck oder Quadrat machen.“





Man beachte nach Ursus zuerst, dass die Seiten eines regelmäßigen Sieben-, Acht-, Neunecks usw. kürzer sind als die des Sechsecks, entsprechend die Seiten des Fünfecks länger. Man teilt den Kreisbogen des Sechsecks, und damit den Zentrumswinkel 60°, in 5, 7, 8, 9 usw. gleiche Teile, von denen man für das Fünfeck ein entsprechendes Bogenstück hinzugibt, für das Sieben-, Acht-, Neuneck ein, zwei, drei Bogenstücke wegnimmt. Die so erhaltene Sehne benutzt man für das Abrollen auf dem Kreis. Den Zentriwinkel des regelmäßigen Sechsecks, also 60°, teilt man durch die Eckenzahl des gewünschten Vielecks und gibt soviele dieser Teilwinkel, wie meine gewünschte Figur mehr oder weniger Ecken hat als das Sechseck weg oder hinzu zu den 60°. Aber Ursus berührt damit das Problem, den 60°-Winkel in beliebige Teile zu teilen, was mit Zirkel und Lineal nicht immer möglich ist. Er geht darauf auch gar nicht ein, sondern will nur eine Anleitung zum Zeichnen von regelmäßigen Vielecken geben, wobei er es dem Leser überlässt, mit einem Winkelmesser den 60°-Winkel zu teilen. Auf das Thema der Teilung eines Winkels in beliebige Teile kommt Ursus 1588 in Straßburg in seinem Hauptwerk *Fundamentum Astronomicum*, Blätter B4v-C1r zurück, wo er die Berechnung der halben Sehnen zu beliebigen Winkeln mit einem von Bürgi stammenden „Kunstweg“ schildert. Ursus Beitrag ist der einzige gedruckte Beleg für die von Bürgi angewandte Methode zur einfachen Berechnung seiner Sinustafeln.[112] Hier teilt Ursus im Grunde nur den Vollwinkel 360° durch die Eckenzahl, ausgehend vom Sechseck.

Eck	Zentriwinkel	
Vier-	$60° + {}^{2}/_{4} \cdot 60°$	90°
Fünf-	$60° + {}^{1}/_{5} \cdot 60°$	72°
Sechs-	60°	60°
Sieben-	$60° - {}^{1}/_{7} \cdot 60°$	${}^{360°}/_{7}$
Acht-	$60° - {}^{2}/_{8} \cdot 60°$	45°
Neun-	$60° - {}^{3}/_{9} \cdot 60°$	40°
Zehn-	$60° - {}^{4}/_{10} \cdot 60°$	36°

Kapitel 3: Vom Zusammensetzen

„Wenn du nun auf oben gezeigte Weise ein regelmäßiges Dreieck, Viereck und Fünfeck und alle anderen machen kannst und einen regelmäßigen Körper daraus machen willst, so füge die geschnittenen Flächen nebeneinander zusammen, wie du oben siehst und falte sie zusammen wie benötigt und wie die Übung zeigen wird. Es ist aber zweierlei zu bemerken. Erstens: Die acht Dreiecke mit den ausgebogenen Seiten, woraus die Kugel zusammengesetzt werden soll, muss man derart biegen, dass sie mit ihren äußersten Rändern zusammenschließen, so dass sie eine kugelige Runde ergeben. Zweitens: Die sechs Fünfecke des Zwölfflächners zusammengefaltet, ergeben nur einen halben Zwölfflächner. Darum macht man noch sechs gleiche Fünfecke und stülpt sie zusammen. Und so viel von den regelmäßigen Körpern und insbesondere von deren Herstellung, obwohl dies wenig zur Rechnung dient, sondern vielmehr dem Nachdenken nützt. Deshalb wollen wir nun zur Messung der Körper schreiten.

[112] Siehe dazu Martha List/Volker Bialas, *Die Coss von Jost Bürgi*; in: Nova Kepleriana, Neue Folge Heft 5, München 1973,.

Kapitel 4: Von der Unterteilung der Körper

Ein Körper ist einfach oder gestückelt. Einfach ist ein solcher Körper, den man einzeln messen kann, und er ist eckig oder rund. Eckig ist ein aus ebenen Flächen eingeschlossener Körper, und ist stumpf oder spitz. Stumpf ist ein Körper mit zwei stumpf zulaufenden Seiten. Spitz ist ein Körper an einem Ende stumpf, am anderen zugespitzt. Rund ist ein Körper, der von einer runden Fläche eingefasst wird, und ist kugelig oder sinnwel.[113] *Kugelig ist ein Körper mit überall gleicher Länge, Breite und Dicke. Sinnwel* [zylindrisch] *ist ein Körper, bei dem Länge, Breite und Dicke nicht alle drei gleich sind, und er ist auch stumpf oder spitzig, wie vom eben begrenzten Körper gesagt. Ein gestückelter Körper ist aus vielen einfachen zusammengesetzt, mit nur gleichen oder mit ungleichen Flächen. Bei gleichen Flächen, von ebenen oder runden, bei runden eingebogen oder ausgebogen. Bei ungleichen Flächen von ebenen und runden und eingebogenen und ausgebogenen.*

Kapitel 5: Vom Messen eben begrenzter Körper

Es gibt drei Arten des Messens: Messen der Länge bei einer Linie, Messen von Länge und Breite bei einer Fläche und Messen von Länge, Breite und Dicke bei einem Körper. Von dieser letzten Messart wollen wir nun sprechen.

Ebenso wie das Flächenmessen durch Multiplizieren der kreuzweise rechtwinkligen Länge mit der Breite geschieht, so geschieht das Körpermessen durch Multiplizieren der kreuzweise rechtwinkligen Länge mit der Breite und mit der Höhe oder Dicke. Und gleich wie eines Dreiecks Fläche die Hälfte ihres Parallelogramms ist, also ist auch ein keilförmig[114] *zugespitzter Körper die Hälfte, ein kegelig zugespitzer Körper nur ein Drittel seines an beiden Enden platten oder stumpfen Körpers.*[115] *Darum multipliziere man des Körpers Länge nach obiger Flächenlehre mit seiner Breite und diese Fläche mit des Körpers Höhe oder Dicke senkrecht aus der Fläche. Dann erhält man eines an beiden Enden platten oder stumpfen Körpers einfache Größe heraus, aber eines keilförmig zugespitzen Körpers doppelte Größe, und eines kegelig*[116] *zugespitzten Körpers dreifache Größe. Und deshalb nimmt man für die Keilspitze die Hälfte, aber für die Kegelspitze nur den dritten Teil der gefundenen Größe eines stumpfen Körpers. Oder man multipliziert die Größe seiner Fläche mit der Hälfte der Keilhöhe, oder mit dem dritten Teil der Kegelhöhe. Oder die Hälfte der Keilfläche oder den dritten Teil der Kegelfläche mit seiner ganzen Höhe. Daraus ergibt sich des Körpers wahre Größe.*[117]

Und wie man auch einer Fläche ungleiche Breite miteinander durch Zusammengebung beider Breiten und der Summen Vermittlung ausgleicht,[118] *so gleicht man auch auf gleiche Weise eines Körpers ungleiche platten Enden miteinander aus*[119] *und macht es wie jetzt hiernach gesagt.“*

Ursus liebt Analogien. Die in Buch 2, Kapitel 5 angesprochene Analogie der Flächenmessung bei Dreieck, Kreis und Kreissektor ($A = g \cdot h : 2 \;\hat{=}\; A = r \cdot U : 2 \;\hat{=}\; A = r \cdot b : 2$) und ihre Begründung wird hier aufgegriffen und übertragen auf Körper, ebenso wie, dass das Dreieck ein halbes Parallelogramm ist. Das liest sich dann wie folgt: So wie ein Dreieck ein halbes Parallelogramm ist, so ist ein keilförmiger Körper ein quasi diagonal halbierter Quader bzw. Prisma. Ein Pyramide ist dann ein Drittel des Prismas gleicher Grundfläche. Das gleiche gilt dann für Zylinder und Kegel, letzterer hat also ein Drittel des Volumens des Zylinders gleicher Grundfläche, und für Zylinder und Halbkugel, der die Hälfte des Volumens der Halbkugel gleicher Grundfläche hat. Beweise will Ursus hier nicht anführen. Somit erhält man die Volumina für Kegel, Halbkugel und Zylinder wie 1:2:3.

Für das Volumen der Kugel wird wie schon bei der Kreisfläche ($A = r \cdot U : 2$) die Zerlegung in viele kleine Kegel mit Spitze im Mittelpunkt der Kugel gedacht. Das Volumen der Kegelchen ist ja ein Drittel der Grundfläche · Höhe, die Grundflächen addieren sich zur Oberfläche der Kugel, die Höhen sind näherungsweise dem Radius gleich, also gilt analog zum Kreis $V = r \cdot O : 3$. Zur Oberfläche der Kugel kann Ursus hier keine Angaben machen.

---

[113] Sinwel = rund und lang, hier Zylinder. Lat. teres, etis = abgerundet wie gedrechselt. Siehe Petrus Dasypodius, *Dictionarium latinogermanicum*, Straßburg 1536, Ndr. Hildesheim 1995, S. 236 und S. 423.

[114] „keilecht“

[115] Gemeint ist die bekannte Tatsache, dass ein Kegel nur ein Drittel des Volumens seines Zylinders gleicher Grundfläche und Höhe hat, ebenso wie ein Prisma, quasi diagonal zerschnitten, zwei Hälften ergibt. Archimedes (ca. 287 – 212 v.Chr.) schreibt diese Erkenntnis dem Eudoxos von Knidos (ca. 408 – 355 v.Chr.) zu: Cantor, Bd. I, S. 208.

[116] Druckfehler: „kugelig“ statt kegelig.

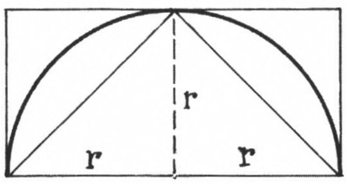
[117] Wie erfrischend, dass doch bereits unsere Grundschüler die Wirkung von Kommutativ- und Assoziativgesetz als ganz selbstverständlich betrachten.

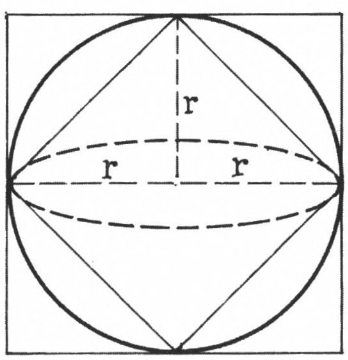
[118] Mittellinie beim Trapez.

[119] „Ausgleichen“ = Mittelwertbildung.

Kapitel 6: Vom Messen runder Körper

„Auch die Größe der zylindrischen/sinnwelen Körper findet man auf oben gezeigte Weise und wie bei eben begrenzten Körpern. Denn man findet nach der im vorigen Buch gegebenen Lehre die Größe der runden Fläche und multipliziert diese mit des zylindrischen Körpers Höhe wie im vorigen Kapitel erläutert. So erhält man seine wahre Größe. Um aber die Größe der Kugel zu erhalten, muss man beachten, dass wie oben gesagt [Kapitel 5], *der Kegel ein Drittel seines an beiden Enden platten Körpers ist*[120]. *So ist er auch die Hälfte seiner halben Kugel, der er gänzlich genau eingeschlossen ist. Und ebenso verhalten und vergleichen sich auch der runde Kegel, seine halbe Kugel und sein zu beiden Enden stumpfes Sinnwel* [Zylinder] *wie eins zu zwei zu drei.*[121] *Die ganze Kugel aber verhält sich zum umbeschriebenen Würfel*[122] *wie 11 zu 21.*[123] *Demnach verhalten sich die zwei einer Kugel einbeschriebenen runden Kegel* [Doppelkegel] *und die Kugel selbst und der der Kugel umbeschriebene Zylinder*[124] *und der der Kugel und dem Zylinder umbeschriebene Würfel wie 11 : 22 : 33 : 42.*





Und so wie sich die Ganzen gegeneinander verhalten, so vergleichen sich auch ihre Teile. Wenn man also das Volumen einer Kugel finden will, so multipliziert man ihre Länge mit der Breite und mit der Höhe oder Dicke; das ist in sich der Würfel. Danach gibt die soeben genannte Zahlenproportion der Kugel wahre Größe gegenüber dem Würfel, oder gegen welchen der oben genannten Körper man will. Nach natürlichem Verstande und ohne die notwendige Wissenschaft dieser Zahlenproportionen findet man das Volumen der Kugel auch folgendermaßen: Man multipliziert ihre Oberfläche mit einem Drittel ihres halben Durchmessers, oder mit einem Sechstel ihres ganzen Durchmessers, oder man multipliziert ein Drittel ihrer Oberfläche mit dem halben Durchmesser, oder ein Sechstel ihrer Oberfläche mit dem ganzen Durchmesser.[125] *Das ergibt sich aus folgendem: Die Kugel zerlegen wir in viele Kegel mit der Spitze im Kugelmittelpunkt. Das Volumen eines dieser Kegel ist ein Drittel mal seine Grundfläche mal seine Höhe* [Radius der Kugel]. *Dies ebenso wie man die Kreisfläche fand, indem man den Kreis in viele Dreiecke teilte und ihren Radius mit der Länge des halben Kreisumfanges multiplizierte. Ebenso auch bei einer Halbkugel oder einem Kugelsegment,*[126] *sei dieses mehr oder weniger als eine Halbkugel. Aber ebenso wie man beim Kreissegment die Fläche des Dreieck zum Mittelpunkt, welches zu viel oder zu wenig war, subtrahieren oder addieren musste vom/zum Sektorenflächeninhalt, so muss man auch hier das Kegelvolumen bis zum Mittelpunkt der Kugel, das dem Kugelsegment fehlt oder zu viel ist, subtrahieren oder addieren.“*

Kegel	$^1/_3 \cdot \pi \cdot r^3$	1		
Halbkugel	$^2/_3 \cdot \pi \cdot r^3$	2		
Zylinder	$\pi \cdot r^3$	3		
Doppelkegel	$^2/_3 \cdot \pi \cdot r^3$	1		11
Kugel	$^4/_3 \cdot \pi \cdot r^3$	2	11	22
Zylinder	$2 \cdot \pi \cdot r^3$	3		33
Würfel	$8 \cdot r^3$		21	42

Im letzten Kapitel greift Ursus die Anekdote auf, die der römische Architekt Marcus Vitruvius Pollio[127] dem Archimedes zuschreibt. Archimedes habe viele wunderbare Entdeckungen gemacht, aber die folgende sei das Ergebnis grenzenlosen Scharfsinns. Hiero II., geb. ca. 306 v.Chr., König von Syrakus 265-215 v. Chr., soll den Verdacht gehegt haben, dass eine von ihm in Auftrag gegebene Krone weniger Gold enthielt, als er dem Goldschmied geliefert hatte und dass das Gold durch Silber ersetzt worden sei. Er beauftragte Archimedes mit der Lösung der Frage. Dieser soll, so die Anekdote, die Lösung gefunden haben, als er beim Baden bemerkte, dass um so mehr Wasser aus dem Bottich auslief, je mehr sein Körper eintauchte.

Die Lösung des archimedischen Kronenproblems geschieht über Dichtevergleich von Gold und Silber, bzw. der Volumenvergrößerung, wenn man das schwerere Gold durch Silber ersetzt. Allerdings konnte dies zu Archimedes' Zeiten nicht gemessen werden, die Geschichte bleibt Anekdote: Die Differenz der durch die Krone bzw. reines Gold bedingten Wasserstandsänderung wäre

---

120 Also des umbeschriebenen Zylinders.

121 Archimedes, *Über Kugel und Zylinder*, Buch I, 34-44.

122 „gevierten sechseckten leibe“ = quadratischer Sechsflächner.

123 Das Verhältnis von Kugelvolumen zum Volumen des umbeschriebenen Würfels ist $^4/_3 \cdot \pi \cdot r^3 : (2r)^3$, also $\pi : 6 = 11 : 21$. Damit verwendet Ursus den bekannten Wert von $^{22}/_7$ für π.

124 „das sinnwel leib“

125 $V = {}^1/_3 \cdot O \cdot r$

126 Zirkeltrumb.

127 Vitruv, 1. Jh. n. Chr., *De Architectura*, Buch IX, Praefatio 9-12.

weniger als 0,4 mm gewesen, wenn der Wasserbehälter auch nur 20 cm Durchmesser gehabt hätte. (http://leifi.physik.uni-muenchen.de/web_ph08/geschichte/15_archimedes-krone/crownintro.html)

Ursus nun lässt das Volumen eines unregelmäßig geformten Körpers, den man nicht berechnen könne, auf diese Weise durch Eintauchen in Wasser und Bestimmen der Volumenerhöhung ermitteln.

Kapitel 7: Vom Messen gestückelter Körper

„Ebenso wie man zur Ermittlung der Größe gestückelter Flächen diese in etliche einfache Flächen zerteilt, so muss man auch gestückelte Körper in etliche einfache Körper teilen und von jedem einfachen Körper das Volumen ermitteln. Schließlich addiert man alle diese Volumina und erhält das des gestückelten Körpers.

Ist aber ein gestückelter Körper so seltsam beschaffen, dass man ihn nicht in einfache Körper teilen kann und deshalb auch sein Volumen nicht ermitteln kann, dann gibt es keinen anderen Weg oder Rat als den durch Erheben oder Absinken des Wassers in einer rechteckigen Truhe oder Kasten, einen Weg, den nach Vitruv der Fürst aller Feldmesser Archimedes erfunden und gebraucht hat, und der geht so: Man nimmt ein nach Größe und Form des Körpers geeignetes vierseitiges Fass und gießt so viel Wasser hinein, dass der Körper damit gänzlich bedeckt ist. Man merkt sich, wie hoch das Wasser im Fass steht, bevor der Körper hineingetan wird. Dann tut man den Körper ins Wasser und merkt sich, wie hoch das Wasser im Fass steigt. Diese Höhe multipliziert man mit des Fasses Länge und Breite, so ergibt sich des Körpers Volumen. Und das kann man mit einem rechtwinkligen Körper oder einem, dessen Größe bekannt ist, versuchen. So viel vom Messen der Körper.

Was aber weiterhin von anderen Körpern zu sagen wäre, auch ihr und ihrer Durchmesser Vergleich gegeneinander, und dies alles aus sicherem und unwiderlegbarem Grunde, wird das künftig neu erstellte Werk unserer Ranzauischen Sphäre oder Kugel mit all dem, was von Zahlen, Maßen und Gewichten notwendig zu wissen ist, geben und lehren."

Ein solches Buch über „Zahl, Maß und Gewicht" hat Ursus nicht mehr veröffentlicht. Menso Folkerts, Eberhard Knobloch und Karin Reich haben für ihr 2001 in zweiter Auflage erschienenes Buch über eine Ausstellung in der Herzog-August-Bibliothek Wolfenbüttel gerade diesen Titel gewählt.

„Ende des dritten Buches."

Das vierte Buch: Vom Irrmessen

Kapitel 1: Einführung ins Irrmessen

„Es ist einem jeden vernünftigen Menschen klar, dass jedes Ding durch sein Gegenteil verstärkt erscheint. So scheint weiß noch weißer zu sein, als es selbst ist, wenn man schwarz dazu hält. So muss ein getreuer Theologe oder Prediger neben der reinen und unverfälschten göttlichen Lehre auch die Lehren von Sekten und Ketzern verstehen und kennen, damit er ihre auf Schrauben gesetzten Fundamente und Gründe mit unwiderlegbarer Wahrheit göttlichen Wortes zurückweisen kann. So muss auch ein Jurist oder Rechtsgelehrter nicht allein wissen und verstehen, was in sich selber Recht und jedem Menschen angeboren und bekannt ist, sondern er muss auch daneben lernen, das Recht zu beugen und zu krümmen, damit er bei einer bösen Sache zu helfen weiß; ansonsten wird er nicht viel Geld erwerben, sondern müsste mit leerem Säckel zum Markt gehen, und da würde er nicht viel verkaufen. So muss ein kluger Medikus oder Arzt die Krankheiten des menschlichen Körpers nicht nur durch sympathian,[128] *sondern auch durch antipathian zu kurieren und zu heilen wissen. Und so ist es in allen Fakultäten und Wissenschaften. So muss auch ein grundgelehrter Geometer oder Feldmesser nicht allein die grundfesten und unwiderleglichen Prinzipien der Wissenschaft verstehen und wissen, sondern auch alle Irrtümer und Fallstricke, damit er die falschen Meinungen, mit welchen selbst erwachsene Feldmesser den Käufer oder Verkäufer weidlich betrügen, mit augenscheinlicher Demonstration und Beweisung der Wahrheit entkräften und widerlegen kann. Deshalb muss ich, durch erzwungene Not wegen der Lügen und Intrigen etlicher falscher Kläffer in Harnisch gejagt, für die edle Wahrheit auch die Labyrinthe und Irrgänge unserer hierzulande vermeintlichen Feldmesser öffentlich vor Augen führen und aufdecken.*

Und da ich nun in den vorigen drei Büchern gründlich und recht das Landrechnen und Feldmessen gelehrt habe, so will ich in diesem Buch nun auch die der vermeintlichen Feldmesser unrichtige Art zu Rechnen und Messen darlegen, damit sie nicht meinen, ich würde ihre Praktiken, Betrügereien und Beschisskunst nicht kennen, und damit jeder Liebhaber der unverfälschten Wahrheit und auch sie selbst ihre Fehler von mir begreiflich gemacht erkennen mögen. Ganz freundlich mit allem Ernst bitte ich einen jeden Vernünftigen und Verständigen, sie mögen pflichtbewusst aus dem Folgenden sehen, beherzigen und erkennen, welche Partei von uns, ich oder sie, Recht oder Unrecht hat. Und sie mögen auch dem Betrug keinen Raum geben, sondern der Wahrheit beipflichten und Beifall spenden. Die unvernünftigen und unverständigen groben Kerle aber, denen alles gut genug ist, lassen sich meinetwegen von ihnen betrügen und geben ihnen noch zwei- oder dreifachen Lohn dafür; solches muss und kann ich wohl leiden.

Kapitel 2: Vom Falschrechnen

Zum ersten wissen unsere vermeintlichen Feldmesser noch ja, ich weiß aber nicht woher, dass aus der Multiplikation von Fuß oder Schuh mit Fuß oder Schuh Quadratschuh[129] *erwachsen, gleichgültig ob das sechzehn oder achtzehn Teile einer Rute sind. Aber sie verstehen das κατὰ ὅτι καὶ διὰ ὅτι,*[130] *die gründliche Ursache solches Erwachsens nicht, welche durch Addieren der Stellenwerte geschieht, wie beim Multiplizieren gelehrt. Deshalb wissen sie auch nicht, was aus einer Multiplikation von Finger-, Stroh- und Haarbreite miteinander, auch jeden Stellenwert mit einem anderen, entspringt, sondern sie lassen diese nur hinhauen und ihren Weg spazieren, glauben dass sie nicht viel dazu geben. Zudem messen sie bei Ellen, Quartern, Klaftern, Handbreiten und Tritten*[131] *alles gleich, da sie die sich ergebenden Stellenwerte nicht kennen. Sie messen keineswegs der Wissenschaft gemäß, sondern ihr ganz und gar entgegen und zuwider. Auch können viele die deutschen oder lateinischen Zahlen nicht, wohl auch nicht einmal lesen oder schreiben, sie rechnen mit Speckbalken*[132] *und Messleitern und meinen, dass sie es gar genau treffen. Aber diese Irrtümer im Rechnen (derer sie unzählig viele haben, aber von mir nicht alle erzählt werden) sind gar klein und gering zu schätzen gegen die, welche in ihrem Messen geschehen."*

---

[128] Die sympathische (von gr. συμπαθεῖν mitempfinden) Medizin ist eine magische Heilmethode, die auf die urtümliche Vorstellung zurückgeht, dass die ganze Welt von Kräften erfüllt sei, die alle Dinge, Menschen, Tiere, Pflanzen und das Mineralreich durch Sympathie in enge Beziehung setzen. So glaubte man, Krankheiten vom Menschen auf Tiere und Pflanzen übertragen oder in der Erde vergraben zu können und diese dadurch vom Menschen zu entfernen. Laut Gesundheitsbrockhaus stellt die sympathische Medizin als medizinischer Aberglaube eine nicht zu unterschätzende Gefahr dar. Siehe auch Jacob Grimm, *Deutsche Mythologie*, 1875-78, Ndr. Wiesbaden 1968, S. 978ff.

[129] „Creutzschuch". Auch dieser Begriff ist zeittypisch, ihn verwendet auch Jacob Köbel.

[130] Das Warum und das Wodurch.

[131] Elle = 57,2-57,7 cm. Quarter = ¼ Elle. Klafter = Faden = 3 Ellen = 6 Fuß. Tritt = Schritt

[132] Kehlbalken im Bauernhaus, verbindet je zwei gegenständige Sparren miteinander. Er wird Speckbalken genannt, weil an ihm die Speckseiten aufgehängt wurden. Vergl. Hahnbalken, ebenfalls Kehlbalken unterhalb des Firstes, auf den sich die Hühner setzten.

Der Inhalt der ersten beiden Kapitel spricht für sich! Offensichtlich hat Ursus mit Feldmessern zu tun gehabt, die keine mathematische Grundlagenbildung hatten und die bei Flächenberechnungen schon scheiterten, wenn Länge und Breite unterschiedliche Einheiten besaßen. Ursus scheint sich mit diesen auch angelegt zu haben, streitsüchtig war er wohl schon, und in seiner Wortwahl verletzend oder herabwürdigend. Wer möchte sich schon, auch wenn er unfähig für diesen Beruf ist, was wohl tatsächlich der Fall war, als „falschen Kläffer" bezeichnen lassen, seine Arbeit als „Beschisskunst", die man mit groben „Speckbalken" ausübe.

Ursus gibt mit dem Vorwurf, seine Feldmesserkollegen könnten das Multiplizieren von Längen mit unterschiedlichen Bruchteilen der Rute, mit Schuh und Fingerbreite usw., schon nicht mehr richtig ausführen, eine Begründung für die Notwendigkeit seines 1. Buches über das Rechnen in seinem Stellenwertsystem zur Basis $^1/_{16}$. Die Schwierigkeiten der Feldmesserkollegen basieren vielleicht auf dem Rechenbuch von Jacob Köbel,[133] das 1514 und später in weiteren Auflagen erschienen war und viele grobe Fehler enthält, und das seit 1535 als *Geometrei, vom künstlichen Feldmessen*[134] in vielen Auflagen fast unverändert weit verbreitet war. Ursus hat eine der Ausgaben gekannt. Hierin schildert Köbel, dass eine Quadratrute, er nennt sie wie Ursus später auch Kreuzrute, 16·16 also 256 Quadratschuh (Kreuzschuh) enthalte,[135] eine halbe Kreuzrute folgerichtig 128 Kreuzschuh. Dann aber folgt bei Köbel die verwirrende Festlegung, dass ein Kreuzviertel nicht ein Viertel einer Kreuzrute sei (64 Kreuzschuh), sondern nur 16 Kreuzschuh enthalten soll. Köbel legt dies so fest, damit er das Produkt einer Rute mit einem Schuh mit dem Namen Kreuzviertel (=16 Kreuzschuh) benennen kann: „Wenn du Ruten mit Schuh multiplizierst, so wird dies Kreuzviertel."[136] Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass ein Morgen 128 Kreuzruten enthält. Bei Köbel wird dadurch die Multiplikation von (6 Ruten + 2 Schuh) mit (9 Ruten + 4 Schuh) korrekt ausgeführt als 54 Kreuzruten + 42 Kreuzviertel + 8 Kreuzschuh, wobei noch die 42 Kreuzviertel zu 2 Kreuzruten + 10 Kreuzviertel zusammengefasst werden. Aber gerade diese Inkonsistenz, dass nicht 4 Kreuzviertel die nächst größere Einheit Kreuzrute ergeben, sondern erst 16 davon, führte wohl bei vielen mathematisch weniger gebildeten Landmesser zu Verwirrungen, so auch bei den Kollegen von Ursus, wie er es ja erwähnt. Außerdem gehen bei Köbel die Begriffe Rute und Kreuzrute oft durcheinander.[137] Lustig ist hingegen die Normierung einer Rute bei Köbel: 16 Mann unterschiedlicher Größe stellen je einen Schuh aneinander, das ergibt 1 Rute.[138]

Im dritten Kapitel belegt Ursus seine Kritik weiter: Statt Länge und Breite bei Parallelogrammen wie bei Rechtecken stets senkrecht zueinander zu messen, scheinen diese von ihm so gescholtenen Feldmesser doch wirklich die Seitenlängen eines Parallelogrammes multipliziert zu haben, um den Flächeninhalt zu ermitteln. Dies ist allerdings ein grober Fehler. Wer jedoch der Mann „in hohem Amt" war, der solche Falschmessung öffentlich gutgeheißen haben soll, bleibt unbekannt, Ursus nennt ihn – leider – nicht. Dafür belegt er ihn mit dem Spruch: „Weise Hühner legen auch in die Nesseln."

Kapitel 3: Vom Irrmessen der Vierecke

Der nächste grobe Fehler werde bei der Flächenberechnung von Vierecken mit vier verschiedenen Seitenlängen gemacht. Von den je zwei gegenüberliegenden Seiten werde das arithmetische Mittel gebildet, und diese Durchschnitte quasi als Länge und Breite multipliziert. Dieser Fehler ist sehr alt. Schon bei Heron treten die unhaltbaren Formeln $[(a_1+a_2):2]\cdot b:2$ und $[(a_1+a_2):2] \cdot [(b_1+b_2):2]$ zur Berechnung der Flächeninhalte eines Dreiecks oder Vierecks auf. Sie sind ägyptischen Ursprungs und waren ursprünglich in der Form $a\cdot b:2$ und $a \cdot [(b_1+b_2):2]$ für gleichschenklige Dreiecke und gleichschenklige Trapeze gedacht;[139] sie sind als Näherungen brauchbar für nahezu rechtwinklige Formen. Die Formel für das Viereck kommt auf einer „Schenkungsurkunde" am Horus-Tempel zu Edfu um 200 v.Chr. vor.[140] Der Möch Alkuin von York (8. Jh.), Verfasser der Aufgabensammlung *Propositiones ad acuendos iuvenes*, verbreitet diesen Fehler weiter.[141]

Eberhard Knobloch beschreibt in Menso Folkerts' *Mass, Zahl und Gewicht*,[142] dem Ausstellungskatalog der Herzog-August-Bibliothek Wolfenbüttel, dass Köbels Regeln zur Berechnung geradlinig begrenzter Äcker vorwiegend falsch seien und dass er die Fläche eines Trapezes mit den Seiten 14, 4, 12, 6, wobei die kleinste auf den beiden längsten senkrecht stehe,

---

[133] *Vom Ursprung, der Theilung, Maß und Messung des Ertrichs, Ecker und anderer Felder* 1514.

[134] Ich verwende hier die Ausgabe 1570, Frankfurt a.M.

[135] Köbel 1570, Blatt B1r/v.

[136] Köbel 1570, Blatt B3v.

[137] Z.B. Blatt B3r: „Ein Feld hat in der Breite 6 Kreuzruten und 2 Schuh, und in der Länge 9 Kreuzruten und 4 Kreuzschuh." Als Längenmaße sind stets Rute und Schuh gemeint.

[138] Köbel 1570, Blatt A4v.

[139] Siehe dazu Moritz Cantor, Bd.1, Leipzig 1880, S. 61 u. 333.

[140] Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, Bd. IV, 3. Aufl. 1940, S. 175.

[141] Helmuth Gericke, S. 62-65.

[142] Menso Folkerts, *Maß Zahl und Gewicht*, Wiesbaden 2. Aufl. 2001, S. 131. Vergl. auch A.G.Kästner, *Geschichte der Mathematik*, Bd. I, Göttingen 1796, Ndr. Hildesheim 1970, S. 655-658.

berechnet als (14+12):2 · (4+6):2 = 65 statt (14+12):2 · 4 = 52. Das Exemplar von Nicolaus Reimers' *Geodaesia Ranzoviana* aus Wolfenbüttel wurde in dieser Ausstellung gezeigt.

Bei dem Ursus'schen Beispiel am Ende von Kap. 3 ergibt sich somit nach der Köbelschen Methode 147·71 = 10437 statt des richtigen Wertes 9360 Quadratruten. Auch die beiden folgenden Beispiele bei Dreiecken (Kap. 4) zeigen den gleichen Fehler einer unzulässigen Durchschnittsbildung. Wahrscheinlich ist auch hier wieder Köbels Buch *Geometrei* die Ursache für die Verbreitung dieser irrigen Rechnung. Bei ihm heißt es zur Berechnung ungleichseitiger Vierecke:[143] „Die Ruten, die du vorhin in der ersten Länge gefunden hast, die tu zu der zweiten Länge, und die Summe halbier. In gleicher Weise miss auch die zwei ungleichen Breiten und halbiere auch deren Summe. Danach multipliziere die beiden Zahlen." Die Zeichnung, die er zur Erläuterung dazu gibt, zeigt ein rechtwinkliges Trapez, obwohl die vier Seitenlängen 12, 4, 14, 6 ein solches nicht ergeben.

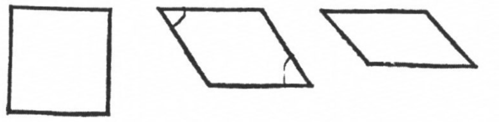


Abb. 13: Blatt K1r.

„Es ist unseren Feldmessern beim Messen der Breite eben gleichgültig, ob sie die Messruten kreuzweise rechtwinklig über die Länge legen oder nicht, sondern sie legen sie nach Gutdünken oder entlang der Seite hin und bemerken nicht, dass eine Fläche aus vier gleichlangen Seiten, die rauteckig stehen, nicht so viel Flächeninhalt hat wie eine Fläche aus vier gleich langen Seiten, die rechtwinklig stehen, wie es hier der Augenschein zeigt.

Es hat einmal ein weltkluger Mann in einem trefflichen hohen Regiment und Amt sitzend mir öffentlich bereden wollen, es sei gleichgültig, ob man rechtwinklig oder schräg die Breite messe, und es käme gleich viel heraus. Maximus in minimis saepissimè enim latet error:[144] *Weise Hühner legen auch in die Nesseln!*[145] *Und die großen Narren sind die besten.*

Wenn sie ein ungleichseitiges Viereck messen und dessen Größe wissen wollen, teilen sie dieses nicht, wie sie sollten, in zwei Dreiecke, sondern messen die beiden Längen und die beiden Breiten auf den Seiten und werfen die zwei gefundenen Längen und die Breiten jeweils in einen Topf, summieren und vergleichen[146] *es und nehmen die aus dieser Vergleichung sich ergebende Länge und Breite für die richtige Länge und Breite. Aber wie richtig sie die Größe des Landes oder Feldes dadurch finden, will ich durch folgendes Beispiel augenscheinlich dartun und erweisen.*

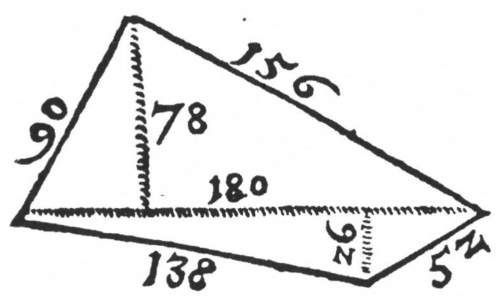


Abb. 14: Blatt K1v.

Wenn man die Längen zweier zueinander senkrechter Linien quadriert und die Quadrate addiert, so ergibt die Quadratwurzel dieser Summe die Länge der dritten Seite, die die beiden freien Eckpunkte der Seiten verbindet.[147] *Wenn man jedoch die Länge der einen senkrecht aufeinander stehenden Seite durch die zwei anderen bekannten errechnen will, so quadriert man die zwei bekannten Seiten und subtrahiert; die Quadratwurzel aus der Differenz ist die gesuchte Länge der Seite. Wenn ich nun auf meine und die richtige Weise die Größe dieses Vierecks ermitteln will, so teile ich es durch eine durchgezogene Linie in zwei Dreiecke und ermittle jedes Dreiecks Größe nach gegebener Lehre. Die Größen der beiden Dreiecke zusammen ergeben 9360 Ruten,*[148] *das ist die wahre Größe des Vierecks. Nun will ich auf ihre gewöhnliche Art die Größe desselben ermitteln. Das geschieht so: Ich vergleiche die beiden Längen und auch die beiden Breiten miteinander und multipliziere die so erfundene Länge mit der Breite, daraus ergibt sich 11694 Ruten.*[149] *Dann sind 2334 Ruten mehr als vorhin und zu viel. Um so viel wird der Käufer vom Verkäufer betrogen.*

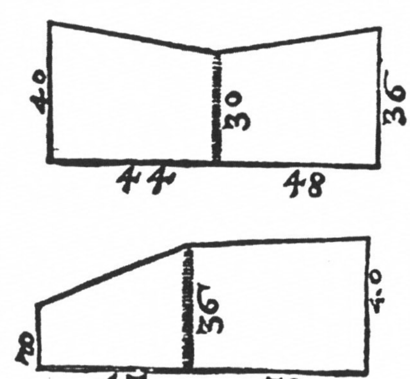


Abb. 15: Blatt K2v.

Wenn sie nun die Größe eines Ackers finden wollen, der

[143] Köbel 1570, Blatt C1r. Zu Köbel siehe Richard Hergenhahn, *Jakob Köbel 1460-1533*, in: Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit, Adam-Ries-Bund Bd. 7, Annaberg-Buchholz 1996, S. 63-82.
[144] Der größte Fehler versteckt sich am häufigsten in Kleinigkeiten.
[145] „Wiese Höhner leggt ok in de Netteln."
[146] „vergleichen" bedeutet die Mittelwertbildung.
[147] Das ist die Aussage des Satzes von Pythagoras.
[148] Hier sind die Quadratruten gemeint.
[149] Fehler: (138+156):2 = 147; (90+52):2 = 71; 147·71 = 10437 Ruten. Ursus nennt hier irrtümlich das Ergebnis der falschen Berechnung über Dreiecke von Blatt K3r/K3v.

drei oder mehr ungleiche Breiten hat, so tun sie es auf diese Weise: Sie werfen alle Breiten zusammen in einen Hafen [=Topf], *summieren und teilen diese Summe durch die Anzahl der unterschiedlichen Breiten.*[150] *Und diese Zahl nehmen sie für die richtige Breite. Dazu siehe folgende Zeichnung. Ich jedoch teile jede Fläche in zwei Teile und mittele die Mittellinie mit jeder Endlinie einzeln und benutze diese Ergebnisse als Breite für jede Teilfläche. Danach addiere ich beide Teile und so ergibt sich die wahre Größe der Fläche. Nun mach es bei beiden Beispielen auf meine und auf ihre Art. Bei dem ersten Beispiel ergibt sich 3124*[151] *Ruten, beim zweiten 3160*[152] *Ruten auf meine Art. Beim ersten Beispiel ergibt sich* $3250^2/_3$ *Ruten,*[153] *beim zweiten 3040 Ruten*[154] *auf ihre Art und Weise. Nun sage mir, welcher Recht hat!"*

Kapitel 4: Vom Irrmessen der Dreiecke

Auch bei der Flächenmessung von Dreiecken werde, so Ursus, der gleiche Fehler gemacht. Statt ein Lot auf die Grundseite zu ermitteln, werde einfach von den zwei längsten Seiten der Mittelwert gebildet und dieser quasi als Höhe mit der dritten kürzesten Seite multipliziert und dann durch 2 dividiert. Das ist eben der Fehler, der schon bei Heron steht. Ursus nennt aber als mögliche Ursache Jakob Köbel, der in seinem Buch *Geometrei* über Flächenmessung diesen Fehler der Mittelwertbildung als richtiges Messen vorstellt. Ursus verwendet als Wortspiel „köbelisch", „pöfelisch", „tölpisch". Köbel lässt nämlich den Flächeninhalt gleichseitiger Dreiecke der Seitenlänge a berechnen als „Seite mal halbe Seite", also $A = {}^1/_2 \cdot a^2$, statt $A = {}^1/_4 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 \approx 0{,}43 \cdot a^2$.[155] Köbel lässt den Flächeninhalt ungleichseitiger Dreiecke berechnen nach der Regel: „Addiere die zwei längsten Seiten, halbier die Summe, und multiplizier mit der Hälfte der kürzesten Seite", also $A = {}^1/_2 \cdot (b+c) \cdot {}^a/_2$, wenn a die kürzeste Seite ist. Als Zeichnung fügt Köbel hier sogar ein rechtwinkliges Dreieck an, obwohl sein Zahlenbeispiel 4, 7, 9 Ruten kein rechtwinkliges Dreieck ergibt.[156] Der Satz des Pythagoras scheint ihm auch nicht geläufig zu sein. Beim nächsten Beispiel[157] vergisst Köbel die Division durch 2, was Ursus auch seinen Landmesserkollegen vorwirft. Die falschen Regeln für Dreiecke und Vierecke gehen auf die römischen Agrimensoren zurück und besonders auf Julius Frontinus (bei Widmann von Eger)[158] und auf die Boetius (ca. 480- ca. 525) zugeschriebene Geometrie.[159]

Die falschen Regeln zur Flächenberechnung haben auch andere Gelehrte bemerkt. Ludolph van Ceulen etwa, den Friedrich Katscher zu Recht als „genialen Autodidakten in mathematischen Fragen"[160] bezeichnet, bemerkt zu Jacob Köbels Rechenbuch, „wörin ich viele falsche Regeln gefunden habe". Und Adam Ries schreibt in seiner *Coß* 1524 dazu:[161] „In welchen ganz und gar kein Grund nach Unterrichtung gesetzt ist."

Als erstes gedrucktes, weit verbreitetes und gutes Rechenbuch kann man wohl zu Recht Johannes Widmanns (von Eger) *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft* aus dem Jahre 1489 bezeichnen.[162] Dieses Buch hat als Zielgruppe keineswegs nur Kaufleute, wie man aus dem Titel vermuten könnte, es vermittelt eher einen Überblick über das mathematische Wissen überhaupt. Deshalb enthält es auch Kapitel über Proportionen und über Geometrie mit Landmessen. Widmann zeigt darin profundes mathematisches Wissen, er liefert eine umfang- und abwechslungreiche Aufgabensammlung. Dennoch treten auch bei ihm die falschen Formeln auf! Bei der Berechnung der Höhe in einem gleichseitigen Dreieck verwendet Widmann korrekt die Formel $h = \sqrt{({}^3/_4 \cdot a^2)}$,[163] den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks lässt er allerdings berechnen mit $A = a \cdot {}^a/_2 = {}^1/_2 \cdot a^2$.[164] Sein Text lautet dazu: „Multipliziere eine Seite mit der Hälfte der zweiten." Und das Viereck mit vier

---

150 Auch hier Mittelwertbildung bei drei oder mehr Summanden.

151 $(40+30):2 \cdot 44 = 1540$ Ruten. $(30+36):2 \cdot 48 = 1584$ Ruten. $1540+1584 = 3124$ Ruten.

152 $(20+36):2 \cdot 45 = 1260$ Ruten. $(36+40):2 \cdot 50 = 1900$ Ruten. $1260+1900 = 3160$ Ruten.

153 $(40+30+36):3 \cdot 92 = 35^1/_3 \cdot 92 = 3250^2/_3$ Ruten. Ursus benutzt diese heute gebräuchliche Schreibweise für gemischte Brüche mit horizontalem Bruchstrich. Er könnte sie aus dem Buch des Johann Junge aus Schweidnitz (geb. ca 1552), Rechenmeister zu Lübeck, *Rechenbuch auff den Ziffern und Linien*, Lübeck 1578, entnommen haben, in dem diese Schreibweise verwendet wird. Dieses Buch hat ihm vorgelegen, denn er erwähnt in seiner posthum 1601 gedruckten Schrift *Arithmetica Analytica,* Blatt E1r-E2v, die „Erfindung des Johann Junge" zur Lösung von Gleichungen beliebigen Grades, bei dem es sich i.w. um die Polynomdivision handelt. Junge erklärt dies auf Blatt L1r-L2r mit dem gleichen Beispiel einer Gleichung 28. Grades. Gemischte Brüche gibt es jedoch bereits im 1. Rechenbuch von Adam Ries ca. 1518 und im weit verbreiteten 2. Rechenbuch 1522.

154 $(20+36+40):3 \cdot 95 = 32 \cdot 95 = 3040$ Ruten.

155 Köbel 1570, Blatt C2r, vierte Regel.

156 Köbel 1570, Blatt C3r/v, er rechnet $A = {}^1/_2 \cdot (7+9) \cdot {}^4/_2 = 16$, korrekt ist $A \approx 13{,}4$ Kreuzruten.

157 Köbel 1570, Blatt C4r.

158 Wolfgang Kaunzner, *Johannes Widmann*, in: Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit, Adam-Ries-Bund Bd. 7, Annaberg-Buchholz 1996, S. 37-51.

159 Zu Boetius siehe Menso Folkerts, *Boethius' Geometrie II*, Wiesbaden 1970, S. 101-103.

160 Friedrich Katscher, *Christoffer Dybvad und Ludolph van Ceulen*, Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathem.-Naturwiss. Klasse, Denkschriften Bd. 116, 7. Abhandlung, Wien 1979, S.103.

161 Rainer Gebhardt, *Einblicke in die Coß von Adam Ries*, Stuttgart 1994, S. 17f.

162 Barbara Gärtner, *Johannes Widmanns Behende und hubsche Rechenung*, Tübingen 2000.

163 Siehe Gärtner, S. 496.

164 Siehe Gärtner, S. 501.

unterschiedlichen Seitenlängen lässt er ebenfalls mit der falschen Formel $[(a_1+a_2):2] \cdot [(b_1+b_2):2]$ berechnen: „Addiere die zwei Seiten und halbiere. Danach addiere die anderen zwei Seiten und halbiere. Nun multipliziere.“[165]

Für die falsche Dreiecksflächenberechnung seiner Landmesserkollegen gibt Ursus zwei Beispiele. Beim ersten sei der Fehler noch „erträglich“, 7560 statt 7020 Ruten. Das Dreieck ist rechtwinklig, wie der Satz des Pythagoras zeigt. Beim zweiten Beispiel, geschickt besonders wenig rechtwinklig gewählt, ergeben sich jedoch 4134 statt 2340 Ruten!

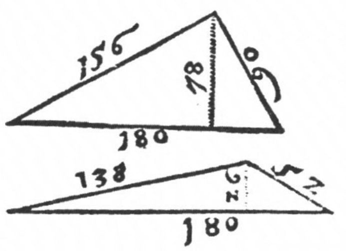


Abb. 16: Blätter K3r/v.

Er verweist nun auf die zwei Feldmesser, seine „zwei Meister“ aus Holstein bzw. aus Friesland, von denen er handschriftlich Aufzeichnungen mit eben diesem Fehler habe. Darüberhinaus habe einer der zwei auch noch die Division durch zwei vergessen! Offensichtlich sind sie ihm auch vorgesetzt, denn sie sollen ihn „meistern und nachmessen“. Verständlich, dass er da in Rage gerät, er, der Autodidakt, der ihnen die Fähigkeit zum Feldmessen schlichtweg abspricht.

„Sie messen und erkunden die Größe der Dreiecke auf eine gar subtile köbelische,[166] ja pöfelische[167] und tölpische Art, nämlich so: Sie vergleichen[168] die zwei längsten Seiten des Dreiecks miteinander, das Ergebnis benutzen sie als Länge und nehmen die Hälfte der dritten kürzesten Seite als Breite. Dann multiplizieren sie Länge und Breite miteinander.

Machst du es beim ersten Beispiel auf meine gezeigte und richtige Art, so ergeben sich 7020 Ruten. Machst du es auf ihre gewöhnliche und falsche Art, so ergeben sich 7560 Ruten. Und dies wäre noch erträglich, abgesehen davon, dass es Unrecht und der rechten Wissenschaft zuwider ist.

Machst du es beim zweiten Beispiel auf beide Arten, so ergeben sich auf meine Weise 2340 Ruten, auf ihre Art aber 4134 Ruten. Das sind ja nur 1794 Ruten zu viel, also beinahe 3 Morgen auf 4 Morgen verrechnet. Und wenn jemand vielleicht nicht glauben möchte, dass sie so grob spinnen, so will ich ihnen solches mit ihrer eigenen Handschrift beweisen. Denn meine zwei Meister, die mir etliche Mehlbeutel meiner Landsleute (oder quasi) als Meister gesetzt,[169] deren einer in Holstein, der andere in Friesland wohnen, haben es so wie hier dargestellt gerechnet. Darüberhinaus hat der eine auch noch bei der Rechnung das Halbieren vergessen und demnach zweimal so viel daraus gemacht, nämlich 8268 Ruten, laut ihrer eigenen in meinem Besitz befindlichen Handschrift. Das nenne ich wahrlich fehlgemessen! Und solche Leute sollen mich noch meistern und nachmessen.

Kapitel 5: Vom Irrmessen des Kreises

Sie messen den Kreisdurchmesser und die Breite[170] senkrecht zueinander[171] und multiplizieren dies miteinander. So erhalten sie nach ihrer Meinung die zweifache Halbkreisfläche. Und so sollten sie doch auch die Dreiecke messen! Aber sie zäumen das Ross hinten auf, da sie es richtiger aufschwänzen sollten. Wie richtig sie es aber machen, zeigt folgendes Beispiel:

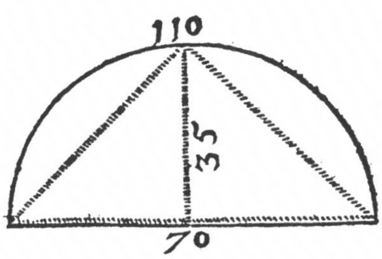


Abb. 17: Blatt K4r.

Wenn sie nun die Länge 70 mit der Breite 35 multiplizieren und die Hälfte der sich ergebenden Zahl die Fläche des Halbkreises sein lassen, finden sie nur 1225 Ruten.[172] Deshalb bleiben die zwei äußeren kleinen Kreisabschnitte unberechnet; eben diese verschenken sie, und zwar auf 1225 Ruten 700 Ruten, das sind auf jede 7 Ruten 4 Ruten. Das ist nun wiederum gut für den Käufer, wie vorher bei den Dreiecken für den Verkäufer. Nun rechne auch auf meine Weise und multipliziere die Hälfte von 70 mit der Hälfte von 110, also den halben Durchmesser mit der halben Umkreislänge.[173] So ergeben sich 1925 Ruten, die wahre Größe des Halbkreises. Und deshalb haben etliche große Leute im Nachbarland mich als ihren Feldmesser

[165] Siehe Gärtner, S. 503.

[166] Jakob Köbel, geb. um 1462 in Heidelberg, gestorben 1533 in Oppenheim. Er war Verleger, Drucker, Schriftsteller, Stadtschreiber zu Oppenheim, Mathematiker. Siehe dazu Menso Folkerts, Hrsg., *Maß, Zahl und Gewicht*, Wiesbaden 2001, S. 134-136.

[167] Der Pöfel = das gemeine Volk, die Menge, lt. vulgus.

[168] Mittelwertbildung.

[169] „Denn meine zwey Meister, welchere mir etzliche große Hansen meiner Landsleute (vel quasi) für meisters gesetzt, ...“

[170] Kreisradius.

[171] „überzwerg“

[172] Hier wird also fälschlich $2r \cdot r \cdot 0{,}5 = r^2$ als Halbkreisfläche angenommen. Das ist aber nur die Dreiecksfläche.

[173] $A = r \cdot U : 2 = \pi \cdot r^2$. Offensichtlich kennt Ursus die Umfangsformel, für den Halbkreis $U = \pi \cdot r = {}^{22}/_7 \cdot 35 = 110$ Ruten, wie angegeben.

bestellt. Aber als sie mittlerweile einen großen runden Acker zu ihrer Verteilung bekommen, erscheint es ihnen falsch zu sein, mich zu nehmen. Sie überzeugten daraufhin gemein die Einfältigen, ich wäre zu teuer, sie müssten mir zu viel bezahlen und sie wollten wohl einen Landmesser für geringeren Lohn bekommen. Sie nahmen daraufhin den einen der zwei im vorherigen Kapitel genannten Meister, versprechen ihnen sechs Taler zu geben, dafür sollte er fünf Feldmarken einzeln messen und rechnen. Das schien den Bauern gut zu sein; sie sparten dabei etwa zehn Taler, aber sie verhüteten das Ei und ließen die Hennen entfliehen und haben gegen die ersparten zehn Taler an die hundert Taler wiederum verloren. So wird der Handel auf dieser Erde getrieben! Darum ist es recht und wahr gesprochen: Wenn es keine dummen Leute gäbe, wovon sollten dann die weisen reich werden? Dieser mein erster Meister hat, urkundlich seiner eigenen Hand, noch nicht einmal vier Morgen auf beinahe vierzehn gerechnet.

Kapitel 6: Vom Irrmessen gestückelter Flächen

Wie oder auf welche Weise sie die gestückelten Flächen in einzelne aufteilen, messen und rechnen, weiß ich zwar nicht. Aber was ich nicht weiß, will ich mich nicht schämen zu bekennen. Es ist mir auch wenig daran gelegen, ob ich es weiß oder nicht. Und wer kann ihre subtile Kunst ganz wissen oder lernen, einer kann ja nicht alles wissen. Sie müssen auch etwas für sich behalten, ich mag mit meiner Art beraten wie ich kann. Aber dennoch weiß ich zum Teil wohl, wie richtig sie den Flächeninhalt finden können. Solches will ich durch folgendes Beispiel aufdecken. Im Jahre 1582 ist dem ehrbaren und hochgelehrten Herrn Christian Boetius,[174] *damals Landvogt in Dithmarschen, jetzt Fürstlicher Holsteinischer Rat, ein Feld oder Stück Landes von der Bauernschaft Darenwurth*[175] *im Kirchspiel Marne zugehandelt worden, welches ich ihnen zuteilen sollte. Dasselbe war in Gestalt einer Harfe und mit Maßen, wie hier gezeigt. Ich habe es mit drei Dreiecken versehen und mir jedes Dreiecks Länge und Breite von meinen bestellten Messern einbringen lassen. Daraus kann jeder Vernünftige leicht berechnen, wie viel Land es ausmacht.*

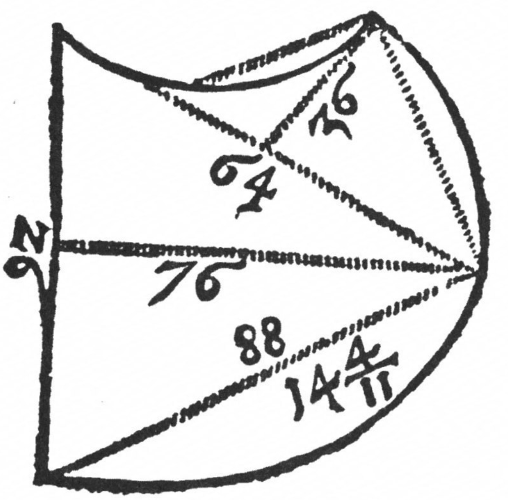


Abb. 18: Blatt L1v.

Danach kriegen die Bauern meinen anderen Meister, der misst und rechnet das Feld auf 7400 Ruten. Das glaubten die Bauern wie ein reines Evangelium und wollten dem Herrn Doktor das übrige Land wiederum nehmen, und sie klagen und schreien über mich und sagen, mein Messen sei unrecht und falsch erfunden. Aber die guten groben Leute verstehen es nicht, darum vergeb es ihnen Gott. Die verständigen aber werden mich hierin wohl zu entschuldigen wissen, denen will ich's befohlen und zwischen uns zu urteilen heimgestellt haben. Inzwischen mögen die Frösche ruhig etwas hinquaken, aber meine Wissenschaft sollen und müssen sie wohl recht bleiben lassen. Und dieser mein anderer Meister hat urkundlich seiner eigenen Hand die noch nicht ganz vier Morgen auf neun Morgen und darüber gerechnet. Das mögen mir Meister sein, sie wären recht unter die sieben weisen Meister[176] *zu zählen, und somit haben wir nun der weisen Meister an Anzahl neun. Nichtsdestoweniger ist der Bauer so dumm und töricht, dass er nach ihrem Messen pachtet und kaufft, ô pectora caeca?"*[177]

Ich kann diese Aufgabe nicht auflösen. Von den genannten drei Dreiecken kann ich nur das untere berechnen; bei den beiden oberen erscheinen mir die Seitenbezeichnungen nicht korrekt zu sein. Man kann ja davon ausgehen, dass Ursus diese Aufgabe wie üblich von der vorgegebenen Lösung her aufgebaut hat. Anders als wir es heute täten, nämlich die Aufgabe allgemein zu lösen versuchen, um dann die speziellen Zahlen einzusetzen, ist es daher sinnvoll zu schauen, welche einfachen ganzzahligen Lösungen Ursus gedacht haben könnte. Das untere Dreieck mit Hypotenuse 88 und Kathete 76 hat dann als zweite Kathete 44 (nach dem Satz des Pythagoras 44,36), weil die beiden

[174] Christian Boie (†1591), 1582 Landvogt der Gerichte zu Heide und Lunden. Herzog Friedrich II. von Gottorf wurde in Lunden am 21. Feb. 1587 gehuldigt. Als Huldigungsgabe seitens der Landschaft Norderdithmarschen sollte durch den Landvogt Christian Boie dem Herzog ein goldener Becher überbracht werden. Der junge Herzog starb aber bereits am 15. Juni 1587, so dass es dazu nicht kam. Der goldene Becher wurde später im Nachlass des Landvogtes gefunden und deshalb 1592 aus dem Erbgut 16000 Reichstaler für den Herzog entnommen.

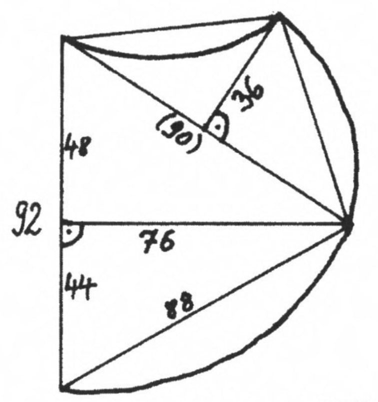
[175] Im Original „Darnewürdt".

[176] Zu den Sieben Weisen, griechische Staatsmänner und Philosophen des 7. und 6. Jh. v.Chr. zählen Thales, Pittakos, Bias, Solon, Kleobulos, Myson und Chilon.

[177] O, verblendete Gemüter!

Winkel wohl 60° und 30° sein sollen! Die soeben berechnete Seite 44 ergänzt sich dann mit 48 zu den angegebenen 92 (alles in Ruten).

Der Kreisabschnitt unterhalb der 88er Seite soll zu einem Kreissektor eines regelmäßigen Fünfecks gehören! Bei einem Zentriwinkel 72° und Basiswinkeln von je 54° beträgt der Kreisradius 75 und die Höhe $60\,^{7}/_{11}$, damit die Dicke des Abschnittes $75 - 60\,^{7}/_{11} = 14\,^{4}/_{11}$, wie angegeben. Ein Hinweis kann die Verwendung von $2\,^{3}/_{11} = {}^{25}/_{11}$ für $\sqrt{5}$ sein in der Formel für ein dem Kreis einbeschriebenes regelmäßiges Fünfeck: $s_5 = \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} \cdot {}^{r}/_{2} = \sqrt{(10 - {}^{50}/_{11})} \cdot {}^{75}/_{2} = \sqrt{({}^{60}/_{11})} \cdot {}^{75}/_{2} = 25\,^{4}/_{5} \cdot {}^{75}/_{2} = 87\,^{21}/_{22} \approx 88$. Der Flächeninhalt des Kreisabschnitts wird dann mit $\pi = {}^{22}/_{7}$ zu $A_{Sektor} - A_{Dreieck} = 3535\,^{5}/_{7} - 2668 = 867\,^{5}/_{7} \approx 868$.



Korrigierte Aufgabe

Damit ist aber Schluss. Für die beiden oberen Dreiecke und die zugehörigen Kreisabschnitte habe ich keine Lösung. Die Seite mit der Länge 64 kann nicht die Seite des ganzen Dreiecks mit den Katheten 76 und 48 sein, da sie als Hypotenuse länger als 76 sein müsste. Das Dreieck mit Basis 64 und Höhe 36 kann kein rechtwinkliges sein. Die Strecke 64 endet ohne erkennbare Bedeutung. Die beiden oberen Kreisabschnitte sollten wohl, da Maßangaben fehlen, gleich groß sein, damit sich ihre Flächeninhalte aufheben. Die Streckenlänge 64 könnte so entstanden sein, dass sie mit 76 gerade den Mittelwert aus 88 und 64 ergibt. Sollte die mit 64 bezeichnete Strecke und auch die oben unmotiviert endende Strecke bis zur Spitze links oben gehen sollen und sollte das Maß 64 falsch angegeben sein, so würde es 90 betragen müssen; dann könnten die beiden oberen Kreisabschnitte gleich groß sein und sich aufheben, und der Flächeninhalt wäre $\frac{1}{2} \cdot (92 \cdot 76 + 90 \cdot 36) = 5116$, zuzüglich dem Inhalt des Kreisabschnitts, zusammen 5984. Ursus fährt dann zum Schluss fort:

„Wenn unsere genannten Meister ein krummes Stück Feld messen sollen, so messen sie dessen Länge des Bogenstücks durch die Mitte hindurch, und sie meinen noch, dass sie es recht treffen. Aber wie richtig sie es auf solche Weise machen, zeigt dieses Beispiel:

Abb. 19: Blatt L2v.

Ursus beschreibt eine ebene, von zwei Kreisbögen begrenzte Fläche, deren Inhalt einfach gleich der Rechtecksfläche $40 \cdot 168 = 6720$ Quadratruten ist. Somit wird $r = 119$ Ruten (118,8), der Zentrumswinkel ist 90°. Falsch gemessen mit den Bögen als Länge ergäbe sich $40 \cdot 187 = 7480$ Quadratruten. Es handelt sich hier um den inneren Mondbogen der folgenden „Prüfungsaufgabe", das sollte als Hinweis gesehen und dort verwendet werden!

Ende des vierten Buches"

Schluss

Gestrenger Herr königlicher Statthalter! Ich habe nun die ganze Messkunst gründlich beschrieben und zwar nicht aus kanonischen Regeln, wie es andere vorgeben, sondern aus richtigen natürlichen Fundamenten und eigener Erfindung. Daneben habe ich aufgezeigt, worin unsere Feldmesser bisher sehr geirrt haben, damit Euer Gestrengen sowohl hier als auch an anderen Orten solches wissen und sich vor ihrem Betrug hüten könne. Also bitte ich ganz dienstlich, Euer Gestrengen möge bei der königlichen Majestät zu Dänemark, Norwegen etc. und dem Herzog Adolf F[ürstlich] *G*[ottorfschen] *zu Schleswig, Holstein etc., meinem gnädigsten und meinem gnädigen Herrn, aufs untertänigste und untertänige erwirken, dass keiner in deren Königreich, Land und Fürstentümern sich eines Landmessers bedienen oder gebrauchen möge, bis dieser vorher das nachfolgende Beispiel aus rechter geometrischer Wissenschaft gelöst und erklärt hat. Denn erst wenn sie solches zu Wege bringen, haben sie für diese Wissenschaft die rechte Grundlage. Und dies ist das Beispiel:*

Es ist ein Feld in Form eines Neuen Mondes, dessen äußere Seite [Kreisbogen] *9152 lang ist, die innere Seite* [Kreisbogen] *8415, in seiner breitesten Mitte 609 breit. Zwischen seinen beiden Hörnern ist die Länge 7560 Ruten. Wieviel* [Quadrat]*Ruten hat das Feld?*

Si potes, hoc solvas et eris mihi summus Apollo, summus Arithmeticus, quem sibi Cimber habet.[178]

Ich erbiete mich, Euer Gestrengen, wann es Ihr gelegen und gefällig ist, dieses aus rechter geometrischer Wissenschaft aus den Kreisen, Quadraten und Dreiecken und anderen Figuren verständlich, deutlich und überhaupt zu demonstrieren und aufzuzeigen. Ich wünsche, dass Euer Gestrengen und den Euren hiermit der göttliche Schutz in allem glücklichen Wohlstande lange erhalten bleibe und befehle mich neben diesem Werklein demselben dienstlichen Fleiß. Gegeben auf Euer Gestrengen Hofe zu Hattstedt in Dithmarschen, den 14. September anno 1583.

Euer Gestrengen gutwilliger Diener *Nicolaus Reimers, Landmesser."*

[178] Wenn du kannst, löse dies, dann wirst du für mich der größte Apoll, der größte Arithmetiker sein, den Kimbrien hat.

Gedruckt zu Leipzig bey
Georg Defner/
Im Jahr

M. D. LXXXIII.

Abb. 20: Letzte Seite L4r der *Geodaesia Ranzoviana*, Leipzig 1583, bei Georg Defner. Forschungsbibliothek Gotha, 4° 44/8 (4).

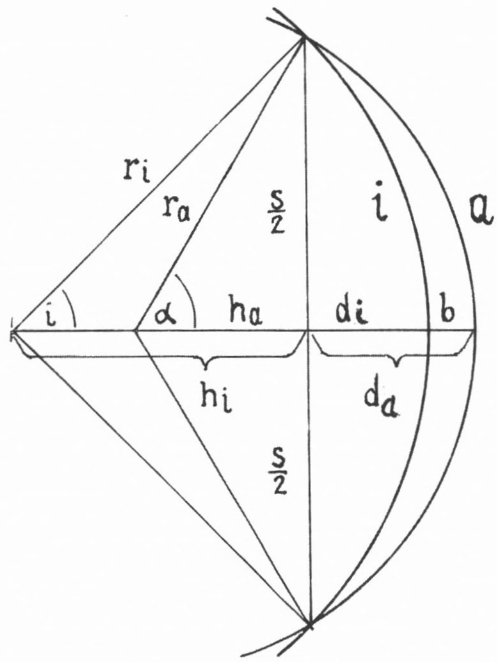
Die *Geodaesia Ranzoviana,* das Landrechnen und Feldmessen, wurde mit Widmung vom 14. September 1583 abgeschlossen und ist auf Kosten von Heinrich Rantzau, dem Förderer, Mäzen und Arbeitgeber von Ursus, gedruckt worden. Dieser hat den Druck im Quartformat (ca. 16x19 cm) von Georg Defner in Leipzig bewerkstelligen lassen, wie aus der letzten Seite, nach dem Schlusswort, hervorgeht. Georg Defner, auch Deffner, Däfener, Teffner oder Tefner, stammt aus Weilheim in Bayern, er heiratete 1580 die Witwe des Druckers Rambau und erhielt am 6. Juni 1580 Bürgerrecht zu Leipzig. Er wurde am 11. Januar 1587 beerdigt, arbeitete also von 1580-1587 als Drucker. In den Messkatalogen sind von ihm 29 Drucke verzeichnet.

Auch die *Geodaesia Ranzoviana 1583* wird im Katalog der Frankfurter Fastenmesse 1584 angezeigt unter der Rubrik „Mancherley Bücher in allerley Künsten".

Mancherley Bücher in allerley Künsten.

Geodæsia Ranzouiana. Landrechnen vnd Feldmessen/sampt messen allerhand grösse/Alles auff eine leichte/ behende vnd vormals vnbekandte newe art/ Künstlich / gründlich vnd deutlich beschrieben/ durch Nicolaum Reymers von Henstede in Dietmarschen. 4. Getruckt in Leipzig. 1583.

Abb. 21: Katalog der Frankfurter Fastenmesse 1584.



Diese letzte „Prüfungsaufgabe für angehende Landmesser“ im Schlusswort übersteigt meines Erachtens deren Fähigkeiten und nach heutiger Auffassung der Aufgabe auch die von Ursus selbst. Zwei Kreisbögen a = 9152 und i = 8415 mit unterschiedlichen Radien schneiden sich über derselben Sehne s = 7560. Aus Sehne und Bogenlänge können bereits alle übrigen Stücke ermittelt werden, allerdings führt das auf das Lösen der Gleichung

$\sin\alpha : \alpha = 0{,}014417$ für den halben Zentrumswinkel α des äußeren Bogens, und auf

$\sin\iota : \iota = 0{,}015680$ für den halben Zentrumswinkel ι des inneren Bogens. Dies ist mit den mathematischen Mitteln, die Ursus zur Verfügung standen, nicht möglich.

Aber hierbei gingen wir an die Aufgabe heran, wie wir es heute täten: wir versuchten, sie allgemein zu lösen mit Hilfe der Algebra, wie wir sie heute haben. Ursus wird wie folgt vorgegangen sein und wohl auch so seine Lösung vorgetragen haben:

Er wählte, wie die Ergebnisse zeigen, als Winkel $\alpha = 60°$ und $\iota = 45°$. Damit wird $h_a = r_a : 2$ ($\cos\alpha = 0{,}5$) und wegen $a = U_a : 3 = {}^2/_3 \cdot \pi \cdot r_a$ folgt $r_a = 4368$ mit $\pi = {}^{22}/_7$ und $h_a = 2184$, $d_a = r_a - h_a = 2184$. Der Flächeninhalt des äußeren Kreisabschnitts ist dann 11.732.448 Quadratruten, die Zahlen gehen alle glatt auf!

Ebenso ergeben sich mit $\iota = 45°$ für den inneren Kreisabschnitt $h_i = s:2 = 3780$, wegen $i = U_i : 4 = {}^1/_2 \cdot \pi \cdot r_i$ ergibt sich für $r_i = 5355$, ebenfalls mit $\pi = {}^{22}/_7$ und $d_i = r_i - h_i = 1575$, womit $b = d_a - d_i = 609$ ist, wie von Ursus vorgegeben. Es wird der Flächeninhalt des inneren Kreisabschnittes 8.242.762,5 Ruten und damit der gesuchte Mondsichelflächeninhalt 3.489.685,5 Ruten. Der Kern der Lösung liegt in der Überlegung, dass der Innenbogen i = 8415 ein Viertelkreis ist, womit sich r_i finden lässt, und dass der Außenbogen a = 9152 ein Drittelkreis ist. Den Zahlen müssten man ansehen, dass $a = 9152 = {}^{22}/_7 \cdot 2912$ ist und $i = 8415 = {}^{22}/_7 \cdot 2677{,}5$.

Ursus hat jedoch mit der Aufgabe in seinem Schlusswort einen deutlichen Hinweis auf eine einfachere Lösung der „Prüfungsaufgabe“ gegeben. Dort ist ein Kreisabschnitt mit der Sehne 168 und dem Bogen 187 gegeben, der Radius ergibt sich zu 119, es handelt sich um einen Viertelkreis. Multipliziert man diese Werte jeweils mit 45, so ergeben sich die Zahlen der „Prüfungsaufgabe“ für den inneren Kreisabschnitt, die Sehne $s = 168 \cdot 45 = 7560$, der Bogen $i = 187 \cdot 45 = 8415$, der Radius $r_i = 119 \cdot 45 = 5355$. Ursus hat also das Pferd von hinten aufgezäumt, wie es bei den Rechenmeistern üblich war. Ursus gibt den Wert von b zusätzlich an und macht damit die Aufgabe sehr viel einfacher! Nachdem man erkannt hat, dass i ein Viertelkreis ist, hat man damit leicht r_i und h_i und d_i. Mit $d_i + b$ erhält man d_a, und mit $d_a + h_a = r_a$ erhält man r_a, weil $h_a = {}^1/_2 \cdot r_a$ ist, denn $\alpha = 60°$. Damit ist die „Prüfungsaufgabe“ einfach und elegant gelöst, im Ursusschen Sinne.

Eine allgemeine Lösung der Aufgabe könnte folgendermaßen verlaufen:
Es ist ja $r_a \cdot \sin\alpha = s:2$ und für den Kreisbogen gilt $a = {}^{\pi}/_{180} \cdot 2\alpha \cdot r_a$, zusammen $\sin\alpha : \alpha = (\pi \cdot s) : (a \cdot 180°) = 0{,}014417$ (mit den gegebenen Zahlen für a und s). Damit muss für die Gleichung $\sin\alpha : \alpha = 0{,}014417$ eine Lösung gefunden werden, was jedoch elementar nicht möglich ist.

Schon in der Vorrede zur *Geodaesia* verwendet Ursus bildhafte Vergleiche. Die Arithmetik und die Geometrie seien dem menschlichen Gemüt angeborene Flügel, mit denen der Astronom gen Himmel fliege und der Geometer hernieder zur Erde steige, weil die himmlische Astronomie und die irdische Geodäsie die vornehmsten zwei Töchter der Arithmetik und der Geometrie seien. In der Einleitung zum vierten Buch setzt Ursus solche Vergleiche fort.

- Jedes Ding werde durch sein Gegenteil verstärkt. Weiß werde noch weißer, wenn man schwarz dazu hält.
- Ein Theologe müsse neben der reinen göttlichen Lehre auch die von Ketzern kennen.
- Ein Jurist müsse nicht nur das Recht kennen, sondern auch wissen, wie man Recht beugt.
- Ein Arzt müsse mit Medikamenten behandeln (antipathisch), aber auch mit „sympathischer Medizin“ kurieren können.
- Und ein Geometer oder Feldmesser müsse nicht nur die Prinzipien der Wissenschaft verstehen, sondern auch die Irrtümer und Fallstricke.

In den ersten drei Büchern „Vom Landrechnen“, „Vom Feldmessen“ und „Vom Messen“ schreibt Ursus noch sehr sachlich. Im vierten Buch jedoch „Vom Irrmessen“ verschafft er seiner Verärgerung über die unfähigen Feldmesserkollegen Luft durch viele markige Sprüche.

- Sie werfen alles zusammen in einen Hafen (Topf): Buch IV, Kap. 3
- Weise Hühner legen auch in die Nesseln: Buch IV, Kap. 3
- Die großen Narren sind die besten: Buch IV, Kap. 3
- Sie spinnen grob (= derb sein, auch rauhes Garn spinnen): Buch IV, Kap. 4
- Sie zäumen das Ross hinten auf: Buch IV, Kap. 5
- Sie verhüten das Ei und lassen die Hennen entfliehen: Buch IV, Kap. 5
- Wenn es keine dummen Leute gäbe, wovon sollten dann die weisen reich werden? Buch IV, 5
- Das glauben sie wie ein reines Evangelium: Buch IV, Kap. 6
- Die Frösche mögen ruhig etwas hinquaken: Buch IV, Kap. 6
- Ô pectora caeca[179] – O, verblendete Gemüter: Buch IV, Kap. 6.

Ursus' Bücher sind generell sehr selten erhalten geblieben. Ich habe die in der Forschungs- und Landesbibliothek Gotha auf Schloss Friedenstein und in der Herzog-August-Bibliothek Wolfenbüttel aufbewahrten Exemplare verwendet. Bekannt sind mir folgende Exemplare in

Berlin, Staatsbibliothek (4° Of 3116)
Breitenburg, Bibliothek der Grafen Rantzau, D (Ranzoviana) Nr. 43
Jena, Thüringische Universitäts- und Landesbibliothek (4 Bud. Var. 703)
München, Bayerische Staatsbibliothek (Hbks R 30 dn)
New York, Columbia University (A-L^4)
Paris, Nationalbibliothek (V. 7125)
Weimar, Herzogin Anna Amalia Bibliothek (40,4:151) – Verlust beim Brand 2004?
Wien, Österreichische Nationalbibliothek (72.J.29)
Wolfenbüttel, Herzog-August-Bibliothek (Nb 555)
Zürich, ETH.

Das Wolfenbütteler Exemplar der *Geodaesia* enthält auf der Rückseite der letzten Druckseite einen handschriftlichen Eintrag aus dem Jahre 1598, ohne Namen. Die Schrift ist nach meiner Einschätzung nicht die von Ursus selbst, nach Vergleich seiner Handschrift im Brief an Rudolph II. und in den *Tractatiuncula*, beide aus dem Jahr 1597. Dieser Eintrag kann jedoch eine Beziehung des Schreibers und damit wohl des Besitzers dieses Exemplars zu Ursus oder zu Heinrich Rantzau aufzeigen, denn es bezieht sich auf Dänemark, auf den sagenhaften König Dan und den derzeitigen König Christian IV. Ursus war nämlich bei dem Statthalter des dänischen Königs in Dithmarschen als Feldmesser in Stellung. Der handschriftliche Eintrag lautet:

„DANIA nomen est à primo suo Rege DAN,[180] welcher gewesen nach Erschaffung der Welt 2898, vor der Geburt Christi 1073,[181] tempore Regis Davidis.[182] Wie nachfolgende Rythmi uff dem großen Saal des Schlosses Cronenburg[183] uff einer langen Taffel geschrieben bezeugen.

DAN

Von königlichem Stand und Reich wusst anfangs nicht zu sagen ich
hernach die edle Tugent schon erhub mich zu dem Reich und Cron.
Das auch von mir das gantze Land benambt und Dennemarck genannt
weil Ich heiß Dan und war der Erst der als ein König darinn herscht.
Welchs ist geschehen ohngefähr zur Zeit als David König war.

Christiani IIII. des itzo regierenden und an der Zahl hundersten Königes in Dennemarcken Symbolem: REGNA FIRMAT PIETAS.[184]

Gottfürchtigkeit erhelt allzeit im Lande Fried und Einigkeit.
Anno 1598."

[179] Lucretius (ca. 98-55 v.Chr.), *De rerum natura*, II 14: „O miseras hominum mentes, O pectora caeca."

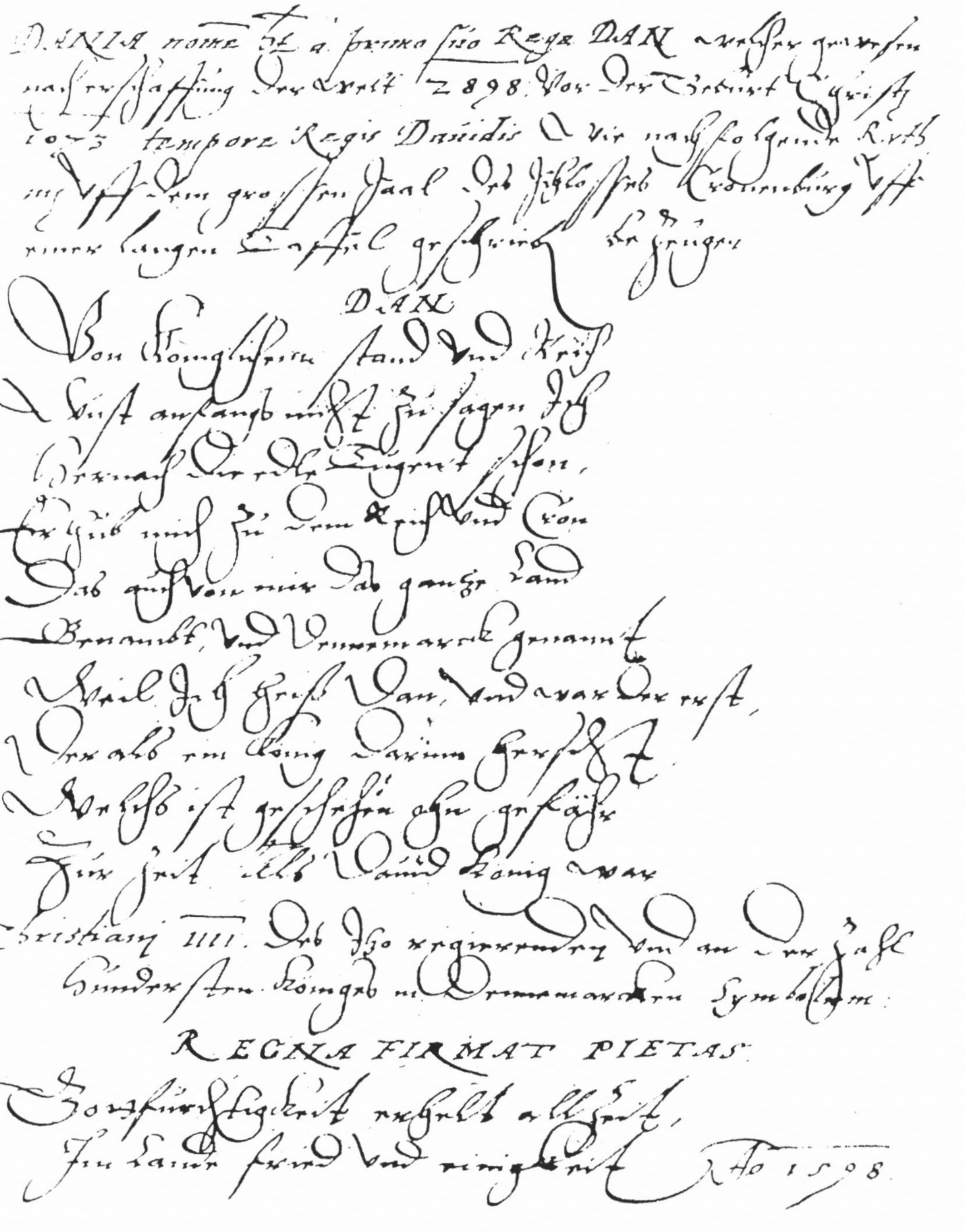
[180] Nach Saxo Grammaticus, Buch 1 Kap.1, sagenhafter erster Fürst Dänemarks. Die Brüder Dan und Angel waren demnach Gründer der Königsdynastien Dänemarks und Englands: „Von Dan und Angul, Humbles' Söhnen, leitet sich der Ursprung der Dänen her; sie waren die Stammväter unseres Volkes und dessen erste Anführer." In Buch 4 Kap. 6-8 erzählt Saxo Grammaticus dann die Geschichte von Dan II. und Dan III. mit Krieg gegen die Sachsen. Peter Sax (1597-1662), Chronist Nordfrieslands, schreibt in seiner *Dithmarsia* 1640, Blatt 154r: „Anno 278 ungefehr, ante Christum natum, ist Thietmarus mit seiner Colonie in Dithmarschen, als Dan in Dania, Angulus in Anglia, ... , das Regiment hetten, angekommen."

[181] Danach wäre die Welt 3971 v.Chr. erschaffen worden.

[182] Danach hätte David um 1073 v.Chr. regiert. Ursus gibt in seinem *Chronotheatrum* dafür den Zeitraum 1062-1022 v.Chr. an. Nach heutiger Einschätzung regierte König David über Israel-Juda etwa 1000-970 v.Chr.

[183] Schloss Kronborg in Helsingør auf Seeland, erbaut 1574-1585 von Kg. Friedrich II.

[184] Frömmigkeit festigt die Königreiche.



DANIA nomen est a primo suo Rege DAN [illegible]

[illegible]

DAN

[illegible]

Christian IIII. [illegible]

REGNA FIRMAT PIETAS.

[illegible] Ao 1598.

Abb. 22: Handschriftlicher Eintrag aus dem Jahr 1598 im Wolfenbütteler Exemplar der *Geodaesia*. Herzog-August-Bibliothek Wolfenbüttel, Nb 555.

Exemplar der *Geodaesia Ranzoviana* auf Schloss Breitenburg

Heinrich Rantzau, Statthalter des dänischen Königs im königlichen Anteil Schleswig-Holsteins und Förderer und Mäzen von Nicolaus Reimers (Raimarus) Ursus, ließ auf seine Kosten die beiden Frühwerke von Ursus, die *Grammatica Ranzoviana* 1580 und die *Geodaesia Ranzoviana* 1583, drucken und nahm sie in seine berühmte Bibliothek auf Schloss Breitenburg auf.

Diese Bibliothek Heinrich Rantzaus wurde im Dreißigjährigen Krieg nach der Eroberung von Schloss Breitenburg 1627 durch Truppen Wallensteins geplündert. Ihre Bücher sind in alle Welt zerstreut worden, der größte Teil wurde von Wallenstein nach Böhmen gebracht. M. Posselt versucht[185] nachzuweisen, dass die Bibliothek damals vollständig unterging und dass nach Aussage des Breitenburger Inspektors Detlev Marcus Trüs 1690 sich kein einziges Buch dieser älteren Bibliothek mehr auf Breitenburg befinde. Es gibt jedoch in der Breitenburger Bibliothek noch heute einige Bände, insbesondere Bibeln, die Prägungen auf dem Einband haben, die zu Heinrich Rantzau gehören.

Im 17. bis 19. Jh. bauten die Grafen Rantzau durch Kauf gerade auch älterer Bücher wieder eine ansehnliche Bibliothek auf. Graf Conrad Rantzau hat um das Jahr 1841 einen Katalog der in der damaligen Bibliothek befindlichen Bücher anfertigen lassen, der sich heute im Landesarchiv Schleswig befindet.[186] In diesem Katalog ist die *Geodaesia Ranzoviana* unter „D: Ranzoviana und Geschichte adel. Geschlechter, Nr. 43“ aufgeführt. Dieses Exemplar existiert auch heute noch in der Rantzauschen Bibliothek auf Schloss Breitenburg bei Itzehoe, in einem Band zusammengebunden mit 11 Büchern, Heinrich Rantzau betreffend. Es sind dies Epitaphia und Elegien.[187] Der Band hat Quartformat, ca 14x18 cm, einen neueren rotbraunen Pappeinband, keine Prägungen auf dem Einband, keine Exlibris. Das letzte Einbandblatt hat ein zur Hälfte erkennbares Wasserzeichen, bei dem nur eine VII zu sehen ist, was auf Christian VII. von Dänemark (1766-1808)[188] hinweisen könnte. Der Band ist jedenfalls nicht in dem Stil gebunden, wie man es für die Bücherei von Heinrich Rantzau kennt. Obwohl die in diesem Band zusammengebundenen Bücher alle im Zeitraum 1582-1595 gedruckt worden sind, mit einer Ausnahme 1567, kann davon ausgegangen werden, dass die Geodaesia Ranzoviana nicht das ursprüngliche Exemplar ist, das Heinrich Rantzau in seine Bibliothek aufnahm. Es wird wie die meisten Bücher der heutigen Rantzauschen Bibliothek durch Kauf im 17.-19. Jh. hierher gekommen sein, und es ist wohl seines Titels wegen unter „Ranzoviana“ eingeordnet worden, obwohl sein Inhalt sich mit Arithmetik, Geometrie und Geodaesie beschäftigt. Es gibt in diesem Exemplar der Geodaesia nur einige wenige Unterstreichungen, so auf Blatt B3r/v und C4v im Kapitel über das Rechnen im 16-er-System, eine Korrektur auf Blatt C1r, und einen Zusatz auf Blatt G1r bei „Schuch und der Acker“, der „Schepel Land helt“ lautet.

Ludolph van Ceulen und die „Prüfungsaufgabe“ von Ursus

Ludolph van Ceulen[189] gab 1596 sein Hauptwerk *Van den Circkel* heraus. Darin, im 19. Kapitel „Gebrauch der Tafeln“, beschreibt er die „Prüfungsaufgabe“ von Nicolaus Reimers Ursus aus dessen *Geodaesia* und setzt sich ausführlich mit ihr auseinander. Er habe diese Aufgabe 1587 in Bremen gesehen, in dem 1583 in Leipzig gedruckten Buch von „Niclaes Reymers“. Van Ceulen schildert dann auch die Geschichte, dass Ursus seinem Dienstherrn Heinrich Rantzau anträgt, Landmesser nur noch nach Lösen dieser seiner „Prüfungsaufgabe“ anzustellen. Van Ceulen berechnet insbesondere den Flächeninhalt des Ursus-Möndchens mit seinem Wert für π = 3,141.592.653 anstelle des von Ursus verwendeten $3^1/_7$. Außerdem benutzt van Ceulen seine Sinustafeln, die er in *Van den Circkel* auf fol. 26v-48v abgedruckt hat. Van Ceulen geht an die Ursus'sche „Prüfungsaufgabe“ schrittweise heran.

Im ersten Beispiel dieses 19. Kapitels beschreibt van Ceulen zuerst seinen Weg, den Flächeninhalt eines Kreisabschnitts mit der Sehne BD = 960 Ruten und der Höhe 240 Ruten zu berechnen. Dazu benutzt er nach der 35. Proportion des 3. Buches Euklids die Formel für den Durchmesser $d = (^s/_2)^2 : h + h$.[190] Dann verwendet van Ceulen für den halben Zentriwinkel $\sin {}^\alpha/_2 = s : 2r$ und, anders als Ursus,

---

[185] M. Posselt, *Die Bibliothek Heinrich Rantzaus*; in: Zeitschrift d. Ges. für SHL-Geschichte, Bd. 11, Kiel 1881, S. 71-124.

[186] Abt. 400.1, Nr. 68

[187] *Epitaphia aliquot in Annae Walstorpiae*, Leipzig 1582; G.L.Froben, *Elegia in eclipsin lunae*, Hamburg 1592; Heinrich Rantzau, *De Gemmis*, Leipzig 1585; *Elegia de festo Paschalis*, Wittenberg 1587; *Epitaphia Catharinae, Henrici Ranzovii filiae*, Hamburg 1587; Christoph Silvius, *Elegia in Silvas Ranzovianas*, Hamburg 1588; Heinrich Rantzau, *Inscriptiones monumentorum*, Hamburg 1588; Johannes de Elvervelt, *Calliope*, Schleswig 1591; Martin Marstaller, *Problema Ethicum*, 1591; Albert Lomeier, *Ranzovii Incliti antiqui natalis ac haereditarii Ranzoviorum praedii*, 1595; Christoph Kellinghausen, *De praecipuis rebus gestis illustris viri ... carmen panegyricum*; Frankfurt 1567; *Epistola consolatoria Davidis Chytraei ad Henricum Ranzovium*, Hamburg 1591; Ursus, *Geodaesia Ranzoviana*, Leipzig 1583.

[188] Oder auf Friedrich VII. (1848-1863).

[189] Niederländischer Mathematiker (van Collen), *1540 in Hildesheim, † 1610 in Leiden. Bekannt durch seine Berechnung von π auf 35 Nachkommastellen.

[190] Diese 35. Proposition Buch III besagt für zwei Sehnen, die sich im Innern des Kreises schneiden, dass das Produkt der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte auf der anderen ist. Daraus ergibt sich die oben benutzte Formel.

seine Sinustafel. Damit hat van Ceulen den Flächeninhalt des Kreissektors und durch Subtraktion des Flächeninhalts des Dreiecks auch den des Kreisabschnitts. Die vollständige Rechnung, aus dem Holländischen in heutiges Deutsch übertragen, lautet:

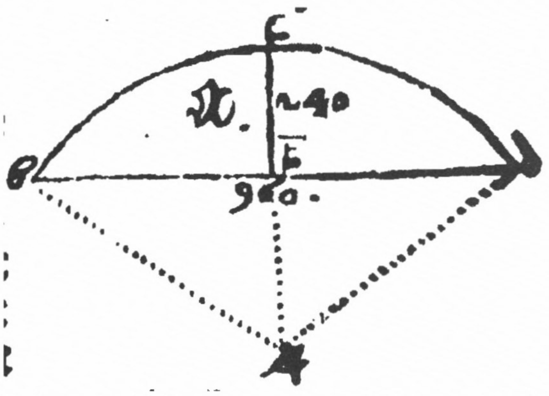


Abb. 23: Ludolph van Ceulen, Van den Circkel 1596, fol. 54r

„Das erste Beispiel behandelt ein Stück Land, das von einer krummen und einer geraden Linie begrenzt ist. Die Strecke BD ist 960 Ruten lang, die Höhe CE ist 240 Ruten. Frage: Wie groß ist das Stück BCDE? Antwort: 161.025,6296 Quadratruten. Um dieses zu finden, multipliziere BE mit ED, jedes 480, ergibt 230.400 [= $(^s/_2)^2$]. *Dies dividiere durch EC = 240. Hierzu addiere EC, so erhält man den ganzen Durchmesser des Kreises, von dem die Figur ein Stück ist, zu 1200 Ruten, nach der 35. Proposition im 3. Buch Euklids. Der halbe Durchmesser ist daher 600 Ruten. Hiervon 240 subtrahiert, ergibt EA = 360 Ruten. Berechne nun das Verhältnis von ED zu den 600 Ruten des halben Durchmessers (in 10.000.000 Einheiten), das ist der Sinus von 53° 7′ 48″ ,*[191] *so lang ist der Bogen CD, etwas mehr. Das sind* $53^{13}/_{100}$ *Grad. Multipliziert man den Durchmesser 1200 mit 3,1415926,*[192] *so erhält man den ganzen Umfang des Kreises zu 3769,91112. Dessen 360° geben 3769,91112 Ruten, und damit die 53,13 Grad für den Bogen CD = 556,3760495. Multipliziert mit dem halben Durchmesser 600 Ruten, erhält man für den Kreissektor ABCD 333.825,6296.*[193] *Davon das Dreieck ABD subtrahiert, das 172.800 groß ist, ergibt als Rest 161.025,6296 Quadratruten. Und würde hier für den Umfang des Kreises das* $3^1/_7$*-fache des Durchmessers genommen werden, so ergäben sich 134 Quadratruten mehr als der richtige Wert.*"[194]

In den Beispielen 8 und 9 dieses 19. Kapitels[195] errechnet van Ceulen Flächeninhalte von „Möndchen". Im Beispiel 8 sind gegeben die beiden Höhen der Kreisabschnitte und die gemeinsame Sehne. Die Aufgabe läuft somit auf zweimaliges Anwenden des eben geschilderten Beispiels 1 hinaus. In Aufgabe 9 sind gegeben die gemeinsame Sehne, die Dicke des Möndchens und die Länge des einen Bogens, was ebenfalls auf die Methode des Beispiels 1 hinausläuft. Nun passt die „Prüfungsaufgabe" von Ursus aus dessen *Geodaesia* hinzu. Van Ceulen zitiert sie in Beispiel 12 und setzt sich mit ihr ausführlich auseinander: [196]

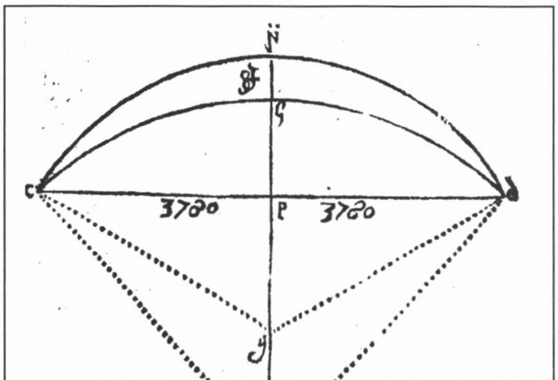
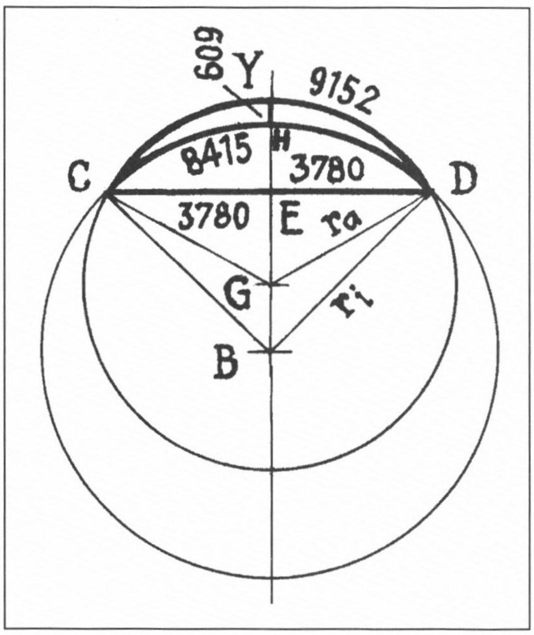


Abb. 24: Van Ceulen, Van den Circkel, fol. 56v. „Prüfungsaufgabe" von Ursus.



[191] Also 480:600 = 8.000.000 : 10.000.000 (= 0,8.000.000). Die Tafel von van Ceulen auf fol. 39v liefert dafür den Winkel 53° 7′ und durch Interpolation zu 53° 8′ folgen 48″.

[192] Van Ceulen verwendet keine Dezimalbrüche, sondern echte Brüche, hier also $^{1415926}/_{10000000}$.

[193] Fehler bei van Ceulen: dort steht fälschlich 161.025,6296, der Wert für den Kreisabschnitt.

[194] Genauer 134,370301 Quadratruten.

[195] fol. 56r.

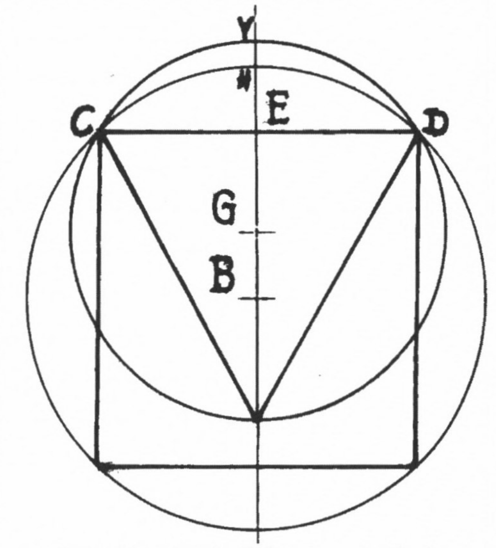
[196] fol. 56v – 58r.

„Als letztes in seinem Buch ist von dem Autor, dem wohlerfahrenen Geometer Niclas Reymers aus Henstede in Ditmarsen, folgende Frage gestellt worden: Es ist ein Feld gelegen in der Form eines Neuen Mondes mit äußerem Bogen 9152 lang und mit innerem Bogen 8415. In seiner breitesten Mitte ist er 609 breit. Man weiß auch die Länge zwischen den beiden Hörnern zu 7560 Ruten. Wieviel Fläche hat das Feld? Diese Worte verstehe ich so: Ein Stück Land liegt in Form des nebenan gezeichneten Mondes CYDH vor. Der äußere Bogen CYD ist 9152 lang, der innere [CHD] *8415, die Dicke YH ist 609 Ruten. Frage wie oben. Diese Aufgabe habe ich Anno 87 zu Bremen in einem 1583 in Leipzig gedruckten Buch gefunden. Darinnen berichtet derselbe Niclaes von Landmessern, die eine falsche Regel verwenden und von denen der eine zu viel und der andere zu wenig messen. Er begehrt deshalb vom königlichen Statthalter von Dänemark Rantzau, dass dieser bei der Majestät von Dänemark und dem Herzog von Holstein zu Wege bringen solle, dass niemand in seinem Königreich, Herzogtum oder Land zu messen sich unternehme, wenn er nicht vorher das vorstehende Beispiel gelöst habe, welches Niclaes zu allen Zeiten bereit ist, zu demonstrieren und probieren mit dem Kreis, Quadrat und Dreieck.“*

Ursus hat seine „Prüfungsaufgabe“ ja rückwärts aufgebaut. Er erwartet, dass man vermutet bzw. erkennt, dass die Zentriwinkel der Kreisabschnitte 90° bzw. 120° sind. Danach soll man die Aufgabe mit elementargeometrischen Mitteln bearbeiten. Er will diese Winkel nicht berechnen lassen, schon gar nicht mit Sinustafeln, die er hier ja auch nicht verwendet, sondern er will die Aufgabe „mit dem Kreis, Quadrat und Dreieck“ lösen. Van Ceulen erkennt, dass die Zentriwinkel von Ursus zu 90° und 120° gewählt worden sind, und auch, dass Ursus die Dicke des Möndchens nicht hätte anzugeben brauchen, oder ersatzweise die Länge eines Bogens. Van Ceulen gibt zuerst die etwas abweichenden Werte für die Kreisbögen an, wenn man die Sehne 7560 als eine Seite des gleichseitigen Dreiecks bzw. des Quadrates ansieht. Van Ceulens Text hierzu lautet:

	Ursus	Van Ceulen
R_i = BD	5355	5346 [$\sqrt{2} \cdot 3780$]
i = Bogen CHD	8415	8400,5 [$2\pi \cdot 5346 : 4$]
R_a = GD	4368	4365 [3780 : sin60°]
a = Bogen CYD	9152	9145 [$2\pi \cdot 4365 : 3$]
Dicke Möndchen YH	609	617
Fläche Möndchen	3.489.686	3.544.188

„Hieraus dünkt mich zu wissen, dass er die Seite [Sehne] *CD als Seite eines in einen Kreis einbeschriebenen Quadrats genommen hat und den Bogen CHD auf dessen Umfang; ebenso den Bogen CYD als ein Drittel eines anderen Kreises. Dann muss die Sehne CD die Seite eines in einen Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks sein. Ist dies seine Absicht, so sollte nach der Proportion des Archimedes*[197] *der Bogen nicht 8415, sondern* $8400^1/_2$ *Ruten lang sein.*[198] *Und es wäre die Länge des äußeren Bogens nicht 9152, sondern wenig mehr als* $9145^1/_3$ *Ruten.*[199] *Und in ihrer Mitte sollten 617 Ruten sein.*[200] *Und der Inhalt des Mondes sollte 11.793.600 –* $\sqrt{68.052.791.520.000}$ *sein, das ist wenig mehr als* $3.544.188^2/_5$ *Quadratruten.*



Die Sehne CD als Seite eines in Kreise einbeschriebenen Quadrates bzw. Dreiecks.

Dieses und dergleichen ist leichter zu finden durch das Verhältnis von Bogen und Sehne. Wenn also seine Absicht wie vorstehend beschrieben ist, dann ist der Mond gleich geformt wie der Mond G im 7. Beispiel,[201] *bei dem die Länge von der einen Ecke zur anderen* $\sqrt{32}$ *ist.*[202] *Dessen Quadrat 32 ist, gegen den Inhalt des Mondes G 1,98431246 Ruten, (wegen 1 zu* $3^1/_7$*). Es ist 57.153.600, das Quadrat in Teilen von CD, gegen den Mond diese Beispiels (Grund siehe oben). Fazit: Auf dieselbe Art kommt man durch den bekannten Bogen zum Ergebnis. Durch die Suche nach der richtigen Lösung (Verhältnis des Durchmessers gegen seinen Umfang) kommt 3.545.192,174 ungefähr.*

Niclaes Reymers will, dass der untere Bogen 8415 lang sei und des Mondes Dicke in der Mitte 609 Ruten. Dies ist ein Prüfstück, er hätte die Länge des äußeren Bogens CYD verschweigen können, die

[197] Also mit $\pi = 3^1/_7$ gerechnet.
[198] $r = \sqrt{2} \cdot 3780 = 5345,77$ mit $\sqrt{2} = 1,414225$ gerechnet; damit $b = {}^{11}/_7 \cdot 5345,77 = 8400,5$.
[199] $3780 : \sin 60° = 3780 : 0,8660254 = 4364,76$; damit $b = {}^{44}/_{21} \cdot 4364,76 = 9145,21$.
[200] $d = h_i - h_a = 2182,38 - 1565,77 = 616,61$.
[201] Van Ceulen, *Van den Circkel*, Delft 1596, fol. 55v. Hier nicht beschrieben.
[202] Dort Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks.

nämlich gefunden wird durch die Länge YH und durch das Verhältnis des Bogens CHD zur Sehne CD wie folgt:“

Van Ceulen bearbeitet nun die „Prüfungsaufgabe“ von Ursus wie folgt, zuerst mit $\pi = 3^1/_7$. Für den Umfang des ganzen Kreises nimmt er $\pi \cdot d = 3^1/_7 \cdot 20.000.000 = 62.857.143$ Teile; der Kreisradius wird also zu 10.000.000 Teilen gewählt. Damit hat der Bogen des Achtelkreises (45°) 7.857.143 Teile. Das Verhältnis von Bogen CHD zu Sehne CD ist ja gegeben durch 8415:7560, also zu 11.130.952:10.000.000, was auch dem Verhältnis von halbem Bogen HD zur halben Sehne ED gleich ist. Nun kann van Ceulen jeweils Verhältnisse von (halben) Bögen zum zugehörigen Sinus berechnen. So findet er das Verhältnis von 45°-Bogen zu sin45° als 11.111.677 und das Verhältnis von 46°-Bogen zu sin46° als 11.165.441, jeweils als Teile von 10.000.000. Das 45°-Verhältnis ist 19.275 Teile zu klein, das 46°-Verhältnis 34.489 Teile zu groß gegenüber dem richtigen Verhältnis 11.130.952. Durch Interpolation ergibt sich somit der Winkel als 45° 21,5′. Allerdings muss van Ceulen die Sinus-Werte aus seiner Tafel entnehmen![203] Ursus löste seine Aufgabe ohne Sinustafel.

Für die beiden unterschiedlichen Kreise mit verschiedenen Radien werden jeweils 10.000.000 Teile für den Radius gewählt. Dadurch sind dann natürlich die Teile für die gemeinsame Sehne CD verschieden.

[203] Auf fol. 37v für 45° und unten auch für 46°.

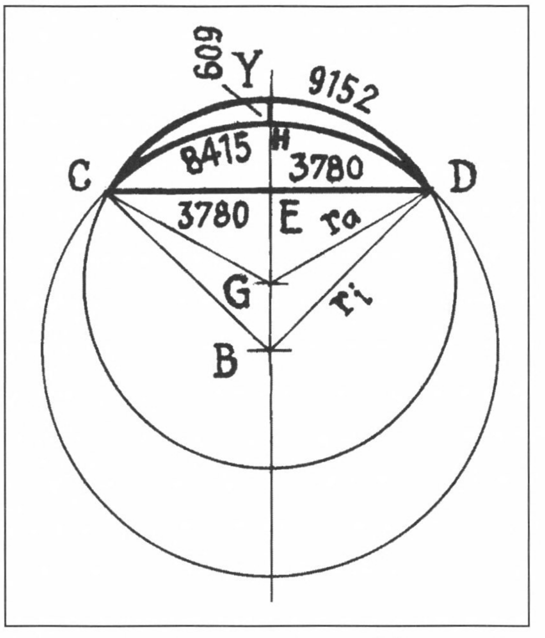
Tafelen voor de Land-meters.

Tafelen van Sinuum, Tangentium, ende Secantium, tegen 20000000 den Dia.

Minu.	Sinus,	Perpendi.	Snijder,			Sinus,	Perpendi.	Snijder,
	44	44	44	Gradē		45	45	45
0	6946584	9656888	13901636		0	7071068	10000000	14142135
1	6948676	9662511	13905542		1	7073125	10005820	14146251
2	6950762	9668137	13909452		2	7075181	10011643	14150371
3	6952858	9673766	13913365		3	7077236	10017469	14154494
4	6954949	9679398	13917281		4	7079291	10023299	14158621
5	6957039	9685034	13921201		5	7081345	10029132	14162751
6	6959128	9690674	13925126		6	7083399	10034968	14166884
7	6961216	9696315	13929052		7	7085452	10040808	14171021
8	6963304	9701960	13922982		8	7087504	10046651	14175162
9	6965392	9707609	13936916		9	7089556	10052497	14179306
10	6967479	9713261	13940854		10	7091607	10058347	14183454
11	6969565	9718916	13944795		11	7093658	10064201	14187606
12	6971651	9724574	13948739		12	7095708	10070058	14191761
13	6973736	9730235	13952686		13	7097757	10075918	14195919
14	6975821	9735900	13956638		14	7099806	10081782	14200082
15	6977905	9741568	13960592		15	7101854	10087649	14204248
16	6979988	9747239	13964550		16	7103902	10093520	14208418
17	6982071	9752913	13968511		17	7105949	10099394	14212591
18	6984153	9758591	13972476		18	7107995	10105272	14216769
19	6986235	9764272	13976444		19	7110041	10111153	14220950
20	6988316	9769956	13980416		20	7112086	10117038	14225135
21	6990396	9775643	13984391		21	7114131	10122926	14229324
22	6992476	9781334	13988370		22	7116175	10128818	14233517
23	6994555	9787028	13992352		23	7118218	10134713	14237713
24	6996634	9792725	13996338		24	7120261	10140611	14241912
25	6998712	9798425	14000327		25	7122303	10146513	14246115
26	7000789	9804128	14004319		26	7124344	10152418	14250321
27	7002866	9809835	14008315		27	7126385	10158327	14254531
28	7004942	9815545	14012314		28	7128425	10164239	14258745
29	7007018	9821258	14016316		29	7130465	10170154	14262961
30	7009093	9826974	14020322		30	7132504	10176073	14267182
31	7011167	9832694	14024332		31	7134543	10186691	14271407
32	7013241	9838417	14028345		32	7136581	10187922	14275635
33	7015314	9844143	14032361		33	7138618	10193852	14279867
34	7017387	9849872	14036381		34	7140655	10199785	14284103
35	7019459	9855605	14040404		35	7142691	10205722	14288343
36	7021530	9861341	14044431		36	7144727	10211663	14292587
37	7023601	9867080	14048461		37	7146762	10217607	14296834
38	7025671	9872822	14052494		38	7148796	10223555	14301086
39	7027741	9878968	14056531		39	7150830	10229506	14305331
40	7029810	9884317	14060572		40	7152863	10235460	14309599
41	7031879	9890070	14064616		41	7154895	10241418	14313861
42	7033947	9895826	14068664		42	7156927	10247380	14318127
43	7036014	9901585	14072715		43	7158958	10253345	14322396
44	7038081	9907347	14076770		44	7160989	10259314	14326670
45	7040147	9913113	14080829		45	7163019	10265286	14330947
46	7042213	9918882	14084891		46	7165049	10271262	14335228
47	7044278	9924654	14088956		47	7167078	10277242	14339513
48	7046342	9930430	14093026		48	7169106	10283225	14343802
49	7048406	9936209	14097099		49	7171134	10289212	14348095
50	7050469	9941991	14101175		50	7173161	10295202	14352391
51	7052532	9947777	14105255		51	7175187	10301196	14356691
52	7054594	9953566	14109339		52	7177213	10307193	14360995
53	7056655	9959359	14113427		53	7179238	10313194	14365303
54	7058716	9965155	14117518		54	7181263	10319199	14369615
55	7060776	9970954	14121612		55	7183287	10325207	14373930
56	7062836	9976756	14125709		56	7185310	10331219	14378250
57	7064895	9982562	14129810		57	7187333	10337234	14382573
58	7066953	9988371	14133915		58	7189355	10343253	14386900
59	7069011	9994184	14138023		59	7191377	10349276	14391230
60	7071068	1000000	14142135		60	7193398	10355302	14395564

Abb. 25: Ludolph van Ceulen, *Van den Circkel*, fol. 37v. Sinustafel für 44° und 45

*„Zuerst bemerke ich, dass die Länge der Sehne **CD = 7560** ein Verhältnis zum Bogen **CHD = 8415** hat wie 168 zu 187,*[204] *oder wie 10.000.000 zu **11.130.952**. Dieses Verhältnis haben auch deren Hälften, nämlich ED als Sinus des Bogens HD zur Länge HD. Darum haben die Teile des Sinus ED (der Durchmesser des Kreises nach Gefallen geteilt in 20.000.000 Teile) das gleiche Verhältnis zu den Teilen des Bogens HD (nach der 15. Prop. des 5. Buches Euklids). Da der Bogen HD nun 45° groß ist, so ergeben sich für denselben 7.857.143, das ist ein Achtel von 62.857.143 (das ist $3^{1}/_{7}$ mal 20.000.000), welches der Umfang ist. Dividiere* [den Bogen zu 45°] *7.857.143 durch den sinus von 45°, was 7.071.068 derselben Teile ist, ergibt 11. 111.677,*[205] *das sind 19.275 Teile zu wenig*[206]. *Darum suche ich, wieviele Teile der Bogen zu 46° hat. 360° ergeben 62.857.143 Teile, auf 46° kommen dann 8.031.746, und der sinus von 46° hat 7.193.398 Teile; hierdurch dividiert die 8.031.746 Teile ergibt* [für Bogen(46°) : sin 46° =] *11165441,*[207] *das sind 34.489 Teile zu viel. Durch diese zwei Differenzen finde ich, dass das wahre Verhältnis zwischen 45°21′ und 45°22′ liegt.*[208]



*Dadurch finde ich die richtige Länge der Strecke ED zu 7.115.584 Teilen, was der sinus von mehr oder weniger **45° 21′ $42^{2}/_{3}$′′** ist.*[209] *Diese Grade, Minuten, Sekunden verwandelt in Teile ergeben 7.920.323 für den Bogen HD.*[210] *Hierdurch hat man das gesuchte Verhältnis zwischen den Teilen des richtigen ED und den Teilen des Bogens HD. Subtrahiere die gefundenen Grade, Minuten, Sekunden des Bogens HD von 90°, der Komplementbogen ist 44° 38′ $17^{1}/_{3}$′′. Vom Sinus in der Tafel ergibt sich 7.026.269,*[211] *so viele Teile hat BE. Diese von BH genommen mit 10.000.000 Teilen* [das ist der Radius BD], *bleibt EH 2.973.731. In Ruten verändert: 7.115.584 Teile geben 3780 Ruten, 2.973.731 Teile ergeben dann **EH = 1579,73023** Ruten. Mit der Breite der Figur 609 Ruten ergibt sich für **EY = 2188,73023** Ruten. Nun kannst du leicht durch die 35. Proposition des dritten und die 47. Prop. des ersten Buches Euklids finden für den Durchmesser des äußeren Bogens **2·GD = 8716,89884 Ruten** in 20.000.000 Teilen, 3780 Ruten ergeben dann 8.672.809. In der Sinustafel findet man diesen Wert unter **60° 8′ $39^{3}/_{40}$′′**.*[212] *Multiplizier den gefundenen Durchmesser mit $3^{1}/_{7}$, folgt 27395,96778 Ruten für den ganzen Umfang mit 360°, dann hat der Bogen YD (60° 8′ $39^{3}/_{40}$′′) 4576,967 Ruten. Für den ganzen Bogen **CYD folgt 9153,934**.*

*Durch das Vorhergehende wird nun für den halben Durchmesser **BD = 5312,283** gefunden.*[213] *Subtrahiert vom halben Durchmeser GY = GD so viel oben gefunden für EY, wird der Rest **EG = 2169,7192**.*[214] *Ebenso von dem halben Durchmesser BH* [=BD] *subtrahiert HE, bleibt für **BE = 3732,553**.*[215] *Multipliziert man diese beiden Senkrechten jeweils mit 3780,*[216] *so ergibt sich für das Dreieck CBD 14.109.050,34 und für CGD 8.201.538,576. Das subtrahiert voneinander, bleibt Rest 5.907.511,76, so groß ist das Stück BCGD. Multipliziere den halben Durchmesser mit dem gefundenen Bogen HD, so kommt für den **Kreissektor BCHD 22.351.430,07**.*[217] *Davon subtrahiert das Stück BCGD, bleibt für GCHD 16.443.919.*[218] *Multipliziere den Bogen YD mit dem halben Durchmesser GD, kommt für* [den Kreissektor] *GCYD 19.948.476.*[219] *Hiervon GCHD, bleibt für den*

[204] Eben dieses Kürzen von 7560:8415 durch 45 zu 168:187 sollte man lt. Ursus erkennen, um die Verwandtschaft zu seiner vorgeschalteten Aufgabe zum Kreisabschnitt auf Blatt L2v der *Geodaesia* zu sehen.
[205] Gemeint ist 1,1111677.
[206] Gegenüber dem Zielwert Sehne CD : Bogen CHD = 10.000.000 : 11.130.952.
[207] Gemeint ist 1,1165441.
[208] (Lineare) Interpolation: 19.275:53.764 = 0,3585° = 21,5′.
[209] Nach van Ceulens Sinustabelle auf fol. 37v ist sin 45° 21′ = 7.114.131 Teile, sin 45° 22′ = 7.116.175, Differenz 2044 Teile. Durch Interpolation auf $42^{2}/_{3}$′′folgen 7.115.584,5 Teile.
[210] α = 45,36185185°; U = 62.857.143 Teile; b = α · U : 360° = 7.920.323 Teile.
[211] fol. 37v.
[212] fol. 41v.
[213] EH 2.973.731 Teile = 1579,73023 Ruten. Also BD = 10.000.000 Teile = 5312,2835 Ruten.
[214] GD (GY) – EY = 4358,4494 – 2188,7302 = 2169,7192 Ruten = EG.
[215] BH (BD) – HE = 5312,283 – 1579,730 = 3732,553 Ruten = BE.
[216] Fläche des Dreiecks BCD = BE · ED = 3732,553 · 3780 = 14.109.050,34 Quadratruten. Fläche des Dreiecks GCD = GE · ED = 2169,7192 · 3780 = 8.201.538,576 Quadratruten.
[217] r_{innen} · b : 2 = BD · CHD : 2 = 5312,283 · 8415:2 = 22.351.430,72 = Sektor BCHD. Im Druck steht 22.351.430 $^{7}/_{100}$ statt $^{72}/_{100}$.
[218] BCHD – BCGD = 22.351.430,07 – 5.907.511,76 = 16.443.918,31 Teile = GCHD.
[219] YD·GD = 4576,967 · 4358,449 = 19.948.477 Quadratruten.

Mond CYDH 3.504.557 [Quadrat-] Ruten,[220] *wobei für den Umfang* $3^{1}/_{7}$ *mal Durchmesser genommen wird, welche Art in kleinen Kreisen wenig Unterschied macht.*[221] *Aber in großen Kreisen und Figuren ist vonnöten, einen vollkommeneren Wert zu gebrauchen als oben. Das scheint, es sei denn bei den Brüchen, gar nicht schwer. Der Unterschied ist ganz klein, es gehört sich, in solchen Sachen keine Arbeit zu sparen, auch nicht ein bisschen. Vollkommene und wahre Antwort gibt jeder Liebhaber, wenn er gefragt wird, dass er annimmt, beim Lösen müssen die Landmesser ihre Ehre und Eide beim Messen und Rechnen berücksichtigen."*

Abb. 26: Ludolph van Ceulen

Van Ceulen erkennt zu Recht, dass sich aus Kreisbogen und zugehöriger Sehne alle restlichen Stücke der Figur berechnen lassen. Allerdings führt das auf die Gleichung $\sin\alpha = 0{,}014417\cdot\alpha$ für den äußeren größeren Abschnitt und auf $\sin\beta = 0{,}015680\cdot\beta$ für den inneren kleineren Abschnitt (α, β sind hier die halben Zentriwinkel). Beide Gleichungen sind elementar nicht lösbar sondern nur durch systematisches Probieren. Die Lösungen für α, β sind auch nicht exakt 45° bzw. 60°, sondern ungefähr $2\alpha = 120{,}2244° = 120°\ 13'\ 28''$ bzw. $2\beta = 90{,}72366° = 90°\ 43'\ 25''$. Deshalb sind auch van Ceulens Ansätze eines gleichseitigen Dreiecks bzw. Quadrates nicht exakt richtig. Entscheidend ist, was man als gegeben annimmt. Hierbei verfährt van Ceulen richtig, indem er Sehne und Bogen als gegeben voraussetzt und die Winkel seiner Sinustafel entnimmt. Van Ceulen fährt im Text fort:

„Nun folgt die Rechnung nach meiner Art und Weise,[222] *wodurch diese Frage so sicher gemacht werden kann, dass sicher kein Unterschied bis zum Quadratfuß ist. Zuerst multipliziere ich 20.000.000 mit* ***3,141592653****.*

Damit ergibt sich der Umfang eines Kreises mit 20.000.000 Teilen im Durchmesser zu 62.831.853 bis 62.831.854 Teilen.[223] *Hier suche ich wie oben* $^{1}/_{8}$ *von 62.831.853 zu* $7.853.981^{5}/_{8}$ [224] *durch den sinus von 45°. Ich finde 23.746 zu wenig,*[225] *und der Bogen von 46° hat einen 29.996 Teile zu großen Sinus.*[226] *Durch diese Differenz finde ich, dass der richtige Winkel zwischen 45° 26′ und 45° 27′ ist.*[227] *Hier sollte man finden, dass die Teile des Bogens von 45° 26′ durch den sinus desselben Winkels sich zu 111.303.055 gegen 100.000.000 ergeben,*[228] *und müsste sein 111.309.523.*[229] *Darum ist der Bogen zu klein und der Unterschied ist hier 6.468 Teile.*

Der sinus von 45° 27′ ist ebenso 7.126.385,[230] *und sein Bogen 7.932.521,4412,*[231] *das Verhältnis 100.000.000 gegen 111.311.996*[232] *ist 2473 Teile zu groß. Hierdurch finde ich, dass der Bogen HD 45° 26′* $43^{2}/_{5}''$ *groß ist,*[233] *die geben 7.931.716 Teile,*[234] *und der sinus* [dieses Winkels] *ist 7.125.820.*[235] *Nun kannst du wie vorn finden den halben Durchmesser* ***BH = 5304,6526575,***[236] *also für den ganzen Durchmesser 10.609,305315 Ruten, und für* ***BE 3721,684892****. Subtrahiert vom halben Durchmesser, bleibt für* ***HE 1582,967765****.* Dazu die Breite des Mondes zu 609, ergibt für **YE 2191,967765**. *Ebenso für den halben Durchmesser* ***GY 4355,24714*** *und für den ganzen Durchmesser des kleinen Kreises 8710,49428 Ruten. Nun ist noch gesucht der Bogen YD, der wird so gefunden: Multiplizier den gefundenen Durchmesser mit 3,141592653, so ergibt der Umfang des Kreises*

---

[220] GCYD - GCHD = 19.948.476 – 16.443.918 = 3.504.55**8** Quadratruten.

[221] „wenig gibt oder nimmt".

[222] Das ist keine andere Methode, es wird nur statt $3^{1}/_{7}$ für π der Wert 3,141592653 verwendet.

[223] Ziel ist der Wert für den Bogen(90°) : Sehne CD = 8415:7560 = 11.130.952:10.000.000.

[224] Es wird mit 7.853.981 Teilen für den 45°-Bogen gerechnet.

[225] b(45°) : sin45° = 7.853.981 : 7.071.068 = 11.107.206 zu 10.000.000 Teile. Das sind 23.746 Teile zu wenig gegenüber dem Zielwert 11.130.952.

[226] b(46°) : sin46° = 8.028.513:7.193.398 = 11.160.946 zu 10.000.000 Teile. Das sind 29.994 Teile zu viel gegenüber dem Zielwert 11.130.952.

[227] Durch Interpolation 23.746 : (23.746+29994) = 0,44187° = 26,51′ = 26′ 31″.

[228] Hier wird mit einer Stelle mehr gerechnet: Bogen 45° 26′ : sin(45° 26′) = 7.929.612,5 : 7124.344 = 111.303.055 zu 100.000.000 Teilen.

[229] Das ist der Zielwert b(90°) : Sehne CD = 8415 : 7560 = 111.309.523 zu 100.000.000, also um eine Stelle mehr gerechnet.

[230] Wie in van Ceulens Sinustafel auf fol. 39v angegeben.

[231] Hier wird der Bogen 45° mit dem genauer angegebenen Wert von $7.853.981^{5}/_{8}$ gerechnet, somit der Bogen 27′ zu 78.539,8162 Teile, also der Bogen 45° 27′ zu 7.932.521, 4412 Teile.

[232] Bogen(45° 27′) : sin(45° 27′) = 7.932.521,4412 : 7.126.385 = 111.311.996 zu 100.000.000
Das ist 2473 Teile zu groß gegenüber dem Zielwert 111.3111.996.

[233] Jeweils Bogen:sinus in Teilen: Zu 45° 26′folgt 111.303.055, zu 45° 27′folgt 111.311.996. Der letzte Wert ist um 2473 zu groß gegenüber dem Zielwert 111.309.523. Interpolation 2473:8941 = 0,2766′ zu groß = 16,6″= $16^{3}/_{5}''$. 45°27′- $16^{3}/_{5}''$ = 45° 26′ $43^{2}/_{5}''$.

[234] 45° 26′ $43^{2}/_{5}''$: 360° · 62.831.852 = 7.931.716 Teile.

[235] Laut Sinustafel auf fol. 39v: sin 45° 26′ = 7.124.344; sin 45° 27′ = 7.126.385. Interpoliert auf 43,4″ ergibt sich 43,4:60·2041 = 1476 Teile. Diese addiert zu 7.124.344 ergibt 7.125.820.

[236] $^{s}/_{2} : \sin(^{\alpha}/_{2}) = 3780 : 0{,}7125820 = 5304{,}6526575$ Ruten.

27.364,8248. Die 4355,24714 geben 10.000.000 Teile, für 3780 ergeben sich somit 8.679.186; das ist der Sinus des Bogens YD. Damit der Winkel ***60° 13′ 3,57″***.[237] *Das sind in* ***Ruten 4577,24908 für YD****, und für den ganzen Bogen* ***CYD 9.154,49816****. Noch YE von YG subtrahiert, bleibt* ***EG 2163,27938 Ruten****. Nun sind alle Linien bekannt, wodurch der Mond CYDH gefunden werden kann, wie hier unten:*

BD = 5304,652657	*der halbe Durchmesser des großen* [unteren] *Kreises = BH*
HD = 4207,5	*die Hälfte des Bogens CHD*
GD = 4355,24714	*der halbe Durchmesser des kleinen* [oberen] *Kreises = GY*
YD = 4577,24904	*die Hälfte des Bogens CYD* [hier letzte Ziffer 4 statt 8]
EB = 3721,684892	
EG = 2163,27938	
ED = 3780.	

Daraus findest du wie oben für das Feld oder den Mond 3.506.933 Quadratruten. Das ist 2376 Ruten mehr als nach dem Wert für $\pi = 3^1/_7$ gerechnet.

Van Ceulens Rechnungen sind natürlich richtig. Er lässt aber die Absicht von Ursus außer Acht, die Lösung mit elementaren euklidischen Mitteln ohne Sinustafel zu bearbeiten. Außerdem ist die Aufgabe bei Ursus überbestimmt in dem Sinne, dass allein aus Bogen und Sehne alle restlichen Stücke bestimmt werden könnten. Das zusätzliche Verwenden der zu erkennenden Zentriwinkel von 90° bzw. 120° macht die Aufgabe überbestimmt, ist aber nötig, um sie ohne Sinustafel bearbeiten zu können. Die Winkel sind, wie van Ceulen zeigt, auch nicht exakt 90° bzw. 120°. Zusätzlich gibt Ursus die Dicke des Möndchens an, was die Lösung nur wesentlich vereinfachen kann.

[237] Laut van Ceulens Sinustafel auf fol. 41v ist sin 60° 13′= 8.679.100 Teile, sin 60° 14′= 8.680.544 Teile, Unterschied 1444 Teile. Interpolation zu 8.679.186 Teilen ergibt 86:1444 = 0,059557′= 3,57″.

Von Ursus benutzte deutsche Bezeichnung	für
Wirkung	Rechenart, -operation
Zeichen	Ziffern
Statt, stette	(Dezimal-)Stelle
Stand, stende	(Dreier-)Block bei Dezimalzahlen
Unterscheid, der brüchen unterscheid	Bruchteil, Bruchstellenwert
Zeichen der unterscheide	Hochgestellte röm. Zahlen als Stellenwert
Schuh, schuch, fuß	Fuß
Creutzschuch	Quadratfuß
Vermehrung	Addition oder Multiplikation
Verminderung	Subtraktion oder Division
Summe, summieren	Summe, Addition
Vervielfachen	Multiplikation
Zweifältigen	Verdoppeln
Abziehen	Subtrahieren
Teilen	Dividieren
Gevierte Zahl	Quadratzahl
Zweimal in sich selbst gevielfältigte Zahl	Kubikzahl
Gevierte Wurzel	Quadratwurzel
Leibliche Wurzel	Kubikwurzel, dritte Wurzel
Gevierte Wurzel einer gevierten Wurzel	Vierte Wurzel
Leib	Körper
Ecken	Seiten, Strecken
Örter	Winkel (Winkelfelder), Eckpunkte
Seiten	Parallele Strecken
Enden	Nicht-parallele Strecken
Recht, rechteck	Gerade, gerade Linie
Winkel	Rechter Winkel
Schärfe	Nicht-rechter Winkel
Stumpfe	Stumpfer Winkel
Spitze	Spitzer Winkel
Rechte ecke, rechteck	Gerade Linie, Strecke
Krummeck	Nicht-gerade Linie
Winkelrecht	Rechteck, rechtwinklig
Überzwerg	Rechtwinklig
Rauteckig	Parallelogramm
Ungleichseitig	Trapez
Winkeleckt	Rechtwinkliges Dreieck
Ortgleiches Dreieck	Gleichwinkliges (gleichseitiges) Dreieck
Runde	Kreis
Teil der runde	Kreissektor
Umkreis	Kreislinie, Peripherie
Durchmaß	Durchmesser
Sehne	Sehne
Bogen	Kreisabschnitt
Bogenlinie	Kreisbogen
Boltz	Höhe des Kreisabschnitts
Heldung	Höhe einer Kugelkappe
Leib	Körper
Sechseck	Sechsflächner, Würfel
Zwölfeck	Zwölfflächner, Dodekaeder
Achteck	Achtflächner, Oktaeder
Zwanzigeck	Zwanzigflächner, Ikosaeder
Sechseckte fläche	Regelmäßiges Sechseck
Gleicheckte fläche	Gleichseitige regelmäßige Fläche
Kugelechter Leib	Kugel
Zirkeltrumb	Kugelsegment, -kappe

Zweites Buch:

Nicolaus Reimers Ursus

Tractatiuncula
von der allerkunstreichesten und sinnreichesten Regel Cossa oder Algebra

Prag 1597

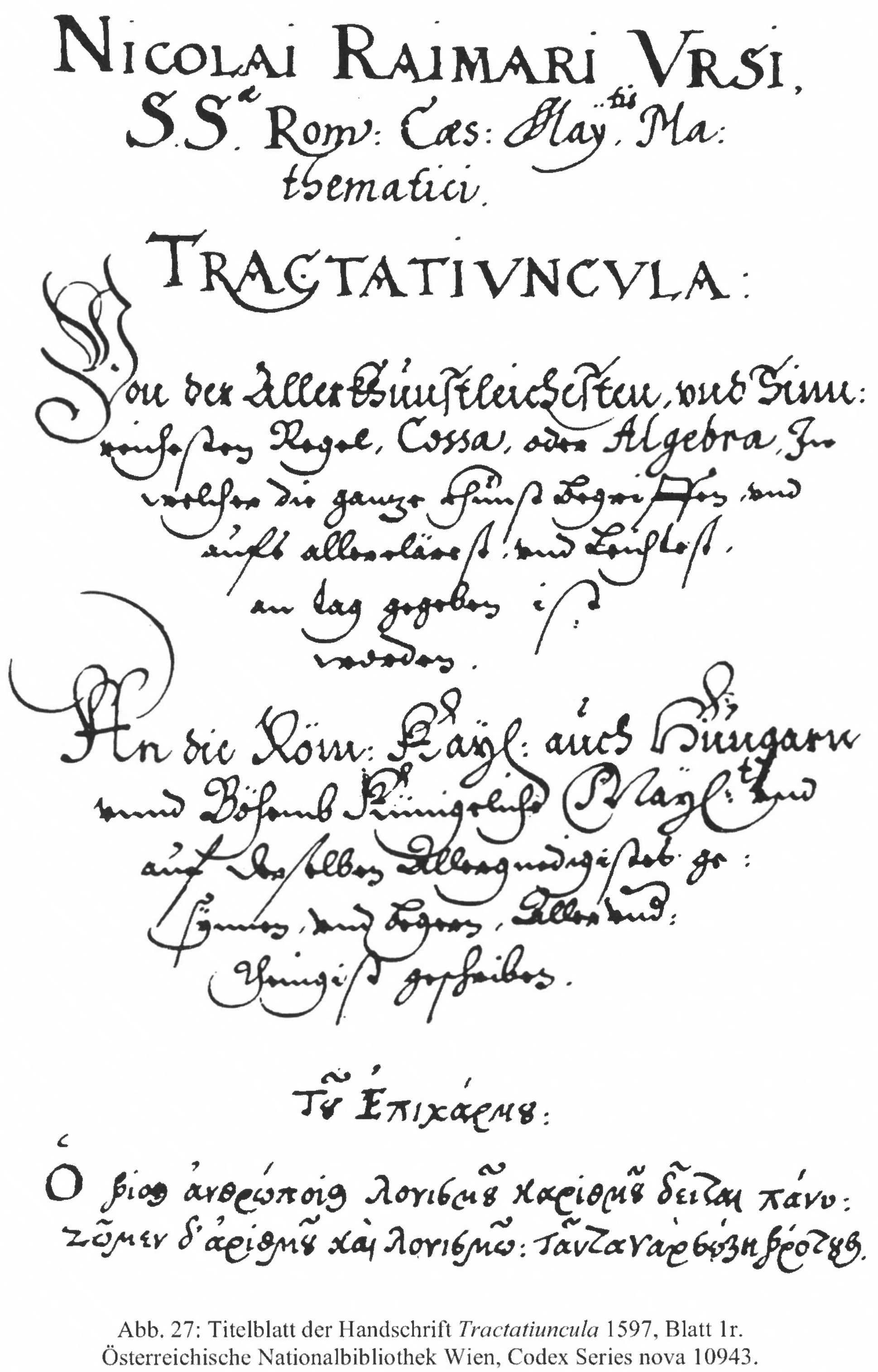
UND

Arithmetica Analytica

vulgo Cosa oder Algebra

Frankfurt an der Oder 1601

Teil 1: Tractatiuncula



NICOLAI RAIMARI VRSI, S.S.ae Rom: Caes: May.tis Mathematici.

TRACTATIVNCVLA:

Von der Allerkünstlichesten, und Sinnreichesten Regel, Cossa, oder Algebra, In welcher die gantze Kunst begriffen, und aufs allerklärest, und leichtest, an tag gegeben ist worden.

An die Röm: Kays: auch Hungarn und Böheimb Königliche Mayt: und auf derselben Allergnedigisten be: fehlen, und begeren, Aller und: Unnigist geschriben.

Τοῦ Ἐπιχάρμου:

Ὁ βίος ἀνθρώποις λογισμοῦ καὶ ἀριθμοῦ δεῖται πάνυ: ζῶμεν δ' ἀριθμῷ καὶ λογισμῷ: ταῦτα γὰρ σώζει βροτούς.

Abb. 27: Titelblatt der Handschrift *Tractatiuncula* 1597, Blatt 1r.
Österreichische Nationalbibliothek Wien, Codex Series nova 10943.

TRACTATIUNCULA 1597

Einleitung

Mit Datum vom 16. Oktober 1597 (siehe Abb. 30) übergab Nicolaus Reimers (Raimarus) Ursus dem Kaiser Rudolph II. ein Manuskript in schöner Handschrift, eine Abhandlung über die Coss, über die Algebra also. Die Handschrift ist in der Österreichischen Nationalbibliothek Wien unter Cod. Series nova 10943 erhalten und gebunden. Die Vorblätter Ir,v, IIr,v und IIIr,v sind leer, auch ohne Textspiegel. Der Text beginnt auf Vorblatt IVr = Blatt 1r. Die Blätter im Papierformat 20 cm x 30 cm sind nummeriert 1r, 1v, 2r, 2v, 3r ... und enthalten einen (von Ursus) mit Bleistift als Rechteck gezeichneten Textspiegel mit den Maßen 13 cm x 21,5 cm. Die Handschrift enthält nach der Widmung an den Kaiser (Blatt 2r–5v) auf je einer Seite ein kurzes Zitat aus Hieronymus Cardanus, mit Nennungen von Scipio Ferreus und Nicolaus Tartaglia (Blatt 6r), und aus Michael Stifel (Blatt 6v). Die Blätter 7r,v sind leer. Dann folgen die 7 Kapitel (Blatt 8r-31r) zur Coss bzw. Algebra. Am Ende sind die Blätter 31v und 32r,v leer, aber mit gezeichnetem Textspiegel, und die Blätter 33r-35v sind leer ohne Textspiegel. Der alte Einband steckt in einer modernen Schutzhülle, deren Vorder- und Rückseite unbeschriftet sind.

Die Handschrift *Tractatiuncula* selbst ist nur der erste Teil von Ursus' Algebradarstellung, der letzte Satz „Finis partis Algebrae prioris" deutet auf eine Fortsetzung hin, auf einen zweiten Teil, der dann auch in der als *Arithmetica Analytica* 1601 gedruckten Fassung vorliegt, „Von der Aequation", also eine Gleichungslehre. Widmung und Kapitel 1 der *Tractatiuncula* (Blatt 8r-11v), das eine Darstellung der Geschichte der Coss bringt, sind nicht in der *Arithmetica Analytica* abgedruckt, also nur in der Handschrift erhalten.

Ich möchte den ausgesprochen hilfsbereiten Mitarbeitern der Österreichischen Nationalbibliothek, der Wiener Universitätsbibliothek und der verschiedenen Archive danken, und Herrn Friedrich Katscher in Wien, der mich an die verschiedenen Orte der Bibliotheken und Archive führte und dabei noch einen Überblick über die Geschichte Wiens lieferte.

Kursiv gedruckt ist der Ursus'sche Text, in heutiges Deutsch übertragen. Das Titelblatt lautet:

„NICOLAUS RAIMARUS URSUS,
Mathematiker der hochheiligen römischen kaiserlichen Majestät.
Tractatiuncula
von der allerkunstreichesten und sinnreichesten Regel Cossa oder Algebra, in welcher die ganze Kunst gefasst und auf das allerklarste und leichteste an den Tag gebracht worden ist.
An die Römische Kaiserliche, auch Ungarische und Böhmische Königliche Majestät,
und auf derselben allergnädigstes Gesinnen und Begehren
alleruntertänigst geschrieben.
Von Epicharm:
Das Leben braucht für die Menschen durchaus Berechnung und Zahl.
Wir leben von Zahl und Berechnung, denn dieses erhält die Sterblichen."[1]

Auf Blatt 1v folgen zwei lateinische Epigramme von Ursus, das erste auf die Algebra selbst, das zweite auf seinen Dienstherrn, Kaiser Rudolph II. Die Anfangsbuchstaben des ersten Epigramms ergeben im lateinischen Original das Wort ALGEBRA, die Anfangs- und Endbuchstaben des zweiten Epigramms ergeben die Worte RUDOLPHUS SECUNDUS. Hier eine deutsche Übersetzung:

„Ein Epigramm des Autors auf die göttliche Kunst Algebra:
Von Jupiter und vom Gehirn Jupiters und Platos der Ursprung.
Die Regel der Algebra steigt in die göttlichen Lüfte des Lichts.
Kostbarer als die Erde, ein Schatz und jeder Wert.
Entstanden aus dem verborgenen Inneren Jupiters und der Götter.
Reize, Ambrosia und Nektar und Liebestrank der Götter.
Die Regel des Arabers Geber, nach dem die Algebra benannt wird,
Auch Almucabala[2] *wie eine große Weisheit.*[3]

---

[1] Georg Kaibel, *Comicorum Graecorum Fragmenta, Epicharms* [um 480 v.Chr.] *Dramen*, Berlin 1899, Fragment Nr. 255 aus dem Drama „Der Staat des Chrysogonos des Guten": Τοῦ Ἐπιχάρμου: Ὁ βίος ἀνθρώποις λογισμοῦ κἀριθμοῦ δεῖται πάνυ. Ζῶμεν δ΄ἀριθμῶι καὶ λογισμῶι ταῦτα γὰρ σώιζει βροτούς.

[2] Die Worte Algebra und Almucabala sind aus einem Teil des arabischen Buchtitels von al-Ḫwārizmīs Gleichungslehre „al-ǧabr wa-l-muqābala" entstanden. Siehe Wolfgang Kaunzner, *Zusammenhänge zwischen mathematischen Texten*, in: Menso Folkerts (Hrsg.), Mathematische Probleme im Mittelalter, Wiesbaden 1996, S. 435.

[3] Epigramma autoris in divinam artem Algebra:
A Iove principium Jovis e cerebro atque Platonis Luminis in dias Algebrae Regula it auras.

Ein anderes Epigramm zum Lob des Kaisers:
König der Könige, Herr der Herren und Gebieter des Erdkreises,
Gebrauche, göttlicher Rudolph der Zweite, die göttlichen,
ich wiederhole, gebrauche die göttlichen Geschenke zweimal, bis
ich einm al noch weitere, dir zu wissen sehr angenehme hinzugefügt haben werde.
Und damit dein Ruhm und dein unzerstörbarer Name bleibt,
will ich deswegen schreiben, wenn ich etwas schreiben könnte.
Gebrauche diese göttlichen, schon lange erfundenen [Erkenntnisse] *Platos,*
die sehr angenehm zu wissen sind, göttlicher Rudolph.
Mögest du ein stabiles, dauerhaftes und einträchtiges Reich haben![4]

Das Widmungsschreiben an Rudolph II.

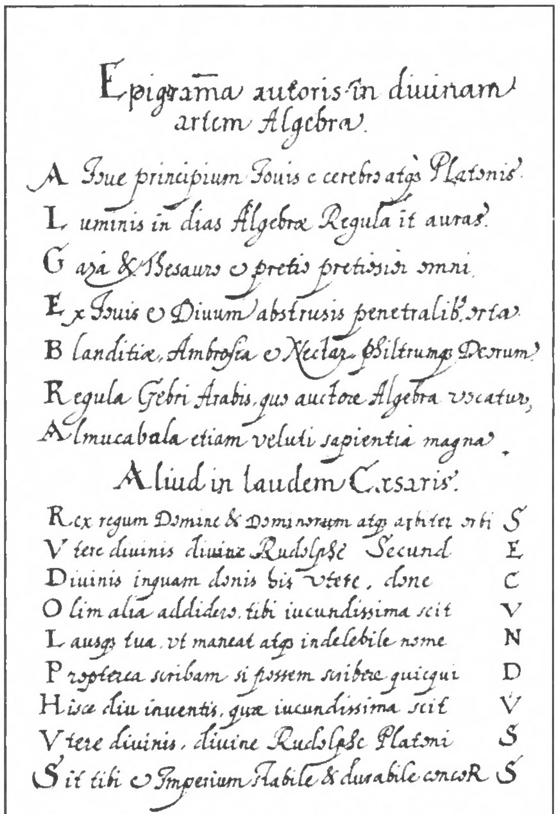

Epigrama autoris in diuinam artem Algebrae.
A Oue principium Jouis e cerebro atq Platonis.
L uminis in dias Algebrae Regula it auras.
G aja & Thesauro & pretio pretiosior omni,
E x Jouis & Diuum abstrusis penetralib. orta.
B landitiae, Ambrosia & Nectar philtrumq Deorum.
R egula Gebri Arabis, quo auctore Algebra vocatur,
A lmucabala etiam veluti sapientia magna.
Aliud in laudem Caesaris.
R ex regum Domine & Dominorum atq arbiter orbi S
V tere diuinis diuine Rudolphe Secund E
D iuinis inquam donis bis utere, done C
O lim alia addidero, tibi iucundissima scit V
L ausq tua, vt maneat atq indelebile nome N
P roptera scribam si possem scribere quicqui D
H isce diu inuentis, quae iucundissima scit V
V tere diuinis, diuine Rudolphe Platoni S
S it tibi & Imperium stabile & durabile concoR S

Abb. 28: Handschrift *Tractatiuncula* Blatt 1v: Epigramme.

Im nun folgenden Widmungsschreiben an Rudolph II., der wohl mehr an den schönen Künsten und an der Astrologie interessiert war, versucht Ursus das Interesse des Kaisers für die Mathematik zu gewinnen, indem er einen trickreichen, dem Kaiser schmeichelnden Vergleich mit Plato heranzieht. Plato, der eigentliche Erfinder der ganzen Mathematik und aller freien Künste, sei in seiner Jugend zuerst ein guter Poet gewesen, später aber habe die jugendliche Begeisterung für die Dichtkunst aufgehört und er habe diese nicht mehr betrieben, nachdem er sich der Logik und der Mathematik zugewandt hatte. Und ähnliches sei auch beim Kaiser mit seinem hohen Verstand zu erwarten; denn da er sich vorher mit den „mechanischen Künsten" wie Malen, Schnitzen, Theaterspiel und Instrumentenbau zum Höchsten ergötzt habe, bestehe kein Zweifel, dass er sich wie Plato auch zu den höheren Künsten, insbesondere zur Mathematik, aufschwingen werde. Denn nur Schuster blieben bei ihren Leisten.

Ob der Kaiser die Handschrift daraufhin gelesen hat, bleibt dahingestellt. Es gibt jedoch zwei Textstellen, die gerade dies erwarten lassen. Zum einen heißt es auf dem Titelblatt, dass das Werk auf des Kaisers „Gesinnen und Begehren geschrieben" worden sei, zum anderen sagt Ursus im Widmungsschreiben, dass der kaiserliche Vizekanzler und geheime Rat Rudolph Coraducius, der Nachfolger seines Förderers Jacob Curtius, ihm im Namen des Kaisers das Anfertigen dieser Arbeit befohlen habe. Bei einem solchen Interesse an diesem Werk wird es der Kaiser wohl auch zur Kenntnis genommen haben.

Der Druck der *Tractatiuncula,* die dann um einen zweiten Teil vermehrt, jedoch ohne Widmung und ohne das Kapitel 1 über die Geschichte der Coss, *Arithmetica Analytica* genannt wurde, erfolgte

---

Gaja et Thesauro, et pretio pretiosior omni,
Ex Iovis et Divum abstrusis penetralibus orta,
Blanditiae, Ambrosia et Nectar philtrumque Deorum.
Regula Gebri Arabis, quo auctore Algebra vocatur,
Almucabala etiam veluti sapientia magna.

[4] Aliud in laudem Caesaris:

Rex regum Domine et Dominorum atque arbiter orbi	S
Utere divinis divine Rudolphe Secund	E
Divinis, inquam donis bis utere, done	C
Olim alia addidero, tibi iucundissima scit	U
Lausque tua, ut maneat atque indelebile nome	N
Propterea scribam si possem scribere quicqui	D
Hisce diu inventis, quae iucundissima scit	U
Utere divinis, divine Rudolphe Platoni	S
Sit tibi et Imperium stabile et durabile conco	RS

Das letzte RS steht erneut für Rudolphus Secundus.
Ich danke Herrn Gerhard Weng (†) für die Übersetzung aus dem Lateinischen.

erst posthum 1601 in Frankfurt/Oder bei Johann Hartmann. Aber bereits im März 1599 erhält Ursus für die Widmung seines *Chronotheatron* 1597 an den Kaiser und für den Druck der Algebra 100 Taler. In den Hoffinanzindizes[5] heißt es: „Nicolai Raimari Ursi Mathematici suppliciren [bitten] umb verordnung einhundert Thaler wegen dero dedication ihro Majestät seines Chronotheatri, so woll für edition Algebrae, ligt da expedirt. 31. Martius 1599." Dieser Eintrag und die Zahlung bedeuten auch, dass Ursus am Hofe und bei Rudolph II. noch im Frühjahr 1599 in Ansehen stand, trotz seines Streites mit Tycho Brahe und trotz des Druckes seiner *Hypothesibus Astronomicis* 1597, die er ja ohne Druckprivileg und ohne Druckerlaubnis herausgebracht hatte.[6] Diese Hoffinanzindizes enthalten noch ein weiteres interessantes Detail, nämlich den Namen von Ursus' Ehefrau. List/Bialas[7] haben zwar den Sachverhalt genannt, dass „der Witwe von Ursus für die weggenommenen Bücher 300 fl" gezahlt werden sollen, nennen aber nicht den Namen „Ursula", was ich hier nachhole.[8] Das Widmungsschreiben an den Kaiser, in heutiges Deutsch übertragen, lautet nun wie folgt:

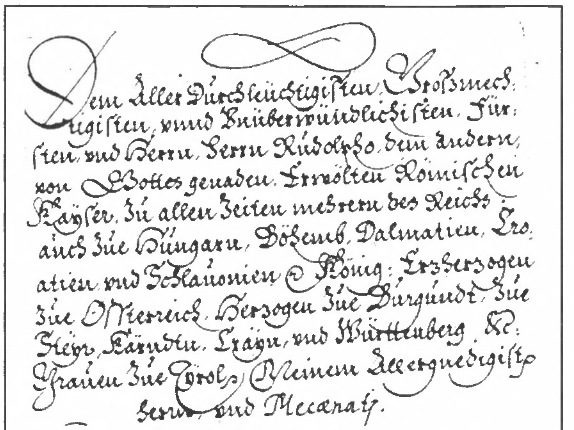

Dem Aller Durchleuchtigisten, Großmech-
tigisten, vnnd Vnüberwündlichisten, Für-
sten, vnd Herrn, Herrn Rudolpho, dem andern,
von Gottes genaden Erwölten Römischen
Kayser, zu allen Zeiten mehrern des Reichs,
auch zu Hungarn, Böheimb, Dalmatien, Cro-
atien vnd Sclavonien König, Erzherzogen
zu Össterreich, Herzogen zu Burgundt, zu
Steyr, Kärndten, Crayn, vnd Württenberg, &c.
Grauen zu Tyrol, Meinem Allergnedigisten
Herrn vnd Mecenati.

Abb. 29: Handschrift *Tractatiuncula* 1597, Blatt 2r: Beginn der Widmung.

„Dem allerdurchlauchtesten großmächtigsten und unüberwindlichsten Fürsten und Herrn, Herrn Rudolph II., von Gottes Gnaden erwählten römischen Kaiser, zu allen Zeiten Mehrer des Reiches, auch zu Ungarn, Böhmen, Dalmatien, Kroatien und Slavonien König, Erzherzog zu Österreich, Herzog zu Burgund, zu Steier, Kärnten, Krain und Württemberg etc., Graf zu Tirol, meinem allergnädigsten Herrn und Mäzen.

Allerdurchlauchtester großmächtigster und unüberwindlichster römischer Kaiser und König, allergnädigster Herr und Mäzen. Nachdem der göttliche und hocherlauchte Philosoph Plato, der erste Erfinder nachfolgender allersinnreichsten und geschwindesten Kunst der ganzen Mathematik und aller freien Künste, in seiner Jugend ein vortrefflicher Poet gewesen und beispielhaft gute Gedichte oder Verse geschrieben hatte, konnte er danach, als er sich zu viel höherer philosophischer Kunst begeben hatte, nämlich zur Logik und Mathematik, keinen guten Vers mehr schreiben und machen, weil er zu solch niederen und im Vergleich zu diesen anderen viel geringeren Studien keine besondere Lust mehr hatte, und dadurch die poetische Ader und die jugendliche Begeisterung für die Dichtkunst, ich sage nicht Verzückung, ganz aufgehört hatte, erloschen und abgegangen war. Gleiches, allergnädigster Herr und Mäzen, ist von Euer kaiserlichen und königlichen Majestät und Eurem hochsinnreichen und in allen vornehmsten Künsten geschulten hohen Verstand zu erwarten. Denn weil derselbe sich in den vornehmsten mechanischen Künsten wie Malen, Bildschnitzen, Theaterspielen, Instrument- und Uhrmachen aufs Höchste erfreut, ergötzt und belustigt, besteht kein Zweifel daran, wenn derselbe einen besonders vortrefflichen Diskurs der höheren sinnreichen freien Künste, die die mechanischen weit übertreffen, erlangen möchte, dass derselbe nicht weniger als Plato sein hochsinnreiches und vortreffliches Gemüt und seinen hochadeligen Verstand von den genannten mechanischen Künstlein zu den philosophischen und besonders mathematischen Künsten erheben und aufschwingen würde. Und schließlich ende ich mit dem Poeten Horaz:
Handwerker sollen sich mit Handarbeiten beschäftigen.[9]

Denn ebensosehr wie das göttliche und ewig währende menschliche Gemüt den mottenzerfressenen und wurmstichigen Leichnam übersteigt und übertrifft, ebensoweit übertreffen und übersteigen auch die freien Künste die mechanischen, was diejenigen wissen und empfinden, welche sich in beiden geübt und befleißigt haben. Nun ist aber unter allen freien philosophischen Künsten keine sicherere und anmutigere Wissenschaft als die Mathematik, das ist die Arithmetik und

---

[5] Haus-, Hof- und Staatsarchiv Wien, Hoffinanzindizes, Gedenkbuch 1599 (Bd. 522), Blatt 112v/113r. Ich darf den Mitarbeitern des Archivs meinen ganz besonderen Dank aussprechen.

[6] Siehe dazu: Jardine/Launert/Segonds/Mosley/Tybjerg, *Tycho versus Ursus*, in: Journal for the History of Astronomy, Cambridge, XXXVI 2005, S. 92-95.

[7] *Die Coss von Jost Bürgi*, in: Nova Kepleriana, Neue Folge Heft 5, München 1973, S. 108f.

[8] Hoffinanzindizes, Gedenkbuch 1600 (Bd. 531), Blatt 275v für Okt. 1600: „Ursula, Niclas Ursy wittiben supplizieren sambt Hansten Haydens, kayserlichen Cammerdieners bericht per Bezahlung des Ursi hinterlassenen Bücher ist dem Herrn Hoffzalmeister zuegestält, der soll des Ursi wittib wegen der Bücher, so Ir Majestät nehmen lassen, dreyhundert Gulden Rheinisch aus dem jezigen Galli Termins Pier gefellen in abschlag des Cammerdeputats bezallen. Ex. Cam. Aulica 20. Oktober. P."

[9] Horaz, epist. II,1, 114ff: „Tractant fabrilia fabri". Ursus schreibt „Tractent fabrilia fabri" = Schuster, bleib bei deinen Leisten. Die *Emblemata* von Henkel/Schöne, Stuttgart 1996, bringen in Spalte 1078/79 diesen Spruch mit einem Emblem mit dem Subskript: „Die Dichtung ist unser Werk; wir betreiben es wie die Handwerker das ihre. Jeder verwendet seine Zeit auf seine erlernte Kunst."

die Geometrie, oder die Rechen- und die Messkunst. (Ich will hier nicht die mechanische und instrumentische Mathematik oder Messkunst, die ganz unsicher, läppisch und handwerklich ist, meinen.) Diese ist der ganzen Mathematik Mark und Kern, die allersinnreichste und schnellste Regel Coss oder Algebra, nach ihrem Bearbeiter, dem Araber Geber, genannt. In einem einzigen Beispiel dieser hochsinnreichen Regel ist mehr Lust und Ergötzung als in allen mechanischen Künsten oder in allen Karten-, Würfel-, Schach- oder Brettspielen.

Denn wahrlich, wer jenes versteht, wird dieses alles am wenigsten achten. Es ist wohl auch eine große Lust und Kurzweil in dem «Fundamentum Astronomicum, doctrina sinuum et triangulorum»[10] *zu finden. Aber die Algebra übertrifft dies bei weitem. Und es gibt in summa in der Welt keine so geschwinde, gründliche und sinnvolle Kunst der Wissenschaft wie die Algebra zu finden. Weil Eure kaiserliche und königliche Majestät durch den wohlgeborenen und hochgelehrten Herrn Rudolph Coraducius*[11]*, den derzeitigen Vizekanzler des Römischen Imperiums, meinem gnädigen Herrn und vornehmen Mäzen, allergnädigst mir befohlen haben, diese allerkunstreichste und fast den menschlichen Verstand übertreffende und überschreitende Regel* [Coss, Algebra] *zu beschreiben, zu umreißen und zu entwerfen, habe ich dieses begierig und mit höchster Freude empfangene kaiserliche Mandat nicht nur alleruntertänigst ausführen, verfolgen, dem Mandate nachkommen und ihm mit meinem kleinen und schwachen Vermögen Folge tun wollen. Sondern ich habe mich auch von Herzen darüber gefreut, dass Eure kaiserliche und königliche Majestät einen solchen kaiserlichen und mir höchst erwünschten Auftrag gnädigst an mich gelangen ließ. Ich habe auch aus einem solchen gänzlich philosophischen und für mich erwünschten Auftrag ein solches Hoffen und Vertrauen geschöpft, dass soweit Eure kaiserliche und königliche Majestät hochverständige und sinnreiche und in solchen Künsten erfahrene Leute um sich haben möge, für dieselbige* [d.i. die k. u. k. Majestät] *mit ihrem auch in anderen Künsten hohen Verstand ein vortreffliches Ergebnis herauskommen möchte.*

Auf welche Weise und durch welche Mittel diese hohe Kunst Algebra zu ihrer endgültigen Vollkommenheit kommen und fortgesetzt werden könne, wird in dem folgenden ersten Kapitel gleichsam durch ein Schaufenster gezeigt. Ich bitte Euere kaiserliche und königliche Majestät alleruntertänigst, sich dieser nicht geringen Sache, an der der ganzen gelehrten Welt viel gelegen ist, anzunehmen und sie sich angelegen sein lassen zu wollen. Mit der alleruntertänigsten Befolgung [des Auftrages] *unter Göttlicher Allmacht wünsche ich allergnädigsten Schutz zu langer glückseliger Regierung und Nutzen der hochgeängstigten und betrübten Christenheit. Gegeben in Euer kaiserlichen und königlichen Majestät Hof zu Prag in Böhmen, den 16. Oktober Anno Christi 1597.*

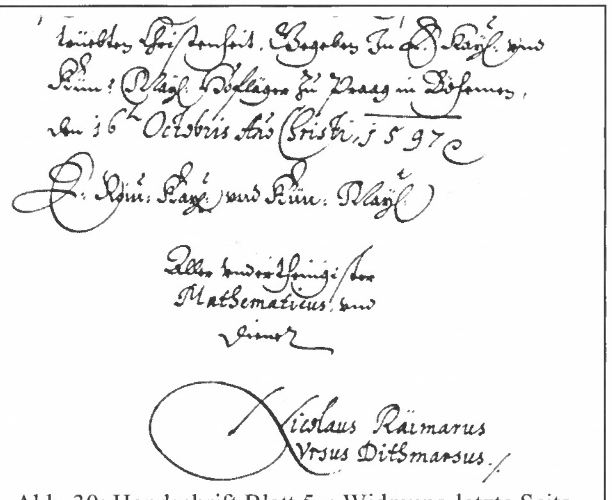


Abb. 30: Handschrift Blatt 5v: Widmung letzte Seite, mit der eigenhändigen Unterschrift von Ursus.

Euer Römischen Kaiserlichen und Königlichen Majestät alleruntertänigster Mathematiker und Diener Nicolaus Raimarus Ursus Dithmarsus.“

Die folgenden Blätter 6r und 6v nennen mit Cardanus und Stifel nicht nur zwei Mathematiker, die sich um die Entwicklung der Coss verdient gemacht haben, sondern auch Vorbilder, aus denen Ursus schöpfte. Der erste Beitrag über Cardanus ist auf Latein geschrieben. Ursus zitiert Cardanus: Dieser habe über die Lösung der kubischen Gleichung $ax^3+bx=c$ durch Ferreus berichtet und auch, dass Tartaglia dieselbe Lösung gefunden habe, als er sich auf einen Wettstreit mit Floridus eingelassen hatte; und schließlich, dass Cardanus die Lösung nach vielen Bitten von Tartaglia genannt bekam. Die kubische Gleichung $ax^3+bx=c$ wird im Text wie bei Cardanus mit Worten beschrieben als „Capitulum cubi et rerum numero aequalium“.[12] Dabei steht „cubus“ für x^3 oder $a{\cdot}x^3$; „res“ steht für die Unbekannte, die Variable, also für x oder b·x; „numero“ steht für die Konstante c; „+“ und „=“ werden als Worte „et“ und „aequales“ geschrieben. Die „Lösung“ eines Gleichungstyps, die Regel zur Lösung desselben oder einfach den Gleichungstyp bezeichneten die italienischen Mathematiker

---

[10] Ursus zitiert hier den Titel seines 1588 in Straßburg erschienenen Buches.

[11] Ursus schreibt „Careducius“. Der Vizekanzler war (seit 1519/1559) ständiger und tatsächlicher Leiter der Reichshofkanzlei, vom Kaiser ernannt.

[12] Bzw.: „De cubo et rebus aequalibus numero“. Kästner, *Geschichte der Mathematik* Bd.I, Göttingen 1796, S. 156.

des 15./16. Jh. als „capitulum“.[13] Der Text, den Ursus aus Cardanus zitiert, ist teilweise auch von Michael Stifel in *Die Coß Christoffs Rudolffs* 1553 abgedruckt, dort heißt es auf fol. 482r allerdings nur: „Invenit Scipio Ferreus rem sane pulchram et admirabilem superantem omnem humanam subtilitatem, omnisque ingenii mortalis claritatem. Donum profecto est hoc coeleste et experimentum virtutis animorum, atque adeo illustre ut qui hec attigerit, nihil non intelligere posse se credat.“

Der Text zu Cardano lautet bei Ursus in deutscher Übersetzung:

„Der Italiener Hieronymus Cardanus,[14] *höchster Philosoph, hat über die kubische Algebra oder die kubische Coss folgenden Text hinterlassen:*

In unserer Zeit hat Scipio Ferreus[15] *aus Bologna mit der Lösung der kubischen Gleichung* $ax^3+bx=c$ *etwas wirklich Vortreffliches und Bewundernswertes gefunden, weil diese Wissenschaft allen menschlichen Scharfsinn und die Klarheit jedes sterblichen Geistes übertrifft, sicherlich ein Geschenk, aber ein himmlischer Beweis der geistigen Fähigkeit, und so einleuchtend, dass, wer sich damit befasst, glaubt, er könne alles begreifen. Im Wetteifer mit ihm* [also mit Scipio Ferreus] *hat unser Freund Nicolaus Tartaglia*[16] *aus Brescia, als er sich in einen Wettstreit mit dessen Schüler Antonius Maria Floridus*[17] *eingelassen hatte, dieselbe Lösung gefunden, um nicht übertroffen zu werden. Eben dieses hat er mir* [dem Cardano also], *durch viele Bitten erweicht, übergeben. Und an die Stelle der Worte des Cardanus hat Michael Stifel Folgendes gesetzt:“*[18]

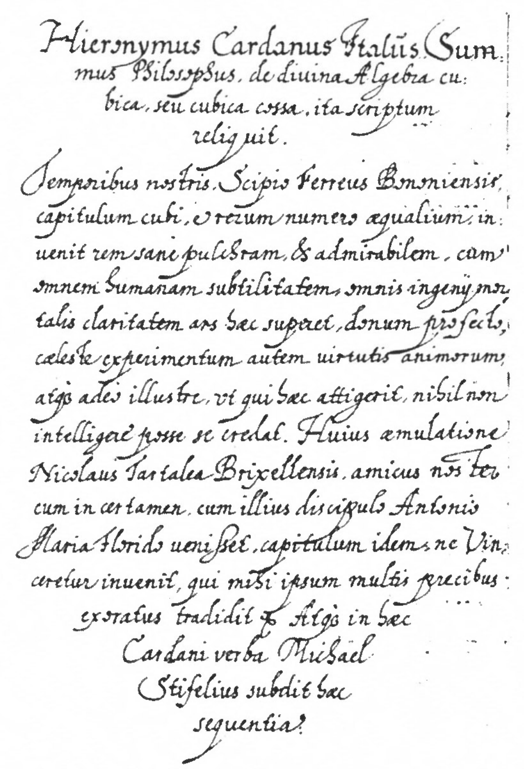

Hieronymus Cardanus Italus Sum-
mus Philosophus, de diuina Algebra cu-
bica, seu cubica cossa, ita scriptum
reliquit.
Temporibus nostris Scipio Ferreus Bononiensis
capitulum cubi, et rerum numero aequalium in-
uenit rem sane pulchram, & admirabilem, cum
omnem humanam subtilitatem, omnis ingenij mor-
talis claritatem ars haec superet, donum profecto,
caeleste experimentum autem uirtutis animorum,
atque adeo illustre, ut qui haec attigerit, nihil non
intelligere posse se credat. Huius aemulatione
Nicolaus Tartalea Brixellensis, amicus noster
cum in certamen cum illius discipulo Antonio
Maria Florido uenisset, capitulum idem, ne Vin-
ceretur inuenit, qui mihi ipsum multis precibus
exoratus tradidit. Atque in haec
Cardani verba Michael
Stifelius subdit haec
sequentia:

Abb. 31: Handschrift *Tractatiuncula,* Blatt 6r. Zitat aus Cardanos *Ars Magna* 1545.

Den Text über Stifel auf Blatt 6v zitiert Ursus aus Stifels *Die Coß Christoffs Rudolffs* 1553. Er deutet den Sachverhalt an, dass man nun nicht mehr nur nach der Lösung quadratischer und kubischer Gleichungen sucht, sondern dass auch Gleichungen vierten, fünften und noch höheren Grades behandelt werden. Allerdings werde der Umfang immer größer. Der Text bei Ursus, aus Stifel zitiert, lautet:[19]

---

[13] Siehe Friedrich Katscher, *Die kubischen Gleichungen bei Nicolo Tartaglia*, Wien 2001, S. 8f.

[14] Girolamo (Hieronymus, Geronimo) Cardano, 1501-1576. Hauptwerk *Ars magna*, Nürnberg 1545. Siehe H. Gericke, *Mathematik in Antike Orient und Abendland*, Wiesbaden 8. Aufl. 2004, 2. Teil S. 228-236.

[15] Scipio del Ferro, 1465-1526, lehrte von 1496 bis 1526 an der Universität Bologna. Cardano berichtet hierüber in seiner *Ars magna* von 1545 in Kapitel XI „De cubo et rebus aequalibus numero“, Blatt 29v = H1v. Siehe Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. II, Leipzig 1892. S. 443 und Helmuth Gericke.

[16] Nicolo Tartaglia (Fontana), 1500-1557.

[17] Antoniomaria Fior.

[18] Ursus' lateinischer Text lautet: „Hieronymus Cardanus Italus, Summus Philosophus, de divina Algebra cubica seu cubica cossa, ita scriptum reliquit. *Temporibus nostris Scipio Ferreus Bononiensis capitulum cubi et rerum numero aequalium invenit, rem sane pulchram et admirabilem, cum omnem humanam subtilitatem, omnis ingenii mortalis claritatem, ars haec superet donum profecto, caeleste experimentum autem virtutis animorum atque adeo illustre ut qui haec attigerit nihil non intellegere posse se credat. Huius aemulatione Nicolaus Tartalea Brixellensis, amicus noster, cum in certamen cum illius discipulo Antonio Maria Florido venisset, capitulum idem ne vinceretur invenit, qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit.* Atque in haec Cardani verba Michael Stifelius subdit haec sequentia:“. Der kursive Teil ist auf Blatt A3r aus Cardanos 1. Kapitel der *Ars Magna* zitiert, in dem Cardano eine Geschichte der Algebra beschreibt.

[19] Folio 482 r,v im II. Teil. Dort heißt es nämlich: „Dise wort Cardani neme ich also ahn, das sie nicht schlechtlich von diser sach alleyn gsagt seyen, sondern es sey von ihm bedacht, wie dise sach sey ein anfang der Cubiccoß, welche darnach weyter weise auff andere nachvolgende Coßen, die kein sterblicher Mensch nimmer mehr kan ergreyffen. Denn gleych wie die Binomia quadrata zurlegt werden in 4 teyl und die Cubica in 8 teyl, also werden die Binomia zenzizensica zurlegt in 16 teyl und die sursolida in 32 teyl, und so furt ahn nach der progreß dupla, wie ichs leychtlich weyß zu zeygen und zu beweysen, ohn das ich auff diß mal nicht raum haben kan sollichs hie zu handeln. Hieraufs ist auch zu mercken, wie so gar weytleuffrig sey ein yede Coß gegen yhrer vorgehnden Coß in allerley stucken, so in den Cossen gehandelt werden.“

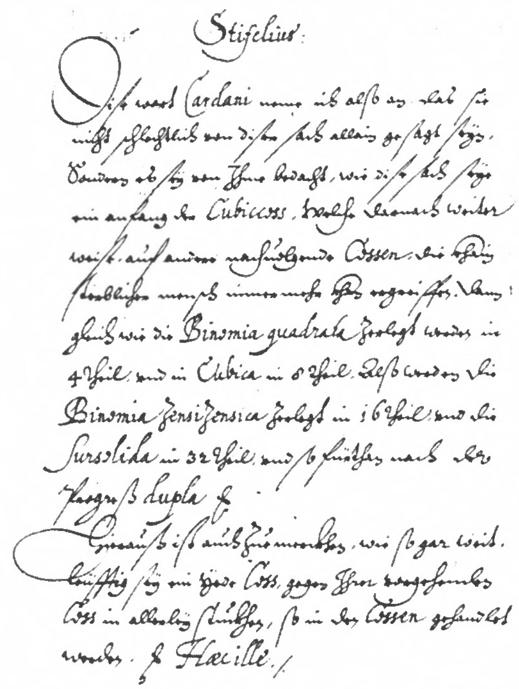

Stifelius:

Abb. 32: Handschrift Blatt 6v: Zitat aus Stifel.

„Ich nehme also an, dass diese Worte des Cardanus nicht allein von dieser Sache handeln, sondern er hat bedacht, dass die Cubiccoss nur ein Anfang sei, der danach weiterweist auf andere nachfolgende Cossen, die kein sterblicher Mensch mehr begreifen kann. Denn gleich wie die Binomia Quadrata[20] *in vier Teile zerlegt werden und die Cubica*[21] *in acht, so werden die Binomia Zensizensica*[22] *zerlegt in 16 Teile und die Sursolida*[23] *in 32 Teile, und so fort nach der Folge der Zweierpotenzen.*[24] *Hieraus ist auch zu ersehen, um wieviel umfangreicher eine jede Coss gegenüber ihrer vorhergehenden in allen Stücken sei, die in den Cossen behandelt werden. Haec ille.“*

Zu dem Streit zwischen Cardano und Tartaglia kann man viele Darstellungen zitieren. Ich nenne Moritz Cantor in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* Band II, Kästners vierbändige *Geschichte der Mathematik*, Friedrich Katschers *Kubische Gleichungen bei Nicolo Tartaglia* 2001, Folkerts/Wußing u.a. in *4000 Jahre Algebra* 2003, Helmuth Gerickes *Mathematik in Antike Orient und Abendland* 2004. Und als Quellen *Cardanos eigene Lebensbeschreibung* von Hermann Hefele übersetzt 1914, und Cardanos *Ars Magna* 1545 in englischer Übersetzung 1968 von Richard Witmer.

Kapitel 1: Geschichte der Coss

Die Blätter 8r bis 11v der *Tractatiuncula* enthalten nun als Kapitel 1 eine geraffte Geschichte der Coss. Ursus beginnt in der Antike mit Plato und Euklid, welche er quasi als Urväter der Algebra bezeichnet. Plato wird das Beispiel zur Lösung der linearen Gleichung $(x:4)\cdot 2-8=4$ unterstellt, er habe die Idee entwickelt, dass man die Rechenarten umgekehrt als Gegenrechenarten verwenden müsse. Ob Plato tatsächlich solch eine oder gar diese Aufgabe gelöst hat und die Struktur der Lösung benannt hat, ist hier unwichtig, eigentlich mathematische Schriften hat Plato jedenfalls nicht hinterlassen. Moritz Cantor dazu:[25] „Platon wird die Erfindung der analytischen Methode zugeschrieben. Wir haben darüber eine ganz kurze Notiz bei Diogenes Laertius und eine ausführlichere bei Proklus.“ Wussing[26] beurteilt Platos Haltung zur Mathematik dahingehend, dass er wohl „eine mathematische Ausbildung als Grundlage der eigentlichen philosophischen Schulung“ ansah, „obwohl er kaum eigene Beiträge zur Mathematik beisteuerte“. Aber er sei auch verantwortlich für die „Trennung von Theorie und Praxis“, wodurch er der griechischen Mathematik Grenzen gesetzt habe.[27] Bei Viëta[28] heißt es dazu ausführlicher: „Es gibt in der Mathematik einen Weg zum Auffinden der Wahrheit, den Plato als erster gefunden haben soll und der von Theon Analysis genannt worden ist. Durch die Analysis[29] wird aus der aufgestellten Gleichung oder Proportion die gesuchte Größe selbst ermittelt. Und so mag die analytische Kunst definiert werden als die Lehre des geschickten Findens.“

Es ist zeit- und ursustypisch, dass Plato als Autorität genannt wird. Und es ist typisch für Ursus, eine solch einfache Aufgabe an den Anfang zu stellen. Er wendet sich mit seinen *Tractatiuncula* nicht an gelehrte Kollegen, sondern an Kaiser Rudolph II., der ihn ja beauftragt hatte, diese Arbeit zu verfassen.

---

[20] Es ist gemeint, dass die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2$ vier Glieder ergibt. Eigentlich für $(a + \sqrt{b})^2$ oder $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ gebraucht.

[21] Ebenso ergibt $(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$ acht Glieder, wenn man jedes der Mischglieder einzeln zählt. Eigentlich für $(\sqrt{a} + b)^3$ gebraucht.

[22] $(a+b)^4$.

[23] $(a+b)^5$.

[24] „Progress dupla“.

[25] Ausführlicher siehe *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd I., Leipzig 1880, S.188-191.

[26] Hans Wussing, *Mathematik in der Antike*, Leipzig 1962, S. 95.

[27] Hans Wussing, *Mathematik in der Antike*, Leipzig 1962, S. 97.

[28] *Isagoge* Kap.1. Siehe dazu Folkerts/Wußing u.a., *4000 Jahre Algebra*, Berlin 2003, S. 271.

[29] Genauer: durch den von Viëta „Exegetik“ genannten Teil.

Als zweite Autorität nennt Ursus Euklid und speziell dessen 8. Proposition im 9. Buch. Diese befasst sich mit der geometrischen Folge, wie sie Ursus zu Beginn seines 3. Kapitels zitiert. In der Übersetzung von Clemens Thaer[30] lautet sie: „Bilden beliebig viele Zahlen von der Einheit aus eine Geometrische Reihe, so muss die dritte von der Einheit aus eine Quadratzahl sein, ebenso die folgenden, wenn man immer eine überspringt; ferner die vierte eine Kubikzahl, ebenso alle folgenden, wenn man immer zwei überspringt; und die siebente zugleich Kubikzahl und Quadratzahl, ebenso die folgenden, wenn man immer fünf überspringt." Gemeint ist, dass in der geometrischen Folge 1; a; a^2; a^3; a^4; a^5; a^6; a^7; a^8; a^9; ... jede 3., 5., 7., usw. Zahl eine Quadratzahl ist, ebenso jede 4., 7., 10., usw eine Kubikzahl ist.

Als dritten Mathematiker in der Antike nennt Ursus Diophant, „Diophantus Pythagoricus", der möglicherweise babylonischer Abstammung[31] war und der in seinem Werk *Arithmetica* die Algebra und die Arithmetik von der Geometrie ablöste; sie gilt als Hauptwerk der Antike zur Algebra. In seinem 1. Buch werden Gleichungen behandelt, die auf den Typ $a{\cdot}x=b$ zurückgeführt werden können. Die anderen Bücher enthalten hauptsächlich unbestimmte lineare Gleichungen, für die sich der Begriff „Diophantische Gleichungen" eingebürgert hat. Häufig treten auch Quadrate auf, einmal sogar eine kubische Gleichung.[32] 1463 entdeckt Regiomontan eine Diophant-Handschrift; 1575 erscheint eine lateinische Übersetzung von W. Holtzmann (Xylander) in Basel, deutsche Übersetzung von *Arithmetik und Polygonalzahlen* 1952. Folkerts/Wussing u.a. geben an, dass bis ins 20. Jh. nur die Bücher I bis III und XI bis XIII bekannt gewesen seien und dass die Bücher IV bis VII erst in den 70er Jahren des 20. Jh. als arabische Fassung im Iran aufgefunden wurden.[33] Ursus nennt 1597 in den *Tractatiuncula* für Diophant jedoch 13 Bücher! Das bedeutet nicht, dass zu seiner Zeit alle 13 Bücher aufgefunden worden und bekannt waren. In der Widmung an Dionysios, vermutlich den von 247-264 in Alexandria wirkenden Bischof Dionysios den Großen, kündigt Diophant an, den Stoff in 13 Büchern zu behandeln.[34]

Als letztes wird Hypatia (ca. 370 - 415) genannt, die gelehrte Tochter von Theon von Alexandria. Sie war Philosophin und Mathematikerin in Alexandria und schrieb Kommentare zu Diophant, Apollonius und Ptolemäus, die alle verloren sind. Sie wurde als Heidin von einer aufgebrachten Christenmeute im Jahre 415 auf offener Straße überfallen und auf grausame Weise in einer christlichen Kirche umgebracht.[35] Ursus' Text:

„Die Regula Algebra.
Tractatiuncula.
Ein Tractätlein von der Regel Coss.
Kap. 1: Historia von der Erfindung und den Erfindern der Regula Coss.

Plato, der göttliche und hocherleuchtete Philosoph, welcher vor ungefähr 2000 Jahren, ungefähr 400 Jahre vor der Geburt Christi,[36] gelebt hat, hat wie Theon von Alexandria meldet eine wundervolle Sache erfunden, einer Frage Lösung durch die Analytische Methode zu finden. Das wurde vollbracht durch rückwärtige Operation oder durch rückwärtiges Anwenden des Algorithmus. Zum Beispiel: Eine Zahl soll durch 4 dividiert, der Quotient mit 2 multipliziert, vom Produkt 8 subtrahiert werden, verbleiben 4. Welches ist die Zahl? Zu den verbleibenden 4 addiere 8, ergibt 12, das dividier durch 2, ergibt 6, die multiplizier mit 4, ergibt 24, die Lösung, alles umgekehrt wie in der Aufgabe.[37] Diese kunstreiche Erfindung Platos, welche der erste Keim der edlen und sinnvollen Regel Coss oder Algebra gewesen ist, hat Euklid[38] aus Megara, Platos Schüler, in seinem neunten, arithmetisch dritten und letzten Buch, und besonders in dessen achter Proposition, weiter fortgeführt und vermehrt und verbessert. Und unlängst hat Diophant[39] 13 Bücher über die genannte Erfindung Platos geschrieben, über welche die hocherleuchtete und sinnreiche Frau Hypathia, eine Griechin zu Alexandria in Ägypten, herrliche und gelehrte Kommentare oder Auslegungen geschrieben hat. Diese Frau ist um das Jahr 415 von vielen Pfaffenknechten ohne Grund jämmerlich und erbärmlich ermordet, erschlagen und in Stücke zerrissen worden, wie es von Sokrates[40] in der Kirchengeschichte im 15. Kapitel des 7. Buches und wie es in der Tripartita Kap. 12, Buch 11 beschrieben ist."

---

[30] Clemens Thaer, *Euklid, Die Elemente*, Ostwalds Klassiker Leipzig 1935, Bd. 3, S. 52f.
[31] Hans Wussing, *Mathematik in der Antike*, S. 196.
[32] Wussing, S. 196ff.
[33] *4000 Jahre Algebra*, S. 97.
[34] Wussing, S. 198.
[35] Wussing, S. 211.
[36] Plato lebte von 427-348/347 vor Christi Geburt.
[37] $(x:4)\cdot 2-8=4 \Rightarrow x=[(4+8):2]\cdot 4=24$.
[38] Die arithmetischen, zahlentheoretischen Bücher sind die Bücher VII bis IX. Euklids 9. Buch handelt u.a. von geometrischen Folgen. Zu Euklids *Elementen* siehe Scriba/Schreiber, *5000 Jahre Geometrie*, Berlin 2003, S. 49-65.
[39] um 250 n.Chr.
[40] Sokrates Scholasticus, ca. 380 - nach 439 n.Chr., Jurist in Konstantinopel, verfasste eine Kirchengeschichte von Diokletian (305) bis zu Theodosius II. (439). Übersetzung ins Syrische, Armenische und Lateinische (*Historia Tripartita* des Theodorus Lector und Cassiodor).

Nach den Leistungen der Antike behandelt Ursus die Geschichte der Algebra regional. Von den Arabern weiß er verständlicherweise noch wenig Genaues zu berichten. Er weiß von der Übersetzungstätigkeit derselben, besonders in Alexandria und Corduba; er nennt ausdrücklich die Übersetzung von Diophant ins Arabische. Bei der nun folgenden Beschreibung der Leistungen der Araber durch Ursus liegen in seinen Quellen Unklarheiten vor! Er beginnt mit „Almansor". Al-Mansūr ist der Thronname mehrerer islamischer Herrscher. Wegen der genannten zeitlichen Nähe zu Karl dem Großen kann nur der Kalif al-Mansūr in Bagdad gemeint sein, zweiter Kalif 754-775 der neuen Abassiden-Dynastie, der Kunst und Wissenschaft förderte. Ursus schreibt nicht, dass Almansor in Cordoba lebte, sondern nur, dass er „in der spanischen Stadt Cordoba um das Jahr 750" berühmt gewesen sei. Den seit 978 faktischen Alleinherrscher im Kalifat Cordoba, Muhammad ibn Abi Amīr al-Mansūr 939-1002 kann er nicht meinen, denn dieser ist nur durch 52 Kriege und Plünderungen Nordspaniens bekannt.

Weiter geht es mit „Mahomet filius Moysis". Hier zitiert Ursus wohl aus Cardanos *Ars Magna* 1545.[41] Das ist der Mathematiker, Astronom und Historiker (Abū Abdallāh) Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwārizmī (um 780-850), der zur Zeit des Kalifen (813-833) al-Ma'mūn lebte. Filius ist arabisch ibn und Moysis ist Moses = Mūsā. Auch al-Ḫwārizmī wirkte nicht in Spanien, sondern in Bagdad. Eine lateinische Übersetzung seines Werkes beginnt mit „quem edidit Mahomet, filius Moysi Algaurizin",[42] eine englische Übersetzung „written by Mohammed ben Musa of Khowarezm".[43] Algaurizin ist also das verfälschte al-Ḫwārizmī.[44]

Nun setzt Ursus den Zusatz „genannt Geber" nach Mahomet filius Moysis, von dem die Worte Algebra und auch Almucabala abgeleitet seien. Diese Herleitung der Namen Algebra und Almucabala von Geber ist sagenhaft. Sie leiten sich von einem Teil des arabischen Buchtitels von al-Ḫwārizmīs Gleichungslehre „al-ǧabr wa-l-muqābala" her (Ergänzen eines negativen Terms und anschließend Ausgleichen), worin er u.a. die Klassifikation der Gleichungen auf 6 Fälle reduzierte. Allerdings werden mit Geber zumeist zwei andere Gelehrte gemeint, zum einen der Alchimist (Buch der Gifte) des 8. Jh., Ǧābir ibn Ḥaiyān, der Kommentare zu Euklid und zum Almagest verfasste; zum anderen der westarabische Gelehrte in Andalusien Abū Muḥammad Ǧābir ibn Aflāḥ im 12. Jh., der 9 Bücher über Astronomie schrieb. Sein Werk *Islāh al-Maǧistī* ist eine Kritik am *Almagest,* die von Gerhard von Cremona ins Lateinische übersetzt und die von Peter Apian in Nürnberg 1534 herausgegeben wurde mit dem Titel *Gebri filii Affla Hispalensis de astronomia.* Dieser Geber fand die Formel $\cos\alpha = \cos a \cdot \sin \beta$ der sphärischen Trigonometrie. Regiomontanus schöpfte später in *De triangulis* aus dem Werk Gebers.[45] Aber Regiomontan, dem auch das Werk al-Ḫwārizmīs bekannt war, schreibt an Bianchini über diesen: „... aut ex primo Gebri Hispalensis clara trahuntur".[46] Wahrscheinlich liegen hier bereits in den von Ursus benutzten Quellen Verwechslungen vor, weil die Übersetzungen al-Ḫwārizmīs aus Spanien nach Frankreich und Deutschland kamen, oder wie es Kaunzner treffend ausdrückt: „Spanien war im 12. Jahrhundert für den Wissensstrom von Bagdad ins Abendland der größte Umschlagplatz; ... auch al-Ḫwārizmīs Rechenbuch erhielt dort sein lateinisches Gewand."[47] Die Erzählung, der Name Algebra stamme von dem arabischen Mathematiker Geber, geht nach Tropfke[48] wahrscheinlich auf Rafaele Canacci aus Florenz (14. Jh.) zurück. Aber auch Cardano und Stifel, beides Quellen für Ursus, verwenden diesen falschen Geber. Cardano[49] beginnt sein 1. Kapitel der „Ars magna, quam vulgo Cossam vocant", mit „Haec ars olim à Mahomete, Mosis Arabis filio initium sumpsit"; wahrscheinlich hat Ursus diese Wendung übernommen. Auch Michael Stifel spricht von „Gebri regulam", wenn er Gleichungen auf Normalform reduziert, von „Cossa seu regula AlGebri", von „Cossa seu ars Gebri" und von „Algebram â Gebro Astronomo", später dann allerdings zumeist von „Regula Algebrae".[50]

„Diese hohe Kunst der Algebra, auf griechisch Analysis genannt (wovon das verstümmelte arabische Wort Alysa in Gebrauch geblieben ist), ist in den genannten Büchern des Diophant und der Hypatia verwahrt und erhalten worden bis zum Sarazeneneinfall in das griechische oder orientalische Kaiserreich.[51] *Mit diesem Einfall ist die griechische Sprache eine geraume Zeit,*

---

[41] Kap. I, Blatt A3r: „Haec ars olim à Mahomete, Mosis Arabis filio initium sumpsit."

[42] Kodex Dresden C 80, f. 340r. Siehe Kaunzner, in: Folkerts (Hrsg.), *Mathematische Probleme im Mittelalter*, Wiesbaden 1996, S. 438.

[43] Frederic Rosen, *The Algebra of Mohammed ben Musa*, London 1831, S. 68.

[44] Siehe dazu: Wolfgang Kaunzner, *Über einige Zusammenhänge zwischen lat. und dt. mathem. Texten*, in: Folkerts (Hrsg.), Mathem. Probleme im Mittelalter, Wiesbaden 1996, S. 438f.

[45] Siehe Sezgin, Bd. 5, S. 53, S. 219-225, S. 228-241, und Bd. 6, S. 93.

[46] Siehe Kaunzner, *Über das Eindringen algebr. Kenntnisse nach Deutschland*, in: Rechenpfennige, München 1968, S. 107.

[47] Wolfgang Kaunzner, *Lateinische Bearbeitung der Algebra al-Khwārizmīs*, in: Archive for History of Exact Sciences, Vol. 32, N^r^ 1, 1985, S. 1.

[48] Tropfke, Bd. II, Berlin 3. Aufl. 1933, S. 67. Siehe Kaunzner, *Lateinische Bearbeitung...*, S. 11f.

[49] *Ars Magna*, Kap. I, Blatt A3r.

[50] Stifel, *Arithmetica Integra* 1544, Blatt 30r, 94r, 226v-231v.

[51] Ab 632 dringen die Araber nach Kleinasien vor, 636 Sieg über die Byzantiner am Jarmuk, ab 639 Eroberung Ägyptens, ab 711 iberische Halbinsel. Belagerung Konstantinopels 673-678 und 717/718. 1453 wird Konstantinopel von den Türken erobert.

nämlich etwa 700 Jahre von 700 bis 1400 n.Chr. (zu welcher Zeit sie von Manuele Chrysolora[52] *wieder in Schwung gekommen und auf die Bahn gebracht worden ist) verloschen. Mittlerweile ist das Werk des Diophant von der Algebra durch die Araber, die besondere Liebhaber und Förderer der Mathematik gewesen sind, aus dem Griechischen in ihre Sprache übersetzt worden. Ihre Auslegung und Übersetzung der Kunst ist bei den Arabern in Ägypten, Afrika und Spanien, besonders zu Alexandria und Corduba, geblieben. In dieser spanischen Stadt Corduba ist um das Jahr 750, kurz vor der Regierung Karls des Großen unter der Regierung des sarazenischen Königs Miramolinus,*[53] *besonders berühmt gewesen der hochgelehrte Araber Almansor. Danach kam Mahomet filius Moysis,*[54] *sonst Geber genannt, von dem diese Kunst* [Algebra] *dermaßen vermehrt und verbessert worden ist, dass sie ganz nach ihm benannt wurde und den Namen Algebra gleichwie von Geber bekommen hat, was vorher bei den Arabern Almucabala, gleichsam große Weisheit und Kunst, geheißen hat."*

Dann berichtet Ursus von dem Philosophen und Mathematiker in Frankreich Johannes Campanus von Novara, der etwa von 1200/1210 bis 1296 lebte und Kaplan der Päpste Urban IV. bis Bonafatius VIII. war. Campanus lieferte etwa 1255/59 eine für Jahrhunderte maßgebende neu bearbeitete und kommentierte lateinische Fassung der *Elemente* des Euklid, die 1482 in Venedig und dann sehr oft gedruckt wurde. Ursus hat sehr wahrscheinlich eine Campanus-Ausgabe der *Elemente* benutzen können: In der berühmten Bibliothek Heinrich Rantzaus, seines früheren Mäzens und Förderers, standen die Werke von Campanus, etwa 1500 gedruckt. Das Buch ist nach der Eroberung Breitenburgs im 30-jährigen Krieg schließlich im Professhaus der Jesuiten in Prag gelandet und dort im Katalog 1773 erwähnt. Als zweiten in Frankreich nennt Ursus Jordanus Nemorarius, Jordanus de Nemore, Mathematiker in der ersten Hälfte des 13. Jh., † 1237. Sein Werk *Elementa arithmetica* wurde 1496 in Paris gedruckt, *Elementa de ponderibus* begründet die spätmittelalterliche Statik, *De numeris datis* ist ein erster Versuch von hohem Niveau einer wissenschaftlichen Darstellung der Buchstabenalgebra, *Liber de triangulis* und *De Plana Sphera* sind geometrische Schriften. Höchstwahrscheinlich ist er nicht mit dem Ordensgeneral der Dominikaner Jordanus Saxo identisch. Ursus hat eine Handschrift von Nemorarius besessen, in der die 24 Gleichungen der Algebra beschrieben werden; es wird sich um *De Numeris datis* gehandelt haben. In der Dresdener Handschrift C 80 werden u.a. Sätze aus diesem Werk zitiert; auch Adam Ries hat es gekannt und benutzt.

„Schließlich ist die Kunst Algebra von den Arabern aus Spanien über das Pyrenäengebirge nach Gallien [Frankreich] *gekommen, zu Campanus Gallus,*[55] *der den Euklid als Erster aus dem Arabischen in die lateinische Sprache transferiert hat. Die Übersetzung ist auch heute noch vorhanden.*[56] *Dann auch zu Jordanus Nemorarius,*[57] *der die Kunst in 24 Gleichungen oder Regeln ganz in lateinischer Sprache beschrieben hat; diese Beschreibung ist bei mir vorhanden, aber sie ist meines Wissens niemals gedruckt worden."*[58]

Nun wendet er sich der Entwicklung der Coss in Italien zu. Leonardo Fibonacci von Pisa,[59] ca. 1170/1180 – nach 1240, gilt als der größte Arithmetiker des westlichen Mittelalters.[60] Im *Liber abbaci* 1202 werden das Rechnen mit den indischen Ziffern, viele Aufgaben aus dem kaufmännischen Leben behandelt, aber auch Arithmetik und Algebra der linearen und quadratischen Gleichungen; er benutzt die Begriffe res bzw. radix, census, cubus und dragma.[61] Sie resultieren aus den möglichst wortgetreuen Übersetzungen der arabischen Mathematiker, die wiederum ihre Bezeichnungen den bei Diophant vorkommenden anpassten.[62] In der *Practica geometriae* 1220 wird neben geometrischen Grundbegriffen das Feldmessen und das Wurzelziehen behandelt, im *Liber quadratorum* 1225 quadratische Gleichungen.

---

[52] Emanuel Chrysoloras, ca. 1350–1415, Edelmann und Diplomat aus Konstantinopel. Ließ sich 1397 in Venedig nieder, lehrte dort die in Vergessenheit geratene griechische Sprache und bemühte sich um die Verbesserung der Lateinkenntnisse in Italien. Ging mit gleichem Anliegen dann nach Florenz, Mailand und Pavia. Er brachte griechische Handschriften in den Westen mit.

[53] Miramolinus = Abu Abd Allah Muhammad al-Nasir, Emir von Marokko, 12./13. Jh. (?)

[54] (Abu Abdullah) Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwārizmī.

[55] Johannes Campanus von Novara.

[56] Nach Isak Collijn, *Rester af Heinrich Rantzaus bibliotek på Breitenburg*, in: Nordisk Tidskrift för Bok- och Biblioteksväsen Uppsala Bd. 26, 1939, standen die Werke von Campanus in Heinrich Rantzaus Bibliothek, wo sie Ursus benutzt haben könnte.

[57] Siehe Menso Folkerts in: Centaurus 27, S. 175-177 und Busard in: *Mathem. Probleme im Mittelalter*, hrsg. von Menso Folkerts, Wiesbaden 1996, S. 139ff.

[58] Ursus hat also eine Handschrift von Nemorarius besessen, wahrscheinlich *De Numeris datis*. Siehe: Folkerts/Wußing u.a., *4000 Jahre Algebra*, Berlin 2003, S. 213f.

[59] Siehe Gericke II, S. 97ff. und Folkerts/Wußing u.a., *4000 Jahre Algebra*, S. 206ff.

[60] Folkerts/Wußing, *4000 Jahre Algebra*, Berlin 2003, S.206.

[61] Vorher schon in Texten, die Gerhard von Cremona, um 1114-1187, übersetzte. Siehe Tropfke Bd. II, S. 136f.

[62] Tropfke, Bd. II, S. 134f.

Dann folgen in der Beschreibung Luca Pacioli[63] (ca. 1445-1517) und Stephan de la Roche (1470-1530) aus Lyon. Spätestens mit dem Erscheinen von Paciolis *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni* Venedig 1494, die eine umfassende Darstellung des Wissens der Zeit ist, mag man die Zeit der Coss beginnen lassen, vielleicht schon um 1450; hier treten die Zeichen p (piu) für Plus und m (meno) für Minus sowie R für die Wurzel auf.

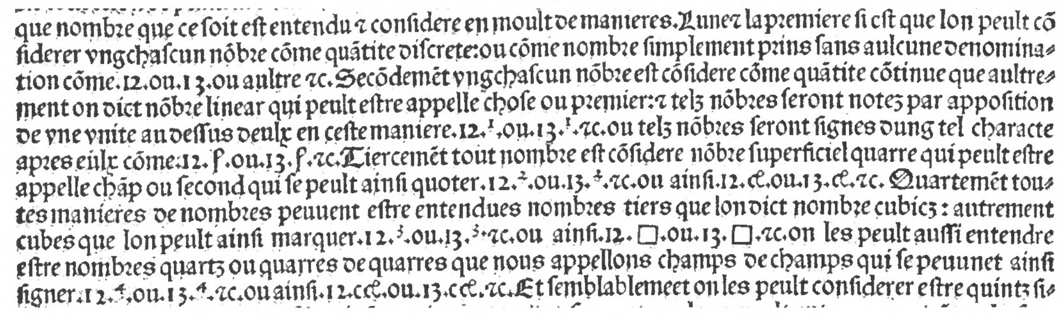

que nombre que ce soit est entendu ꝛ considere en moult de manieres. Lune ꝛ la premiere si est que lon peult cō siderer vngchascun nōbre cōme quātite discrete: ou cōme nombre simplement prins sans aulcune denomina- tion cōme. 12. ou. 13. ou aultre ꝛc. Secōdemēt vngchascun nōbre est cōsidere cōme quātite cōtinue que aultre- ment on dict nōbre linear qui peult estre appelle chose ou premier: ꝛ telz nōbres seront notez par apposition de vne vnite au dessus deulx en ceste maniere. 12.¹, ou. 13.¹. ꝛc. ou telz nōbres seront signes dung tel characte apres eulx cōme: 12. ρ. ou. 13. ρ. ꝛc. Tiercemēt tout nombre est cōsidere nōbre superficiel quarre qui peult estre appelle chāp ou second qui se peult ainsi quoter. 12.². ou. 13.². ꝛc. ou ainsi. 12. ϲϲ. ou. 13. ϲϲ. ꝛc. Quartemēt tou- tes manieres de nombres peuuent estre entendues nombres tiers que lon dict nombre cubicz: autrement cubes que lon peult ainsi marquer. 12.³. ou. 13.³. ꝛc. ou ainsi. 12. □. ou. 13. □. ꝛc. on les peult aussi entendre estre nombres quartz ou quarres de quarres que nous appellons champs de champs qui se peuunet ainsi signer. 12.⁴. ou. 13.⁴. ꝛc. ou ainsi. 12. ϲϲϲ. ou. 13. ϲϲϲ. ꝛc. Et semblablemeet on les peult considerer estre quintz si-

Abb. 33: De La Roche, *Larismetique*, 2. Aufl. 1538, S. 29v (Auszug). Potenzschreibweise. Exemplar der British Library, 1605/26

Stephan de la Roche nennt Wolfgang Kaunzner[64] mit einer *L'Arismetique nouvellement* 1520. Jöchers Gelehrtenlexikon 1750 und Zedlers Universallexikon[65] 1746 nennen Stephan de la Roche = de Rupe, aus Lyon im 16. Jh.; er schrieb eine *L'Arismetique et Geometrie* 1520 (2. Aufl. 1538) und machte darin ausgiebig von Chuquets Aufzeichnungen Gebrauch. De La Roche wird schließlich mehrfach bei Tropfke[66] erwähnt, als Schüler des Nicolas Chuquet (†1488 in Lyon). Stephan de la Roche nennt in seinem Werk[67] „Maistre Nicolas Chuquet et son Triparty".[68] Er spricht von „algebra et almucabala", wie Ursus später auch. Er nennt die Coss „regle de la chose et de la quantite". Die erste Potenz der Variablen nennt er „nombre linear" oder „chose" oder „nombre premier" und schreibt sie 12^{I} für 12x; die zweite Potenz „quarre" oder „nombre second" wird 12^{II} oder 12ϲ für $12 \cdot x^2$ geschrieben; die dritte Potenz „nombre tier" oder „nombre cubic" 12^{III} oder 12□ für $12 \cdot x^3$; für die vierte Potenz „nombre quart" oder „quarres de quarres" 12^{IV} oder 12ϲϲ für $12 \cdot x^4$, usw.[69] Plus- und Minuszeichen werden noch nicht verwendet, dafür stehen Abkürzungen p und m. Im folgenden Text verwendet de la Roche diese Potenzschreibweise jedoch nicht, sondern er nimmt 12P für 12x, 12ϲ für $12 \cdot x^2$, 12□ für $12 \cdot x^3$, 12ϲϲ für $12 \cdot x^4$, usw. Das Umformen von Gleichungen läuft bei de la Roche schon perfekt. So etwa wird die gemischte Wurzelgleichung $\sqrt{(12x - x^2)} + 1 = \sqrt{(36 - x^2)}$ korrekt durch zweimaliges Quadrieren vereinfacht zu $888x = 1225 + 148x^2$. Vielleicht haben ja die deutschen Cossisten, mehr als bisher bekannt, über de la Roche gewusst.

Schließlich folgen noch Scipio del Ferro (1465–1526), in Bologna Mathematikprofessor, der Lösungen von kubischen Gleichungen des Typs $x^3 + bx = c$ fand, und Nicolaus Tartaglia (ca. 1500–1557), der wie Ursus Autodidakt war und 1535 das Lösungsverfahren für kubische Gleichungen fand, das er Cardano 1539 mitteilte.

„Von den Franzosen [Gallis] *ist schließlich diese Kunst Algebra zu den Italienern gekommen, und zwar um den Anfang des Reviviscentis Saeculi*[70] *zwischen 1400 und 1500 n.Chr. Um diese Zeit lebte Leonardus von Pisa, der erste Italiener, der von dieser Kunst gewusst hat, der aber nach Aussage des Cardano nur die ersten vier einfachsten Gleichungen beherrschte.*[71] *Dann folgten der Italiener Lucas Paccioius und Stephanus à Rupe*[72] *aus Lyon in Frankreich, die diese Kunst jeweils in ihrer Sprache beschrieben, verbessert und auch durch Hinzufügen von vier weiteren Gleichungen vermehrt haben. Bis schließlich um 1520 n.Chr. Scipio Ferreus und Nicolaus Tartaleus, die den Anfang der Kubik-Algebra oder der Kubikcoss mit ihren 13 Gleichungen aus der Zerlegung des Kubus in seine Teile erfunden und ausgedacht haben."*

---

[63] Siehe Folkerts/Wußing u.a., *4000 Jahre Algebra*, Berlin 2003, S. 218ff. Helmuth Gericke, S. 196f.

[64] *Über Johannes Widmann von Eger*, München 1968, Forschungsinstitut des Deutschen Museums Reihe C 7, S. 59.

[65] „Stephan de la Roche, sonst Villafranca genannt, von Lion, lebte im 16. Seculo, und schrieb eine Arithmetik und Geometrie."

[66] Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, 4. Auflage Bd I, Berlin 1980.

[67] Estienne de la Roche, *Larismetique et Geometrie de maistre Estienne de la Roche dict Ville Franche*, Lyon 2. Aufl. 1538. Exemplar der British Library 1605/26.

[68] *Triparty en la science des nombres* 1484. Erst im 19. Jh. gedruckt.

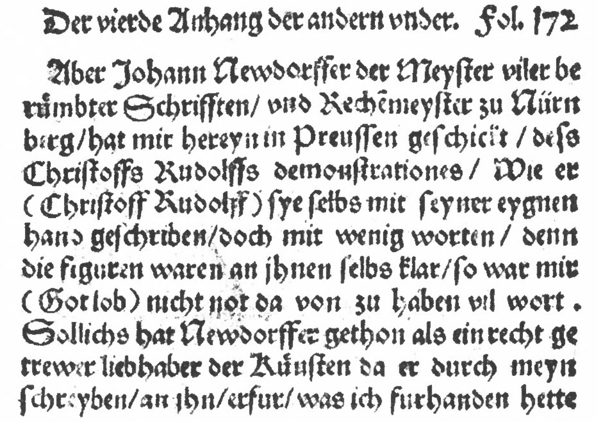
[69] fol. 29v.

[70] Von lat. revivisco = wiederaufleben. Ursus bezeichnet das 15. Jh. also als Renaissance.

[71] Nach Folkerts/Wußing, *4000 Jahre Algebra*, S. 208, behandelt Leonardo von Pisa im *Liber abbaci* u.a. die quadratischen Gleichungen $ax^2=bx$, $ax^2=b$, $ax^2+bx=c$, $ax+c=bx^2$, $ax^2+c=bx$; aber auch Gleichungen höheren Grades.

[72] Estienne de la Roche aus Lyon.

Zum Schluss wendet er sich Deutschland zu. Von den bekannten Algebraikern nennt er vier; Adam Ries ist nicht darunter, da dessen Coss zu Lebzeiten nicht gedruckt worden war. Ursus nennt zuerst Johannes Regiomontanus aus Franken, 1436-1476, der ein vorzüglicher Kenner der griechischen Sprache war und beabsichtigte, mit seiner 1471 in Nürnberg eigens dafür eingerichteten Druckerei alle damals bekannten antiken Autoren der Mathematik und Astronomie ins Lateinische zu übersetzen und textkritisch überarbeitet herauszugeben und der 1463 in Venedig eine griechische Handschrift mit der Algebra des Diophant entdeckt hatte.[73] Regiomontan benutzte bereits in seiner Aufgabensammlung 1456 eine algebraische Symbolik, die vor ihm nicht nachweisbar ist.[74] Zum zweiten wird Christoff Rudolff genannt, um 1500 - vor 1543, dessen *Coss* 1525 in Straßburg erschien und 1553 mit Erläuterungen und Ergänzungen durch Michael Stifel neu herausgebracht wurde.[75] Und drittens Michael Stifel selbst, der schon vorn bei der Widmung an den Kaiser erwähnt worden war. Dessen Coss hat Ursus, wie er selbst angibt, aus der kaiserlichen Bibliothek in Wien vorgelegen, und er hat diese als Vorlage für seine *Tractatiuncula* bzw. die *Arithmetica Analytica* benutzen können.


Der vierde Anhang der andern vnder. Fol. 172

Aber Johann Newdorffer der Meyster viler be
rümbter Schrifften/ vnd Rechẽmeyster zu Nürn
berg/hat mir hereyn in Preussen geschickt / deß
Christoffs Rudolffs demonstrationes / Wie er
(Christoff Rudolff) sye selbs mit seyner eygnen
hand geschriben/doch mit wenig worten / denn
die figuren waren an jhnen selbs klar/so war mir
(Got lob) nicht not da von zu haben vil wort.
Sollichs hat Newdorffer gethon als ein recht ge
trewer liebhaber der Künsten da er durch meyn
schreyben/an jhn/erfur/ was ich furhanden hette

Abb. 34: Michael Stifel, *Rudolffs Coß* 1553, fol. 172r.

Zum Schluss folgt, für uns überraschend, ein Zeitgenosse von Ursus, ein heute unbekannter Johannes Junge, geb. ca. 1552 in Schweidnitz, 50 km südwestlich von Breslau. 1567 ist er in der Lehre bei Caspar Frantz, Rechenmeister und Bürgermeister zu Schweidnitz; 1568 in der Lehre bei Caspar Schleupner, Rechenmeister zu Breslau und Schüler von Johann Neudorffer; 1570 bei Stefan Brechtel, Mathematiker zu Nürnberg und bei Andreas Gundelfinger, Rechenmeister zu Nürnberg und bei Johann Neudorffer, Rechenmeister und Ratsverwandter zu Nürnberg. Hier lernt Johannes Junge außer Rechnen und Schönschrift auch Buchhaltung und die Coss von Rudolff kennen. Michael Stifel[76] schreibt, dass Johann Neudorffer „Rudolffs demonstrationes mit seyner eygnen hand geschriben" an ihn (Stifel) schickte, weil dieser meinte, Rudolff „hette von diser sach nichts gewußt".[77] Johann Neudorffer hat offensichtlich mit Stifel in Kontakt gestanden und die Coss von Rudolff gekannt. Junge wird bei Neudorffer auch Rudolfs Coss kennengelernt haben. Er erhält von Neudorffer eine Urkunde, die ihn berechtigt, andere zu unterweisen (Meisterbrief). In Lübeck, wohin Junge danach als Rechenmeister geht, eröffnet er eine Rechen- und Schreibschule. Er bezeichnet sich dort „als einen zur Zeit noch jungen Rechenmeister". Diese autobiographischen Angaben findet man in seinem „Rechenbuch auff den Ziffern und Linien", Lübeck 1578. Dieser habe, so Ursus, „einen unbezahlbaren Schatz" in der Algebra hinterlassen. Damit meint Ursus das „Lösungsverfahren" für Gleichungen beliebigen Grades, bei Junge als Beispiel eine Gleichung 28. Grades. Das Verfahren beruht auf einer Polynomdivision. Allerdings muss die „Lösung" der Aufgabe bei Johannes Junge durch Raten bei mehreren Versuchen gefunden werden. Ursus verbessert das Verfahren, indem er zum Probieren nur die (ganzzahligen) Teiler der absoluten Zahl verwendet. In der *Arithmetica Analytica* stellt Ursus das Verfahren vor.

„Durch diese sinnreiche Erfindung ist diese Kunst schließlich zum höchsten und zu ihrer ganzen Perfektion aufgestiegen. Mittlerweile aber hat Johannes Regiomontanus aus Franken die so lange Zeit verlorenen Bücher des Diophant über Algebra wiederentdeckt, die auch 1575 in Basel lateinisch gedruckt wurden. Mittlerweile haben es sich auch andere Nationen, vornehmlich Deutsche, Franzosen und Italiener, sehr um die Algebra angelegen sein lassen. Unter den Deutschen ist der erste und wichtigste gewesen Christoff Rudolff von Jauer aus Schlesien gebürtig, welcher die 8 Gleichungen der gewöhnlichen Quadratcoss im Jahre 1524 beschrieben und herausgebracht hat. Diese Coss oder Algebra ist uns aus der kaiserlichen Bibliothek zu Wien in Österreich vor wenigen Jahren dargereicht worden, in der Michael Stifel von Esslingen im Württemberger Land gelegen gelehrte Kommentare geschrieben hat. Zum Schluss aber hat ein anderer junger Schlesier, Johannes Junge aus Schweidnitz, die Kunst Algebra zu ihrer ganzen Perfektion gebracht. Er ist leider vor wenigen Jahren zu Schweidnitz zum großen Nachteil für diese Kunst zu früh gestorben und hat einen

---

[73] Siehe dazu Menso Folkerts, in: *Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit*, Adam-Ries-Bund Nr. 7, Annaberg-Buchholz 1996, S. 19-28.

[74] M. Folkerts, *Zur Entwicklung der Algebra*, in: Dt. Akademie der Naturforscher Leopoldina, Jahrbuch 1991 Reihe 3, Halle 1992, S. 205.

[75] Siehe W. Kaunzner, *Über Christoff Rudolff und seine Coss*, Forsch. Inst. d. Dt. Museums München, 1970 Reihe A, Nr. 67.

[76] *Die Coß Christoffs Rudolffs*, Königsberg 1553, fol. 172r und 178v.

[77] fol. 171v.

unbezahlbaren Schatz in dieser Kunst hinterlassen. Wollte Gott Ihre kaiserliche Majestät erleuchten und Ihr eingeben, dass sie sich solches hinterlassenen Schatzes zu Nutz und Frommen der Nachfahren und mit wenig Kosten allergnädigst annehmen und angelegen sein lassen wolle. Und so viel von der Erfindung und den Erfindern der Algebra."

Kapitel 2: Was die Algebra ist

Die nun folgenden Kapitel 2 bis 7 behandeln das cossische Rechnen, vom Zählen (Kap. 3), Addieren und Subtrahieren (Kap. 4), Multiplizieren und Dividieren (Kap. 5), Wurzelziehen (Kap. 6) und cossische Brüche (Kap. 7). Die Handschrift endet dann. Es wird jedoch ein zweiter Teil über Gleichungen angekündigt, der als Handschrift nicht vorliegt, der jedoch mit dem ersten Teil zusammen (Kap. 2 bis 7) als *Arithmetica Analytica* 1601 gedruckt wurde. Die gedruckte Fassung ist gegenüber der Handschrift nur leicht verändert. Manchmal fehlen einzelne Wörter oder es sind solche hinzugefügt, gelegentlich sind Satzteile umgestellt oder ergänzt worden. Die Beispiele sind weitgehend identisch. Es ist anzunehmen, dass die leichten Änderungen Ursus selbst für den Druck vorgenommen hat. Da er ja vom Kaiser Geld für den Druck erhalten hatte, wird er dem Drucker eine Vorlage geliefert haben, insbesondere auch für den zweiten Teil mit der Gleichungslehre. Allerdings ist der Druck erst posthum 1601 erfolgt. Dass die *Tractatiuncula* und die *Arithmetica Analytica* aus einem Guss sind, beweist die ausführliche Erwähnung von Johannes Junge hier in den *Tractatiuncula* und die Beschreibung seines Verfahrens erst in der *Arithmetica Analytica.*

Kapitel 2 der Handschrift, das nun behandelt werden soll, heißt, was Algebra oder Coss sei. Es ist, wie Hans Wußing sagt,[78] die Coss als „Zwischenstufe zwischen bloßer Rechenkunst und vollzogener Algebraisierung zu bezeichnen, bei der bereits erste mathematische Symbole und Kunstwörter verwendet werden". Es kommen bereits Variable und deren Potenzen vor, jedoch vor Viëta noch nicht in der uns geläufigen Form. Gerade die Schaffung der Potenzlehre und der neuartigen Zeichensprache ist das große Verdienst der Cossisten, sie legten damit das Fundament der heutigen Algebra.[79] In Johann Widmanns von Eger *Behende und hubsche Rechenung* 1489 treten zum ersten Mal gedruckt die Zeichen + (plus) und – (minus) auf, nachdem er diese bereits in seiner Algebravorlesung 1486 an der Universität Leipzig verwendet hatte. Das Pluszeichen entstand dabei wohl als Rest aus dem Buchstaben t des Wortes et.[80] Das Minuszeichen hat sich durch immer flüchtigere Schreibweise aus dem ersten Buchstaben m von minus oder minder entwickelt. Das Gleichheitszeichen = wurde von Robert Recorde 1557 vorgeschlagen.

Das Wort Coss leitet sich vom italienischen cosa her, lateinisch res, was „das Ding", „die Sache" bedeutet, die gesuchte Größe, die zu bestimmen war. Die Coss war also die Rechnung mit der gesuchten Zahl in einer Gleichung. Das absolute Glied wurde „dragma" bezeichnet (bei Ursus Drachma). Es leitet sich von der altgriechisch/persischen Münzbezeichnung Drachme her (arab. Dirham). Erst Stifel 1553 in *Rudolffs Coss* schreibt als Symbol für Dragma ꝺ, wie auch Ursus. Rudolff schreibt 1525 noch ein φ, wie es auch in der Dresdener Handschrift C 80 (vor 1486) verwendet wird.[81] Mit res oder radix wird die Wurzel gesucht, aus der alle Potenzen erwachsen; also sucht man mit der Variablen x die Lösung der Gleichung. Die Symbole für res (℞, 𝔯), zensus (ʒ) und cubus (𝔠) sind bei Ursus die auch bei Rudolff und Stifel üblichen.

Doch nun zum Text des Kapitels 2 aus den *Tractatiuncula.* In spitze Klammern ‹*druck*› setze ich Textteile, die nur im Druck, nicht in der Handschrift stehen.

„Kap. 2: Was Algebra sei.

Algebra oder Coss ist eine elegante und zeitsparende Rechnung oder Regel der ‹Arithmetik oder Rechenkunst› mit Termen,[82] die aus einer Geometrischen Folge, anfangend mit 1, entstehen. Hierdurch werden die unbekannten Ausdrücke in der Aufgabe durch Setzung einer Einheit[83] und durch Rechnung[84] nach der Regula Proportionum oder Detri[85] gefunden. Die Coss ist deshalb eine Dienerin der Regel Detri. Durch sie findet die Detri ihr verborgene und gleichsam als Rätsel aufgegebene Ausdrücke[86] und gelangt so zur Perfektion und Vollkommenheit. Ebenso wie in der Regel Detri drei Ausdrücke existieren, die alle drei bekannt sind, so hat man in der Coss auch drei

---

[78] Wußing, *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Berlin, 2. Aufl. 1989, S. 126.
[79] Tropfke Bd. II, S. 140.
[80] Ulrich Reich, *Vom Pluszeichen zum Gleichheitszeichen*, in: Mathematik im Fluss der Zeit, Algorismus 44, 2004, S. 71-83.
[81] Tropfke Bd. II, S. 134 und 141.
[82] „Figürliche Zahlen".
[83] „Unität".
[84] „Process".
[85] „Regula Proportionum" = „Regel Detri" = „Regel de tri": Aus drei Gliedern einer geometrischen Proprtion a:b = c:d kann das vierte Glied berechnet werden: Der Dreisatz.
[86] „Terminos".

Ausdrücke, aber nur einer ist bekannt. Darum müssen die anderen zwei unbekannten mit Hilfe der Coss gefunden werden. So ist also die Coss eine elegante Regel Detri, deren bekannter und letzter Ausdruck das Ergebnis der Gleichung ist, der mittlere eine Einheit und der erste eine Zahl, die aus dem Lösungsvorgang der Aufgabe entsprungen ist. Zum Beispiel: Es wird eine Zahl gesucht, deren Zweieinhalbfaches 30 ergibt. Man setze eine Einheit 1; ihr Doppeltes ist 2; ihre Hälfte ½; zusammen 2½. Dann steht also in der Regel Detri:

2½ ----- 1 ----- 30	*zu ganzen Zahlen reduziert*	*Probe: 12*
5 ----- 1 ----- 60	*ergibt die Zahl 12.*	*12*
		6
		30

Also sind hier mit Hilfe der Coss die zwei unbekannten Ausdrücke der Detri gefunden."

Kapitel 3: Von der Art, in der Algebra zu zählen

Das Kap. 3 behandelt die Geometrischen Progressionen und definiert die üblichen cossischen Symbole für die Potenzen der Variablen. Spätestens seit Rudolff und Stifel sind diese in Deutschland in Bezeichnung und Aussehen recht einheitlich. Auch Ursus benutzt sie in der Form wie bei Stifel. Die handschriftliche Ausprägung sieht man am besten auf Blatt 15r, das unten abgedruckt ist. Ursus verwendet die üblichen Begriffe wie Drachma für die Konstante, Radix für die Variable x bzw. x^1, Zensus die zweite Potenz x^2 und Cubus für die dritte Potenz x^3, er nennt sie Quantitäten. Die höheren Potenzen der Variablen werden durch die bekannten Kombinationen von Zensus und Cubus gebildet, die Potenzen mit primzahligen Exponenten heißen Surden. Das Wort Exponent ist ihm bekannt.[87] Um bei einer größeren Zahl die cossische Bezeichnung zu finden, wird eine Primfaktorzerlegung des Exponenten durchgeführt. Die Rechenzeichen + und – sind bekannt, Ursus verwendet aber parallel das Wort plus und das Rechenzeichen +, ebenso wie das Wort minus und das Rechenzeichen ÷ . Das Pluszeichen erscheint im Druck als „—|—" und das Minuszeichen in Druck und Handschrift als „÷". Malpunkt oder Divisionszeichen werden nicht verwendet, sie kommen erst im 17. Jh. in Gebrauch,[88] stattdessen werden Worte benutzt. Wohl aber wird der Bruchstrich benutzt, der sich seit dem 15. Jh. allgemein durchgesetzt hatte.[89] Das Gleichheitszeichen wird, wie auch bei Stifel, noch nicht verwendet, stattdęssen steht ein „ *ff* " ein f mit Abkürzungssymbol für „facit", oder „rest" bei Subtraktionsaufgaben, oder es werden Worte verwendet wie „der Quotient wird". Das Gleichheitszeichen erscheint auf dem europäischen Festland erst 1659 bei Johann Heinrich Rahn.[90]

Gegen Ende des Kapitels führt Ursus eine Schreibweise ein, die die römischen Zahlen als Exponenten der Variablen benutzt, wie bei seinem Stellenwertsystem in der *Geodaesia* 1583. Als Beispiel gibt Ursus 4^{III}, gesprochen 4 Cubi, bedeutet $4\cdot x^3$. Die römische Zahl, hier III, ist in der Handschrift entweder direkt über die 4 geschrieben oder auch dahinter, je nach Platz. So lassen sich Aufgaben übersichtlich schreiben, etwa $8^{\mathrm{II}} : 2^{\mathrm{III}} = 8 : 2^{\mathrm{I}}$ für $8x^2 : 2x^3 = 8 : 2x$ (Blatt 22v). Eine ähnliche Symbolik hatte auch Bombelli,[91] der Zahlen über Halbkreisbögen als Exponenten verwendet. Es ist aber unwahrscheinlich, dass Ursus Bombellis Buch kannte. Nicolas Chuquet[92] schrieb 12^0, 12^1, 12^2, 12^3, ... (mit kleinen Exponenten rechts oberhalb der Koeffizienten) für 12, 12x, $12x^2$, $12x^3$, ... und nähert sich damit sehr an unsere heutige Schreibweise an. Allerdings ist sein Werk erst im 19. Jh. gedruckt worden. Sein Schüler jedoch, Stephan de La Roche, veröffentlichte Chuquets Erkenntnisse aus dessen Manuskript *Triparty*.

Da Ursus diesen de La Roche im Abschnitt über die Geschichte der Coss nennt, kann er die Schreibweise dort gesehen haben. Der Gedanke zu den hochgestellten Exponenten stammt meines Erachtens aber eher von Ursus selbst, denn de la Roche verwendet sie außer auf fol. 29v gar nicht. Ursus lehnt sich wohl eher an die Schreibweise bei sexagesimalen Winkelangaben an, denn er vergleicht das Multiplizieren und Dividieren von cossischen Zahlen im Kap. 5 mit dem „logistischen, astronomischen oder geodätischen Multiplizieren und Dividieren" und in Kap. 6 das Wurzelziehen „wie in Logistica Astronomica oder Geodaetica". Dabei kann insbesondere das dritte Wort als Argument gelten, weil Ursus bereits in seiner *Geodaesia* 1583 beim Stellenwertsystem diese Exponentenschreibweise einführte. Besonders deutlich wird die Verwendung des Exponenten „ $^{\mathrm{I}}$ " als eigenständiges Symbol für x^1 im Kapitel 3 der *Arithmetica Analytica*, wo Ursus als Beispiel für das Kürzen durch eine Variable (Reduktion 6) schreibt: „Es stehe $1^{\mathrm{II}} = 3^{\mathrm{I}}$. Nun kürze man beiderseits ein $^{\mathrm{I}}$, es bleibt $1^{\mathrm{I}} = 3^0$"

[87] „Exponent" tritt zuerst bei Stifel in der *Arithmetica Integra*, Blatt 235v auf. Siehe Tropfke, Bd. II, S. 151.

[88] Siehe Ulrich Reich, *Vom Pluszeichen bis zum Gleichheitszeichen*, in: Algorismus 44, 2004, S. 76f. Die Einführung des Multiplikationspunktes wird Leibniz 1698 zugeschrieben, das Divisionszeichen ÷ 1659 Johann Heinrich Rahn.

[89] Ulrich Reich, in: Algorismus 44, S. 78.

[90] Ulrich Reich, in: Algorismus 44, S. 82.

[91] Raffael Bombelli, Bologna 1526–1572/73, *L'algebra*, 1572 und 1579. Siehe Tropfke, Bd. II, S. 152.

[92] Manuskript: *Le triparty en la science des nombres* 1484. Siehe Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Leipzig 1964, S. 432.

Es irrt jedenfalls Treutlein, der die Erfindung dieser Schreibweise mit hochgestellten römischen Zahlen Justus Bürgi zuschreibt, und glaubt, Ursus habe sie von Bürgi erfahren, weil Ursus manches andere von Bürgi lernte und diesen auch als seinen Lehrer bezeichnet.[93] Denn Ursus hat diese Schreibweise mit nach Kassel gebracht, er hat sie schon 1583 in seiner *Geodaesia* verwendet. Bürgi erklärt in seiner *Coss,*[94] dass er in Analogie zu der in der Astronomie üblichen 60er-Unterteilung des Grades in Minuten und Sekunden und der dort üblichen Schreibweise „nach logistischer Art" die Quantitäten als prima, secunda, tertia usw. bezeichnen wolle. Zum Beispiel bedeute „1^{II} ein secundam".[95] Diese bekannte arabische Schreibart für Sexagesimalbrüche mit kleinen hochgestellten Symbolen, z.B. bei al-Battānī und al-Bīrūnī, gibt es in den Alfonsinischen Tabellen, dann bei Orontius Finaeus[96] mit m, 2, 3 für Minuten, Sekunden, Tertien, dann bei Gemma Frisius.

Entweder haben Bürgi und Ursus durch Rückgriff auf die Schreibweise in der Astronomie unabhängig voneinander die hochgestellten römischen Zahlen verwendet, oder Bürgi hat sie von Ursus übernommen. In Keplers Handschrift „Bürgis Coss" wird Ursus' Buch *Fundamentum Astronomicum* 1588 erwähnt, Ludolph van Ceulens *Van den Circkel* 1596, und Valentin Othos *Opus Palatinum de triangulis* 1596, so dass die Schrift erst 1596 entstanden sein kann, was jedoch nichts über den Zeitpunkt von Bürgis Aufzeichnungen sagt, nach denen Keplers Handschrift entstand.

Ursus beschreibt die cossischen Symbole zu recht als „verwickelte Benennung", auf deren Benutzung man „wohl verzichten" könne, wenn man stattdessen die Exponenten schriebe. Konsequenterweise benutzt Ursus in den folgenden Kapiteln die cossischen Symbole auch gar nicht mehr, sondern die von ihm vorgeschlagene Exponentenschreibweise.

		Charakter	*Zeichen*	
2		*Quadratum oder Quadrum, arab. Zensus q*	ʒ	*4*
3	*mal*	*Cubum*	c	*8*
4	*mit*	*Quadriquadrum, Quadratiquadratum, Zensizensus*	ʒʒ	*16*
5	*sich*	*Surdum A*	ßa	*32*
6	*selbst*	*Quadricubum, Quadraticubum, Zensicubus*	ʒc	*64*
7	*multi-*	*Surdum B*	ßb	*128*
8	*pliziert*	*Quadraquadriquadrum, Zensizensizensus*	ʒʒʒ	*256*
9	*gibt*	*Cubicubum*	cc	*512*
10	*ein*	*Quadrisurdum A, Zensisurdum A*	ʒßa	*1024*
11		*Surdum C*	ßc	*2048*
12		*Quadriquadricubum, Zensizensicubum*	ʒʒc	*4096*
13		*Surdum D*	ßd	*8192*

Der Eingangstext zu Kap. 3 benutzt Euklid, Buch IX, Satz 8.[97]

„Kap. 3: Von der Art, in der Algebra zu zählen.

Die Art und Weise, in der Algebra oder Coss zu zählen, geht aus der achten Proposition des neunten Buches von Euklid hervor, welche in Deutsch folgendermaßen lautet: In einer geometrischen Folge, die mit einer Einheit beginnt, ist 1 und danach jede zweite eine Quadratzahl. Aber 1 und danach jede dritte ist eine Kubikzahl. Danach 1 und jede sechste zugleich Quadrat- und Kubikzahl. ‹Die in der Ordnung an zweiter Stelle stehende Zahl ist die Radix oder die Wurzel einer jeden ihr nachfolgenden Zahl, von der dritten ist sie die Quadratwurzel,[98] *von der vierten die Kubikwurzel,*[99] *von der fünften die vierte Wurzel,*[100] *von der sechsten die fünfte Wurzel,*[101] *usw.› Die anderen Zahlen aber, an unteilbaren Stellen der Zahlenordnung, werden Surdi genannt. Und um diese besser unterscheiden zu können, werden sie nach dem Alphabet bezeichnet, die erste an Stelle fünf Surda A, die zweite an Stelle sieben Surda B, die dritte an Stelle elf Surda C, und so fort nach dem Alphabet.*

[93] P. Treutlein, *Die Deutsche Coß*, in: Zeitschrift für Mathematik und Physik, Suppl. zur hist.-lit. Abt., Jg. XXIV Leipzig 1879, S. 1-124; hier S. 36.
[94] Manuskript „Arithmetica Bürgii", das Kepler Ende des 16. Jh. nach Aufzeichnungen Bürgis konzipierte, im 5. Band der Pulkowoer Kepler-Manuskripte. Siehe List/Bialas, Vorwort.
[95] List/Bialas, S. 10.
[96] *Arithmetica practica*, Paris 1535.
[97] Siehe z.B. die Übersetzung von Thaer, III. Teil, Leipzig 1935, S. 52f.
[98] „der dritten Quadrata"
[99] „der vierden Cubica"
[100] „der fünfften Zensizensica"
[101] „der sechsten Surda"

Zwei aufeinander folgenden Surden stehen so zueinander, dass eine, drei oder höchsten fünf Stellen dazwischen stehen.[102]

Die Zahl, die der Einheit folgt, also die zweite Zahl, wird Radix oder Latus, eine Wurzel oder Seite genannt. Denn diese Zahl ist eine Wurzel aller folgenden Zahlen. Es werden die Namen oder Benennungen der durch die Radix festgelegten Zahlen genannt.

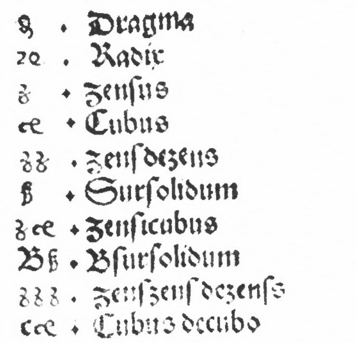


Abb. 35: Zum Vergleich: Stifel, *Rudolffs Coss* 1553, fol. 63r.

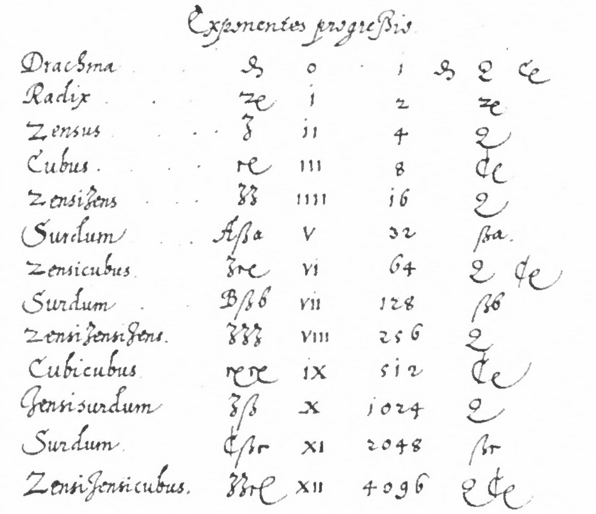


Abb. 36: Handschrift *Tractatiuncula* 1597, Blatt 15r. Cossische Bezeichnungen, Beispiel der Zweierfolge.

Die Einheit (Unität) aber wird allgemein Drachma genannt und erhält das Zeichen ℞. Die Radix wird mit r bezeichnet. Ist die Radix zum Beispiel 2, so ist diese Radix die Quadratwurzel von 4, die Kubikwurzel von 8, die vierte Wurzel von 16, die fünfte Wurzel von 32, die sechste Wurzel von 64, die siebente Wurzel von 128, die achte Wurzel von 256, die neunte Wurzel von 512 und so weiter nach obigen Bezeichnungen.[103] *Wie die Radix 2 die geometrische Zweierfolge festlegt, so legt die 3 die Dreierfolge, die 4 die Viererfolge und die 5 die Fünferfolge fest. Denn wie sich die Radix zu der Einheit oder dem Drachma verhält, so verhält sich in allen geometrischen Folgen jede nachfolgende zu ihrer vorhergehenden Zahl.*[104] *Weiterhin werden alle Zahlen in einer geometrischen Folge (außer der Einheit oder Drachma) Algebraische Quantitäten oder Cossische Quantitäten genannt: Radix ist die erste, Quadrata die zweite, Cubica die dritte, Quadriquadrata die vierte, Surda A die fünfte usw.*[105] *Sie werden wie folgt mit den gewöhnlichen oder römischen Zahlen bezeichnet, die „Characteristici" oder Exponenten*[106] *genannt werden.*

So kann man die Zahlen der geometrischen Folgen, die Zweier-, Dreier-, Vierer-, Fünfer-, oder beliebiger Folge samt ihrer cossischen Bezeichnungen beliebig fortsetzen. Die hier genannten genügen uns aber. Danach werden alle Quantitäten und auch ihre Exponenten Komponenten[107] *genannt, ausgenommen die Radix oder der Exponent 1, weil diese beim Multiplizieren und Dividieren den Zahlenunterschied nicht verändern oder componieren. Denn folgendermaßen werden durch diese die Charaktere der Quantitäten aller bis ins Unendliche nachfolgenden Zahlen gefunden: Die Zahl, deren Charakter oder Cossische Note man wissen will, zerlegt man durch Teilung zuerst durch 2, dann durch 3, durch 5, durch 7 und durch die nachfolgenden unteilbaren surdischen Zahlen, wobei immer mit der kleinsten unteilbaren Zahl anzufangen ist. Man teilt also die zu untersuchende Zahl, deren cossische Note gesucht wird, in ihre*

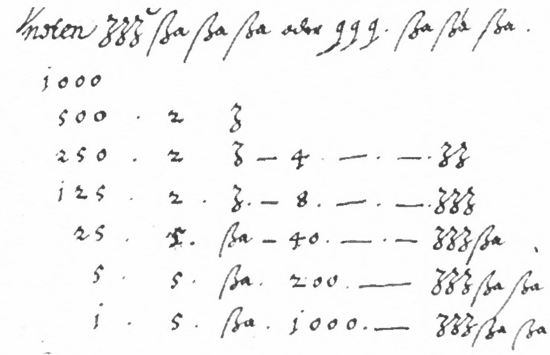


Abb. 37: Handschrift *Tractatiuncula* 1597, Blatt 16v. Primfaktorzerlegung von 1000. (In der letzten Zeile fehlt das dritte ßa.)

---

102 Das ist richtig, solange man sich wie Ursus nur für die Primzahlen bis 90 interessiert; zwischen den Primzahlen 89 und 97 gibt es zum ersten Mal 7 nicht-prime Zahlen. Dieses Beispiel nennt Ursus auch in diesem Kapitel auf Blatt 17r. Stifel nennt in der *Arithmetica Integra* 1544, fol 236r, die Primzahlen bis 107, in *Rudolffs Coß* 1553, fol. 60v, nur bis 47.

103 Wie schon oben gesagt, verwendet Ursus für die Wurzeln die Namen „die Quadrata", „die Cubica", „die Quadriquadrata", „die Surda A", die „Quadricubica" und „die Surda B".

104 Der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Zahlen ergibt die Radix.

105 Die Einheit wird an die nullte Stelle gesetzt, x^0. Die Null wird auch als Zahl verwendet.

106 Von Exponenten spricht auch schon Stifel in seiner *Arithmetica integra* 1544 auf S. 236v: „Exponentes signorum in multiplicatione adde, in divisione subtrahe."

107 „componentes"

Komponenten, aus denen sie zusammengesetzt ist. Zum Beispiel: Ich möchte gern wissen, welche cossische Notierung der hundertsten Quantität zukommt ‹oder gegeben wird›. Ich teile die 100 durch 2, bleiben 50; dieses wiederum durch 2, bleiben 25; dieses durch 5, bleiben 5; dieses wiederum durch 5 ergibt die Einheit. Also sind die Teiler 2; 2; 5; 5, welche aus der Quantitätentafel die Cossische Note ʒ ʒ ßa ßa ergeben. Diese zeigen nun den Charakter oder die Noten der hundertsten Quantität. Durch diese Zahlen 2; 2; 5; 5 wird die Zahl 100 durch das Gegenteil[108] *zur Division, der Multiplikation, componiert oder zusammengesetzt. Ebenso findet man mit der gleichen Divisionsmethode die Cossischen Noten der Zahl 1000 als ʒ ʒ ʒ ßa ßa ßa oder q q q ßa ßa ßa. Auch hier kann man wieder leicht sehen, dass durch die Umkehrung der Division, mit der Multiplikation, dieser in ihre einfachen Charaktere aufgelösten cossischen Noten, die cossische Quantität einer Zahl leicht aus der Quantitätentafel bestimmt werden kann:*

ʒ ʒ ßa ßa	*ʒ ʒ ʒ ßa ßa ßa*
2 2 5 5	*2 2 2 5 5 5*
4 20 ***100***	*4 8 40 200* ***1000***

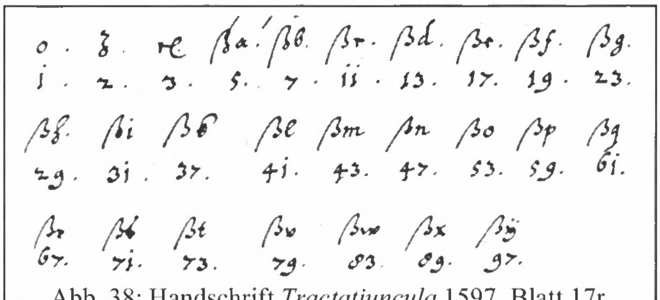


Abb. 38: Handschrift *Tractatiuncula* 1597, Blatt 17r.
Primzahlen in cossischer Quantität bis 100.

Bei den unteilbaren Zahlen aber und deren cossischen Noten zeigt das gebräuchliche Alphabet, welche Surdischen Noten zu einer surdischen Quantität gehören. Hier die Surden bis 100:

In der Praxis wird aber selten über die Zahl 100 hinausgegangen, und man kann auf die verwickelte Benennung der cossischen Quantitäten durch die Benutzung von Exponenten wohl verzichten. Ich habe das dennoch gleichsam nebenbei vermelden wollen, damit man die Bücher und Schriften der cossischen Autoren mit dem althergebrachten Gebrauch verstehen kann.

Weiter sei vermerkt, dass jede Zahl, die eine solche Quantität zählt, als der Zähler der Zahl bezeichnet wird, die angegebene Quantität, die Positionszahl in der geometrischen Folge aber ihr Nenner.[109] *Dieser* [der Nenner] *gibt an, welche Quantität die Zahl besitzt, jener* [der Zähler] *aber, wieviele von dieser Quantität vorliegen. So wird 4^{III} als 4 Cubi ausgesprochen, und das entgegen der gewöhnlichen Schreibweise der gemeinen Brüche, in welchem der Zähler oben steht und der Nenner unten. Hier aber steht der Nenner oben, der Zähler unten. Und so viel von der Art, in der Coss oder Algebra zu zählen.“*

Kapitel 4: Vom cossischen Addieren und Subtrahieren

Die cossischen Symbole verwendet Ursus folgerichtig in den folgenden Kapiteln 4 bis 7 gar nicht, sondern erst im zweiten Teil, in der Gleichungslehre. Sie sind ja zugegebenermaßen unübersichtlich, Ursus benutzt hier stattdessen die von ihm eingeführte Schreibweise mit den hochgestellten römischen Zahlen zur Angabe der Exponenten, eine Vorstufe unserer heutigen Potenzschreibweise. Es fehlt lediglich das Variablensymbol x dazwischen. Für Addition und Subtraktion wird dann der Umgang mit dieser Schreibweise erläutert, die aus unserer voll algebraisierten und mit Symbolen gefüllten Betrachtungsweise leicht einleuchtet. Sieht man in der Schreibweise 2^{III} sogleich den Term $2 \cdot x^3$, so sind die Regeln leicht nachzuvollziehen: Bei gleichem Exponenten werden die Faktoren addiert oder subtrahiert, Terme mit ungleichen Potenzen kann man nicht zusammenfassen. Es treten dann eben Terme wie $3^{III} - 5^{I}$ auf, also $3x^3 - 5x$. Mit einem lustigen Vergleich aus dem Geldwesen erläutert Ursus dies: 3 Gulden + 5 Groschen seien ja auch nicht 8, oder 3 Groschen von 5 Gulden weggenommen seien nicht 2. Ebenso sei es in der Coss.

Wissenschaftsgeschichtlich interessant ist die Frage, wie Ursus mit negativen Zahlen umgeht: es sind ihm negative Zahlen bekannt, sie werden auch als solche akzeptiert und manchmal auch benutzt, aber zur Vorsicht solle man statt $-2x^3$ doch lieber $0 - 2x^3$ schreiben. Genauso wie Ursus die Verwendung der unübersichtlichen cossischen Symbole schon vermeidet, so schlägt er vor, die unnötigen Rechensymbole für $+$ und für $-$ beim Schreiben „wegen anmutiger und angenehmer Kürze“ wegzulassen: Es sei doch einfacher und kürzer, $3^{III}\ 5^{I}$ für $3x^3 + 5x$ zu schreiben und auf das Pluszeichen zu verzichten. Eigentlich eine gute Idee; wir verzichten heute ja auch häufig auf den Malpunkt! Für $3x^3 - 5x$ schlägt Ursus vor, die 5 selbst durchzustreichen und dadurch auf das Minussymbol zu verzichten, also $3^{III}\ \cancel{5}^{I}$ zu schreiben. Gesprochen werden die Rechenzeichen immer. Seine Schreibweisevorschläge haben jedoch keine Nachahmer gefunden.

108 „contraria“

109 Es ist durchaus sinnvoll, die Quantität, also den Exponenten der Variablen, als „Nenner“ zu bezeichnen. Die „Zähler“, also die Faktoren vor den Potenzen, werden dann einfach addiert, wie bei gewöhnlichen Brüchen, wenn die Nenner gleich sind.

Ursus muss nun noch das Addieren und Subtrahieren der Potenzen erklären, wenn die Faktoren gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Zum ersten Fall gleicher Vorzeichen:
(12x+7) + (8x+4) wird ebenso wie (12x–7) + (8x–4) einfach addiert zu 20x+11 bzw. 20x–11. Ebenso einfach beim Subtrahieren bei gleichen Vorzeichen: (20x+11) – (12x+7) bzw. (20x–11) – (12x–7) werden einfach subtrahiert zu 8x+4 bzw. 8x–4. Und wenn, dem Betrage nach, der Subtrahend kleiner ist als der Minuend, dann wird umgekehrt subtrahiert und das Vorzeichen umgedreht, wie bei (24x+7) – (12x+11) oder (24x–7) – (12x–11) zu 12x–4 bzw 12x+4. Diese Regeln lernen heute unsere Schüler in der sechsten Klasse. Bei ungleichen Vorzeichen wird zum einen addiert statt subtrahiert und subtrahiert statt addiert. Beim Addieren erhält das Ergebnis (die Differenz) das Vorzeichen der größeren Zahl, beim Subtrahieren das Vorzeichen der oberen Zahl. Im Grunde zieht sich Ursus mit diesen sehr einfachen Beispielen zurück auf elementares Rechnen mit negativen Zahlen.

„Kap. 4: Vom cossischen Addieren und Subtrahieren.

Die Algebra oder Coss hat zwei unterschiedliche Teile, nämlich Algorithmus und Gleichungslehre.[110] *Unter Algorithmus versteht man die vier Grundrechenarten,*[111] *nämlich Addition und Subtraktion sowie Multiplikation und Division, und das Wurzelziehen aus einer Potenzzahl, und dies alles auf besondere cossische Art und Weise. Denn die einfache Art, dies zu tun, gehört in die Vulgar- oder einfache Arithmetik oder Rechenkunst.*

Zunächst zum Addieren und Subtrahieren mit einfachen und zusammengesetzten cossischen Zahlen. Bei einfachen Zahlen werden gleiche oder ungleiche Nenner oder Quantitäten addiert oder subtrahiert, und zwar bei gleichen Nennern einfach so: 3^{I} *und* 5^{I} *ergibt addiert* 8^{I}*. Subtrahiert man aber die kleinere von der größeren, nämlich* 3^{I} *von* 5^{I}*, so bleiben* 2^{I} *übrig.*[112] *Ebenso ergibt* 6^{III} *zu* 12^{III} *addiert* 18^{III}*, voneinander subtrahiert bleiben* 6^{III}*. Dies also genau wie gemeinhin im täglichen Gebrauch beim Addieren und Subtrahieren gleicher Sorten bei Münz, Maß und Gewicht.*

Ebenso und nicht anders geschieht auch das Addieren und Subtrahieren bei ungleichen Nennern oder Quantitäten. Genauso wie man beim Addieren und Subtrahieren ungleicher Werte der Münz, Maß und Gewicht nicht so verfährt, dass 3 Gulden und 5 Groschen 8 ergeben, oder 3 Groschen von 5 Gulden weggenommen 2 übrig bleiben, was man sonst das Hundert ins Tausend werfen nennt,[113] *ebenso verfährt man bei der Addition einfach so: 3 Gulden und 5 gr; beim Subtrahieren 5 Gulden minus 3 gr. Oder man verwendet die besonderen Zeichen für das Addieren + und das Subtrahieren ÷, also 3 fl +5gr bzw. 5 fl ÷ 3gr.*[114]

Ebenso geht man beim Addieren und Subtrahieren ungleicher cossischer Quantitäten oder Nenner vor. Denn man addiert sie mit Hilfe dieses Zeichens +, man subtrahiert sie durch dieses Zeichen ÷. Zum Beispiel $3^{III} + 5^{I}$ *bedeutet drei Cubi und fünf Radices;* $3^{III} \div 5^{I}$ *bedeutet drei Cubi minus fünf Radices.*

Im folgenden wollen wir jedoch die unnötigen Additions- und Subtraktionszeichen bei ungleichen cossischen Quantitäten weglassen und einfach so addieren: $3^{III}\ 5^{I}$*, und mit Hilfe des Durchstreichens des Subtrahenden so subtrahieren:* $3^{III}\ \cancel{5}^{I}$*.*[115] *Und soviel vom Addieren und Subtrahieren einfacher cossischer Zahlen.*

In zusammengesetzten Zahlen aber müssen beim Addieren und Subtrahieren die Cauteln[116] *des Algorithmus beachtet werden. Zunächst sei bemerkt, dass wir die Plus- und Minuszeichen in der Sprechweise beibehalten wollen, obwohl wir der anmutigen und angenehmen Kürze wegen diese Zeichen nicht schreiben. Dem Minuszeichen soll dann immer eine positive Zahl vorausgehen, oder sofern das nicht der Fall ist, zumindest eine positiv aufzufassende Null, z.B. 0÷4 oder 0.4 bedeutet vier weniger als nichts.*

Regel vom Addieren und Subtrahieren cossischer Zahlen:

---

110 „Aequation"
111 „operation in Zahlen"
112 In heutiger Schreibweise 3x + 5x = 8x bzw. 5x – 3x = 2x.
113 Verwechseln von Hundertern und Tausendern, Nichtberücksichtigung der Stellenwerte.
114 *fl* = Florin = (florentiner) Gulden; *gr.* = Groschen.
115 Das Durchstreichen geschieht in der Handschrift schräg.
116 Rudolff stellt vier Cautelen auf, durch welche die Rückführung von Gleichungen auf eine gewünschte Form ermöglicht wird (Treutlein, S. 76). Kästner, Bd I, S. 171: „Cautelen sind: was man mit der Gleichung, wie man sie bekommt, vornehmen soll, sie in die Gestalt bringen, die in den vorgegebenen Regeln vorausgesetzt werden." Cautelen sind also Umformungsvorschriften für Gleichungen, um sie in eine gewünschte Form zu bringen. Stifel in *Rudolffs Coss* 1553, fol. 148r-151r, dazu: „Cauteln nennet er aber das reduciren einer vergleychung in eine andere vergleychung."

Die Beispiele zum Addieren und Subtrahieren in heutiger Schreibweise

12x + 7 + 8x + 4 20x + 11	20x + 11 −(12x + 7) 8x + 4	12x + 7 + 8x − 4 20x + 3	20x + 3 −(8x − 4) 12x + 7
12x − 7 + 8x − 4 20x − 11	20x − 11 −(8x − 4) 12x − 7	12x + 11 + 12x − 4 24x + 7	24x + 7 −(12x − 4) 12x + 11
	24x + 7 −(12x + 11) 12x − 4	7x + 4 + 8x − 12 15x − 8	15x − 8 − (7x + 4) 8x − 12
	15x + 0 −(8x + 14) 7x − 14		

***Bei gleichem Vorzeichen** halte man sich an die gewöhnlichen Additions- und Subtraktionsregeln der Vulgar-Arithmetik, nämlich: addier gleiche Sorten der Quantitäten, subtrahier unten die kleinere Zahl von der oben stehenden größeren. Sollte aber die positive oder negative Zahl,*[117] *die von der oberen abgezogen werden soll, zu groß oder größer als die obere Zahl sein und deshalb nicht abgezogen werden können, dann subtrahiere gegensinnig die obere kleinere von der unteren größeren und kehre das Vorzeichen um.*

***Bei ungleichen Vorzeichen** aber verhalte dich nach diesen Versen: Permutes species addendo adimendoque. Signum addendo maius, superumque adimendo notando.*[118] *Statt zu Addieren wird subtrahiert und umgekehrt wird aus Subtraktion eine Addition. Beim Ergebnis der Addition setzt man das Vorzeichen der größeren, bei der Subtraktion das Vorzeichen der oberen Zahl. Ist aber an einer Stelle keine mit plus ‹oder minus› bezeichnete Zahl, von der man subtrahieren soll, so setze man an deren Stelle ‹mit widersinnigem Zeichen› eine Null und subtrahiere dann wie oben angegeben. Folgende Beispiele sollen dies erläutern:“*

Beispiele mit
gleichen Vorzeichen ‖ ungleichen Vorzeichen

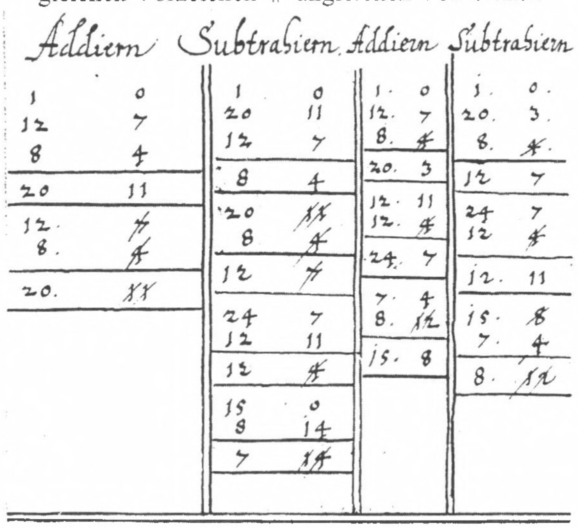


Abb. 39: Handschrift *Tractatiuncula* 1597, Blatt 21r. Öster. Nationalbibliothek, Cod. Ser. n. 10943.

Kapitel 5: Vom Multiplizieren und Dividieren mit cossischen Zahlen

Im fünften Kapitel folgt das Multiplizieren und Dividieren cossischer Zahlen, also von Termen, wobei nur die uns heute geläufigen Exponentenregeln hinzukommen, also das Addieren bzw. Subtrahieren der Exponenten und das Multiplizieren bzw. Dividieren der Koeffizienten. Ursus vergleicht sehr lang und ausführlich das Multiplizieren und Dividieren bei den normalen ganzen Zahlen mit den cossischen Zahlen, immer zugleich ein Multiplikationsbeispiel zusammen mit der Umkehrung als Division. Dabei treten auch einfache cossische Brüche auf.

„Beim Multiplizieren und Dividieren ist nun ganz allgemein die Regel vom entstehenden Exponenten zu berücksichtigen; diese besagt nämlich, wie beim Multiplizieren oder Dividieren gleicher oder ungleicher Quantitäten die Exponenten entstehen. Denn wie beim Multiplizieren und

[117] dem Betrage nach.

[118] Verändere die Zeichen beim Hinzufügen und Wegnehmen. Beim Hinzufügen schreibe das größere Zeichen und beim Wegnehmen das obere Zeichen. Im Druck steht „Signum maius addendo“ statt „Signum addendo maius“.

Dividieren in der Vulgar- oder gewöhnlichen Arithmetik der Zahlen[119] *wieder Zahlen entstehen, so entstehen beim Multiplizieren und Dividieren der Artikularzahlen*[120] *miteinander auch wieder Artikularzahlen. Zum Beispiel wird bei 3 multipliziert mit 4 das Produkt 12, hingegen wird bei 12 dividiert durch 4 der Quotient 3. Ebenso in cossischen Zahlen: Bei* 3^0 *multipliziert mit* 4^0 *wird das Produkt* 12^0*, umgekehrt wird bei* 12^0 *dividiert durch* 4^0 *der Quotient* 3^0*.*[121] *Und ebenso wird bei 3 multipliziert mit 40 das Produkt 120, und bei 120 dividiert durch 4 wird der Quotient 30. Auch in der Coss: Bei* 3^0 *multipliziert mit* 4^I *wird das Produkt* 12^I*, und bei* 12^I *dividiert durch* 4^0 *wird der Quotient* 3^I*. Denn genauso wie die Einheit beim gewöhnlichen Multiplizieren ‹und Dividieren› nichts verändert, so verändert auch das Drachma, das die cossische Einheit ist, nichts beim cossischen Multiplizieren und Dividieren. Aber wie oben vermerkt erwachsen aus dem Multiplizieren und Dividieren der Artikularzahlen miteinander ungleiche Artikularzahlen. 10 multipliziert mit 10 wird 100, 100 multipliziert mit 1000 wird 100 000. Umgekehrt wird 100 dividiert durch 10 gleich 10, und auch 1000 dividiert durch 100 wird 10. Aber 100 dividiert durch 1000 gibt einen gemeinen Bruch, es wird der Quotient* $^{100}/_{1000}$ *oder* $^{10}/_{100}$ *oder* $^{1}/_{10}$*.*[122]

Ebenso wird 1^I *multipliziert mit* 1^I *gleich* 1^{II}*, und* 1^{II} *multipliziert mit* 1^{III} *wird* 1^V*, hingegen wird* 1^{II} *dividiert durch* 1^I *gleich* 1^I*, und ebenso* 1^{III} *dividiert durch* 1^{II} *auch gleich* 1^I*. Aber* 1^{II} *dividiert durch* 1^{III} *ergibt einen cossischen Bruch, in cossischer Schreibweise also* $1^{II} / 1^{III}$ *oder* $1^I / 1^{II}$ *oder* $1 / 1^I$*. Ebenso wird* $8^{II} / 2^{III}$ *gleich* $8^I / 2^{II}$ *oder auch* $8 / 2^I$*. Wie bei den gemeinen Brüchen können Zähler und Nenner gegenseitig gekürzt werden, was den Bruch und seine Schreibweise verkleinert. Hieraus erwächst nun folgende Regel:*

Beim Multiplizieren und Dividieren cossischer Quantitäten miteinander verhält man sich wie bei den Artikularzahlen. Das heißt, dass man beim Multiplizieren cossischer Quantitäten miteinander die Zähler [Koeffizienten] *miteinander multipliziert und die Nenner oder Exponenten addiert. Beim Dividieren der größeren Quantität durch die kleinere dividiert man die Zähler der Quantitäten und subtrahiert ihre Exponenten oder Nenner. Beim Dividieren einer kleineren Quantität durch eine größere aber wird der Quotient ein Bruch, dessen Nenner der Divisor und dessen Zähler die zu teilende Zahl* [Dividend] *bildet, ganz wie beim Dividieren bei den Artikularzahlen in gewöhnlicher Rechnung oder Vulgar-Arithmetik. Besonders aber beim Multiplizieren und Dividieren zusammengesetzter oder vielfach unterschiedlicher Quantitäten ist die Regel vom* EMERGENTE SIGNO*, also vom entstehenden Vorzeichen zu beachten:*

Signa eadem signum plus. Sed diversa minus dant.[123]

Das heißt, beim Multiplizieren und Dividieren geben zwei
gleiche Zeichen plus: (+ +) oder (÷ ÷) geben +.
ungleiche Zeichen minus: (+ ÷) oder (÷ +) geben ÷.

Ansonsten handelt man beim cossischen Multiplizieren und Dividieren bei einfachen und zusammengesetzten Zahlen genauso wie beim logistischen, astronomischen[124] *oder geometrischen*[125] *Multiplizieren und Dividieren, wie folgende Beispiele erklären können.*
Multiplikationsbeispiel:[126]

$\underline{6^I\ \cancel{8}^0 \cdot 2^I\ \cancel{10}^0}$
$\cancel{60}^I\ 80^0$ [Teilprodukt mit -10]
$\underline{12^{II}\ \cancel{16}^I}$ [Teilprodukt mit 2^I]
$12^{II}\ \cancel{76}^I\ 80^0$

$\underline{6^I\ \cancel{8}^0 \cdot 2^I\ \cancel{10}^0}$
$12^{II}\ \cancel{16}^I$ [Teilprodukt mit 2^I]
$\underline{\cancel{60}^I\ 80^0}$ [Teilprodukt mit -10]
$12^{II}\ \cancel{76}^I\ 80^0$

Divisionsbeispiel:[127]
$\underline{12^{II}\ \cancel{76}^I\ 80^0 : 2^I\ \cancel{10}^0}$ [= $(6^I\ 8^0)$]
$\underline{6^I\ \cancel{8}^0}$ [Quotient]
$2^I\ \cancel{10}^0$ [Divisor]
$\underline{2^I\ \cancel{10}^0}$ [Divisor]

oder anders:
$\underline{12^{II}\ \cancel{76}^I\ 80^0 : 6^I\ \cancel{8}^0}$ [= $2^I\ \cancel{10}^0$]
$\underline{2^I\ \cancel{10}^0}$
$6^I\ \cancel{8}^0$
$\underline{6^I\ \cancel{8}^0}$

[119] hier „Digitalzahlen" genannt.
[120] Zehnerpotenzen.
[121] $3^0 = 3 \cdot x^0$ usw.
[122] In der Handschrift sind die Bruchstriche alle horizontal. Im Druck stehen aus Platzgründen manchmal Zähler und Nenner übereinander ohne Bruchstrich.
[123] Gleiche Vorzeichen ergeben plus, unterschiedliche ergeben minus.
[124] Dies ist ein Hinweis darauf, dass Ursus seine Schreibweise mit den hochgestellten römischen Zahlen von der sexagesimalen Schreibweise bei Winkeln abgeleitet hat.
[125] im Druck korrigiert zu „geodaetischen".
[126] Also $(6x-8)\cdot(2x-10) = 12x^2-76x+80$.
[127] Also $(12x^2-76x+80) : (2x-10) = 6x-8$, bzw. $(12x^2-76x+80) : (6x-8) = 2x-10$.

Kapitel 6: Vom Wurzelziehen aus cossischen Zahlen

Die Erklärungen für das Wurzelziehen beschränken sich auf Sachverhalte, die nicht aus dem elementaren Wurzelziehverfahren bei natürlichen Zahlen bekannt sind. Ursus verweist dazu dann auf die „Vulgar-Arithmetik". Wurzeln werden unterschieden nach einfachen und zusammengesetzten. Einfache Wurzeln sind die Wurzeln mit Primzahlindex, also Quadrat-, Kubik-, fünfte, siebente, elfte Wurzel usw. Aus ihnen lassen sich alle anderen Wurzeln kombinieren, so etwa wird die achte Wurzel durch dreifaches Ziehen der Quadratwurzel gefunden, und etwa die zehnte Wurzel durch Ziehen sowohl der Quadrat- als auch der fünften Wurzel. Es werden hier jedoch nur Quadrat- und Kubikwurzeln verwendet. Es wird noch erwähnt, dass die Exponenten der Quadrat-, Kubik-, vierten, fünften Wurzeln jeweils die Hälfte, der dritte, vierte, fünfte Teil der entsprechenden Exponenten der Radikanden sind, und dass man deshalb die Radikanden in Zweier-, Dreier-, Vierer- oder Fünferkolonnen einteilen muss. Die beiden Beispiele für eine Quadrat- und eine Kubikwurzel aus einem cossischen Term beschränken sich dann allerdings auf einfache Anwendung einer binomischen Formel.

„Beim Wurzelziehen aus einer Zahl ist zunächst zu bemerken, dass es unzählig viele Arten von Wurzeln gibt, nämlich genau so viele verschiedene Arten wie es cossische Quantitäten gibt, und dies sind unendlich viele. Wie die Quantitäten teilt man sie in einfache Wurzeln[128] *und in zusammengesetzte Wurzeln.*[129] *Bei Zahlen mit unteilbaren Quantitäten, aus denen man einfache Wurzeln ziehen kann, gibt es drei Sorten, nämlich Quadrat-, Kubik- und surdische Wurzeln. Von den letzten gibt es ebenso unendlich viele, wie es unendlich viele Surden gibt, nämlich Surden-A-Wurzeln, Surden-B-Wurzeln, Surden-C-Wurzeln, Surden-D-Wurzeln usw.*

Zusammengesetzte Wurzeln sind solche, die aus den einfachen entstehen und mit deren Hilfe gezogen werden können, bzw. die aus teilbaren Quantitäten entstehen. Auch hiervon gibt es unendlich viele, wie es auch unendlich viele teilbare cossische Quantitäten gibt. Zum Beispiel Quadriquadrata [vierte Wurzel], *Quadricubica* [sechste Wurzel], *Quadriquadriquadrata* [achte Wurzel], *Cubicubica* [neunte Wurzel], *Quadrisurda* [zehnte Wurzel] *und so unendlich weiter. Nun werden aber die zusammengesetzten Wurzeln, wie oben gesagt, mit Hilfe der einfachen Wurzeln nach einer Primfaktorzerlegung der Exponenten*[130] *sukzessive gezogen. So wird zum Beispiel die vierte oder die achte Wurzel mit Hilfe der einfachen Quadratwurzel gezogen, die neunte Wurzel mit Hilfe der einfachen dritten Wurzel, die sechste Wurzel mit Hilfe der einfachen Quadrat- und der Kubikwurzel, die zehnte Wurzel mit Hilfe der einfachen Quadrat- und Surden-A-Wurzel. Daher kann man auch etliche zusammengesetzte Wurzeln ziehen, wenn man nur die dreierlei einfachen Wurzeln beherrscht. Es soll im folgenden das Ziehen der beiden wichtigsten einfachen Wurzeln, der Quadrat- und der Kubikwurzel aus cossischen Zahlen gelehrt werden, denn das Ziehen der surdischen Wurzeln wird üblicherweise nicht gebraucht. Wie man die Wurzeln aus gewöhnlichen Zahlen zieht, gehört in die Vulgar-Arithmetik.*

Aus dem bisher über die geometrischen Folgen Gesagten wissen wir, dass viele Quantitäten aus ihren Wurzeln entstehen, die ein- oder mehrfach mit sich selber multipliziert worden sind und dass durch solche Multiplikation einer Quantität mit sich selbst die Exponenten verdoppelt werden. Multipliziert man nämlich die Quantitäten miteinander, so werden ja die Exponenten oder Nenner oder Noten addiert. Daher entstehen aus der Multiplikation von Absolutzahlen wieder Absolutzahlen mit einem Drachma oder derselben Note wie die Koeffizienten. Daher kann man aus Absolut- oder einfachen Zahlen alle Wurzeln ziehen ohne Schwierigkeiten.

Dies gilt aber nicht so für cossische Quantitäten oder Zahlen mit cossischen Noten oder Exponenten. Sofern die kleinste Quantität mit einer Note oder einem Exponenten versehen ist, der
zwei/drei/vier/fünf *zum Teiler hat, kann man eventuell aus dieser cossischen Zahl die*
zweite/dritte/vierte/fünfte Wurzel ziehen. Hat man nun eine Wurzel gezogen, so entsteht die Note der kleinsten Quantität aus der Regel der Division: denn der größten oder kleinsten Quantität, aus der die Wurzel gezogen wurde,
halber/dritter/vierter/fünfter Teil zeigt an die Noten der größten oder kleinsten Quantität der gefundenen Quadrat-/Kubik-/vierten /fünften Wurzel.

Ebenso werden auch die Wurzeln aus einfachen oder zusammengesetzten cossischen Zahlen gezogen. Bei einfachen Zahlen benötigt man keine große Rechenkunst, keinen Unterricht und keinen Unterweisenden: denn es geschieht nicht anders als in der Vulgar-Arithmetik und beim Ziehen einfacher Wurzeln aus einfachen Zahlen. Bei zusammengesetzten Zahlen aber geschieht dies wie in der Logistica Astronomica[131] *oder Geodaetica, mit allen Regeln*[132] *und mit Plus- und Minuszeichen entsprechend der Regel der Division. Durch das Setzen der Punkte kennzeichnet man, von rechts*

[128] „radices primitivas".
[129] „radices ortivas".
[130] „exponenten resolution".
[131] wie im Hexadezimalsystem in der Astronomie.
[132] „Cautelen"

anfangend, anstelle der gewöhnlichen Ziffern, aus welchen Quantitäten die Quantitäten der Wurzel bestimmt werden. Dies soll durch folgende Beispiele deutlich gezeigt werden. Beispiel für das Ziehen einer Quadratwurzel/Kubikwurzel:

IV	*III*	*II*
16	*48*	*36*
•		•
II		I
4		6
duplum	8	6
	48	36

II	*III*	*IV*
36	*48*	*16*
•		• [133]
I		II
6		4 [134]
6		8
36		48

$$\sqrt{16x^4 + 48x^3 + 36x^2} = 4x^2 + 6x$$

bzw.

$$\sqrt{36x^2 + 48x^3 + 16x^4} = 6x + 4x^2$$

VI	*V*	*IV*	*III*
64	*288*	*432*	*216*
•			•
II			*I*
4			*6*
Triplum		*12*	*216*
	4	*6*	
	48	*72*	
		6	
	288	*432*	*216*

$$\sqrt[3]{64x^6 + 288x^5 + 432x^4 + 216x^3} = 4x^2 + 6x$$

Kap. 7: Von Brüchen oder gebrochenen cossischen Zahlen

Das letzte Kapitel der Handschrift behandelt kurz cossische Brüche, solche mit einfachen Zahlen wie $^{3}/_{4II}$ für $3:4x^2$ oder mit zusammengesetzten Zahlen wie $^{3I+5}/_{4}$ für (3x+5):4. Die Rechenregeln unterscheiden sich nicht von denen in der Vulgar-Arithmetik, trotz der unterschiedlichen Bezeichnungsweise. Beim Addieren und Multiplizieren wird ausdrücklich das „kreuzweise Multiplizieren" genannt, das Dividieren wird durch Multiplizieren mit dem Kehrwert durchgeführt. Es folgen dann Beispiele zum Addieren und Subtrahieren, wobei in der gedruckten Fassung nur die ersten 5 Beispiele übernommen wurden. Die Beispiele zum Multiplizieren und Dividieren in der Handschrift *Tractatiuncula* 1597 und in der gedruckten Fassung 1601 sind nicht identisch, Ursus hat andere gewählt und das Prinzip der Umkehrrechenarten in den Vordergrund gestellt. Zum Wurzelziehen sind in der gedruckten Fassung gar keine Beispiele mehr, sie sind in der Handschrift auch sehr elementar.

„Die Coss oder Algebra kennt außer den gewöhnlichen in der Vulgar-Arithmetik gebräuchlichen und in Rechnungen üblichen Brüchen noch andere und besondere Brüche oder eine gebrochene Zahlenart, mit Benennung der Quantitäten durch Noten oder Nenner. Und diese Brüche können mit einfachen oder zusammengesetzten Zahlen gebildet werden. Mit einfachen Zahlen können solche Brüche gebildet werden wie $\frac{3}{4}\,^{II}$ [$\frac{3}{4}\cdot x^2$] *oder* $^{3II}/_{4}$ [$3x^2 : 4$], *das wird gesprochen als drei Viertel eines Quadrates, was zu verstehen ist, als dass drei Quadrata geteilt werden durch 4. Und auch all solche Brüche wie* $^{3}/_{4II}$ [$3:(4x^2)$], *die aus der Division erwachsen, ebenso auch solche mit zwei Noten wie* $^{3I}/_{4III}$ [$(3x) : (4x^3)$], *die aber durch Reduzierung gleich dem soeben genannten Bruch* $^{3}/_{4II}$ *sind. Denn es werden die Noten gegeneinander aufgehoben, bis die obere Zahl oder der Zähler des Bruches zu einer absoluten oder einfachen Zahl wird, genau wie bei den gemeinen Artikularzahlen die Nullen gegeneinander aufgehoben werden.*

Mit zusammengesetzten Zahlen begegnen uns solche Brüche wie $(3^{I}+5):4$, *gesprochen drei Radizes plus fünf, geteilt durch 4. Obwohl sich diese cossischen Brüche in der Bezeichnungsweise von der Bezeichnungsweise der gemeinen Brüche in der Vulgar-Arithmetik unterscheiden, wird der Algorithmus beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und beim Wurzelziehen auf ganz gleiche Weise vollbracht. Denn beim Addieren und Subtrahieren werden die ungleichen Nenner, nach eventuell vorherigem Kürzen, miteinander multipliziert, woraus der neue Nenner entsteht; die Zähler, die durch kreuzweises Multiplizieren entstehen, werden dann addiert oder voneinander subtrahiert, der kleinere vom größeren.*

[133] In der Handschrift „+", im Druck „•"; sie zeigen für die Quadratwurzel die geraden Exponenten, für die Kubikwurzel die durch 3 teilbaren Exponenten.

[134] In der Handschrift fälschlich 8, im Druck korrigiert zu 4.

Additions- und Subtraktionsbeispiele in der Handschrift 1597, Blatt 29v.
Statt des Gleichheitszeichens steht *ft* für facit, oder *rest* bei der Subtraktion.
Beispiele 6, 7 nur in der Handschrift, nicht im Druck.

$$\frac{2}{5}x \;\; \textit{und} \;\; \frac{3}{5}x = \frac{5}{5}x \;\textit{oder}\; 1x \qquad\qquad \frac{2}{5}x \;\textit{von}\; \frac{5}{5}x \;\textit{oder}\; 1x = \frac{3}{5}x$$

$$\frac{2x}{3} \;\; \textit{und} \;\; \frac{3x}{4} = \frac{17x}{12} \;\textit{oder}\; 1\frac{5}{12}x \qquad\qquad \frac{2x}{3} \;\textit{von}\; \frac{17x}{12} \;\textit{oder}\; 1\frac{5}{12}x = \frac{3x}{4}$$

$$\frac{2}{3}x^2 \;\; \textit{und} \;\; \frac{3}{4}x = \frac{8x^2+9x}{12} \qquad\qquad \frac{2}{3}x^2 \;\min\; \frac{3}{4}x = \frac{8x^2-9x}{12}$$

$$\frac{2}{3x} \;\; \textit{und} \;\; \frac{3}{4x^2} = \frac{8x^2+9x}{12x^3} \qquad\qquad \frac{2}{3x} \;\min\; \frac{3}{4x^2} = \frac{8x^2-9x}{12x^3}$$

$$\frac{2x}{3} \;\; \textit{und} \;\; \frac{3}{4x^2} = \frac{8x^3+9}{12x^2} \qquad\qquad \frac{2x}{3} \;\min\; \frac{3}{4x^2} = \frac{8x^3-9}{12x^2}$$

$$\frac{2}{3}x \;\; \textit{und} \;\; \frac{3x^2}{4x^3} = \frac{8x^4+9x^2}{12x^3} \qquad\qquad \frac{2x}{3} \;\min\; \frac{3x^2}{4x^3} = \frac{8x^4-9x^2}{12x^3}$$

$$\frac{2}{3x} \;\; \textit{und} \;\; \frac{3}{4x-2} = \frac{17x-4}{12x^2-6x} \qquad\qquad \frac{2}{3x} \;\min\; \frac{3}{4x-2} = \frac{1x+4}{12x^2-6x} \;\; *$$

* *Die letzte Aufgabe ist falsch, sie müsste* $\frac{3}{4x-2} \min \frac{2}{3x}$ *heißen.*

Beim Multiplizieren und Dividieren aber, da es sich doch um Umkehroperationen handelt,[135] *beim Dividieren mit gestürztem Divisor, werden die oberen Zahlen mit den oberen und die unteren mit den unteren multipliziert. Die Wurzeln zieht man sowohl aus den Zählern als auch aus den Nennern, alles wie bei gewöhnlichen Brüchen. Dies sollen die folgenden Beispiele verdeutlichen, und so ist auch in allen Rechenarten bei zusammengesetzten* [cossischen] *Brüchen zu verfahren.*

Multiplikations- und Divisionsbeispiele in der Handschrift 1597, Blatt 30r.
Statt des Gleichheitszeichens steht *ft* für facit. Statt „:" steht „in".

$$\frac{2}{3x^2} \;\textit{mit}\; \frac{3x}{4} = \frac{1x}{2x^2} \qquad\qquad \frac{1x}{2x^2} : \frac{2}{3x^2} = \frac{3x}{4}$$

$$\frac{1x}{2x^2} : \frac{3x}{4} = \frac{2}{3x^2}$$

$$\frac{2x}{3} \;\textit{mit}\; \frac{3}{4x} = \frac{1x}{2x} \;\textit{oder}\; \frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{1}{2} : \frac{2x}{3} = \frac{3}{4x}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4x} = \frac{2x}{3}$$

$$\frac{2x}{3} \;\textit{mit}\; \frac{1x+4}{4} = \frac{2x^2+8x}{12} \qquad\qquad \frac{2x^2+8x}{12} : \frac{2x}{3} = \frac{1x+4}{4}$$

$$\frac{2x^2+8x}{12} : \frac{1x+4}{4} = \frac{2x}{3}$$

$$\frac{3x+4}{5x^2-2x} \;\textit{mit}\; \frac{4x-4}{5x^2+4} = \frac{12x^2+4x-16}{25x^4+20x^2-10x^3-8x}$$

$$\frac{12x^2+4x-16}{25x^4+20x^2-10x^3-8x} : \frac{4x-4}{5x^2+4} = \frac{3x+4}{5x^2-2x}$$

$$\frac{12x^2+4x-16}{25x^4+20x^2-10x^3-8x} : \frac{3x+4}{5x^2-2x} = \frac{4x-4}{5x^2+4}$$

135 „contraria species"

Multiplikations- und Divisionsbeispiele im Druck, Blatt C3v.
Statt des Gleichheitszeichens steht *ft* für facit. Statt „:" steht „durch".

$$\frac{2}{5x}\ \textit{mit}\ \frac{5}{3x}=\frac{10}{15x^2}\ \textit{oder}\ \frac{2}{3x^2} \qquad \frac{2}{3x^2}:\frac{2}{5x}=\frac{10}{6x}\ \textit{oder}\ \frac{5}{3x}$$

$$\frac{3}{5x^2}\ \textit{mit}\ \frac{4x}{5}=\frac{12x}{25x^2}\ \textit{oder}\ \frac{12}{25x} \qquad \frac{12}{25x}:\frac{3}{5x^2}=\frac{60x^2}{75x}\ \textit{oder}\ \frac{4x}{5}$$

$$\frac{2x}{3}\ \textit{mit}\ \frac{3x}{4}=\frac{6x^2}{12}\ \textit{oder}\ \frac{1x^2}{2} \qquad \frac{1x^2}{2}:\frac{2x}{3}=\frac{3x^2}{4x}\ \textit{oder}\ \frac{3x}{4}$$

$$\frac{2x}{3}\ \textit{mit}\ \frac{1x+4}{1}=\frac{2x^2+8x}{3} \qquad \frac{2x^2+8x}{3}:\frac{2x}{3}=\frac{1x+4}{1}$$

$$\frac{3x+4}{5x^2-2x}\ \textit{mit}\ \frac{4x-4}{5x^2+4}=\frac{12x^2+4x-16}{25x^4+20x^2-10x^3-8x} \qquad \frac{12x^2+4x-16}{25x^4+20x^2-10x^3-8x}:\frac{3x+4}{5x^2-2x}=\frac{4x-4}{5x^2+4}$$

Quadratwurzelbeispiele in der Handschrift, Blatt 30v. Wurzeln treten nicht als Haken auf, an der Stelle des Gleichheitszeichens steht „radix" bzw. „radix cubica".

$$\sqrt{\frac{9}{16}x^2}=\frac{3}{4}x \qquad \sqrt[3]{\frac{27}{64}x^3}=\frac{3}{4}x$$

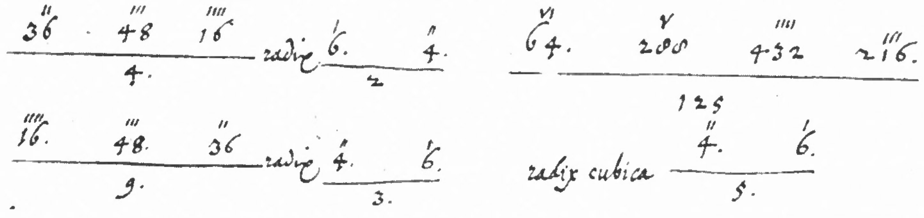
$$\sqrt{\frac{16}{25}x^6}=\frac{4}{5}x^3 \qquad \sqrt[3]{\frac{64}{125}x^6}=\frac{4}{5}x$$

$$\sqrt{1\frac{7}{9}x^2}=1\frac{1}{3}x \qquad \sqrt[3]{2\frac{10}{27}x^3}=1\frac{1}{3}x$$

$$\sqrt{\frac{36x^2+48x^3+16x^4}{4}}=\frac{6x+4x^2}{2} \qquad \sqrt[3]{\frac{64x^6+288x^5+432x^4+216x^3}{125}}=\frac{4x^2+6x}{5}$$

$$\sqrt{\frac{16x^4+48x^3+36x^2}{9}}=\frac{4x^2+6x}{3}$$

Abb. 40: Handschrift *Tractatiuncula* 1597. Die letzten drei Beispiele:



Allgemeiner Anhang: Von der Probe.

Sowohl bei den cossischen Brüchen wie auch bei den ganzen Zahlen werden die erhaltenen Ergebnisse durch die jeweiligen Gegenoperationen aufs genaueste überprüft, beim Addieren durch Subtrahieren, beim Multiplizieren durch Dividieren, beim Wurzelziehen durch Multiplikation mit sich selbst. Auch die gewöhnliche cossische Probe, indem man einen Wert für Radix oder 1x einsetzt ‹oder sie als Münz-, Maß- oder Gewichtseinheit interpretiert›, ist nicht zu verwerfen, obwohl sie nur bei den Beispielen des Algorithmus gilt und nicht bei den Beispielen der jetzt folgenden Gleichungslehre. Soviel vom Algorithmus, dem ersten Teil der Coss oder Algebra. Es folgt nun der zweite und anspruchsvollere Teil, nämlich die Gleichungslehre.

Ende des ersten Algebrateiles."

Schluss

Es ist interessant zu erwähnen, dass die cossische Schreibweise und ihre Symbole für die Potenzen der Variablen auch nach Viëta nicht außer Gebrauch kamen. Rechenmeister behielten sie bis mindestens ins 18. Jh. bei. Paul Halcke, Mitglied der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg und Schreib- und Rechenmeister in Buxtehude verwendet sie in seinem *Sinnenkonfekt* 1719 noch durchgängig. Dieses Buch, „gleich wie das Confect eine Delicatesse des Mundes soll es eine Ergetzung des Gemüths und Belustigung der Sinnen seyn“, ist kein Rechenbuch mehr, wie es die Rechenmeister des 16. Jh. schrieben. Es dient lediglich der Erbauung für Interessierte und nicht mehr einer praktischen Anwendung, sondern „es giebet eine sonderbare Freude und Vergnügung, wenn man ein künstlich Problema solviret“.[136] Paul Halcke beschreibt darin, unter Verwendung der cossischen Symbole für Radix, Zensus, Cubus, Zens de Zens, Sursolidus, Zensicubus usw., „die Regeln von der Quadrat- und Cubic-Coss ... damit man die Bücher der vorigen Zeiten desto besser verstehen könne“. Für Addition und Subtraktion werden die üblichen Zeichen + und ÷ verwendet, für die Multiplikation ∗, für die Division eine Klammer „ (“ oder der bekannte Bruchstrich, als Gleichheitszeichen = . In diesem Buch gibt Paul Halcke auch einige Reimaufgaben, die sein Lehrer Hinrich to Aspern verfasst hat.[137] Eine dieser Reimaufgaben behandelt die zweite vergebliche Belagerung von Wien durch die Türken 1683 und verwendet eine Gleichung mit cossischen Symbolen zur Lösung der Frage, wie viele Türken vor Wien gefallen sind. Die letzten 9 Zeilen des Gedichtes (insgesamt 43 Zeilen) lauten:[138]

„Die aber so vorhin für Wien geblieben waren,
Hat man durch eine Schrift des Groß-Veziers erfahren
Aus seiner Cantzeley, daß deren Zahl, verdeckt
Gerad acht tausend, und noch zwey und neuntzig Eckt,
Und steht in gleichem Werth mit diesen Quantitäten:
1 ʒc + 2ß ÷ 13 ʒʒ ÷ 42 c + 4025 ʒ ÷ 4004 r + 32.
Drum rechne nun, wie viel für Wien sind abgetreten
Vom Fecht-Platz in den Todt, durch deutsche Waffen-Macht,[139]
Und da, nach Hundes Art, in Tellus[140] Klufft gebracht?
Facit 48544 Türken.“

Die Aufgabe verwendet also den Term $x^6 + 2x^5 - 13x^4 - 42x^3 + 4025x^2 - 4004x + 32$ und setzt ihn gleich „der vierten 8092eck-Zahl“, die man als $(x:2)\cdot[2 + (x-1)\cdot 8090]$ berechnet.[141] Die Gleichung lässt sich dann reduzieren zu $(x-4)\cdot(x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 12x - 8) = 0$, und hat die Lösung $x = 4$. Die vierte 8092eck-Zahl ist somit $2\cdot[2 + 3\cdot 8090] = 48544$. Mit dieser vierten 8092eck-Zahl meint to Aspern die vierte sogenannte Pyramidenzahl; sie ist die Summe der ersten vier 8092eck-Zahlen, der Polygonalzahlen. Die Polygonalzahlen entstehen aus der Reihe der natürlichen Zahlen, indem man nicht jeweils die folgende addiert, sondern immer 8090 Zahlen auslässt:

$1 + 8090 + 2\cdot 8090 + 3\cdot 8090 + 4\cdot 8090 + \ldots$, also 1; 8091; 16181; 24271; ...

Die Pyramidenzahlen sind dann 1; 8092; 24273; 48544; ... , nämlich die Summe der Polygonalzahlen.[142]

Allgemein: Man bildet zuerst die p-Eckszahlen: $1;\ 1 + (p-2);\ 1 + 2\cdot(p-2);\ 1 + 3\cdot(p-2);\ \ldots$
dann die Polygonalzahlen als deren Summe:
$1;\ 2 + (p-2);\ 3 + 3\cdot(p-2);\ 4 + 6\cdot(p-2);\ \ldots;\ x + x\cdot(x-1):2\cdot(p-2);\ \ldots$
Hier war für $x=4$ und $p=8092$ die Zahl $4+6\cdot 8090 = 48544$ gesucht. Der Term für die x-te Pyramidenzahl ist $x\cdot[1 + (x-1):2\cdot(p-2)] = (x:2)\cdot[2 + (x-1)\cdot(p-2)]$, wie bei Paul Halcke angegeben.

---

[136] Paul Halcke, *Sinnen-Confect*, Hamburg 1719, Vorwort Seite 3.

[137] S. 225. Siehe auch Rießen, *Ein ungedrucktes Rechenbuch aus dem Jahre 1676*, Glückstadt 1894,

[138] Ich danke Herrn Jürgen Kühl in Tremsbüttel-Sattenfelde für den Hinweis auf Halckes *Sinnen-Confect* und speziell auf dieses Gedicht.

[139] Der Gedichtautor Hinrich to Aspern verschweigt, dass es wesentlich die Truppen des polnischen Königs Johann III. Sobieski waren, die die Türken vertrieben.

[140] Tellus, das Erdreich, als Göttin eng mit Gaia und Ceres verbunden.

[141] Siehe Rießen, S. 23.

[142] Siehe Tropfke Bd. 1, Berlin 4. Aufl. 1980, S. 346f.

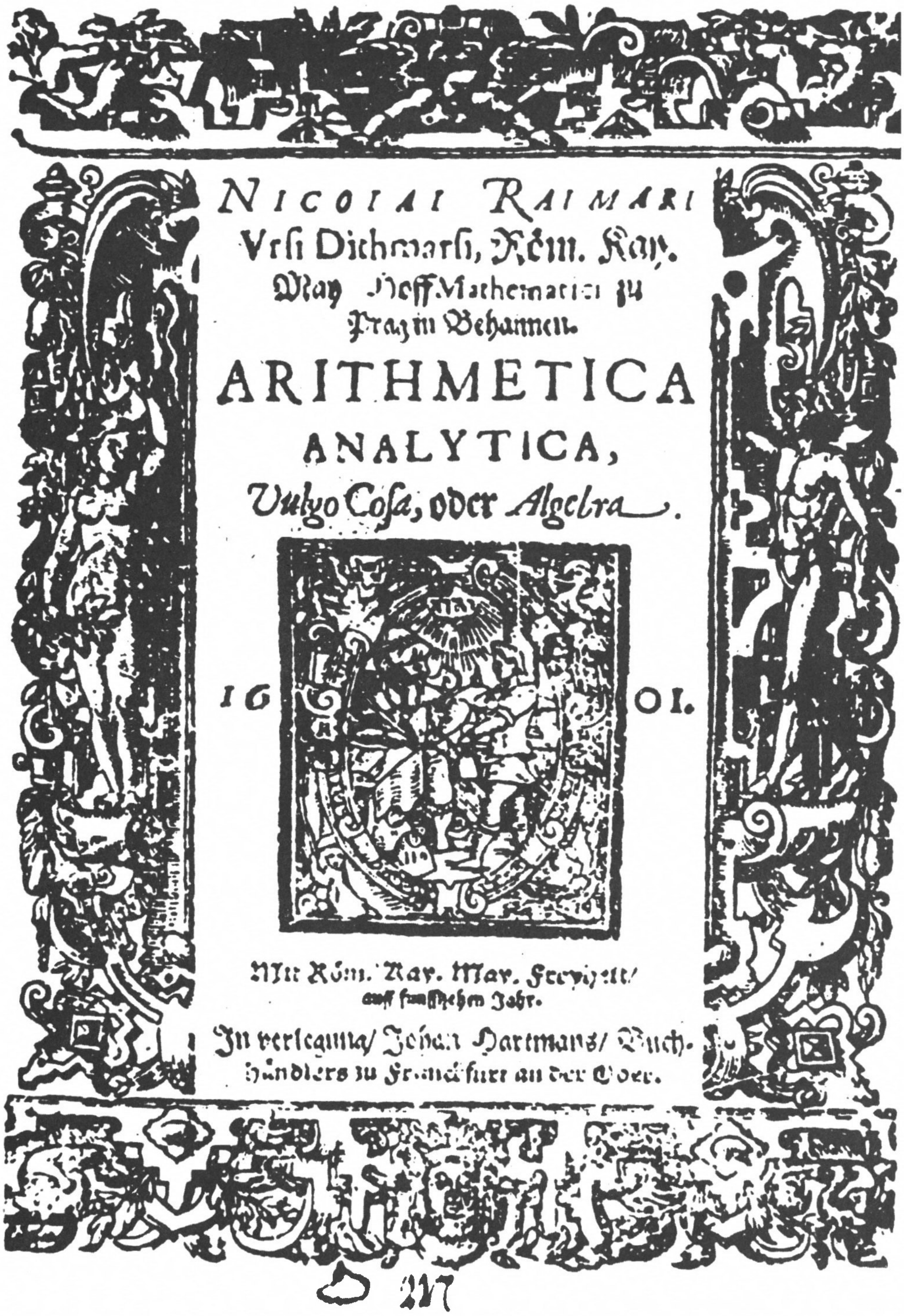


Abb. 41: Titelblatt der *Arithmetica Analytica* 1601.
Studienbibliothek Dillingen, XVI 1394.

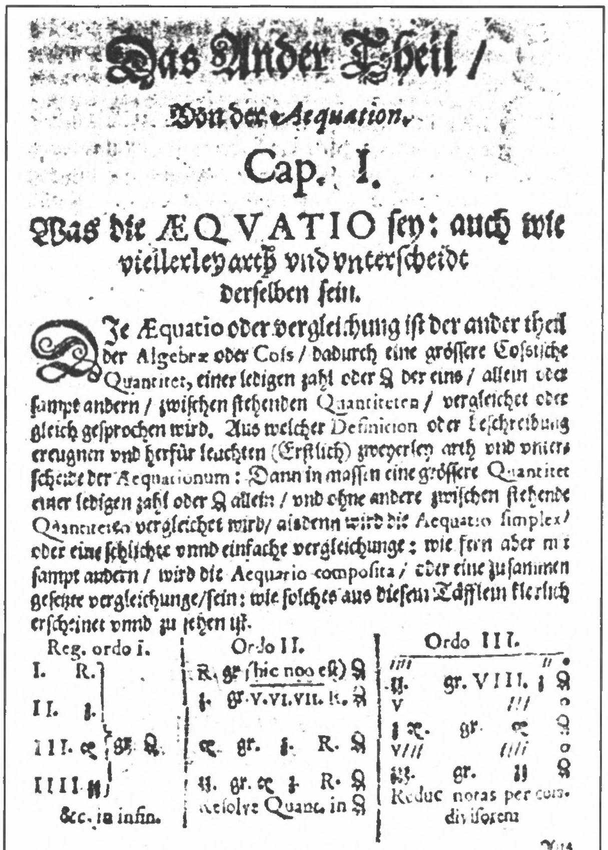
Teil 2: Arithmetica Analytica

Einleitung

Dieser zweite Teil der Coss oder Algebra beinhaltet die Gleichungslehre und ist nicht als Handschrift erhalten; die *Tractatiuncula* enden nämlich mit dem ersten Teil, dem Algorithmus. In der gedruckten Fassung, dann *Arithmetica Analytica* genannt, die posthum 1601 bei Johann Hartmann in Frankfurt/Oder erscheint, werden gegenüber der Handschrift *Tractatiuncula* 1597 nur wenige Änderungen vorgenommen, wahrscheinlich von Ursus selbst. Diese *Arithmetica Analytica* enthält als ersten Teil den „Algorithmus", der oben beschrieben wurde, jedoch ohne Widmungsschreiben und ohne das Kapitel über die Geschichte der Coss, und als zweiten Teil die Gleichungslehre in fünf Kapiteln. Das Folgende wird aus dieser *Arithmetica Analytica* zitiert.[143]

Der Buchdrucker und Verleger Johann Hartmann, geboren am 3. März 1537, stammt aus Mehlis bei Zella-St.Blasien, erlernte in Meiningen das Buchbinderhandwerk. In der Matrikel der Universität Frankfurt/Oder tritt er im Wintersemester 1559/60 auf, was aber nicht heißt, dass er dort studierte, sondern dass er sich als „civis academicus" in die Jurisdiktion der Universität begab und dadurch Privilegien erhielt. 1563 erwarb er hier als Buchbinder den Meisterbrief, heiratete im gleichen Jahr die Tochter des Buchhändlers Sebastian Johann von Ingolstadt, gliederte seinem Unternehmen 1588 einen Verlag und 1594 eine Druckoffizin an. Er starb am 21. Mai 1607 in Frankfurt/Oder. Sein Sohn Friedrich, etwa 1565 geboren, im Sommer 1579 in der Matrikel der Universität verzeichnet, seit 1588 selbst Buchbindermeister und Mitverleger, seit 1594 auch Drucker, leitete seit dem Tode seines Vaters den Betrieb bis 1631 weiter, als durch die Erstürmung der Stadt durch die Schweden im April 1631 die Offizin zum Erlöschen kam.[144] Im Verlagsverzeichnis der Hartmanns, dem *Verzeichnis der Bücher welche von Hansen und Friderichen Hartmann anno 1606* angeboten werden, ist auch das Buch von Ursus aufgeführt: „Arithmetica oder CoßRechenbuch Nicolai Raimari".[145]

Der Druck ist nicht sehr gut. Abgesehen vom undeutlichen Druckbild treten, anders als bei Ursus sonst üblich, viele Druckfehler auf, es fehlen gelegentlich Zahlen bei den Beispielen, oder sie sind nicht wie nötig durchgestrichen, es ist + statt der römischen X gedruckt, insbesondere fehlen des öfteren cossische Symbole oder der Drucker liest statt ʒ fälschlich die Zahlen 18 oder 13. Solche einfachen Druckfehler habe ich stillschweigend korrigiert, ohne im Einzelnen darauf hinzuweisen. Ein Korrekturlesen des Andruckes durch einen Mathematiker hat sicherlich nicht stattgefunden, Ursus war bereits verstorben. Über die schlechte Qualität der Drucke bei Johann und Friedrich Hartmann urteilt Ernst Consentius[146] zu Recht: „ist bei viel zusammengedrängterem Satze mit weit geringerer Sorgfalt und mit weniger Geschmack gesetzt und gedruckt" als von seinem Konkurrenten Andreas Eichhorn. Auch Heinrich Grimm[147] bemängelt die geringe Druckqualität bei Hartmann: „Die Verlegertätigkeit der Hartmann war von hohem kulturellen Wert. Dieses günstige Urteil kann jedoch nicht auf Ausstattung



Das Ander Theil /
Von der Aequation.
Cap. I.
Was die ÆQVATIO sey: auch wie vielerley arth vnd vnterscheidt derselben sein.

DJe Æquatio oder vergleichung ist der ander theil der Algebræ oder Cois / dadurch eine grössere Cossische Quantitet, einer ledigen zahl oder N der eins / allein oder sampt andern / zwischen stehenden Quantiteten / vergleichet oder gleich gesprochen wird. Aus welcher Definition oder beschreibung ereugnen vnd herfür leuchten (Erstlich) zweyerley arth vnd vnterscheide der Aequationum: Dann in massen eine grössere Quantitet einer ledigen zahl oder N allein / vnd ohne andere zwischen stehende Quantiteten vergleichet wird / alsdenn wird die Aequatio simplex / oder eine schlichte vnnd einfache vergleichunge: wie fern aber mit sampt andern / wird die Aequatio composita / oder eine zusammen gesetzte vergleichunge / sein: wie solches aus diesem Täfflein klerlich erscheinet vnnd zu sehen ist.

Reg. ordo I. | Ordo II. | Ordo III.
I. R. | R. gr. (hic nog est) N | gr. VIII. N
II. | gr. V. VI. VII. R. N |
III. gr. N. | gr. R. N |
IIII. | gr. R. N |
&c. in infin. | resolve Quant. in N | Reduc notas per communem divisorem

Aus

Abb. 42: *Arithmetica Analytica* 1601, Druck Hartmann, Blatt C4v

[143] Studienbibliothek Dillingen, Signatur XVI 1394.

[144] Heinrich Grimm, *Die Matrikel der Universität Frankfurt/Oder aus den Jahren 1506 bis 1648*, in: Börsenblatt für den Deutschen Buchhandel, Frankf. Ausgabe, 16. Jahrgang, Nr. 50a, 27. Juni 1960, S. 1076-1078. Heinrich Grimm, *Der Verlag und die Druckoffizin der Buchbinder Hansen und Friderichen Hartmann*, in: Gutenberg-Jahrbuch Bd. 35, 1960, S. 237-254.

[145] Ernst Consentius, *Von Druckkosten Taxen und Privilegien*, in: Forschungen zur Brandenburgischen und Preußischen Geschichte, Bd. 34, 1922, S. 215-221.

[146] *Von Druckkosten, Taxen und Privilegien*, siehe vorige Fußnote.

[147] *Der Verlag und die Druckoffizin Hartmann*, in: Gutenberg-Jahrbuch, Bd. 35, 1960, S. 253.

und Druck der Hartmannschen Buchwerke ausgedehnt werden, die gegenüber den einschlägig guten Leistungen von Johan Eichhorn abfielen." Ich kann diesem Urteil beipflichten. Als Beleg mag die erste Seite des zweiten Teiles dienen.

Kapitel I: Was sind Gleichungen, welche und wie viele Arten gibt es?

Im ersten Kapitel dieses zweiten Teiles unterscheidet Ursus drei Ordnungen von Gleichungen. In der ersten Ordnung fasst er alle Gleichungen zusammen, in der eine cossische Quantität, also eine Potenz der Variablen, direkt gleichgesetzt ist mit dem Drachma, mit einer absoluten Zahl. Es sind dies also Gleichungen der Form $a{\cdot}x^n = b$ (a,b positiv, n natürlich), die von ihm als „einfache Gleichungen" benannt werden. Die zweite Ordnung umfasst „zusammengesetzte Gleichungen", die aus mehreren cossischen Quantitäten zusammengesetzt sind, wobei auch einige Potenzen fehlen dürfen; Gleichungen sind immer nach der höchsten Potenz aufgelöst. In der dritten Ordnung fasst Ursus Spezialfälle zusammen, nämlich solche Gleichungen, bei denen durch Substitution einer Variablenpotenz einfachere Gleichungen entstehen; das sind also biquadratische und bikubische Gleichungen etc ($a{\cdot}x^4 = \pm b{\cdot}x^2 \pm d$; $a{\cdot}x^6 = \pm bx^3 \pm d$; $a{\cdot}x^8 = \pm b{\cdot}x^4 \pm d$). Die verschiedenen Gleichungen gehören dann, nach dem höchsten Exponenten sortiert, zur Radixcoss ($a{\cdot}x = d$), zur Zensicoss ($a{\cdot}x^2 = d$; $a{\cdot}x^2 = b{\cdot}x \pm d$; $a{\cdot}x^2 = d - b{\cdot}x$), zur Cubicoss ($a{\cdot}x^3 = d$; $a{\cdot}x^3 = \pm b{\cdot}x^2 \pm c{\cdot}x \pm d$ in den möglichen Vorzeichenkombinationen), und entsprechend zur Zensizensicoss für Exponent 4. Noch höhere Potenzen seien zwar möglich, werden aber hier nicht betrachtet.

Während Ursus im ersten Teil, in den Tractatiuncula, die cossischen Symbole zwar vorstellt, bei seinen Beispielen aber eine Verwendung zu Gunsten der Potenzschreibweise vermeidet, so verwendet er die cossischen Symbole im zweiten Teil der *Arithmetica Analytica* durchgängig. Ursache kann sein, dass er wegen seines Todes diesen zweiten Teil nicht mehr überarbeitete, oder dass er bewusst hier die cossischen Symbole benutzen wollte.

Ordnung I	Ordnung II	Ordnung III
$ax = d$	$(ax = d)$	$ax^4 = \pm bx^2 \pm d$
$ax^2 = d$	$ax^2 = \pm bx \pm d$	$ax^6 = \pm bx^3 \pm d$
$ax^3 = d$	$ax^3 = \pm bx^2 \pm cx \pm d$	$ax^8 = \pm bx^4 \pm d$
$ax^4 = d$	$ax^4 = \pm bx^3 \pm cx^2 \pm dx \pm e$	

Gleichungen mit nur negativen Vorzeichen rechts des Gleichheitszeichen treten nicht auf.

„Die Gleichungslehre ist der zweite Teil der Algebra oder Coss, bei der eine größere cossische Quantität mit einer absoluten Zahl, dem Drachma, allein oder mit anderen dazwischen stehenden cossischen Quantitäten in Gleichheitsbeziehung gesetzt wird. Aus dieser Beschreibung ergeben sich sofort zwei verschiedene Arten von Gleichungen: die erste Ordnung, bei der eine größere cossische Quantität nur mit einer Zahl gleichgesetzt wird, nennt man einfache Gleichung[148]*; sofern auch andere Quantitäten auftreten, nennt man sie zusammengesetzte Gleichung.*[149] *Dies soll mit folgender Tafel erläutert werden:*

Ordo I	Ordo II	Ordo III
r = φ	r = φ	ʒʒ = ʒ. φ
ʒ = φ	ʒ = r. φ	ʒc = c. φ
c = φ	c = ʒ. r. φ	ʒʒʒ = ʒʒ. φ
ʒʒ = φ	ʒʒ = c. ʒ. r. φ	

Statt des Gleichheitszeichens steht gr. Der Drucker hat wohl für die Abkürzung gl. für gleich ein gr. gesetzt.

In dieser Tafel erscheinen drei verschiedene Gleichungsordnungen, die zwei eben genannten und darüber hinaus eine dritte, bei der die Glieder gleich weit voneinander entfernt sind und deshalb herauswachsende Gleichungen[150] *genannt werden. In diesen findet man nur Quantitäten, die sich so unterscheiden, wie die hintereinander stehenden Glieder einer geometrischen Folge, auch wenn dabei einige Zwischenglieder fehlen. Soviel in Kürze zu den drei Gleichungsordnungen, die einfachen, die zusammengesetzten und die herauswachsenden Gleichungen.*

Weiterhin ist aus dieser Übersicht zu ersehen, dass es in jeder der Ordnungen unzählig viele verschiedene Gleichungen gibt und wie diese Schritt für Schritt erzeugt werden können. In den ersten beiden Ordnungen wird die erste Gleichung oder Regula die Radixcoss genannt, die zweite die Zensicoss, die dritte die Cubicoss, und die vierte die Zensizensicoss. Dabei wollen wir es bewenden lassen, obwohl es, wie gesagt, unendlich viele davon gibt."

---

[148] Aequatio simplex.
[149] Aequatio composita.
[150] Exortae.

Kapitel II: Über die vielerlei Formen der zusammengesetzten Gleichungsart

In diesem Kapitel zählt Ursus die Zahl der Möglichkeiten von verschiedenen Gleichungstypen und nennt diese. Die Gleichungen sind immer aufgelöst nach der höchsten Potenz. Ursus verwendet nun, dass die Zahl der Vertauschungen von n Dingen gleich n! (Fakultät) ist, ohne dieses Symbol oder Wort zu nennen; wenn etwa auf der rechten Seite der Gleichung drei verschiedene cossische Quantitäten auftreten können ($x^3 = ax^2 \pm bx \pm c$), so ist die Zahl ihrer Anordnungen halt 3! = 6. Die Zahl von Gleichungen verdoppelt sich nun für jede Möglichkeit des Vorzeichentausches, weil Ursus Gleichungen wie x^2=ax+b und x^2=ax-b unterscheidet; bei 3 cossischen Quantitäten auf der rechten Seite muss dann die Zahl der Möglichkeiten vervierfacht werden, alle drei dürfen kein negatives Zeichen tragen, Gleichungen mit nur negativen Zeichen wie x^2 = -ax-b oder wie x^3 = $-ax^2$ werden nicht akzeptiert. Dann muss Ursus einzeln die doppelt gezählten Gleichungen herausfiltern und subtrahieren. Dieses Verfahren geschieht nun getrennt für die Zensicoss und die Cubicoss; allerdings nennt Ursus die Endergebnisse nicht deutlich mit/ohne die Gleichungen niedrigeren Grades, was das Verständnis seines Textes erschwert.

Für lineare Gleichungen, die Radixcoss, gibt es nur die eine Form x=d.

Für quadratische Gleichungen, die Zensicoss, gibt es die 5 Formen x^2=d; x^2=ax; x^2=ax+d; x^2=ax-d; x^2= d-ax. Ursus argumentiert wie folgt: Bei zusammengesetzten Gleichungen der Zensicoss lassen sich die zwei Terme d und ax der rechten Seite auf zwei Arten anordnen, die unterschiedlichen Vorzeichen ergeben doppelt so viele, also 4 Formen, von denen eine (x^2 = ax+d und x^2 = d+ax) doppelt gezählt wurde. Bleiben 3 Gleichungsformen für die gemischte Zensicoss, zuzüglich 2 Formen, wo rechts nur eine Potenz steht, also 5 Formen insgesamt.

Für die Cubicoss lautet die Gedankenkette so: Die drei Terme der rechten Seite d, ax, bx^2 lassen sich auf 6 Arten anordnen, die unterschiedlichen Vorzeichen an zwei der drei Stellen vervierfachen diese Anzahl, also gibt es 24 Formen; Ursus nennt sie alle. Davon wurden allerdings 17 doppelt gezählt, so dass nur 7 bleiben, in seiner Tabelle die Nummern 7 bis 13. Gleichungen, bei denen eine Potenz fehlt, werden extra gezählt. Wenn eine oder zwei Quantitäten fehlen, hat man die gleiche Anzahl wie bei der Zensicoss, also 1+5 Formen; es gibt jedoch drei Möglichkeiten, dass eine Quantität fehlt, wovon eine soeben gezählt wurde; die anderen beiden ergeben auch je 6 Möglichkeiten. Somit hat man 7+6+6 = 19 Möglichkeiten in der Cubicoss; zusätzlich die 5 der Zensicoss und die eine der linearen Gleichung, sind es 25 insgesamt.

Analog errechnet Ursus die Zahl der möglichen Gleichungsformen für die Zensizensicoss zu 272 Formen, ohne die doppelt gezählten abzuziehen. Es sei noch erwähnt, dass Sortierung und Anzahl der Gleichungsformen bei Ursus nicht die gleichen sind, wie die 24 Gleichungsformen, die seit Jordanus Nemorarius und die z.B. in der Dresdner Sammelhandschrift C80 genannt werden, da diese auch Wurzelgleichungen und Gleichungen vierten Grades enthalten. Al-Ḫwārizmī hatte nur 6 Formen unterschieden.[151]

„In jeder zusammengesetzten Gleichungsform können durch Veränderung der Stellungen der Quantitäten oder durch Tausch der Operationszeichen plus und minus verschiedene Gleichungsformen entstehen. Um zu verstehen, wie oft man eine Gleichung verändern und in welcher Weise man dies tun kann, merke folgende Regel:

Unterschiedliche Zahlen und Dinge können so oft in verschiedene Formen umgesetzt werden, wie das Produkt aller natürlichen Zahlen bis zu ihrer Anzahl [Fakultät] *ergibt. Bei 2 Zahlen gibt es zwei Möglichkeiten der Anordnung, bei 3 Zahlen sechs, bei 4 Zahlen 24.*

In der zusammengesetzten Zensicoss wird ja die größte Quantität mit ʒ bezeichnet und mit den zwei kleineren Quantitäten r und 𝒩 gleichgesetzt. Also gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, r und 𝒩 in der Gleichung zu setzen; und wegen der unterschiedlichen Rechenzeichen + plus und ÷ minus also insgesamt vier geschriebene Gleichungsformen, nämlich:

ʒ = r + 𝒩	*Wegen r + 𝒩 = 𝒩 + r , setzt man die beiden Gleichungen als identisch,*
ʒ = r - 𝒩	*was man auch mit den beiden anderen r - 𝒩 und 𝒩 - r täte, wenn es nicht*
ʒ = 𝒩 + r	*als ein besonderer Fall angesehen werden soll. Bleiben also in der*
ʒ = 𝒩 - r	*gemischten Zensicoss 3 Fälle.*

Ebenso gilt für die zusammengesetzte Cubicoss, bei der die drei kleineren cossischen Quantitäten ʒ, r, 𝒩 der größten ϲ gleichgesetzt werden, dass es 6 [= 3!] *Möglichkeiten geben müsste. Aber wegen der zwei unterschiedlichen Zeichen + und ÷, die an zwei* [minus nicht auch an der dritten] *verschiedenen*

[151] Siehe Folkerts, *Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen*, S. 14.

Stellen auftreten können, wird sich die Zahl der Möglichkeiten vervierfachen. Deshalb treten hier vier mal sechs, also 24 Möglichkeiten auf:[152]

+ +	- -	+ -	- +
7. ʒ + r + ϕ	11. ʒ − r − ϕ	9. ʒ + r − ϕ	8. ʒ − r + ϕ
r + ϕ + ʒ	r − ϕ − ʒ	10. r + ϕ − ʒ	r − ϕ + ʒ
ϕ + ʒ + r	13. ϕ − ʒ − r	ϕ + ʒ − r	ϕ − ʒ + r
ϕ + r + ʒ	ϕ − r − ʒ	ϕ + r − ʒ	ϕ − r + ʒ
ʒ + ϕ + r	ʒ − ϕ − r	ʒ + ϕ − r	ʒ − ϕ + r
r + ʒ + ϕ	12. r − ʒ − ϕ	r + ʒ − ϕ	r − ʒ + ϕ

Wenn man nun noch den Cubus c vergleicht mit zwei der drei cossischen Quantitäten, wenn also eines der beiden ʒ oder r mit Unterbrechung der Ordnung fehlt,[153] *entstehen noch acht weitere Gleichungsmöglichkeiten:*

c = ʒ + ϕ	c = ϕ + ʒ	c = r + ϕ	c = ϕ + r
c = ʒ - ϕ	c = ϕ - ʒ	c = r - ϕ	c = ϕ - r

Aber so wie in der Zensicoss ʒ = r + ϕ und ʒ = ϕ + r als eine Gleichung aufgefasst wurden, werden auch hier c = ʒ + ϕ und c = ϕ + ʒ sowie c = r + ϕ und c = ϕ + r als jeweils eine Gleichung aufgefasst. Deshalb bleiben hiervon also 6 Formen. Demnach gibt es in der Cubicoss, in der c mit kleineren Quantitäten verglichen wird, 19 Formen. Die 6 von oben dazugerechnet, ergibt die Anzahl von 25 Gleichungsformen."

Ursus sortiert seine Gleichungsformen also wie folgt:

Radixcoss:	$x = d$			1 Gleichung
Zensicoss:	$x^2 = d$	$x^2 = ax + d$		
	$x^2 = ax$	$x^2 = ax - d$		
		$x^2 = d - ax$		5 Gleichungen
Cubicoss:	$x^3 = d$	$x^3 = d + bx$	7. $x^3 = ax^2 + bx + d$	
	$x^3 = bx$	$x^3 = d - bx$	9. $x^3 = ax^2 + bx - d$	
	$x^3 = ax^2$	$x^3 = bx - d$	8. $x^3 = ax^2 - bx + d$	
	$x^3 = ax^2 + bx$	$x^3 = d + ax^2$	11. $x^3 = ax^2 - bx - d$	
	$x^3 = ax^2 - bx$	$x^3 = d - ax^2$	10. $x^3 = bx - ax^2 + d$	
	$x^3 = bx - ax^2$	$x^3 = ax^2 - d$	12. $x^3 = bx - ax^2 - d$	
			13. $x^3 = d - bx - ax^2$	19 Gleichungen

„In der Zensizensicoss [Gleichungen vierten Grades], *in der ʒʒ in einer Gleichung mit vier kleineren Quantitäten in Beziehung gesetzt wird, wenn keine ausgelassen wird, gibt es wegen der 4 Quantitäten zunächst 24 Gleichungsmöglichkeiten, wegen der 24 Anordnungsmöglichkeiten der Quantitäten. Danach entstehen wegen der beiden Möglichkeiten der Rechenzeichen bei drei der vier Quantitäten 8 mal 24, also 192 verschiedene Gleichungsformen. Und das nur für Gleichungen, bei denen alle Quantitäten wirklich auftreten. Wenn aber Quantitäten ausgelassen werden, dann entstehen zusätzlich bei der Auslassung einer einzigen Quantität, nämlich der*

$$\left.\begin{matrix} c \\ ʒ \\ r \end{matrix}\right\} \textit{bleiben übrig} \quad \left\{\begin{matrix} ʒ.\ r.\ ϕ \\ c.\ r.\ ϕ \\ c.\ ʒ.\ ϕ \end{matrix}\right.$$

Diese erzeugen wie in der Cubicoss je 24, also drei mal 24, sprich 72 Möglichkeiten. Lässt man aber gleich zwei Quantitäten aus, nämlich

$$\left.\begin{matrix} c.\ ʒ \\ c.\ r \\ ʒ.\ r \end{matrix}\right\} \textit{dann bleiben} \quad \left\{\begin{matrix} r.\ ϕ \\ ʒ.\ ϕ \\ c.\ ϕ \end{matrix}\right.$$

Aus jeder dieser drei Kombinationen entstehen wie in der Zensicoss vier Gleichungsformen, also aus allen dreien drei mal vier, sprich 12 Möglichkeiten. Aber die Möglichkeiten, bei denen nur ʒ und ϕ übrigbleiben, gehören zu den Gleichungen der Ordnung III, bleiben noch acht. Addiert man alle diese Möglichkeiten, entstehen 272 Möglichkeiten, wobei alle die aber gleich sind, bei denen nur Pluszeichen auftreten, wie das bei anderen Quantitäten auch war."

[152] Vor den Termen der rechten Seite fehlt in der Tabelle stets noch „c =". Die ohne Nummer genannten Gleichungen sind doppelt gezählt, fallen also weg. Die Gleichungen Nr. 1-6 werden wie bei der Zensicoss gezählt, es sind dies c = ϕ; c = r; c = ʒ; c = ʒ + r; c = ʒ − r; c = r − ʒ.

[153] Dass auf der rechten Seite ϕ fehlt, wurde bereits gezählt als Nr. 1-6; vorige Fußnote.

Kapitel III: Wie man Gleichungen vereinfacht

Im 3. Kapitel geht es um das Vereinfachen von Gleichungen, die ja stets auf die Form $x^n = \pm ax^{n-1} \pm bx^{n-2} \pm \ldots$ gebracht werden sollen. Dazu stellt Ursus drei Prinzipien auf, die teilweise auf Euklid zurückgehen. Es sind dies zum einen die einfache Tatsache, dass man auf beiden Seiten einer Gleichung denselben Term addieren oder subtrahieren darf,[154] zum anderen, dass man ebenso mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren darf,[155] zum dritten, dass man beide Seiten der Gleichung potenzieren oder wurzeln darf. Probleme mit negativen Zahlen treten nicht auf. Aus diesen drei Prinzipien entwickelt Ursus Regeln, wie nun konkret die Gleichungen zu einfacheren umgeformt werden sollen. Die aus dem ersten Prinzip erwachsenden drei Regeln sind im folgenden Ursus-Text leicht verständlich. Die sich aus dem zweiten Prinzip ergebenden drei Regeln sind die für das kreuzweise Multiplizieren von Bruchtermen, das Kürzen der ganzen Gleichung durch einen gemeinsamen Koeffizienten der Potenzen, und das Kürzen durch Potenzen, wenn die kleinste Potenz nicht den Exponenten Null hat. Aus dem dritten Prinzip leitet Ursus ab, dass man Gleichungen mit Wurzeln beidseitig quadrieren soll, oder bei $x^n = d$ direkt wurzeln kann, oder das Verfahren der Substitution einer Potenz anwenden kann. Die neun Regeln, Reduktionen genannt, sind folgende:

Red. 1:	$\pm b$	Addieren oder Subtrahieren einer absoluten Zahl, also $a\cdot x \pm b = c \Rightarrow a\cdot x = c \mp b$
Red. 2:	$\pm ax \pm b$	Addieren oder Subtrahieren eines (linearen) Terms, also $ax \pm b = cx \pm d \Rightarrow e\cdot x = f$
Red. 3:		Auflösen nach dem größten Exponenten, also etwa $x^2 = a\cdot x \pm b$
Red. 4:	$\cdot a$	Nenner beseitigen durch Multiplizieren, kreuzweises Multiplizieren
Red. 5:	$:a$	Kürzen durch Faktoren
Red. 6:	$:x$	Kürzen durch Variable, also $x^2 = a\cdot x \Rightarrow x = a$
Red. 7:	Potenzieren	$a\cdot x = \sqrt{x} \Rightarrow a^2\cdot x^2 = x$; $a\cdot x = \sqrt[3]{x} \Rightarrow a^3\cdot x^3 = x$
Red. 8:	Wurzeln	$x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}$; $x^3 = a \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}$
Red. 9:	Substituieren von x^2 oder x^4 durch eine neue Variable x	
Red. 10:	Johannes-Junge-Verfahren	

„Die Vereinfachung ist eine Eigenschaft der Algebra oder Coss, durch die die Gleichung aus einer zur Lösung unbequemeren in eine bequemere umgewandelt wird, ohne dass die Gleichheitsverhältnisse verändert werden. Grund und Ursache einer Vereinfachung geht auf nachfolgende drei Prinzipien zurück:

I. Wird Gleiches zu Gleichem gegeben oder davon weggenommen, dann werden die Summe oder der Rest gleich. (Das ist das 2. und 3. Axiom Euklids.)

II. Wird Gleiches mit Gleichem multipliziert oder dividiert, dann werden die Produkte oder Quotienten gleich. (Aus Proposition 17 und 18 des 7. Buches Euklids.)

III. Aus gleichen Wurzeln entstehen gleiche Figuren, und umgekehrt aus gleichen Figuren auch gleiche Wurzeln.[156]

Aus Prinzip I ergeben sich folgende drei Vereinfachungsregeln, die man mit folgendem Satz zusammenfassen kann: «Bei gleichen [Rechen-]*Zeichen nehme man weg von der Zahl, bei verschiedenen aber füge man hinzu.»*[157]

Reduktion 1: Wird eine absolute Zahl oder die Null gleichgesetzt mit einer Quantität, die durch + oder ÷ mit einer anderen absoluten Zahl verbunden ist, so addiere oder subtrahiere auf beiden Seiten letztere Zahl, damit die Quantität und die absolute Zahl jeweils einzeln stehen, z.B.

$2r + 4 = 8 \Rightarrow 2r = 4$ *Ebenso:* $2r - 4 = 8 \Rightarrow 2r = 12.$

$8r - 4 = 0 \Rightarrow 8r = 4$ *Ebenso:* $8r + 4 = 0 \Rightarrow 8r = 0 - 4.$

Reduktion 2: Werden zwei durch + und ÷ zusammengesetzte cossische Zahlen gleichgesetzt, so vereinfache sie nach Regel 1, durch Umwandlung der Rechenzeichen, zu einfachen Zahlen.

---

[154] Ursus nennt Euklid, Axiom 2 „Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich“ und Axiom 3 „Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich“.

[155] Ursus nennt Euklid, Buch 7, Prop. 17 „Wenn irgendwelche Zahlen entstehen, indem eine Zahl zwei Zahlen vervielfältigt, dann müssen die Ergebnisse dasselbe Verhältnis haben wie die Zahlen, die vervielfältigt werden“ und Prop. 18 analog.

[156] Mit „Figuren“ sind Quadrate, Kuben etc. gemeint.

[157] Signa eadem demunt Numero, diversa sed addunt.

8r + 4 = 5r + 22	⇒	*8r = 5r + 18*	⇒	*3r = 18*
5r – 4 = 12 – 3r	⇒	*5r = 16 – 3r*	⇒	*8r = 16*
3r – 4 = 5r – 10	⇒	*3r + 6 = 5r*	⇒	*2r = 6*
6r + 5 = 8r – 9	⇒	*6r + 14 = 8r*	⇒	*2r = 14*
5r – 6 = 3r	⇒	*3r + 6 = 5r*	⇒	*2r = 6*

Reduktion 3: In allen zusammengesetzten Gleichungen vereinfache man diese so durch die nun folgenden Regeln, dass die größte Quantität auf der einen Gleichungsseite isoliert wird. In der Zensicoss entstehen aus diesem Vorgehen diese drei Gleichungen:

Es werden gleich gesetzt { *zwei kleinere* / *zwei größere* / *zwei äußere* } *Quantitäten mit der allein stehenden* { *größten wie r; ϕ = ʒ* / *kleinsten wie ʒ; r = ϕ* / *mittleren wie ʒ; ϕ = r* } ⇒ *ʒ = ϕ±r oder r±ϕ*[158]

Aus Prinzip II erwachsen diese drei Vereinfachungen. Als erstes aus der Multiplikation:

Reduktion 4: Werden zwei Quantitäten oder Zahlen mit Hilfe von Brüchen gleich gesetzt, so vereinfache man diese Gleichung gemäß der Vulgar-Arithmetik, wie man sie zur Vereinfachung von Brüchen benutzt, indem man zuerst jeden gemischten Bruch in einen unechten Bruch umwandelt und danach durch kreuzweises Multiplizieren von Zähler und Nenner die neuen Zähler erzeugt. Der neue Nenner, das Produkt der beiden Nenner, kann dann auf beiden Seiten weggelassen werden. So z.B.:

$$1\frac{3}{5} = \frac{896}{48x - 1x^2} \Rightarrow \frac{8}{5} = \frac{896}{48x - 1x^2} \Rightarrow 4480 = 384x - 8x^2$$

(Der neue und beidseitig wegzulassende Nenner ist $240x - 5x^2$.)

Für die Division ergeben sich diese zwei Regeln zur Vereinfachung:

Reduktion 5: Wenn Quantitäten oder Zahlen so gleichgesetzt werden, dass dabei größere gemeinsame Koeffizienten auftreten, so teile man diese durch den größten gemeinsamen Teiler.[159]

3ʒ = 9r + 12 — *Gemeinsame Division durch 3 ergibt 1ʒ = 3r + 4.*

Ebenso 2 ¹/₂ r = 30 — *Nach der vierten Reduktion 5r = 60. 1r = 12.*

Und hieraus kann man ersehen, dass die gebräuchliche Division zur Vereinfachung in der Regula Coss genutzt werden kann. Dies gilt aber ebenso für quadratische und kubische Gleichungen sowie für Gleichungen vierten Grades.

Reduktion 6: Wenn Quantitäten gleich gesetzt werden, bei der die kleinste eine größere Quantität hat als das Drachma (das ist eine absolute Zahl[160]*), so vereinfache die Gleichung dadurch, dass du die Exponenten soweit gegeneinander kürzt, bis die kleinste Drachma-Quantität hat, also zur einfachen Zahl geworden ist. Dies geschieht in gleicher Weise, wie man Nullen bei Dezimalzahlen*[161] *streicht, z.B. 1ʒ = 3r, vereinfacht zu 1r = 3. In logistischer Schreibweise $1^{II} = 3^{I}$ wird durch Kürzen von einem ^{I} zu $1^{I} = 3^{0}$. Und diese Vereinfachung geschieht durch Subtraktion der Exponenten.*[162]

Aus Prinzip III entstehen folgende drei Vereinfachungsregeln:

Reduktion 7: Wird eine absolute [oder cossische] *Zahl mit der Wurzel einer Zahl gleich gesetzt, so muss zuerst die Wurzel durch Auslöschen ihres Namens und dann die absolute Zahl so oft mit sich selbst multipliziert werden, wie dies für die Wurzel notwendig ist, damit diese als Figuralzahl*[163] *erscheint:*

3r = √1r ⇒ *9ʒ = 1r* [$3x = \sqrt{x}$ ⇒ $9x^2 = 1x$]

Ebenso: *2r = ∛50r* ⇒ *8c = 50r.*[164] [$2x = \sqrt[3]{50x}$ ⇒ $8x^3 = 50x$]

Reduktion 8: Wird eine Figuralquantität größer als r gleich gesetzt mit einer absoluten Zahl, so werden auf beiden Seiten der Gleichung die entsprechenden Wurzeln gezogen:

1ʒ = 9 ⇒ *1r = 3*[165] *Ebenso: 1c = 8* ⇒ *1r = 2.*

---

[158] Hier gibt es im Druck viele Fehler mit den + und ÷ Zeichen.
[159] „communem divisorem"
[160] „absolut oder leddige zall"
[161] „Artikular zahlen"
[162] „Fitque haec Reductio potius per notarum Subtractionem."
[163] Cossische Zahl, mit „Figuren", d.h. mit Potenzen. Die Figuren sind die Exponenten.
[164] Wurzelzeichen werden nicht verwendet, statt dessen steht „Radici quadratae aus" bzw. „Radici cubicae aus".

Durch diese Vereinfachung werden alle einfachen cossischen Gleichungen zu einer einzigen gemacht.

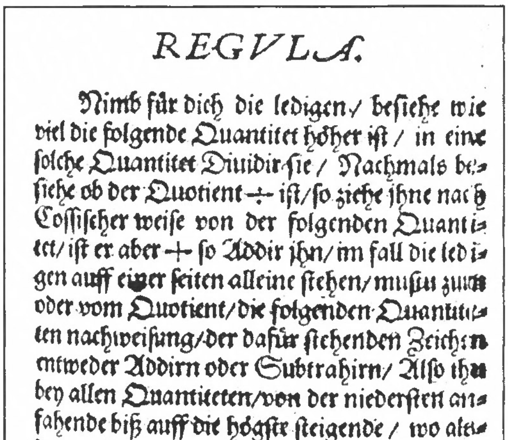
Reduktion 9: Setzt man eine größere Quantität in eine Gleichung mit einer Folge von Quantitäten, die als geometrische Folge mit gleich großen Lücken aufgefasst werden kann, so vereinfache man die Gleichung dadurch, dass man die passenden Quantitäten gleicher Ordnung auf beiden Seiten streicht, z.B.:

IV II 0		*II I 0*	*Reduzierung auf die Hälfte der Exponenten.*
ʒʒ = ʒ ; ℓ	$\Rightarrow$	ʒ = r ; ℓ	$[x^4 = \pm ax^2 \pm d \Rightarrow x^2 = \pm ax \pm d]$
VIII IV 0		*IV II 0*	*Ebenso.*
ʒʒʒ = ʒʒ ; ℓ	$\Rightarrow$	ʒʒ = ʒ ; ℓ	$[x^8 = \pm ax^4 \pm d \Rightarrow x^4 = \pm ax^2 \pm d]$
VIII IV 0		*II I 0*	*Reduzierung auf ein Viertel der Exponenten.*
ʒʒʒ = ʒʒ ; ℓ	$\Rightarrow$	ʒ = r ; ℓ	$[x^8 = \pm ax^4 \pm d \Rightarrow x^2 = \pm ax \pm d]$
XVI VIII 0		*IV II 0*	
ʒʒʒʒ = ʒʒʒ ; ℓ	$\Rightarrow$	ʒʒ = ʒ ; ℓ [166]	$[x^{16} = \pm ax^8 \pm d \Rightarrow x^4 = \pm ax^2 \pm d]$

Durch diese Vereinfachung wird die dritte Ordnung der anfangs genannten cossischen Gleichungen oder die eben genannte 8. Reduktion zu anderen Gleichungstypen vereinfacht. Es bleibt nur noch, die Wurzel zu ziehen, wobei man aus der aus 1r gefundenen Zahl noch die entsprechende Wurzel ziehen muss."[167]

Kapitel IV: Johann Junges Erfindung

Schon im ersten Kapitel der Handschrift *Tractatiuncula* 1597, in dem Ursus den Abriss der Geschichte der Coss gibt, nennt er den für uns heute unbekannten Mathematiker Johannes Junge aus Schlesien mit seinem *Rechenbuch auff den Ziffern und Linien* 1578. Dieser habe mit seiner „Erfindung einen unbezahlbaren Schatz" in der Algebra hinterlassen. Dieser Schatz ist ein Algorithmus, bei einer (ganzrationalen) Gleichung n-ten Grades zu prüfen, ob eine gedachte Zahl Lösung der Gleichung ist. Die Zahl selbst, die Lösung, wird hierdurch nicht gefunden, das einfache Verfahren dient der Bestätigung. Man kann nun aber durch Probieren mehrerer Lösungskandidaten u.U. die Lösung finden. Im 16. Jh. war es bei den Rechenmeister ja üblich, dass die Gleichungslösungen ganze Zahlen waren. Der Algorithmus von Johannes Junge ist eine Polynomdivision des Gleichungsterms durch einen seiner Linearfaktoren, der beim Aufgehen der Division die Lösung ergibt. Die Darstellung des Rechenverfahrens, das in Tabellenform einfach und übersichtlich ist, erfolgt hier.


REGVLA.

Nimb für dich die ledigen / besiehe wie viel die folgende Quantitet höher ist / in eine solche Quantitet Diuidir sie / Nachmals besiehe ob der Quotient ÷ ist / so ziehe jhne nach Cossischer weise von der folgenden Quantitet / ist er aber + so Addir jhn / im fall die ledigen auff einer seiten alleine stehen / mustu zum oder vom Quotient / die folgenden Quantiteten nachweisung / der dafür stehenden Zeichen entweder Addirn oder Subtrahirn / Also thu bey allen Quantiteten / von der niedersten anfahende biß auff die högste steigende / wo alsdenn die letzte theilung gleich auffgehet / so schleustu / das du den rechten ꝛc. gefunden hast / Als zum Exempel.

Abb. 43: Johann Junge, *Rechenbuch* 1578, Blatt L1r. German. Nationalmuseum Nürnberg. 8° H 2673.

Johann Junges Rechenbuch wird Ursus in seiner Zeit bei Heinrich Rantzau in Dithmarschen kennengelernt haben, da das Buch 1578 in Lübeck gedruckt worden war; zwischen Lübeck und Dithmarschen bestanden gute politische Beziehungen.

Über diesen Johannes Junge[168] aus Schweidnitz wurde oben schon einiges aus seinen autobiographischen Angaben im Widmungsbrief an Johann Neudörffer zitiert. Sein Rechenbuch scheint außerordentlich selten erhalten zu sein. Mir ist trotz Internetrecherche nur das eine Exemplar des Germanischen Nationalmuseums Nürnberg[169] bekannt. Ich will deshalb Junges allgemeine Erläuterung seines Verfahrens hier, in heutiges Deutsch übertragen, wiedergeben. Vorausgesetzt wird, dass die Gleichung nach der höchsten Potenz aufgelöst ist, deren Koeffizient auch 1 sein soll, also z.B.

---

[165] Negative Lösungen der Gleichung $1x^2 = 9$ werden nicht beachtet.
[166] Die hochgestellten römischen Zahlen geben wieder die Exponenten der Variablen an.
[167] Ursus schildert hier das Verfahren zur Substitution $t = x^n$.
[168] Auf dem Titelblatt nennt er sich Johann Junge, am Ende des Widmungsschreibens Johannes Junge.
[169] Signatur 8°, H. 2673.

$x^{28} = 65532x^{12} + 18x^{10} - 30x^{6} - 18x^{3} + 12x - 8$. Probe mit 2:

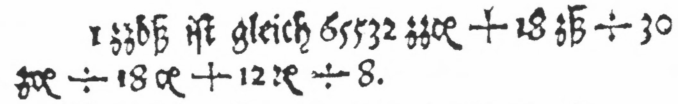


Abb. 44: Johann Junge, *Rechenbuch* 1578, Blatt L1v.

„Nimm die absolute Zahl. Sieh wieviel die folgende Quantität höher ist, potenziere die Radix mit diesem Unterschied. Dividiere die absolute Zahl durch diese Potenz. Sieh ob dieser Quotient + oder – ist, und addier/subtrahier das letzte Ergebnis zu/von dem Koeffizienten der nächst höheren Quantität. So mach es bei allen Quantitäten, bei der kleinsten anfangend bis zur höchsten. Wenn die letzte Division glatt aufgeht, so hattest du die richtige Radix gefunden."[170]

Das Beispiel lässt sich wie folgt erläutern:

- Der Exponentenunterschied zwischen -8 und 12x ist 1, also wird -8 dividiert durch 2^1, ergibt -4; dann wird von 12(x) subtrahiert 4(x), bleiben 8(x). Dies wird nun wiederholt.
- Der Exponentenunterschied von 8x zur nächsten Quantität $18x^3$ beträgt 2, also wird 8 dividiert durch 2^2, ergibt +2; dann wird zu $-18(x^3)$ addiert $+2(x^3)$, bleiben $-16(x^3)$.
- Der Quantitätsunterschiedvon $-16x^3$ zu $-30x^6$ ist 3, also wird -16 dividiert durch 2^3, ergibt -2; dann wird von $-30(x^6)$ subtrahiert $2(x^6)$, bleiben $-32(x^6)$.
- Die folgende Quantität $18x^{10}$ ist um 4 höher als $-32x^6$, also wird -32 dividiert durch 2^4, ergibt -2; dann wird von $18(x^{10})$ subtrahiert $2(x^{10})$, bleiben $16(x^{10})$.
- Die nächste Quantität $65532x^{12}$ ist um 2 höher als $16x^{10}$, also wird 16 dividiert durch 2^2, ergibt 4; dann wird zu $65532(x^{12})$ addiert $4(x^{12})$, bleiben $65536(x^{12})$.
- Die nächste Quantität ist um 16 höher, also wird 65536 dividiert durch $2^{16} = 65536$, ergibt 1. Die Rechnung „geht auf", x=2 ist (tatsächlich) Lösung der Gleichung.

Das Verfahren verwendet Johann Junge auch vorher bei einfacheren Aufgaben, wie z.B. bei $x^3 = -6x^2 - 42x + 931$ für die Lösung x=7. Dividiere 931:7 = 133, -42 + 133 = 91; 91:7 = 13, -6 + 13 = 7; 7:7 = 1. Woher jedoch die Lösung kommt, kann Junge nicht angeben. Wie bei Rechenmeistern üblich, werden die Aufgaben ja rückwärts entwickelt, von der vorgegebenen Lösung ausgehend erarbeitet er sich die Aufgabe, so dass der Aufgabensteller die Lösung hat. Ursus zitiert nun dieses Verfahren,[171] wählt das gleiche Beispiel der Gleichung 28. Grades und erläutert es ausführlich mit Text; außerdem „verbessert" er es. Während Junge noch jede Zahl zum Probieren zuließ, verwendet Ursus, er sucht ja nur ganzzahlige Lösungen von Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, nur die Teiler der absoluten Zahl. Dies zu Recht; wenn die Lösungen ganzzahlig sind, dann sind diese unter den Teilern der absoluten Zahl zu finden. Der Text bei Ursus lautet nun wie folgt:

„Um das Jahr 1577 hat Johannes Junge aus Schweidnitz in Schlesien ein leichtes und zugleich für alle zusammen gesetzten cossischen Gleichungen geeignetes Lösungsverfahren erfunden und ausgesonnen. Weil dieses aber durch bisweilen auch viele Versuche und gleichsam durch Raten verrichtet wird, habe ich solchem Vermuten dadurch abgeholfen, dass es jetzt begrenzt ist und nicht mehr so unendlich viele Probiermöglichkeiten lässt, und zwar durch Verwendung der Teiler der vorgegebenen [absoluten] *Zahl. So viele Versuche sind nötig, wie die Zahl Teiler hat. Das Finden der Teiler aber ist leicht bekannt aus der Arithmetik, wie z.B. aus dem 7. Kapitel des 1. Buches der «Arithmetice Rami». Die allgemeine Lösung nach Johannes Junge lautet also:*

«Teile die absolute oder ledige Zahl durch die Potenz [des Teilers, der vermuteten Lösung], *um wieviel die nach ihr stehende Quantität höher ist. Ist der Quotient positiv, so addiere ihn zu, ist der Quotient negativ, so subtrahiere ihn von* [dem Koeffizienten] *der folgenden Quantität. So mache es bei allen Quantitäten, von der kleinsten angefangen bis zur größten. Wenn die letzte Division aufgeht,*[172] *so hast du zu Anfang die richtige Radix angenommen und getroffen.*

Beispiel: $x^{28} = 65532x^{12} + 18x^{10} - 30x^{6} - 18x^{3} + 12x - 8$

- *Die nach der absoluten Zahl 8 folgende Quantität ist* r *und also um eine Quantität höher als* ℞ *oder absolute Zahl. Darum teile die 8 durch eine einfache Radixzahl, also versuchsweise durch 2. Die 2 ist in 8 viermal enthalten. Da nun der gefundene Quotient 4 negativ ist,*[173] *muss man ihn von dem Koeffizienten 12 der nachfolgenden Quantität* r *abziehen, verbleiben 8 Rest.*
- *Die danach folgende Quantität* ꝣ *ist um zwei Quantitäten höher als* r. *Deshalb teile die 8 durch das Quadrat der zu Anfang angenommenen Radix 2, also durch 4; ergibt 2. Die addiere, weil positiv, zu den 18*ꝣ*, ergibt -16.*[174]

---

[170] Blatt L 1r.

[171] Blatt E1r-E2v.

[172] Den Wert 1 ergibt.

[173] -8 : 2 = -4.

[174] -18 + 2 = -16.

- *Danach folgen ʒc, die um drei Quantitäten höher ist als die vorhergehende Quantität c . Darum teile die -16 durch die Kubikzahl der anfänglich angenommenen Radix 2, also durch 8; ergibt 2. Die subtrahiere wegen des Minuszeichens von den 30ʒc* [$-30x^6$], *Rest -32.*
- *Die folgende Quantität ʒß* [x^{10}] *ist um vier Quantitäten höher als die vorige Quantität ʒc . Darum teile die -32*[175] *durch die vierte Potenz*[176] *der Radix 2, also durch 16; ergibt 2. Die subtrahier wegen des Minuszeichens von 18ʒß, Rest 16.*
- *Die danach folgende Quantität ʒʒc* [x^{12}] *ist um zwei Quantitäten höher als die vorhergehende Quantität ʒß . Darum teile die 16 durch das Quadrat des angenommenen Teilers oder der Radix 2, also durch 4; ergibt 4. Diese 4 addiere nach Befehl des Pluszeichens zu den 65532ʒʒc, ergibt 65536.*
- *Und weil endlich die größte allein stehende Quantität, nämlich 1ʒʒßb um 16 Quantitäten höher ist als die jetzt geteilte ʒʒc, so teile die 65536 durch die sechzehnte Potenz*[177] *der anfänglich angenommenen Radix oder des Teilers 2, welche ist 256 mal 256, und geht auf. Also ist der Wert einer Radix gefunden, nämlich 2.*

Und in dem Falle, wo die zwei letzten oder größten Quantitäten um nur eine und nicht um mehr Quantitäten unterscheiden, dann müsste aus der letzten Teilung die zu Anfang angenommene Radix oder der Teiler 2 selbst herausgekommen sein. Weil sie sich aber um sechzehn Quantitäten oder um ʒʒʒʒ unterscheiden, musste aus der Endteilung die sechzehnte Potenz herauskommen.

Zusammengefasst: Teile die kleinere Quantität[178] *durch die Potenz des anfänglich angenommenen Teilers oder der Radix 2, um wie viele Quantitäten die folgende Quantität größer ist als die vorhergehende, angefangen von der kleinsten bis zur größten. Den Quotienten addiere oder subtrahiere, je nach Vorzeichen, zur folgenden Quantität. Die Summe oder Differenz teile wieder wie zuvor, mit der ersten Potenz in Gleichungen ohne Unterbrechung, oder in Gleichungen mit Unterbrechung mit entsprechender Potenz, die der Differenz der Exponenten entspricht; addier oder subtrahier auch gleichermaßen wie zuvor. Und wiederhole dies bis zur größten gegebenen Quantität. Alsdann ergibt sich aus der letzten Teilung der gesuchte Wert der Radix, wenn diese dem am Anfang genommenen Teiler gleich ist. Denn sofern in Gleichungen ohne Unterbrechung zwischen den zwei größten Quantitäten keine andere Quantität als 1r vorhanden ist, dann muss aus der letzten Teilung der anfänglich genommene Teiler entspringen. Aber in Gleichungen mit Unterbrechung muss aus dieser letzten Teilung die Potenz des anfänglich genommenen Teilers entspringen, die dem Unterschied der Exponenten der letzten beiden Quantitäten entspricht. Zum Beispiel: Ist eine Quantität ausgelassen, dann muss die letzte Summe oder Differenz das Quadrat des am Anfang genommenen Teilers sein; bei zwei ausgelassenen Quantitäten die 3. Potenz, bei drei die 4. Potenz etc. Dies zeigt die Subtraktion der Exponenten, mit welchen die in ihrer Ordnung stehenden und nacheinander folgenden cossischen Quantitäten bezeichnet sind."*

Ursus hat diese Aufgabe nicht in eine Tabellenform gebracht. Dies wäre hier jedoch angebracht gewesen und zeigte die Einfachheit des Verfahrens.

Potenz	x^0	x^1	x^3	X^6	x^{10}	x^{12}	x^{28}
Faktor	-8	+12	-18	-30	+18	+65532	1
Quotient		- 4	+ 2	- 2	- 2	+ 4	1
$x_0 = 2$	-8 (:2)	+ 8 (:4)	-16 (:8)	-32 (:16)	+16 (:4)	+65536 : 65536	$x_0 = 2$

Das Johannes-Junge-Verfahren, das Ursus hier beschreibt, beruht auf dem Polynomdivisions-Algorithmus. Die Aufgabe in heutiger Form
$(x^{28} - 65532x^{12} - 18x^{10} + 30x^6 + 18x^3 - 12x + 8) : (x-2)$ hat als Divisionsergebnis
$\langle x^{27} + 2x^{26} + 4x^{25} + 8x^{24} + 16x^{23} + 32x^{22} + 64x^{21} + 128x^{20} + 256x^{19} + 512x^{18} + 1024x^{17} + 2048x^{16} + 4096x^{15} + 8192x^{14} + 16384x^{13} + 32768x^{12}\rangle \ \langle + 4x^{11} + 8x^{10}\rangle \ \langle - 2x^9 - 4x^8 - 8x^7 - 16x^6\rangle \ \langle - 2x^5 - 4x^4 - 8x^3\rangle \ \langle + 2x^2 + 4x\rangle \ \langle - 4\rangle$.

Die spitzen Klammern haben keine Bedeutung, sie grenzen nur die Blöcke ab, die sich durch die fehlenden Exponenten ergeben. Ursus hat dieses Ergebnis nicht angegeben, es ist auch nicht das Ziel seiner Rechnung, die ja nur zeigen soll, wie man einfach x=2 als eine Lösung der gegebenen Gleichung 28. Grades erkennen kann. Bereits beim Lesen dieses Quotienten sieht man, dass für jeden in der Aufgabe fehlenden Exponenten ein Faktor 2 im Block hinzukommt; dasselbe erkennt man auch, wenn man die Polynomdivision schrittweise durchführt. Das soll jetzt geschehen.

[175] Hier ist tatsächlich ÷32 gedruckt, es wird also eine negative Zahl verwendet.
[176] Zensizensizahl.
[177] „ʒʒʒʒ-Zahl"
[178] Gemeint sind immer die Koeffizienten.

$$(x^{28} \mathbf{- 65532x^{12} - 18x^{10} + 30x^{6} + 18x^{3} - 12x + 8}) : (x-2) = x^{27} + 2x^{26} + 4x^{25} + 8x^{24} + 16x^{23} + \ldots + 32768x^{12} + 4x^{11} + 8x^{10} - 2x^{9} - 4x^{8} - 8x^{7} - 16x^{6} - 2x^{5} - 4x^{4} - 8x^{3} + 2x^{2} + 4x - 4$$

$$\underline{-(x^{28} - 2x^{27})}$$
$$2x^{27}$$
$$\underline{-(2x^{27} - 4x^{26})}$$
$$4x^{26}$$
$$\underline{-(4x^{26} - 8x^{25})}$$
$$8x^{25}$$
$$\underline{-(8x^{25} - 16x^{24})}$$
$$16x^{24}$$
$$\underline{-(16x^{24} - 32x^{23})}$$

...

...

...

$$32768x^{13} \mathbf{- 65532x^{12}}$$
$$\underline{-(32768x^{13} - 65536x^{12})}$$
$$4x^{12}$$
$$\underline{-(4x^{12} - 8x^{11})}$$
$$8x^{11} \mathbf{- 18x^{10}}$$
$$\underline{-(8x^{11} - 16x^{10})}$$
$$-2x^{10}$$
$$\underline{-(-2x^{10} + 4x^{9})}$$
$$-4x^{9}$$
$$\underline{-(-4x^{9} + 8x^{8})}$$
$$-8x^{8}$$
$$\underline{-(-8x^{8} + 16x^{7})}$$
$$-16x^{7} \mathbf{+ 30x^{6}}$$
$$\underline{-(-16x^{7} + 32x^{6})}$$
$$-2x^{6}$$
$$\underline{-(-2x^{6} + 4x^{5})}$$
$$-4x^{5}$$
$$\underline{-(-4x^{5} + 8x^{4})}$$
$$-8x^{4} \mathbf{+ 18x^{3}}$$

Fortsetzung:

$$-8x^{4} + 18x^{3}$$
$$\underline{-(-8x^{4} + 16x^{3})}$$
$$2x^{3}$$
$$\underline{-(2x^{3} - 4x^{2})}$$
$$4x^{2} \mathbf{- 12x}$$
$$\underline{-(4x^{2} - 8x)}$$
$$-4x \mathbf{+ 8}$$
$$\underline{-(-4x + 8)}$$
$$0$$

Man kann jedoch den Divisions-Algorithmus wesentlich verkürzen, indem man die Zeilen für die in der Aufgabe fehlenden Exponenten wegläßt. Außerdem beginnt Ursus die Polynomdivision beim niedrigsten Exponenten, hier bei der absoluten Zahl. Deshalb soll die Aufgabe nun so geschrieben werden, auch wenn dies ungewöhnlich ist. Es wird also stets begonnen, die niedrigste Potenz des Terms durch $-2+x$ zu dividieren; die höheren Potenzen sind dann immer die Reste, die noch verarbeitet werden müssen. Es ergibt sich folgendes Bild:

$$(8 - 12x + 18x^3 + 30x^6 - 18x^{10} - 65532x^{12} + x^{28}) : (-2 + x) =$$
$$\underline{-\mathbf{(8 - 4x)}} \quad ①$$
$$-8x + 18x^3$$
$$\underline{-\mathbf{(-8x + 2x^3)}} \quad ②$$
$$16x^3 + 30x^6$$
$$\underline{-\mathbf{(16x^3 - 2x^6)}} \quad ③$$
$$32x^6 - 18x^{10}$$
$$\underline{-\mathbf{(32x^6 - 2x^{10})}} \quad ④$$
$$-16x^{10} - 65532x^{12}$$
$$\underline{-\mathbf{(-16x^{10} + 4x^{12})}} \quad ⑤$$
$$-65536x^{12} + x^{28}$$
$$\underline{-\mathbf{(65536x^{12} + x^{28})}} \quad ⑥$$
$$0$$

① $(8-12x) : (-2+x) \approx \underline{\underline{-4}}$; denn $-4\cdot(-2+x) = \mathbf{8-4x}$

② $(-8x+18x^3) : (-2+x) \approx \underline{\underline{4x+2x^2}}$; denn $(4x+2x^2)\cdot(-2+x) = \mathbf{-8x}+4x^2-4x^2+\mathbf{2x^3}$, so dass die Zwischenglieder $4x^2$ wegfallen, die ja in der Aufgabe nicht auftreten.

③ $(16x^3+30x^6) : (-2+x) \approx \underline{\underline{-8x^3-4x^4-2x^5}}$; denn $(-8x^3-4x^4-2x^5)\cdot(-2+x) = \mathbf{16x^3}-8x^4+8x^4-4x^5+4x^5\mathbf{-2x^6}$, so dass die Zwischenglieder wegfallen.

④ $(32x^6-18x^{10}) : (-2+x) \approx \underline{\underline{-16x^6-8x^7-4x^8-2x^9}}$; denn $(-16x^6-8x^7-4x^8-2x^9)\cdot(-2+x) =$ $\mathbf{32x^6}-16x^7+16x^7-8x^8+8x^8-4x^9+4x^9\mathbf{-2x^{10}}$, so dass die Zwischenglieder wegfallen.

⑤ $(-16x^{10}-65532x^{12}) : (-2+x) \approx \underline{\underline{8x^{10}+4x^{11}}}$; denn $(8x^{10}+4x^{11})\cdot(-2+x) = \mathbf{-16x^{10}}+8x^{11}-8x^{11}\mathbf{+4x^{12}}$, so dass die Zwischenglieder wegfallen.

⑥ $(-65636x^{12}+x^{28}) : (-2+x) \approx \underline{\underline{32768x^{12}+16384x^{13}+8192x^{14}+ \ldots +2x^{26}+x^{27}}}$; denn $(32768x^{12}+16384x^{13}+8192x^{14}+ \ldots +2x^{26}+x^{27}) \cdot (-2+x) = \mathbf{-65536x^{12}}+32768x^{13}-32768x^{13}+ 16384x^{14}-16384x^{14}\pm \ldots +4x^{26}-4x^{26}+2x^{27}-2x^{27}\mathbf{+x^{28}}$, so dass die Zwischenglieder wegfallen.

Die doppelt unterstrichenen Terme sind die Teile des Quotienten.

Kap. V: Beispiele zur Coss oder Algebra

Es folgt schließlich noch das erholsame letzte Kapitel mit den Beispielaufgaben. Diese sind sortiert nach dem Schema, das Ursus im ersten Kapitel vorstellte. Zuerst kommen die einfachen Gleichungen der Ordnung I, also solche, bei denen ein Potenz gleich einer Zahl gesetzt wird; dann die zusammen gesetzten Gleichungen der Ordnung II, wo für quadratische Gleichungen und Gleichungen dritten und vierten Grades Beispiele gebracht werden; und schließlich die Ordnung III, in der Substitutionen die Gleichungen vereinfachen. Da die Nomenklatur einfach ist, lasse ich die cossischen Symbole r für x, ʒ für x^2, c für x^3 und ʒʒ für x^4 stehen.

„Aus allem bisher Gesagten geht hervor, dass die Algebra oder Coss zwei unterschiedliche Teile hat: Aequationis per algorithmum inventio und Inventae aequationis reductio, also das Lösen der Gleichung durch den Algorithmus und die Vereinfachung der Gleichung. Daraus ergibt sich die Regel Coss. Setz eine gemäß der Aufgabe bequeme oder geschickte cossische Quantität, gewöhnlich 1r. Verfahre damit gemäß der Aufgabe wie im vorgegebenen Beispiel, dann wirst du auf eine Gleichung zweier ungleich bezeichneten, aber gleich viel geltenden Zahlen kommen. Diese zwei Zahlen oder Terme[179] *der gefundenen Gleichung vereinfache durch die genannten Regeln der Reduktion so weit, bis die zu Anfang gesetzte r der anderen im Beispiel gegebenen absoluten oder ledigen Zahl gleich gesetzt ist. Dann siehst du den Wert des gesetzten r oder den Wert der anfänglich gesetzten Quantität. Es folgen Beispiele.*

[179] „terminos“.

Beispiele I. Ordnung

Lineare Gleichung (Radix-Coss).
1.) Eine Zahl verdoppelt, dazu ihren halben Teil, ergibt 30. Welche Zahl ist das?
Lösung:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ \underline{6} \\ 30 \end{array}$$

Setz $1r$
noch $1r$
dazu $\frac{1}{2}r$
Summe $2\frac{1}{2}r = 30$ *(Red. 4, also)* [·2]
$5r = 60$ *(Red. 5, also)* [:5]
$\underline{1r = 12}$

2.) Ein armer Wandergesell hat nur wenige Heller. Der Wirt schenkt ihm die Zeche und so viele Heller dazu, wie er besitzt. Er gibt der Köchin 12 Heller Trinkgeld. Dasselbe geschieht beim zweiten und beim dritten Wirt, so dass er nichts mehr behält. Wieviele Heller hatte er anfänglich?
Lösung: $10\frac{1}{2}$.

$1r$
$2r - 12$
$4r - 24 - 12$
$\underline{8r - 48 - 24 - 12 = 0}$, *also*
$8r = 84$ *durch Addition, also (Red. 5)* [:8]
$\underline{1r = 10\frac{1}{2}}$
Probe: $10\frac{1}{2}$
$\underline{10\frac{1}{2}}$
$21 - 12$ *ist* 9
$\underline{+9}$
$18 - 12$ *ist* 6
$\underline{+6}$
$12 - 12$ *ist* 0."

Eine ähnliche Aufgabe wie diese zweite bringt auch Stifel in *Die Coss Christoffs Rudolffs* 1553 auf fol. 291r als Beispiel 165. Dort lautet der Text: „Einer hat etliche kreutzer. Der kompt in drey heuser nacheinander zu spilen. Gewint im ersten hauß so vil als er hinein bringt und verzeret da 5 kreutzer. Geht in das ander haus; gewint so vil als er hineyn bringt, verzeret da 4 kreutzer. Geht in das dritt hauß; gewint so viel als er hineyn bringt, verzeret da 3 kreutzer. Darnach zelet er seyn gelt, das er noch hat, findet dass er 11 kreutzer mehr hatt denn er erstlich hatte. Wie vil hat er erstlich gehabt? Facit 6 kreutzer." Die Aufgabe ist genauso aufgebaut wie bei Ursus, nur dass zum Schluss nicht 0 Kreuzer bleiben, sondern „11 kreutzer mehr" als zu Anfang.

„3.) Drei haben eine Summe Geldes. Es begehrt A von B die Hälfte, B von C ein Drittel, C von A ein Viertel seines Geldes, so dass jeder 100 Gulden hätte. Wieviel hat jeder?
Lösung: A=64, B=72, C=84 Gulden.
Probe: Des A=64 und die Hälfte von B oder 36 sind 100 Gulden. Des B=72 und ein Drittel von C oder 28 sind 100 Gulden. Des C=84 und ein Viertel von A oder 16[180] *sind 100 Gulden.*

A: $1r$ *Gulden*
B: $1A$
C: $\underline{1B}$
A: $1r + \frac{1}{2}A = 100$ *(Red. 4)* [·2]
$1A = 200 - 2r$
B: $(200 - 2r) + \frac{1}{3}B = 100$.
$\underline{1B = 6r - 300.}$
C: $(6r - 300) + \frac{1}{4}A = 100$
$6\frac{1}{4}r - 300 = 100$ *(Red. 4)* [·4]
$25r - 1200 = 400$ *(Red. 5)* [:25]
$1r - 48 = 16$ *(Red. 2 und 3)* [+48]
$\underline{1r = 64}$ *des A Geld. (per additionem)"*

An diesem Beispiel sieht man, dass die Variablenverwendung am Ende des 16. Jh. noch nicht perfekt war. Das Verständnis der Schreibweise und damit der Aufgabe wird dadurch erschwert, dass der Buchstabe A aus heutiger Algebrasicht in zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet wird, einmal als Name der ersten Person A, und das andere Mal als neue Variable für das Geld der Person B, wofür wir heute z.B. y verwendeten. Ebenso bedeutet B zuerst den Namen der zweiten Person B, und dann die neue Variable für das Geld der dritten Person, wofür wir etwa z wählten. Wir würden die Lösung der Aufgabe vielleicht wie folgt darstellen:

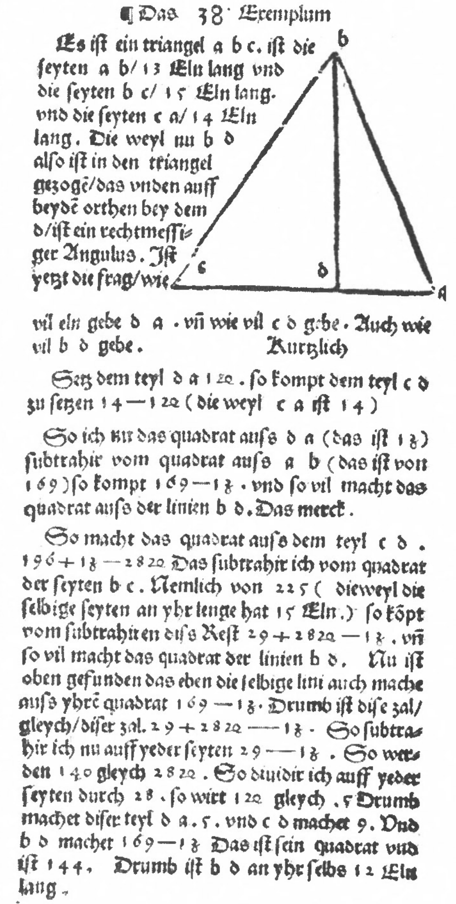
A hat x Gulden
B hat y Gulden
<u>C hat z Gulden</u>
A: $x + \frac{1}{2}y = 100 \Rightarrow y = 200 - 2x$
B: $(200 - 2x) + \frac{1}{3}z = 100 \Rightarrow z = 6x - 300$
C: $(6x - 300) + \frac{1}{4}x = 100 \Rightarrow 6\frac{1}{4}x - 300 = 100 \Rightarrow x = 64$ Gulden.

[180] Druckfehler 32 statt 16.

Auch diese dritte Aufgabe steht ähnlich, jedoch nicht gleich, bei Stifel, fol. 261r als Beispiel 123: „Drei haben ein haus kaufft für 100 fl. Begert der erst vom andern ½ seyns gelts, so hette er das haus alleyn zu bezalen. Der ander begert vom dritten ⅓ seynes gelts, dass er das haus alleyn könte bezalen. Der dritt begehrt vom ersten ¼ seyns gelts, dass er möchte das haus alleyn bezalen. Wie vil hat jeder gelt gehabt?" Stifel verwendet bei vielen Aufgaben die gleiche Bezeichnungsweise wie es Ursus hier tut, nämlich die Buchstaben A, B, C, ... als Namen für die Personen in der Aufgabe, und dann als Bezeichnungen für die neuen Variablen, die er während der Berechnung für die anderen Personen benötigt. Hier wird deutlich, dass Ursus aus dem Buch Stifels *Die Coß Christoffs Rudolffs* gelernt hat!

Auch Ursus' Aufgabe Nr. 4 auf die Radixcoss findet sich bei Stifel auf fol. 199v/200r als Beispiel Nr. 38. Sie wird mit Hilfe des Satzes von Pythagoras gelöst. Es heißt bei Stifel: „Es ist ein triangel abc. Ist die seyten ab 13 Eln lang und die seyten bc 15 Eln lang und die seyten ac 14 Eln lang. Dieweyl nu bd also ist in den triangel gezogen, das unden auff beyden orthen bey dem d ist ein rechtmessiger Angulus. Ist jetzt die frag, wie vil gebe da und wie vil cd gebe. Auch wie vil bd gebe." Stifel und Ursus verwenden beide kleine Buchstaben a,b,c,d zur Bezeichnung der Punkte.

„4.) Bei einem Dreieck ABC ist die Seite AB = 13, BC = 15, CA = 14 Ruten lang. Wie lang ist das Lot[181] *BD? Wie lang sind die Basisstücke AD und CD? Lösung: BD = 12, AD = 5, CD = 9 Ruten. Beweis durch die vorletzte Proposition des 1. und 3. Buches und durch die 6. und 12. Proposition des 11. Buches Euklids.*[183]


¶ Das 38. Exemplum

Es ist ein triangel a b c. ist die seyten a b/ 13 Eln lang vnd die seyten b c/ 15 Eln lang. vnd die seyten c a/ 14 Eln lang. Die weyl nu b d also ist in den triangel gezogē/das vnden auff beydē orthen bey dem d/ist ein rechtmessiger Angulus. Ist yetzt die frag/wie vil eln gebe d a. vñ wie vil c d gebe. Auch wie vil b d gebe. Kurtzlich

Setz dem teyl d a 1r. so kompt dem teyl c d zu setzen 14 — 1r (die weyl c a ist 14)

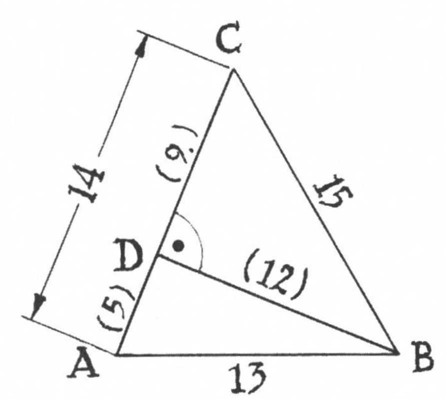
So ich nu das quadrat auß d a (das ist 1ʒ) subtrahir vom quadrat auß a b (das ist von 169) so kompt 169 — 1ʒ. vnd so vil macht das quadrat auß der linien b d. Das merck.

So macht das quadrat auß dem teyl c d. 196 + 1ʒ — 28r Das subtrahir ich vom quadrat der seyten b c. Nemlich von 225 (dieweyl die selbige seyten an yhr lenge hat 15 Eln.) so kōpt vom subtrahiren diß Rest 29 + 28r — 1ʒ. vñ so vil macht das quadrat der linien b d. Nu ist oben gefunden das eben die selbige lini auch mache auß yhrē quadrat 169 — 1ʒ. Drumb ist dise zal/ gleych/diser zal. 29 + 28r — 1ʒ. So subtrahir ich nu auff yeder seyten 29 — 1ʒ. So werden 140 gleych 28r. So diuidir ich auff yeder seyten durch 28. so wirt 1r gleych 5 Drumb machet diser teyl d a. 5. vnd c d machet 9. Vnd b d machet 169 — 1ʒ Das ist sein quadrat vnd ist 144. Drumb ist b d an yhr selbs 12 Eln lang.

Abb. 45: Stifels Beispiel 38 in *Rudolffs Coß* 1553, fol. 199v/200r.

AD: 1r. Quadriert 1ʒ. Von 169, dem Quadrat der Seite AB, subtrahiert, bleibt 169 – 1ʒ = Quadrat der Seite BD.
CD: 1r – 14.[182] *Quadrieren.*
1ʒ – 28r + 196 von 225 subtrahiert, das ist das Quadrat von BC, bleibt das Quadrat von BD, also 29 + 28 r – 1ʒ = BD^2.
Außerdem BD^2 = 169 – 1ʒ, also bleiben 28r = 140, also 1r = 5 = AD.
Damit wird CD = 9 durch Subtraktion, und BD = $\sqrt{(169 - 1ʒ)} = \sqrt{144}$ = 12.

Subtractio vero negata in talibus exemplis, exigit subtractionem Quadrati casus positi, a Quadrato cruris oppositi.[184]



Zur 4. Aufgabe zur Radixcoss.

[181] „die perpendicular linie bd".

[182] Es müsste eigentlich heißen: CD = 14 – 1r. Wegen des Quadrierens jedoch ohne Belang, wie Ursus im Schlusssatz sagt.

[183] Die vorletzte Proposition (§47) des 1. Buches ist der Satz des Pythagoras. Die vorletzte Proposition (§36) des 3. Buches ist der Sekantensatz AD · DC = DB^2.

[184] Im Schlusssatz zeigt Ursus, dass ihm bewusst ist, dass er beim Satz des Pythagoras mit den Vorzeichen mogelt: „Die weggelassene Subtraktion in solchen Beispielen erfordert eine Subtraktion eines ins Quadrat gesetzten Falles (Terms) vom Quadrat des gegenüberliegenden Schenkels."

Quadratische Gleichungen (Zensicoss) der I. Ordnung[185]

5.) Eine Fläche hat 147 Quadratruten,	*Breit:*	*1r*		
ist dreimal so lang wie breit.	*Lang:*	*3r*		
Wie lang und breit ist sie?	*Fläche:*	*3ʒ =*	*147, also per Red. 5*	[:3]
Lösung: Breit 7, lang 21 Ruten.		*1ʒ =*	*49, also per Red. 8*	[Wurzel]
Probe: 7 mal 21 ist 147.		*1r =*	*7 ist die Breite, also*	
			21 die Länge.	

6.) Die Summe der Quadrate dreier	*1r*	*1ʒ*		
Zahlen, deren Verhältnis jeweils 2	*2r*	*4ʒ*		
ist,[186] *ist 189.*	*4r*	*16ʒ*		
Welche Zahlen sind es?		*21ʒ = 189,*	*also per Red. 5*	[:21]
Lösung: 3, 6, 12.		*1ʒ = 9,*	*also per Red. 8*	[Wurzel]
Probe: 9 + 36 + 144 = 189.		*1r = 3*	*die erste Zahl."*	

Auch diese Aufgabe gibt es bei Stifel, fol. 352r als Beispiel 8. Der Text lautet dort: „Ich hab drey zalen in proportione dupla, multiplicir jede in sonderheyt in sich selbs, machen ihre quadrat zusamen 189."

„Einfache kubische Gleichungen (Cubicoss).

7.) Eine Mauer misst 486 Kubikellen,[187]	*Dick*	*1r*		
ist halb so breit wie lang und	*Breit*	*3r*		
dreimal so breit wie dick.	*Lang*	*6r*		
Wie dick, breit und lang ist sie?	*Volumen*	*18c = 486,*	*also per Red. 5*	[:18]
Lösung: dick 3, breit 9, lang 18.		*1c = 27,*	*also per Red. 8*	
Probe: 3 · 9 · 18 = 486.		*1r = 3 = Dicke, also*		
			Breite = 9, Länge = 18."	

Eine ähnliche Aufgabe, mit anderen Zahlen, findet sich als Beispiel 11 bei Stifel, fol. 369r. Dort lautet sie: „Es wird gemacht ein grub, ist 2 mal breyter denn tief und 2 mal lenger denn breyt, und die soliditas, die wir imaginiren, hat 144 gewurffelte eln. Wie vil eln hat jede dimensio?" Die bei Ursus nun folgenden Aufgaben habe ich bei Stifel nicht entdeckt.

„8.) Die Summe der Kuben dreier	*1r*	*1ʒ*	*1c*		
Zahlen, deren Verhältnis jeweils 3	*3r*	*9ʒ*	*27c*		
ist,[188] *ist 6056.*	*9r*	*81ʒ*	*729c*		
Welche Zahlen sind es?			*757 c = 6056,*	*also per Red. 5*	[:757]
Lösung: 2, 6, 18.			*1c = 8,*	*also per Red. 8*	
Probe: 8 + 216 + 5832 = 6056.			*1r = 2*	*die erste Zahl.*	

Einfache Gleichung 4. Grades (Zensizensicoss).

9.) Ein Teich oder ein Graben ist halb	*Tief*	1r		
so tief wie breit und zweieinhalb[189]	*Breit*	2r		
mal so lang wie breit. Das Ausheben	*Lang*	5r		
eines kubischen Klafters kostet halb	*Inhalt*	*10c*		
so viele Gulden als die Tiefe ausmacht.	*Aushub*	½r Gulden.		
Der Lohn für das Graben beläuft sich		*5ʒʒ = 1280,*	*also per Red. 5*	[:5]
in Summe auf 1280 Gulden.		*1ʒʒ = 256,*	*also per Red. 8*	[Wurzel]
Wie tief, lang und breit ist er?		*1ʒ = 16,*	*also per Red. 8*	[Wurzel]
Lösung: Tief 4, breit 8, lang 20		1r = 4	die Tiefe, also	
und Inhalt 640 Klafter.		*8*	*die Breite, also*	
Die Probe ist leicht nach der		*20*	*die Länge und*	
Aufgabe zu machen.		*640*	*der Inhalt.*	

185 Die Nummerierung der folgenden Aufgaben habe ich geändert. Ursus fängt hier wieder bei 1.) an, ich zähle die Aufgaben durchgehend.

186 „Drey zahlen in ratione dupla Quadratum zusammen, machen 189."

187 „gevierte ellen"

188 „in ratione tripla cubic addiret"

189 „dritthalb"

Beispiele II. Ordnung

Zusammengesetzte quadratische Gleichungen (Zensicoss), denn hier gibt es keine Radixcoss, wie aus der Tafel der Gleichungsordnungen hervorgeht.

10.) Eine Fläche hat 91 Quadratruten	*Breit*	*1r*	
und ist 6 Ruten länger als breit.	*Lang*	*1r + 6*	
Wie viele Ruten ist sie lang und breit?	*Fläche*	*1ʒ + 6r = 91, das ist per Red. 2*	[-6r]
Lösung: Lang 13 Ruten, breit 7 Ruten.		*1ʒ = 91 − 6r, also per Red. 10*	[J.J.]
Probe: 7 · 13 = 91 und		*1ʒ = 100, also per Red. 8*	[Wurzel]
13 ist 6 mehr als 7.		*1r = 10. Addiere 3, Länge 13,*	
		subtrahiere 3, Breite 7.	
Oder auch so:	*Lang*	*1r*	
	Breit	*1r - 6*	
	Fläche	*1ʒ − 6r = 91, das ist per Red. 2*	
		1ʒ = 91 + 6r, also per Red. 10	
		1ʒ = 100, also per Red. 8	
		1r = 10. Addiere 3, Länge 13,	
		subtrahiere 3, Breite 7.“	

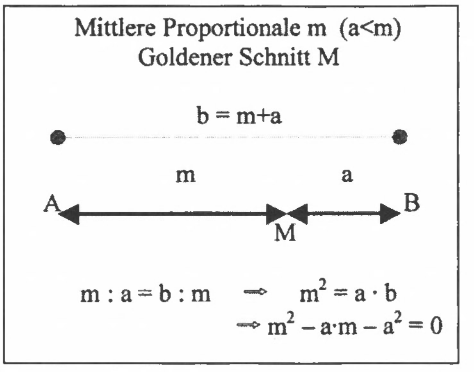
Bei der Lösung der quadratischen Gleichung wird das Prinzip der quadratischen Ergänzung verwendet. Aus $x^2 \pm 6x = 91$ wird $(x \pm 3)^2 = 100$, und damit $x \pm 3 = 10$. Man kann auch nach Johannes Junge folgendermaßen verfahren (siehe auch bei den folgenden Aufgaben):
Ein Teiler von 91 ist 7. +91:7 = +13; -6(r)+13 = +7; +7:7 = 1, r = 7 ist Lösung (1. Weg).
Ein Teiler von 91 ist 13. +91:13 = +7; +6(r)+7 = +13; +13:13 = 1, r = 13 ist Lösung (2. Weg).

„11.) Eine Fläche misst 91 Quadratruten.	*1r*	*die eine Dimension*
Ihre Länge und Breite zusammen	*20 - 1r*	*die andere Dimension*
machen 20 Ruten.	*Fläche*	*20r − 1ʒ = 91, also per Red. 2*
Wie viele Ruten ist ihre Länge und Breite?		*20r = 91 + 1ʒ, also durch dieselbe*
Lösung: Länge 13, Breite 7 Ruten.		*1ʒ =20r−91, also* 1r *gleich 13 oder 7.*
Probe: 13 + 7 = 20	*Oder nach der Regel des Geber: 10 (Hälfte von 20),*	
13 · 7 = 91.	*quadriert 100, -91 (wenn + addieren), Rest 9, deren*	
	Wurzel ist 3. Add. zu/subtr. von 10, macht 13 oder 7.“	

Was hier mit Regel des Geber bezeichnet wird, ist wieder das Verfahren der quadratischen Ergänzung, das auch bei den folgenden Aufgaben verwendet wird. Bei Aufgabe 11 wird aus $x^2 = 20x - 91$ zunächst $(x - 10)^2 = 100 - 91 = 9$, und damit $x = 10 \pm 3$. Ebenso wird bei der folgenden Aufgabe 12 aus $x^2 = 195 \mp 2x$ zunächst $(x \pm 1)^2 = 1 + 195 = 196$, damit ist die Lösung $x = 14 \pm 1$.

„12.) Die Summe der Quadrate	*1r.*	*1ʒ*	
zweier Zahlen, bei denen die eine	*1r + 2*	*1ʒ + 4r + 4*	
um 2 größer ist als die andere,	*Summe*	*2ʒ + 4r + 4 = 394,*	*also per Red. 1*
ist 394.		*2ʒ + 4r = 390,*	*also per Red. 5*
Welche Zahlen sind es?		*1ʒ + 2r = 195,*	*also per Red. 2*
Lösung: 13 und 15.		*1ʒ = 195 − 2r,*	*also per Red. 10*
Probe: 169 + 225 = 394.		*1ʒ = 196,*	*also per Red. 8*
		1r = 14. Addiere 1, die grössere 15,	
		subtrahiere 1, die kleinere 13.	
Oder auch so:	*1r.*	*1ʒ*	
	1r − 2	*1ʒ − 4r + 4*	
	Summe	*2ʒ − 4r + 4 = 394,*	*also per Red. 1*
		2ʒ − 4r = 390,	*also per Red. 5*
		1ʒ − 2r = 195,	*also per Red. 2*
		1ʒ = 195 + 2r,	*also per Red. 10*
		1ʒ = 196,	*also per Red. 8*
		1r = 14. Addiere 1, die grössere 15,	
		subtrahiere 1, die kleinere 13.	

13.) Teile eine Zahl in zwei ungleiche Zahlen, so dass sich der kleinere Teil zum größeren verhält wie der größere Teil zur ganzen zerteilten Zahl. Oder dass die Zahl des größeren Teils die mittlere Proportionale ist zwischen der ganzen zerteilten Zahl und der Zahl des kleineren Teils. Antwort: Es ist mit rationalen Zahlen[190] *nicht möglich zu tun. Versuchs, wer da Lust hat.*"



Hier spricht Ursus das Problem der „mittleren Proportionalen" m zweier Zahlen a, b ($a < b$) an, für die gilt:
$b : m = m : a$, also $a \cdot b = m^2$, d.h. $m = \sqrt{a \cdot b}$ ist das geometrische Mittel aus a und b. Dieses ist irrational, sofern $a \cdot b$ keine Quadratzahl ist. Hier gilt jedoch speziell $b=a+m$, woraus sich ergibt, dass $m^2 = a \cdot (a+m)$
$\Rightarrow m^2 - a \cdot m - a^2 = 0$, und somit $m = {}^a/_2 \pm {}^a/_2 \cdot \sqrt{5}$. Und das ist stets eine irrationale Zahl (sofern $a \neq 0$). Euklid löst das Problem $m^2 = a \cdot b$ geometrisch mit Hilfe des Höhensatzes $h^2 = p \cdot q$.[191] Auf das Problem des Goldenen Schnittes übertragen: Eine Strecke $b = AB$ soll durch den Punkt M in zwei Teile $m = AM$ und $a = MB$ geteilt werden, so dass $m : a = b : m$ ($a<m$).

„Zusammengesetzte kubische Gleichungen (Cubicoss).
14.) Eine Mauer hat 486 Kubik-Ellen, ist 9 Ellen länger als breit und 6 Ellen breiter als dick. Wie dick, breit und lang ist sie?
Lösung: dick 3, breit 9, lang 18.
Probe: 3 · 9 · 18 = 486.

Dick 1r
Breit 1r + 6
Lang 1r + 15
Inhalt 1c + 21ʒ + 90r = 486, per Red. 2
1c = 486 − 21ʒ − 90r, oder per dieselbe
1c = 486 − 90r − 21ʒ
durch 3 (162 (24
rest 72 rest 3 = die Dicke
also 9 = die Breite
und 18 = die Länge
Oder setz durchs Zeichen ÷ so: lang 1r
breit 1r − 9
dick 1r − 15."

ϑ = x^0	r = x^1	ʒ = x^2	c = x^3
486	-90	-21	1
:3	+162	+24	+1
+162	+72(:3)	+3(:3)	x=3

Die Lösung der kubischen Gleichung $x^3 = 486 - 90x - 21x^2$ geschieht hier nach dem oben beschriebenen Johannes-Junge-Verfahren. Ein Teiler der absoluten Zahl 486 ist 3, den man als Lösung vermutet. 486:3=+162, -90+162=+72; 72:3=24, -21+24=+3; 3:3=1, also ist x=3 Lösung.

„15.) Die Summe der Kuben zweier Zahlen, deren Differenz 2 ist, ergibt 468. Welche Zahlen sind es?
Lösung: 5 und 7.
Probe: 125 + 343 = 468.
Diese zwei Beispiele verhalten sich nach der Art des ersten und dritten Beispiels der zusammengesetzten Zensicoss [Nr. 10 und 12].
Dem zweiten Beispiel dort [Nr. 11] entspricht *aber hier keines, weil man hier die drei Körperdimensionen, die miteinander zu multiplizieren sind, nicht erkennen kann.*

1r 1c
1r +2 1c + 6ʒ + 12r + 8
Summe 2c + 6ʒ + 12r + 8 = 468, und per 1
2c + 6ʒ + 12r = 460, also per 5
1c + 3ʒ + 6r = 230, also per 2
1c = 230 − 6r − 3ʒ, also per 10
1c = 216, also per 8
1r = 6. Addiere 1, die grössere 7.
Subtrahiere 1, die kleinere 5.

ϑ = x^0	r = x^1	ʒ = x^2	c = x^3
230	-6	-3	1
:5	+46	+8	+1
+46	+40(:5)	+5(:5)	x=5

[190] „in (rational)zahlen".
[191] Buch VI, Prop. 13.

Zusammengesetzte Gleichung vierten Grades (Zensizensicoss).

16.) Einen Graben oder Teich auszuheben, kostet 1280 Gulden. Er ist 12 Klafter länger als breit, 4 Klafter breiter als tief, und die Tiefe ist 2 Klafter mehr als das Ausheben eines Kubikklafters kostet. Wie tief, breit, lang und groß ist der Graben und was kostet der Aushub eines Kubikklafters?
Lösung: Tief 4, breit 8, lang 20 Klafter, Volumen 640 Klafter; 2 Gulden kostet der Aushub eines Kubikklafters.
Probier es selbst laut der Aufgabe.
Oder setz bei Aushub/tief/breit/lang mit dem ÷ Zeichen an.

Aushub 1r Gulden
Tief 1r + 2
Breit 1r + 6
Lang 1r + 18
Mult. 1ʒʒ + 26c + 156ʒ + 216r = 1280, per 2
1ʒʒ = 1280 − 216r − 156ʒ − 26c
durch 2 (640 (212 (28
rest 424 rest 56 rest 2fl.
4 tief.
8 weit.
20 lang.
640 groß.

$x^4 = 1280 - 216x - 156x^2 - 26x^3$

𝔑 $=x^0$	r $= x^1$	ʒ $= x^2$	c $= x^3$	ʒʒ $= x^4$
1280	-216	-156	-26	1
:2	+640	+212	+28	+1
+640	+424(:2)	+56(:2)	+2(:2)	x=2

Aus diesen Beispielen, die deshalb mit besonderem Fleiß geordnet und gestellt wurden, zeigt sich, warum wir in diesem Schreiben die Zensizensicoss oder die körperliche Größe mitsamt ihrem zu suchenden Wert nicht überschritten haben,[192] *weil nämlich die nachfolgenden und größeren Quantitäten zu üblichem und menschlichem Gebrauch nicht gar so sehr nötig sind. Außerdem erheischen und erfordern sie auch eine besonders schwierige Ausziehung von Wurzeln, andere als in der Geometrie gebräuchliche Wurzeln wie Quadrat- und Kubikwurzeln.*

Beispiele III. Ordnung

Auf quadratische Gleichungen (Zensicoss) zu reduzieren.

17.) Drei haben etliche Gulden, der erste halb so viele wie der zweite, und der zweite halb so viele wie der dritte. Wenn ich jede Zahl ihrer Gulden zuerst quadriere, danach das erste Produkt mit dem zweiten multipliziere und das dritte Produkt dazu addiere, so ergibt sich 468. Wie viele Gulden hat jeder?
Lösung: Der erste 3, der zweite 6, der dritte 12 Gulden.
Probier es selbst nach der Aufgabe.

Der erste 1r 1ʒ [erstes Produkt]
Der zweite 2r 4ʒ [zweites Produkt]
Der dritte 4r 16ʒ [drittes Produkt]
4ʒʒ + 16ʒ = 468, Red. 9 [Substitution]
4ʒ + 16r = 468, Red. 2
4ʒ = 468 − 16r, Red. 5
1ʒ = 117 − 4r, Red. 10
Sit 1ʒ = 121, Red. 8
1r = 11
Ziehe 2 ab, Rest 9, wurzeln
3 Gulden des ersten
6 Gulden des zweiten
12 Gulden des dritten

$x^2 = 117 - 4x$

𝔑 $=x^0$	r $= x^1$	ʒ $= x^2$
117	-4	1
:9	+13	+1
+13	+9(:9)	x=9

Oder so, ohne Reduktion auf die Zensicoss:
4ʒʒ + 16ʒ = 468, also per Red. 2
4ʒʒ = 468 − 16ʒ, also per Red. 5
1ʒʒ = 117 − 4ʒ, also per Erfindung Junges
durch 9 (13
Rest 9, also wurzeln 3 = des ersten.

$x^4 = 117 - 4x^2$

𝔑 $=x^0$	ʒ $= x^2$	ʒʒ $= x^4$
117	-4	1
$:3^2$	+13	+1
+13	$+9(:3^2)$	x=3

[192] Gemeint sind die drei Dimensionen für das Volumen und eine vierte für den Preis einer Volumeneinheit.

Auf Gleichung vierten Grades (Zensizensicoss) zu reduzieren.

18.) Drei haben etliche Gulden, der erste halb so viele wie der zweite und der zweite halb so viele wie der dritte. Wenn ich jede Zahl ihrer Gulden zuerst quadriere und diese Quadrate wiederum quadriere, danach das erste Produkt mit dem zweiten multipliziere, endlich das dritte Produkt samt seiner Quadratwurzel dazu addiere, so erhalte ich 125 856. Wie viele Gulden hat jeder? Lösung: Der erste 3, der zweite 6, der dritte 12 Gulden. Probier es nach der Aufgabe, wie gegenwärtig gezeigt.

Erster	*1r*	*1ʒ*	*1ʒʒ*	[erstes Produkt]
Zweiter	*2r*	*4ʒ*	*16ʒʒ*	[zweites Produkt]
Dritter	*4r*	*16ʒ*	*256ʒʒ*	[drittes Produkt]

16ʒʒʒ + 256ʒʒ +16ʒ = 125 856, das ist
16ʒʒʒ = 125 658 – 16ʒ − 256ʒʒ, oder
1ʒʒʒ = 7866 – 1ʒ − 16ʒʒ
durch 9 (874 (97
Rest 873; rest 81

---

9 ist der Lösung Quadrat
die Wurzel 3 = des ersten Gulden
6 = des zweiten Gulden
12 = des dritten Gulden.

Probe:			
Erster	*3*	*9*	*81*
Zweiter	*6*	*36*	*1296*
Dritter	*12*	*144*	*20736*

1296 · 81 = 104 976
+ 20 736
+ 144
125 856"

$x^8 = 7866 - x^2 - 16x^4$

₰ $=x^0$	ʒ $= x^2$	ʒʒ $= x^4$	ʒʒʒ $= x^8$
7866	-1	-16	1
$:3^2$	+874	+97	+1
874	$+873(:3^2)$	$+81(:3^4)$	x=3

E n d e

2. Ein armer Gesell wandert/hat etzliche wenig heller/ kein/ schenckt jhm der Wirdt die zeche/sampt so viel hellern als er hat / gibt der Köchin zu trinckgelt 12 Heller: eben dasselbig geschicht auch also bey dem andern vnnd dritten wirdt: behalt endlich nichts/ wie viel heller hat er anfenglich gehabt: facit $10\frac{1}{2}$.

1 R.
2 R. ÷ 12.
4 R. ÷ 24 ÷ 12.
8 R. ÷ 48 ÷ 24 ÷ 12 gr. 0. ergò
8 R. gr. 48 + 24 + 12. per red. 1 ergò
8 R. gr. 84. per additionem, ergò
1 R. gr. $10\frac{1}{2}$. per 5 reductionem.

$10\frac{1}{2}$ Proba.
$10\frac{1}{2}$.

21 ÷ 12. ist 9
9
18 ÷ 12. ist 6
6
12 ÷ 12. ist 0.

Blatt E3v (Beispiel2 auf S. 107).

3 Drey haben eine Summ gelts: begeret A vom B $\frac{1}{2}$. B vom C $\frac{1}{3}$. C vom A $\frac{1}{4}$ seines gelds/auff das jeglicher hette 100 fl. wie viel hat jeglicher: facit A 64. B 72. C 84 fl. proba: des A 64 vnd des B $\frac{1}{2}$ oder 36 zusamē macht 100 fl. des B 72 vnd $\frac{1}{3}$ des C oder 28 mit einander thun 100 fl. des C 84 vnnd des A $\frac{1}{4}$ oder 32. sein 100 fl.
Est exemplum Regulæ Quantitatis, vt vocant.

A 1 R.
B 1 A.
C 1 B.
1 R. + $\frac{1}{2}$ A. gr. 100. ergò per 4. facit
1 A. 200 ÷ 2 R. darnach ex thesi
(200 ÷ 2 R. + $\frac{1}{3}$ B. gr. 100. ergo.
(1 B gilt 6 R. ÷ 300. hat also
A 1 R. (von welchem begert C $\frac{1}{4}$ zu dem seinigen gelt.
B 200 ÷ 2 R.
C 6 R. ÷ 300. ergò – $6\frac{1}{4}$ R. ÷ 300. gr. 100.
ergo per 4 reductionem 25 R. ÷ 1200. gr. 400
ergo per 5 reductionem 1 R. ÷ 48 gr. 16.
ergo per 2 & 3 reducti. 1 R. gr. 16 + 48.
ergo per additionem 1 R. gr. 64 des A gelt.

Blatt E4r (Beispiel 3 auf S. 107).

Reg. 3: Auff die Cubicos.

7. Eine Maur helt 486 gevierter ellen / ist halb so breit als lang/ vnd dreymahl so breit als dicke. Wie dicke/ breit / vnd lang ist sie: facit dicke 3. breit 9. lang 18 ellen. proba: 3 mal 9 mal 18. ist 486.

dicke 1 R.
breit 3 R.
lang 6 R.

groß 18 ce. gleich 486. ergo per red. 5.
11 ce. gleich 27. ergo per red. 2.
1 R. gleich 3 die dicke: ergo 9 die breite/ vnd 18 die lenge.

Blatt E4v (Beispiel 7 auf S. 109)

Reg 4. Auff die Zensiczensic

1. Ein Teich oder graben ist halb so tieff als weit / vnd drietthalb mall so lang als weit / kostet jegliche Cubischer klaffter auszufüren / halb so viel fl. als die Tieffe ist / thut die Summa des graben lohns 1280 fl. Wie tieff / lang vnnd gros ist er? facit tieff 4. weit 8. lang 20. vnd gros (oder sein inhalt) 640. klaffter. Die proba ist leicht aus der auffgab.

Tieff 1. R.
Weit 2 R.
lang 5 R.

gros 10 ce.
1 R. fl.

5 ßß gleich 1280. ergo per red. e.
1 ßß gleich 256. ergo per red. 3.
1 ß gleich 16. ergo per red. 8.
1 R. gleich 4. die Tieffe: ergo
8. die weite. ergo
20. die lenge: vnnd
640. die grösse.

BlattF1r (Beispiel 9 auf S. 109).

2. Ein graben oder Teich kostet aus zufuhren 1280 fl. Ist 12 klaffter lenger als weit / vnnd 4 klaffter weiter den Tieff / vnd ist die Tieffe vmb 2 klaffter mehr / als eine Cubische klaffter auszufüren kostet / wie Tieff / weit lang vnd gros ist der Graben: vnd was kostet eine Cubische klaffter auszuführen. Facit: Tieff 4. weit 8 lang 20. gevierter klaffter / gros 640 Cubischer klaffter / vnd kostet eine Cubische klaffter auszuführen 2 fl. probiers aus der auffgab.

Setz 1 R. fl. aus zu führen. ergo (ad form V tie.
weit 1 R. + 2.
breit 1 R. + 6.
lang 1 R. + 18.

Mul. ßß + 26 ce + 156 ß + 216 R gr. 1280.
(ergo per 2.
ßß gr. 1280 ÷ 216 R. ÷ 156 ß ÷ 26 ce
in 2 (640 (112. (28.

rest 424. rest 56. rest 2 fl.
in 2. in 2

oder setz durchs zeichen ÷ vñ procedir ad form. VII. x

Ergo 4. Tieff. 8. Weit. 20. Lang. 640 Gros

Blatt F2v (Beispiel 16 auf S. 112).

2. Auff die Zensiczensicos zu reducieren.

Drey haben etliche fl. der erste halb so viel als der ander / vnd der ander halb so viel als der dritte: Wan ich jede zahl jhrer fl. erstlich in sich / vnd die producta wieder umb in sich / darnach das erste product ins ander / multiplicier / endlich das dritte product sampt seiner radice Quadrata dazu addiere / so kompt 125856. Wie viel fl. hat jeglicher: Facit: Der Erste 3 Der Ander 6. Der Dritte 12 fl. Probiers nach der Auffgab / wie im gegenwart erzeignet.

1 R. ß ßß
2 R. 4 ß 16 ßß

4 R. 16 ß 256 ßß 16 ßßß + 256 ßß + 16 ß gr.
(125856.
id est 16 ßßß gr. 125856 ÷ 16 ß ÷ 256 ßß.
Vel: 1 ßßß gr. 7866 ÷ ß ÷ 16 ßß
in 9 (874. (97.
rest 873. rest 81. □.
in 9.

des theilers 9. □.
Welche radix ist des ersten 3 ⎫
ergo des andern 6. ⎬ fl.
vnd des dritten 12 ⎭

Proba. fl. in sich / aber in sich erst ins ander.

Des	Ersten/3.	9.	81.	1296
				81
	Andern/6.	36.	1296.	
				1296.
	Dritten/12	144	10368.	
				20736 } zusamen
				144 }
				125856.

Blatt F3v (Beispiel 18 auf S. 113)

Literaturverzeichnis

Barth, Friedrich / **Federle**, Reinhold / **Haller**, Rudolf; Algebra 9, München 1997.

Busard, H.L.L.; Lateinische Euklidübersetzungen und –bearbeitungen, in: Mathematische Probleme im Mittelalter, hrsg. von Menso Folkerts, Wiesbaden 1996, S. 139-157.

Cantor, Moritz; Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 1 Leipzig 1880; Bd. 2 Leipzig 1892, 2. Aufl.

Ceulen, Ludolph van; Van den Circkel, Delft 1596.

Collijn, Isak; Rester af Heinrich Rantzaus bibliotek på Breitenburg, in: Nordisk Tidskrift för Bok- och Biblioteksväsen, Bd. 26, Uppsala 1939, S. 125-153.

Consentius, Ernst; Von Druckkosten, Taxen und Privilegien, in: Forschungen zur Brandenburgischen und Preußischen Geschichte, Bd. 34, 1922, S. 175-221.

Dasypodius, Peter; Dictionarium Latinogermanicum, Straßburg 1536, Ndr. Hildesheim 1995.

Fabian, Bernhard (Hrsg.); Die Messkataloge Georg Willers, Hildesheim 1978.

Folkerts, Menso; Maß Zahl und Gewicht, 2. Aufl. Wiesbaden 2001.

ders.; Boethius' Geometrie II, Wiesbaden 1970.

ders.; Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Ḫwārizmī, München 1997.

ders.; Johannes Regiomontanus, in: Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit, Adam-Ries-Bund Nr. 7, Annaberg-Buchholz 1996, S. 19-28.

ders.; Zur Entwicklung der Algebra in Deutschland im 15. und 16. Jh., in: Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina, Halle 1992, Jahrbuch 1991, Reihe 3, Jahrgang 37, S. 203-209,.

Folkerts, Menso **/ Wussing**, Hans **u.a.**; 4000 Jahre Algebra, Berlin 2003.

Gärtner, Barbara; Johannes Widmanns Behende und hubsche Rechenung, Tübingen 2000.

Gebhardt, Rainer; Einblicke in die Coß von Adam Ries, Stuttgart 1994.

Gemma Frisius, Rainer; Arithmeticae practicae methodus facilis, Antwerpen 1540.

Gericke, Helmuth; Mathematik in Antike Orient und Abendland, 8. Aufl., Wiesbaden 2004.

Gesundheitsbrockhaus; 2. Aufl., Wiesbaden 1969.

Gietzelt, Martin; Geschichte Dithmarschens, Heide 2000.

Grimm, Jacob und Wilhelm; Deutsches Wörterbuch, Reprint Leipzig 1899.

Grimm, Jacob; Deutsche Mythologie, Berlin 1875-1878, Ndr. Wiesbaden 1968.

Grimm, Heinrich; Die Matrikel der Universität Frankfurt/Oder aus den Jahren 1506 bis 1648, in: Börsenblatt für den Deutschen Buchhandel, Frankf. Ausgabe, 16. Jg. 1960 S. 1076-1078.

ders.; Der Verlag und die Druckoffizin der Buchbinder Hansen und Friderichen Hartmann, in: Gutenberg-Jahrbuch Bd. 35, 1960, S. 237-254.

Günther, Siegmund; Peter und Philipp Apian, Prag 1882, Ndr. Osnabrück 1985.

Halcke, Paul; Sinnen-Confect, Hamburg 1719.

Heath, Thomas L.; The Works of Archimedes, in: Robert M. Hutchins (Hrsg.), Great Books of the Western World, Bd. 11: Euclid Archimedes Apollonius of Perga Nicomachus, Chicago 1952, S. 397-592.

Hergenhahn, Richard; Jacob Köbel 1460-1533, in: Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit, Adam-Ries-Bund Bd. 7, Annaberg-Buchholz 1996, S. 63-82.

Hube, Hans-Jürgen; Saxo Grammaticus Gesta Danorum, Wiesbaden 2004.

Jardine/Launert/Segonds/Mosley/Tybjerg; Tycho versus Ursus, in: Journal for the History of Astronomy, Cambridge, XXXVI 2005, S. 81-165.

Jöcher, Christian Gottlieb; Allgemeines Gelehrtenlexikon Bde. 1-4, 1750/51.

Junge, Johannes; Rechenbuch auff den Ziffern und Linien, Lübeck 1578.

Juschkewitsch, A.P.; Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Leipzig 1964.

Kaibel, Georg; Comicorum Graecorum Fragmenta, Berlin 1899.

Kästner, A.G.; Geschichte der Mathematik, Göttingen 1796, Ndr. Hildesheim 1970.

Katscher, Friedrich; Christoffer Dybvad und Ludolph van Ceulen, Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathem.-Naturwiss. Klasse, Denkschriften Bd. 116, 7. Abhandlung, Wien 1979.

ders.; Die kubischen Gleichungen bei Nicolo Tartaglia, Wien 2001.

Kaunzner, Wolfgang; Johannes Widmann, in: Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit, Adam-Ries-Bund Bd. 7, Annaberg-Buchholz 1996, S. 37-51.

ders.; Über einige Zusammenhänge zwischen lat. und deutschen mathem. Texten, in: Folkerts, Mathematische Probleme im Mittelalter, Wiesbaden 1996, S. 429-444.

ders.; Über das Eindringen algebraischer Kenntnisse nach Deutschland, in: Rechenpfennige, München 1968, 91-122.

ders.; Über eine frühe lateinische Bearbeitung der Algebra al-Khwārizmīs, in: Archive for History of Exact Sciences, Vol. 32, Nr 1, 1985, S. 1-16.

ders.; Über Johannes Widmann von Eger, München 1968, Forschungsinstitut des Deutschen Museums München, Reihe C 7.

ders.; Über Christoph Rudolff und seine Coss, Forschungsinstitut des Deutschen Museums München, 1970, Reihe A, Nr. 67.

Köbel, Jakob; Geometrei. Von künstlichem Feldmessen, Frankfurt a.M. 1570.

Launert, Dieter; Nicolaus Reimers (Raimarus Ursus), Günstling Rantzaus – Brahes Feind, Leben und Werk, München 1999.

Lindeberg, Peter; Hypotyposis arcium, Hamburg 1591.

List, Martha / **Bialas**, Volker; Die Coss von Jost Bürgi, in: Nova Kepleriana, Neue Folge, Heft 5, München 1973.

Lorenzen-Schmidt, Klaus-Joachim; Kleines Lexikon alter schleswig-holsteinischer Gewichte, Maße und Währungseinheiten, Neumünster 1990.

Mensing, Otto; Schleswig-Holsteinisches Wörterbuch, Neumünster 1927-35.

Michelsen, Andreas Ludwig Jakob; Urkundenbuch zur Geschichte des Landes Dithmarschen, Altona 1834, Ndr. Aalen 1969.

Neocorus; Chronik des Landes Dithmarschen, hrsg. von F.C.Dahlmann, Kiel 1827.

Posselt, M.; Die Bibliothek Heinrich Rantzaus, in: Zeitschrift der Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte, Bd. 11, Kiel 1881, S. 69-124.

Reich, Ulrich; Vom Pluszeichen zum Gleichheitszeichen, in: Mathematik im Fluss der Zeit, Algorismus 44, 2004, S. 71-83.

Roche, Estienne de la; Larismetique et Geometrie, Lyon 1538.

Röhrich, Lutz; Lexikon der sprichwörtlichen Redensarten, Freiburg 2004.

Sax, Peter; Dithmarsia, Werke zur Geschichte Nordfrieslands und Dithmarschens Bd. 5, hrsg. von Albert Panten nach der Handschrift 1640, St. Peter-Ording 1986.

Saxo Grammaticus: Siehe Hube.

Scriba, Peter / **Schreiber** Christoph J.; 5000 Jahre Geometrie, Berlin 2003.

Sezgin, Fuat; Geschichte des arabischen Schrifttums, Bd. V-VII, Leiden 1974-1979.

Stevin, Simon; De Thiende, Leyden 1585, hrsg. von Helmuth Gericke und Kurt Vogel, Frankfurt a.M. 1965.

Stifel, Michael; Die Coß Christoffs Rudolffs, Königsberg 1553.

ders.; Arithmetica Integra, Nürnberg 1544.

Thaer, Clemens (Hrsg.); Euklid Die Elemente, Oswalds Klassiker Bde. 1-5, Leipzig 1933-1937.

Treutlein, P.; Die Deutsche Coß, in: Zeitschrift für Mathematik und Physik, Suppl. zur hist.-lit. Abt., Jg. XXIV, Leipzig 1879, S. 1-124.

Tropfke, Johannes; Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1, 4. Auflage, Berlin 1980; Bde. 2-4, 3. Auflage, 1933-1940; Bd. 5, 2. Auflage, 1923.

Ursus, Nicolaus Reimers; Geodaesia Ranzoviana, Leipzig 1583.

ders.; De Astronomicis Hypothesibus, Prag 1597.

ders.; Arithmetica Analytica, Frankfurt/Oder 1601.

Vitruv, Marcus Pollio; De Architectura, Buch IX 9-12.

Waschinski, Emil / **Böttger**, Franz; Alte schleswig-holsteinische Maße und Gewichte, Neumünster 1952.

Widmann, Johannes; Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft, Leipzig 1489.

Wussing, Hans; Mathematik in der Antike, Leipzig 1962.

ders.; Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik, 2. Aufl. Berlin 1989.

Zedler, Johann Heinrich; Universallexikon, Leipzig/Halle 1732-1754.

Namens- und Sachregister